МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ

5
СЛУ–Я

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

ЭНЦИКЛОПЕДИИ СЛОВАРИ СПРАВОЧНИКИ

НАУЧНО-РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

А. М. ПРОХОРОВ (председатель), И. В. АБАШИДЗЕ, П. А. АЗИМОВ, А. П. АЛЕКСАНДРОВ, В. А. АМБАРЦУМЯН, М. С. АСИМОВ, С. Ф. АХРОМЕЕВ, Ю. Я. БАРАБАШ, Н. В. БАРАНОВ, А. Ф. БЕЛОВ, Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Ю. В. БРОМЛЕЙ, Л. П. ВАВИЛОВ, В. Х. ВАСИЛЕНКО, Л. М. ВОЛОДАРСКИЙ, В. В. ВОЛЬСКИЙ, Б. М. ВУЛ, М. С. ГИЛЯРОВ, В. П. ГЛУШКО, Д. Б. ГУЛИЕВ, А. А. ГУСЕВ (заместитель председателя), Н. А. ЕГОРОВА, В. П. ЕЛЮТИН, В. С. ЕМЕЛЬЯНОВ, Ю. А. ИЗРАЭЛЬ, А. А. ИМШЕНЕЦКИЙ, А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, М. И. КАБАЧНИК, Г. А. КАРАВАЕВ, К. К. КАРАКЕЕВ, Б. М. КЕДРОВ, Г. В. КЕЛДЫШ, В. А. КИРИЛЛИН, И. Л. КНУНЯНЦ, Е. А. КОЗЛОВСКИЙ, М. К. КОЗЫБАЕВ, Ф. В. КОНСТАНТИНОВ, В. А. КОТЕЛЬНИКОВ, В. Н. КУДРЯВЦЕВ, М. И. КУЗНЕЦОВ (заместитель председателя), В. Г. КУЛИКОВ, И. А. КУТУЗОВ, Г. И. МАРЧУК, Ю. Ю. МАТУЛИС, Г. И. НААН, И. С. НАЯШКОВ, В. Г. ПАНОВ (первый заместитель председателя), Б. Н. ПАСТУХОВ, Б. Е. ПАТОН, В. М. ПОЛЕВОЙ, М. А. ПРОКОФЬЕВ, Ю. В. ПРОХОРОВ, Н. Ф. РОСТОВЦЕВ, А. М. РУМЯНЦЕВ, Б. А. РЫБАКОВ, В. П. САМСОН, М. И. СЛАДКОВСКИЙ, В. И. СМИРНОВ, Г. В. СТЕПАНОВ, В. Н. СТОЛЕТОВ, Б. И. СТУКАЛИН, М. Л. ТЕРЕНТЬЕВ, И. М. ТЕРЕХОВ, С. А. ТОКАРЕВ, В. А. ТРАПЕЗНИКОВ, П. Н. ФЕДОСЕЕВ, М. Б. ХРАПЧЕНКО, Е. И. ЧАЗОВ, И. П. ШАМЯКИН, С. И. ЮТКЕВИЧ

МОСКВА 1985

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И. М. ВИНОГРАДОВ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. И АДЯН, П. С. АЛЕКСАНДРОВ, Н. С. БАХВАЛОВ, В. И. БИТЮЦКОВ (заместитель главного редактора), А. В. БИЦАДЗЕ, Л. Н. БОЛЬШЕВ, А. А. ГОНЧАР, Н. В. ЕФИМОВ, В. А. ИЛЬИН, А. А. КАРАЦУБА, Л. Д. КУДРЯВЦЕВ, Б. М. ЛЕВИТАН, К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ, Е. Ф. МИЩЕНКО, С. П. НОВИКОВ, Э. Г. ПОЗНЯК, Ю. В. ПРОХОРОВ (заместитель главного редактора), А. Г. СВЕШНИКОВ, А. Н. ТИХОНОВ, П. Л. УЛЬЯНОВ, А. И. ШИРШОВ, С. В. ЯБЛОНСКИЙ

5

Слу — Я

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

51(03)
М 34

НАД ТОМОМ РАБОТАЛИ:

Редакция математики издательства «Советская Энциклопедия» —
В. И. БИТЮЦКОВ (заведующий редакцией),
М. И. ВОЙЦЕХОВСКИЙ (старший научный редактор),
А. Б. ИВАНОВ (старший научный редактор),
О. А. ИВАНОВА (старший научный редактор),
С. А. РУКОВА (старший научный редактор),
Е. Г. СОБОЛЕВСКАЯ (научный редактор),
Л. Р. СЕМЕНОВА (младший редактор),
Л. В. СОКОЛОВА (младший редактор).

Сотрудники издательства:

Т. Н. ПАРФЕНОВА, Н. Г. РУДНИЦКАЯ (литературная редакция),
В. А. СТУЛОВ, З. С. ИЗМАЙЛОВА, М. М. ШИНКАРЕВА (библиография)
А. Ф. ДАЛЬКОВСКАЯ (транскрипция),
Н. А. ФЕДОРОВА (отдел комплектования),
З. А. СУХОВА (редакция иллюстраций),
Н. М. ГНАТЕНКО (редакция словника),
М. В. АКИМОВА, А. Ф. ПРОШКО (корректорская),
Г. В. СМИРНОВА (техническая редакция)

Обложка художника Р. И. МАЛАНИЧЕВА

М 34 **Математическая** энциклопедия: Гл. ред. И. М. Виноградов, т. 5. Слу — Я — М., «Советская Энциклопедия», 1984.—1248 стб., ил.

М $\frac{1702010000-002}{007(01)-85}$ **свод. пл. подписных изд. 1985** **51(03)**

ИБ № 118

Сдано в набор 28.09.83. Подписано в печать 13.09.84. Т-14179. Формат бумаги 84×108$^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенно-новая. Печать текста высокая с матриц, изготовленных в МПО «Первая Образцовая типография» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28. Объем издания 65,52 усл. печ. л., 109,47 уч.-изд. л. Усл. кр.-отт. 65,52. Тираж 147 300 экз. Заказ № 2314. Цена 1 экз. книги 7 руб. 60 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Советская энциклопедия». 109817. Москва, Ж-28, Покровский бульвар, 8.

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 2 «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 129301, Проспект Мира, 105. Заказ № 2098

© Издательство «Советская Энциклопедия», 1985

С

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА — одно из основных понятий теории вероятностей. Роль понятий С. в. и ее *математического ожидания* впервые ясно оценил П. Л. Чебышев (1867, см. [1]). Понимание того факта, что понятие С. в. есть частный случай общего понятия функции, пришло значительно позднее. Полное и свободное от всяких излишних ограничений изложение основ теории вероятностей на основе теории меры дано А. Н. Колмогоровым (1933, см. [2]); оно сделало совершенно очевидным, что С. в. есть ни что иное, как измеримая функция на каком-либо *вероятностном пространстве*. Это обстоятельство весьма важно учитывать даже при первоначальном изложении теории вероятностей. В учебной литературе эта точка зрения последовательно проведена впервые У. Феллером (см. предисловие к [3], где изложение строится на понятии пространства элементарных событий и подчеркивается, что лишь в этом случае представление о С. в. становится содержательным).

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Однозначную действительную функцию $X=X(\omega)$, определенную на Ω, наз. случайной величиной, если при любом действительном x множество $\{\omega : X(\omega)<x\}$ входит в класс $\mathcal{A}$. Пусть X — какая-либо С. в. и $\mathcal{A}_X$ — класс тех $C\subset\mathbb{R}^1$, для к-рых $\{\omega : X(\omega)\in C\}\in\mathcal{A}$; это будет σ-алгебра. Класс $\mathcal{B}_1$ всех борелевских подмножеств числовой прямой $\mathbb{R}_1$ во всяком случае содержится в $\mathcal{A}_X$. Меру P_X, определенную на $\mathcal{B}_1$ равенством $\mathsf{P}_X(B)=\mathsf{P}\{\omega : X(\omega)\in B\}$, $B\in\mathcal{B}_1$, наз. *распределением вероятностей* С. в. X. Эта мера однозначно определяется по *распределения функции* С. в. X, т. е. по функции

$$F_X(x)=\mathsf{P}_X\{-\infty, x\}=\mathsf{P}\{\omega : X(\omega)<x\}.$$

Значения вероятностей $\mathsf{P}\{\omega : X(\omega)\in C\}$, $C\in\mathcal{A}_X$ (т. е. значения меры, служащей продолжением распределения P_X на σ-алгебру $\mathcal{A}_X$) по функции распределения F_X однозначно, вообще говоря, не определяются (достаточным для такой однозначности является т. н. условие совершенности меры P, см. *Совершенная мера*, а также [4]). Указанное обстоятельство надо постоянно иметь в виду (напр., при доказательстве того, что распределение С. в. однозначно определяется по его *характеристической функции*).

Если С. в. X принимает конечное или счетное число попарно различных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ $p_n=\mathsf{P}\{\omega : X(\omega)=x_n\}$, то ее распределение вероятностей (называемое в этом случае дискретным) задается формулой

$$\mathsf{P}_X(A)=\sum_{x_n\in A} p_n.$$

Распределение С. в. X наз. непрерывным, если существует функция $p_X(x)$ (плотность вероятности) такая, что

$$\mathsf{P}_X(B)=\int_B p_X(x)\,dx$$

для всякого интервала B (или, что то же самое, для любого борелевского множества B). В обычной терминологии математич. анализа это означает абсолютную непрерывность P_X по отношению к мере Лебега на $\mathbb{R}^1$.

Ряд общих свойств распределения вероятностей С. в. достаточно полно описывается небольшим количеством числовых характеристик. При этом *медиана* и *квантили* имеют то преимущество, что они определены для любых распределений, хотя наиболее употребительны *математическое ожидание* $\mathsf{E}X$ и *дисперсия* $\mathsf{D}X$ С. в. X. См. также *Вероятностей теория*.

Комплексная С. в. X определяется парой действительных С. в. X_1 и X_2 по формуле

$$X(\omega)=X_1(\omega)+iX_2(\omega).$$

Упорядоченный набор $(X_1, \ldots, X_s)$ С. в. можно рассматривать как случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^s$.

Обобщением понятия С. в. на бесконечномерный случай служит понятие *случайного элемента*.

Следует отметить, что в нек-рых задачах математич. анализа и теории чисел целесообразно рассматривать участвующие в их формулировках функции как С. в., определенные на подходящих вероятностных пространствах (см., напр., [5]).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., О средних величинах, в кн.: Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947; [2] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [5] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, случайный процесс с дискретным временем, временной ряд,— случайная функция, заданная на множестве всех целых чисел $t=0, \pm1, \pm2, \ldots$ или целых положительных чисел $t=1, 2, \ldots$

А. М. Яглом.

СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ — функция произвольного аргумента t (заданная на множестве T его значений и принимающая числовые значения или, более общо, значения из какого-то векторного пространства) такая, что ее значения определяются с помощью нек-рого испытания и в зависимости от его исхода могут быть различными, причем для них существует определенное распределение вероятностей. В теории вероятностей основное внимание обычно уделяется числовым (т. е. скалярным) С. ф. $X(t)$; векторные же С. ф. $\boldsymbol{X}(t)$ можно рассматривать как совокупность скалярных функций $X_\alpha(t)$, где α пробегает конечное или счетное множество A номеров компонент вектора $\boldsymbol{X}$, т. е. как числовую С. ф., заданную на новом множестве $T_1=T\otimes A$ пар (t, α), $t\in T$, $\alpha\in A$.

Если множество T конечно, то С. ф. $X(t)$ на T представляет собой конечный набор случайных величин, к-рый можно считать одной многомерной (векторной) случайной величиной, характеризуемой многомерной функцией распределения. Из числа С. ф. с бесконечным T наиболее изучен частный случай, когда t принимает числовые (действительные) значения; в этом случае чаще всего t является временем, а С. ф. $X(t)$ наз. *случайным процессом* (если же время t пробегает лишь целочисленные значения, то также и *случайной последовательностью*, или временны́м рядом). Если значениями аргумента t являются точки нек-рого многомерного многообразия (напр., k-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^k$), то С. ф. $X(t)$ наз. *случайным полем*.

Распределение вероятностей значений С. ф. $X(t)$, определенной на бесконечном множестве T, можно

охарактеризовать совокупностью конечномерных распределений вероятностей для групп случайных величин $X(t_1)$, $X(t_2)$, . . ., $X(t_n)$, отвечающих всевозможным конечным подмножествам $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ элементов T, т. е. совокупностью соответствующих конечномерных функций распределения $F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих следующим условиям согласованности:

$$F_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+m}}(x_1, \ldots, x_n, \infty, \ldots, \infty) = F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n), \quad (1)$$

$$F_{t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n), \quad (2)$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — произвольная перестановка индексов $1, \ldots, n$. Такое задание распределения вероятностей С. ф. $X(t)$ достаточно во всех случаях, когда интересуются лишь событиями, зависящими от значений $X(t)$ на конечных множествах значений аргумента t. Однако такое задание С. ф. не позволяет определить вероятности свойств С. ф., зависящих от ее значений на непрерывном множестве значений t, типа вероятности непрерывности или дифференцируемости С. ф. или вероятности того, что С. ф. $X(t)$ на непрерывном множестве значений t будет удовлетворять неравенству $X(t)<a$ (см. *Сепарабельный процесс*).

Более общее задание С. ф. связано с ее описанием как совокупности случайных величин $X=X(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ (где Ω — непустое множество точек ω, $\mathcal{A}$ — выделенная σ-алгебра подмножеств Ω, а P — заданная на $\mathcal{A}$ вероятностная мера) и отвечающих всевозможным точкам t множества T. При таком подходе под С. ф. на множестве T следует понимать функцию $X(t, \omega)$ двух переменных $t\in T$ и $\omega\in\Omega$, являющуюся $\mathcal{A}$-измеримой функцией ω при каждом фиксированном значении t (т. е. при фиксированном t обращающуюся в случайную величину, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$). Фиксируя значение аргумента $\omega=\omega_0$ функции $X(t, \omega)$, получают числовую функцию $X(t, \omega_0)=x(t)$ на T, называемую р е а л и з а ц и е й (или в ы б о р о ч н о й ф у н к ц и е й, или, если t — это время, т р а е к т о р и е й) С. ф. $X(t)$; σ-алгебра $\mathcal{A}$ и мера P при этом индуцируют σ-алгебру подмножеств и определенную на ней вероятностную меру в функциональном пространстве $\mathbb{R}^T=\{x(t),\ t\in T\}$ реализацией $x(t)$, задание к-рой также можно считать эквивалентным заданию С. ф. Задание С. ф. как вероятностной меры, определенной на σ-алгебре подмножеств функционального пространства $\mathbb{R}^T$ всевозможных реализаций $x(t)$, можно рассматривать как частный случай общего задания С. ф. как функции двух переменных $X(t, \omega)$ (где ω принадлежит вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$), соответствующий условию, что $\Omega=\mathbb{R}^T$, т. е. что элементарные события (точки ω исходного вероятностного пространства) с самого начала отождествляются с реализациями $x(t)$ С. ф. $X(t)$; с другой стороны, можно также показать, что к такому заданию С. ф. с помощью указания вероятностной меры на $\mathbb{R}^T$ сводятся и все другие способы задания С. ф. $X(t)$. В частности, задание совокупности всевозможных конечномерных функций распределения $F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям согласованности (1) и (2), в силу фундаментальной теоремы Колмогорова о согласованных распределениях (см. *Вероятностное пространство*), определяет вероятностную меру на σ-алгебре подмножеств функционального пространства $\mathbb{R}^T=\{x(t),\ t\in T\}$, порожденной совокупностью цилиндрич. множеств вида $\{x(t) : [x(t_1), \ldots, x(t_n)]\in B^n\}$, где n — произвольное целое положительное число, а B^n — произвольное борелевское множество n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ векторов $[x(t_1), \ldots, x(t_n)]$.

Лит. см. при ст. *Случайный процесс*. *А. М. Яглом.*

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ — специального вида случайный процесс, к-рый можно интерпретировать как модель, описывающую перемещение частицы в нек-ром фазовом пространстве под воздействием какого-либо случайного механизма. Фазовым пространством обычно бывает d-мерное евклидово пространство или целочисленная решетка в нем. Случайные механизмы могут быть различными; чаще рассматривают С. б., порожденные суммированием независимых случайных величин или цепями Маркова. Точного общепринятого определения С. б. нет.

Траектории простейших С. б. в случае $d=1$ описываются начальным положением $S_0=0$ и последовательностью сумм

$$S_n=X_1+\ldots+X_n,\ n=1, 2, \ldots, \quad (1)$$

где X_i независимы и имеют распределение Бернулли

$$\mathsf{P}\{X=1\}=p,\ \mathsf{P}\{X_i=-1\}=q=1-p,\ p\in(0, 1).$$

Значение S_n можно интерпретировать как выигрыш одного из двух игроков после n партий в игре, в к-рой этот игрок в каждой из партий выигрывает один рубль с вероятностью p и проигрывает его с вероятностью $1-p$. Если игра ведется с помощью подбрасывания симметричной монеты, то следует положить $p=1/2$ (с и м м е т р и ч н о е б л у ж д а н и е, см. *Бернулли блуждание*). При допущении, что начальный капитал 1-го игрока равен b, а начальный капитал 2-го игрока равен a, игра закончится, когда блуждающая частица (с координатами S_1, S_2, . . .) впервые коснется одного из уровней a или $-b$. В этот момент один из игроков разорится. Эта классич. задача о разорении, в к-рой барьеры в точках a и $-b$ можно рассматривать как п о г л о щ а ю щ и е.

В приложениях, связанных с *массового обслуживания теорией*, частица вблизи барьеров a и $-b=0$ может вести себя иначе: напр., если $a=\infty$, $b=0$, то положение Z_{n+1} блуждающей частицы в момент $n+1$ в соответствии с (1) описывается соотношением

$$Z_{n+1}=\max(0,\ Z_n+X_{n+1}), \quad (2)$$

и барьер в точке 0 можно наз. з а д е р ж и в а ю щ и м. Существуют и другие возможности для поведения частицы вблизи барьеров.

Если $a=\infty$, то получают задачи для С. б. с о д н о й г р а н и ц е й. Если $a=b=\infty$, то получают н е о г р а н и ч е н н о е С. б. Изучение описанных С. б. происходит обычно с помощью аппарата дискретных цепей Маркова и, в частности, путем исследования соответствующих уравнений в конечных разностях. Пусть, напр., u_k есть вероятность разорения 1-го игрока в задаче о разорении, если его капитал равен k, $0\leqslant k\leqslant a+b$, а суммарный капитал обоих игроков фиксирован и равен $a+b$. Тогда из формулы полной вероятности (по первому скачку) следует, что u_k удовлетворяет уравнению

$$u_k=pu_{k+1}+qu_{k-1},\ 0<k<a+b,$$

и граничным условиям $u_a=0$, $u_{-b}=1$. Отсюда получают

$$u_a=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-\left(\frac{q}{p}\right)^{b}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-1} \quad \text{при } p\neq q;$$

$$u_a=\frac{a}{a+b} \quad \text{при } p=q=1/2.$$

Вторая из этих формул показывает, что даже «безобидная» игра (в к-рой оба игрока имеют одинаковые шансы) приводит к разорению с вероятностью, близкой к 1, если капитал 2-го игрока a велик по сравнению с b ($u_\infty=1$ при $b<\infty$).

Задача о разорении может быть исследована весьма полно. Ж. Лагранжем (J. Lagrange) было, напр., установлено (см. [1], т. 1), что вероятность $u_{a,n}$ разорения 1-го игрока на n-м шаге равна

$$u_{a,n}=(a+b)^{-1}2^n p^{\frac{n-a}{2}} q^{\frac{n+a}{2}} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{a+b-1} \cos^{n-1}\frac{\pi k}{a+b} \sin\frac{\pi k}{a+b} \sin\frac{\pi a k}{a+b}.$$

Среднее время m_a до разорения одного из игроков:

$$m_a=\frac{a}{q-p}-\frac{a+b}{q-p}\,\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}, \quad p\neq q;$$

$$m_a=ab, \quad p=q={}^1/_2.$$

Для С. б. с одной границей ($a=\infty$), описываемых соотношениями (2), существует при $p<q$ и $n\to\infty$ стационарное распределение Z_n, совпадающее с распределением случайной величины $S=\sup\limits_{k\geqslant 0} S_k$, при этом

$$\mathsf{P}\{S\geqslant k\}=\left(\frac{p}{q}\right)^k, \quad k=0,\ 1,\ \ldots\ . \tag{3}$$

Законы, описывающие неограниченное С. б., следуют из теорем о поведении последовательных сумм S_n, $n=1, 2, \ldots$ Один из этих законов утверждает, что для симметричного С. б. ($p={}^1/_2$) частица с вероятностью 1 попадет (притом бесконечное число раз) в любую фиксированную точку a. При $p<{}^1/_2$ блуждание с вероятностью 1 уходит влево, при этом случайная величина S (см. (3)) с вероятностью 1 конечна.

Для симметричного С. б. время K_n, проведенное частицей на положительной полуоси (число положительных членов в последовательности $S_1, \ldots, S_n$), будет с большей вероятностью ближе к 0 или n, чем к ${}^n/_2$. Это видно из т. н. *арксинуса закона*, в силу к-рого при больших n (см. [1], т. 1)

$$\mathsf{P}=\left\{\frac{K_n}{n}<x\right\}\approx\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}.$$

Отсюда следует, напр., что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{K_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4}\right\}=1-2\mathsf{P}\left\{\frac{K_n}{n}<\frac{1}{4}\right\}\approx 1-\frac{4}{\pi}\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$$

и что с вероятностью 0,2 частица проводит не менее 97,6% всего времени на одной стороне.

Существуют соотношения, связывающие С. б. при наличии границ с неограниченным С. б. Напр., если положить $Y(x)=\min\{k: S_k\leqslant x\}$, то (см. [2])

$$\mathsf{P}\{Y(x)=n\}=\frac{x}{n}\,\mathsf{P}\{S_n=x\}.$$

Положение S_n блуждающей частицы для неограниченного С. б. при больших n описывается *больших чисел законом* и *центральной предельной теоремой*.

Если величины скачков ± 1 заменить на $\pm\Delta$ при малом Δ и положить $p=\frac{1+\alpha\Delta}{2}$, то положение частицы Z_n после $n=t\Delta^{-2}$ скачков будет описывать приближенно (при $\Delta\to 0$) поведение в момент времени t процесса диффузии со сносом α, коэффициентом диффузии 1 и с соответствующим поведением на границах a и $-b$ (если таковые для С. б. Z_n заданы).

Существует много обобщений рассмотренных С. б. Простейшие С. б. в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d>1$, определяются следующим образом. Частица выходит из начала координат и перемещается за один шаг на расстояние 1 в одном из $2d$ направлений, параллельных осям координат. Таким образом, возможными положениями блуждающей частицы являются все точки R^d с целочисленными координатами. Чтобы задать С. б., надо определить $2d$ вероятностей, соответствующих различным переходам. Получают симметричное С. б., если каждая из этих вероятностей равна ${}^1/_{2d}$. В многомерном случае задачи с границами для С. б. значительно сложнее, т. к. при $d>1$ существенно усложняется форма границ. Для неограниченных С. б. справедлива следующая т е о р е м а П о й а (см. [1], т. 1). Для симметричного С. б. при $d\leqslant 2$ частица с вероятностью 1 рано или поздно вернется в свое начальное положение (один, а стало быть, и бесконечное число раз). При $d=3$ эта вероятность равна приближенно всего лишь 0,35 (при $d>3$ она еще меньше).

Другое возможное обобщение простейших С. б. состоит в том, чтобы рассматривать в (1) произвольно распределенные независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Основные качественные закономерности для неограниченных С. б. и для блужданий с границами при этом сохраняются. Напр., блуждающая частица с вероятностью 1 достигает одной из границ a или $-b$. Если $\mathsf{E}X_i\leqslant 0$, $a=\infty$, то граница $-b$ будет достигаться с вероятностью 1. Если ξ_i целочисленны, $\mathsf{E}X_i=0$, то частица с вероятностью 1 вернется в исходное положение. Для произвольно распределенных X_j с $\mathsf{E}X_i=0$ это утверждение сохранится лишь в случае, когда рассматривается возвращение не в точку, а в интервалы.

Решение задач, связанных с выходом С. б. за границы интервала $(-b, a)$, в общем случае оказывается значительно более трудным. В то же время эти задачи имеют многочисленные приложения в математич. статистике (последовательный анализ), в страховом деле, в теории массового обслуживания и др. При их исследовании определяющую роль играет совокупность функционалов от С. б. $\{S_n\}$, $n=0, 1, \ldots$, наз. г р а н и ч н ы м и. К ним относятся $S=\sup\limits_{k\geqslant 0} S_k$, время первого прохождения нулевого уровня (в положительном направлении) $Y_+=\min\{k: S_k>0\}$, время первого достижения нулевого уровня (в отрицательном направлении) $Y_-=\min\{k\geqslant 1: S_k>0\}$, величина первой положительной суммы $\chi_+=S_{Y_+}$, величина первой неотрицательной суммы $\chi_-=S_{Y_-}$ и др. Оказывается, что распределение скачка X_i связано с распределениями названных функционалов следующим т. н. факторизационным тождеством (см. [1], т. 1; [2], [3]). Пусть $\varphi(\lambda)=\mathsf{E}e^{i\lambda X_1}$ есть характеристич. функция X_1. Тогда при $|z|<1$, $\mathrm{Im}\lambda=0$:

$$1-z\varphi(\lambda)=\left[1-\mathsf{E}\left(e^{i\lambda\chi_+}z^{Y_+};\ Y_+<\infty\right)\right]\times$$
$$\times\left[1-\mathsf{E}\left(e^{i\lambda\chi_-}z^{\chi_-};\ Y_-<\infty\right)\right]. \tag{4}$$

Это тождество обнаруживает связь граничных задач для С. б. с граничными задачами теории функций комплексного переменного, т. к. компоненты факторизации в правой части (4) однозначно определяются компонентами канонич. факторизации функции $1-z\varphi(\lambda)$ на оси $\mathrm{Im}\lambda=0$, т. е. разложения этой функции в произведение $1-z\varphi(\lambda)=A_{z+}(\lambda)\,A_{z-}(\lambda)$, $\mathrm{Im}\,\lambda=0$, где $A_{z\pm}(\lambda)$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, не имеют там нулей и непрерывны, включая границу. В тождестве (4) при $z=1$ вместо первого множителя можно поставить также

$$\frac{1-\mathsf{P}\{Y_+<\infty\}}{1-\mathsf{E}e^{i\lambda S}}=1-\mathsf{E}\left(e^{i\lambda\chi_+};\ Y_+<\infty\right).$$

Тождество (4) — лишь одно из группы факторизационных тождеств, связывающих распределения различных граничных функционалов. К ним относится т о ж д е с т в о П о л л а ч е к а — С п и ц е р а

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\mathsf{E}e^{i\lambda\overline{S}_n}=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\,\mathsf{E}e^{i\lambda\max(0,\,S_n)}\right\},$$

где $\overline{S}_n=\max(0, S_1, \ldots, S_n)$. Факторизационные тождества представляют собой мощное средство изучения граничных задач для С. б. (см. [1], т. 2; [2], [3]).

В настоящее время граничные задачи для С. б. исследованы весьма полно, включая асимптотический их анализ (см. [1], т. 2; [4]—[6]).

Аналитически решение граничных задач приводит к интегрально-разностным уравнениям. Напр., вероятность $u_n(x, a, b)$ того, что частица, вышедшая из точки $x\in(-b, a)$, покинет за время n интервал $(-b, a)$, удовлетворяет уравнению (формула полной вероятности по первому скачку)

$$u_{n+1}(x, a, b)=\int_{-b-x}^{a-x} u_n(x+y, a, b)\,dF(y)+1-F(a-x)+F(-b-x),$$

где $F(x)=\mathsf{P}\{X_1<x\}$. Если перейти к производящим функциям $u(z, x, a, b)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n u_n(x, a, b)$, то получают обычные интегральные уравнения. Существует, по крайней мере, два подхода к исследованию асимптотич. свойств решений этих уравнений. Один из них основан на изучении аналитич. свойств двойного преобразования

$$U(z, \lambda, a, b)=\int e^{i\lambda x}u(z, x, a, b)\,dx$$

и последующего его обращения (см. [4] — [6]). Другой связан с привлечением методов Вишика и Люстерника решения уравнений с малым параметром (см. [6]). На втором пути обнаруживаются глубокие связи рассматриваемых задач с теорией потенциала.

Многое из сказанного выше переносится и на С. б. с зависимыми скачками, когда случайные величины S_n связаны в цепь Маркова, а также на многомерные С. б. в $\mathbb{R}^d$, $d>1$ (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [3] его же, Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] Королюк В. С., Боровских Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981; [5] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645—94; [6] Лотов В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, № 3, с. 475—85; № 4, с. 873—79; [7] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969.

А. А. Боровков.

СЛУЧАЙНОЕ КОДИРОВАНИЕ — один из методов кодирования (см. *Кодирование и декодирование*), при к-ром каждому возможному значению сообщения, вырабатываемому *источником сообщений*, ставится в соответствие случайно выбранное значение сигнала на входе *канала связи*. При этом на множестве значений сигналов на входе канала задается нек-рое распределение вероятностей. Часто предполагается, что каждый элемент кода (т. е. значение сигнала на входе, соответствующее данному значению сообщения) выбирается независимо от других и в соответствии с данным распределением вероятностей. Иногда С. к. определяют так, чтобы каждая реализация С. к. была групповым кодом.

Важность рассмотрения С. к. связана с тем обстоятельством, что осредненная по всем реализациям *ошибочного декодирования вероятность* дает относительно легко исследуемую оценку сверху для вероятности ошибочного декодирования оптимального кода.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243—332; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3—104; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

СЛУЧАЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ σ множества $X=\{1,2, \ldots, n\}$ в себя — случайная величина, принимающая значения из множества $\sum_n$ всех однозначных отображений множества X в себя. С. о. σ, для к-рых вероятность $\mathsf{P}\{\sigma=s\}>0$ только для взаимно однозначных отображений $s\in\sum_n$, наз. случайными подстановками степени n. Наиболее полно изучены С. о., для к-рых $\mathsf{P}\{\sigma=s\}=n^{-n}$ при всех $s\in\sum_n$. Реализация такого С. о. представляет собой результат простого случайного выбора из множества $\sum_n$.

Лит.: [1] Колчин В. Ф., Случайные отображения, М., 1984.

В. Ф. Колчин.

СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ, случайный процесс с многомерным временем, или с многомерным параметром,— случайная функция, заданная на множестве точек какого-то многомерного пространства. С. п. представляют собой важный тип *случайных функций*, часто встречающийся в различных приложениях. Примерами С. п., зависящих от трех пространственных координат x, y, z (а также и от времени t), могут служить, в частности, поля компонент скорости, давления и температуры турбулентного течения жидкости или газа (см. [1]); С. п., зависящим от двух координат x и y, будет высота z взволнованной морской поверхности или поверхности какой-либо шероховатой пластинки (см. [2]); при исследовании глобальных атмосферных процессов в масштабе всей Земли поля наземного давления и др. метеорологич. характеристик иногда рассматриваются как С. п. на сфере и т. д.

Теория С. п. общего вида фактически не отличается от общей теории случайных функций; более содержательные конкретные результаты удается получить лишь для ряда специальных классов С. п., обладающих дополнительными свойствами, облегчающими их изучение. Одним из таких классов является класс *случайных полей однородных*, заданных на однородном пространстве S с группой преобразований G и обладающих тем свойством, что распределения вероятностей значений поля на произвольной конечной группе точек пространства S или же среднее значение поля и вторые моменты его значений в парах точек не меняются при применении к аргументам поля какого-либо преобразования из группы G. Однородные С. п. на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, $k=1, 2, \ldots$, или на решетке $\mathbb{Z}^k$ точек $\mathbb{R}^k$ с целочисленными координатами, отвечающие выбору в качестве группы G совокупности всевозможных (или всех целочисленных) параллельных переносов, являются естественным обобщением *стационарных случайных процессов*, на к-рое просто переносится бо́льшая часть результатов, доказанных для таких процессов; большой интерес для приложений (в частности, для механики турбулентности, ср. [1]) представляют также т. н. однородные и изотропные поля на $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$, отвечающие выбору в качестве группы G совокупности всевозможных изометрич. преобразований соответствующего пространства. Важной особенностью однородных С. п. является существование *спектральных разложений* специального вида как самих таких полей, так и их корреляционных функций (см., напр., [3], [4]).

Другим привлекающим много внимания классом С. п. является класс марковских случайных полей, заданных в нек-рой области K пространства $\mathbb{R}^k$. Условие марковости С. п. $U(x)$, грубо говоря, означает, что для достаточно широкой совокупности открытых множеств Q, имеющих границу Γ, фиксация значений поля в ε-окрестности Γ^ε границы Γ при любом $\varepsilon>0$ делает семейства случайных величин $\{U(x), x\in Q\setminus\Gamma^\varepsilon\}$ и $\{U(x), x\in T\setminus\Gamma^\varepsilon\}$, где T — дополнение замыкания Q в K, взаимно независимыми (или, в случае марковости в широком смысле, взаимно некоррелированными; см., напр., [5]). Обобщением понятия марковского С. п. является понятие L-марковского С. п., для к-рого указанная выше независимость (или некоррелированность) имеет место лишь при замене границы Γ области Q специальным образом оп-

ределенной утолщенной границей $\Gamma+L$. Теория марковских С. п. и L-марковских полей имеет ряд важных применений в физич. теории квантовых полей и в статистич. физике (см. [6], [7]). Еще одним классом С. п., возникшим из задач статистич. физики, является класс гиббсовских случайных полей, распределения вероятностей к-рых могут быть выражены через *Гиббса распределение* (см. [7], [8]). Удобным способом задания гиббсовских С. п. оказалось их задание с помощью совокупности условных распределений вероятностей значений поля в конечной области, отвечающих фиксированным всем его значениям вне этой области. Следует отметить, что С. п. на гладком многообразии S часто удобно рассматривать как частный случай *случайного поля обобщенного*, для которого могут не существовать значения в одной заданной точке, но имеют смысл сглаженные значения $U(\varphi)$, представляющие собой случайные линейные функционалы, определенные на нек-ром пространстве D гладких основных функций $\varphi(x)$. Обобщенные С. п. (особенно обобщенные марковские С. п.) используются в физич. приложениях; рассматривая лишь функции $\varphi(x)$ такие, что

$$\int \varphi(x)\,dx = 0,$$

в рамках теории обобщенных С. п. можно определить также родственные *случайным процессам со стационарными приращениями* локально однородные (и локально однородные и локально изотропные) С. п., играющие важную роль в статистич. теории турбулентности (см., напр., [1], [9]).

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1965—67; [2] Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А., Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход), М., 1975; [3] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [4] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [5] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [6] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [7] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [8] Многокомпонентные случайные системы, М., 1978; [9] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

А. М. Яглом.

СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ ОБОБЩЕННОЕ, обобщенный случайный процесс,— случайная функция на гладком многообразии G, типичными реализациями к-рой являются обобщенные функции, заданные на этом многообразии G. Точнее, пусть G — бесконечногладкое многообразие и $D(G)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, определенных на G, с обычной топологией равномерной сходимости последовательностей равномерно финитных функций и всех их производных. Тогда на G определено С. п. о., если задано непрерывное линейное отображение

$$D(G) \longrightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu),\ \varphi \longrightarrow f_\varphi,\ \varphi \in D(G),$$

пространства $D(G)$ в пространство $L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ случайных величин, определенных на нек-ром вероятностном пространстве Ω с выделенной σ-алгеброй его подмножеств $\mathfrak{B}$ и вероятностной мерой μ, определенной на $\mathfrak{B}$; $L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ снабжено топологией сходимости по мере [7]. В случае когда вероятностным пространством является пространство $D'(G)$ обобщенных функций на G с σ-алгеброй $\mathfrak{B}_0$, порожденной цилиндрич. множествами в $D'(G)$, а отображение задается формулами

$$f_\varphi(T) = (T, \varphi),\ T \in D'(G),\ \varphi \in D(G),$$

С. п. о. $\{f_\varphi, \varphi \in D'(G)\}$ наз. каноническим. Оказывается, что любое С. п. о. на конечномерном многообразии G вероятностно изоморфно нек-рому (единственному) канонич. случайному полю на G (см. [2]).

Приведенное здесь определение допускает ряд естественных модификаций: напр., можно рассмотреть С. п. о. с векторными значениями или вместо пространства $D(G)$ использовать в определении какое-нибудь более обширное пространство основных функций на G (скажем, в случае $G=\mathbb{R}^n$, $n=1, 2, 3$, пространства $S(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными, быстрее любой отрицательной степени $|x|^k$, $k=-1, -2, -3, \ldots$, $x \in \mathbb{R}^n$).

Понятие С. п. о. включает в себя классич. случайные поля и процессы, реализациями к-рых являются обычные функции. Это понятие возникло в сер. 50-х гг. 20 в., когда обнаружилось, что многие естественные стохостич. образования не могут быть достаточно просто выражены в терминах классических случайных полей, а на языке С. п. о. имеют простое и изящное описание. Так, напр., любая положительно определенная билинейная форма на $D(\mathbb{R}^n)$, $n=1, 2, \ldots$,

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} W(x_1, x_2)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n)$, где $W(x_1, x_2)$ — положительно определенная симметрическая обобщенная функция двух переменных, однозначно определяет гауссовское С. п. о. $\{f_\varphi, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$ на $\mathbb{R}^n$ (с нулевым средним) так, что ковариация этого поля

$$\int f_{\varphi_1} f_{\varphi_2}\,d\mu = (\varphi_1, \varphi_2)$$

(μ — соответствующая этому полю вероятностная мера в $D'(\mathbb{R}^n)$). Это С. п. о. оказывается классическим лишь при достаточно хорошей функции $W(x_1, x_2)$ (напр., непрерывной и ограниченной). Другие примеры: С. п. о. на $\mathbb{R}^n$ с независимыми значениями (см. [2]) или т. н. автомодельные случайные поля на $\mathbb{R}^n$ (см. [6]), среди к-рых вообще нет классич. полей.

Интерес к исследованию С. п. о. (особенное марковских случайных полей) возрос в последнее время из-за обнаруженной в нач. 70-х гг. связи между задачей построения квантового физич. поля и построением марковских С. п. о. на $\mathbb{R}^n$ при $n>1$ (см. [5]).

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853—56; [4] Kiyosi Itô, «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1954, v. 28. № 3, p. 209—23; [5] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [6] Добрушин Р. Л., в сб.: Многокомпонентные случайные системы, М.— Л., 1978, с. 179—213; [7] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67—122.

Р. А. Минлос.

СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ ОДНОРОДНОЕ — случайное поле $X(s)$, заданное на *однородном пространстве* $S=\{s\}$ точек s, снабженном транзитивной группой $G=\{g\}$ преобразований, переводящих пространство S в себя, и обладающее тем свойством, что определенные статистич. характеристики значений этого поля не меняются при применении к аргументам s произвольного преобразования группы G. Различают два разных класса С. п. о.: поле $X(s)$ наз. С. п. о. в узком смысле, если при любых $n=1, 2, \ldots$ и $g \in G$ конечномерное распределение вероятностей значений поля в произвольных n точках $s_1, \ldots, s_n$ совпадает с распределением вероятностей значений того же поля в точках $gs_1, \ldots, gs_n$; если же $\mathsf{E}|X(s)|^2 < \infty$ и $\mathsf{E}X(s) = \mathsf{E}X(gs)$, $\mathsf{E}X(s)\overline{\mathsf{E}X(s_1)} = \mathsf{E}X(gs)\overline{X(gs)}$ при всех $s \in S$, $s_1 \in S$ и $g \in G$, то $X(s)$ наз. С. п. о. в широком смысле.

Важный частный случай — С. п. о. на евклидовом k-мерном пространстве $\mathbb{R}^k$ (или на решетке $\mathbb{Z}^k$ точек $\mathbb{R}^k$ с целочисленными координатами), отвечающее выбору группы всевозможных параллельных переносов в качестве группы G; иногда под С. п. о. вообще пони-

мают лишь поле этого последнего типа. С. п. о. на $\mathbb{R}^k$, отвечающее группе G всевозможных изометрич. преобразований $\mathbb{R}^k$ (порожденных параллельными переносами, вращениями и симметриями), часто наз. однородным и изотропным случайным полем.

Понятие С. п. о. представляет собой естественное обобщение понятия *стационарного случайного процесса*; как и в случае стационарного процесса и само С. п. о., и его ковариационная функция допускают *спектральное разложение* специального вида (см., напр., [1] — [3]). С. п. о. и нек-рые их обобщения часто возникают в различных прикладных вопросах. В частности, в статистич. теории турбулентности важную роль играют как однородные и изотропные случайные поля на $\mathbb{R}^k$ (скалярные и векторные), так и т. н. локально однородные и локально изотропные случайные поля (иначе — поля с однородными и изотропными приращениями), представляющие собой простое обобщение однородных и изотропных полей (см., напр., [4]), а в современной теории физических квантовых полей и в статистич. физике применяется теория обобщенных С. п. о., также включающих С. п. о. в качестве частного случая (см. *Случайное поле обобщенное*).

Лит.: [1] Yaglom A. M., в кн.: Proc. 4-th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., v. 2, Berk.—Los Ang., 1961, p. 593—622; [2] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [3] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [4] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967.

А. М. Яглом.

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ — любая комбинация исходов нек-рого опыта, имеющая определенную вероятность наступления.

Пример 1. При бросании двух игральных костей каждый из 36 исходов опыта может быть представлен парой (i, j), где i — число очков на верхней грани первой кости, а j — на верхней грани второй. Событие «сумма выпавших очков равна 11» есть ни что иное, как комбинация двух исходов: (5, 6) и (6, 5).

Пример 2. При бросании наудачу двух точек на отрезок [0, 1] совокупность всех исходов опыта можно представить точками (x, y) (x — координата первой точки, y — второй) квадрата $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Событие «длина отрезка, соединяющего x и y меньше α, $0<\alpha<1$» есть ни что иное, как множество исходов — точек квадрата, отстоящих от диагонали, проходящей через начало координат, на расстоянии, меньшем $\alpha/\sqrt{2}$.

В рамках общепринятой аксиоматики теории вероятностей (см. [1]), где в основе вероятностной модели лежит *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ (Ω — пространство элементарных событий, т. е. совокупность всех исходов данного опыта, $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра подмножеств Ω и P — вероятностная мера, определенная на классе $\mathcal{A}$), случайные события — это множества, входящие в класс $\mathcal{A}$.

В первом из приведенных выше примеров пространство Ω — это конечное множество, состоящее из 36 элементов — пар (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 6$, $\mathcal{A}$ — класс всех 2^{36} подмножеств Ω (включая само Ω и пустое множество ϕ) и для каждого $A \in \mathcal{A}$ вероятность $\mathsf{P}(A)$ равна $m/36$, где m — число элементов A. Во втором примере Ω есть множество точек единичного квадрата, $\mathcal{A}$ — класс его борелевских подмножеств, P — обычная мера Лебега на $\mathcal{A}$ (совпадающая для простых фигур с их площадью).

Класс $\mathcal{A}$ событий, связанных с вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, является по отношению к операциям $A+B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (симметрич. разность) и $A \cdot B = A \cap B$ *булевым кольцом* с единицей Ω, т. е. *булевой алгеброй*. Определенная на этой булевой алгебре функция $P(A)$ обладает всеми свойствами нормы, кроме одного: равенство $P(A)=0$ не влечет $A=\phi$. Объявляя события эквивалентными, если P-мера их симметрич. разности равна нулю, и рассматривая вместо событий A классы эквивалентности $\tilde{A}$, приходят к нормированной булевой алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$ классов $\tilde{A}$. На этом замечании основан другой возможный подход к аксиоматике теории вероятностей, при к-ром исходным является не вероятностное пространство, связанное с данным опытом, а нормированная булева алгебра С. с. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947, М.— Л., 1948; [3] Колмогоров А. Н., Algèbres de Bool métriques complètes, в кн.: VI Zjazd Mathematyków Polskich, Kraków, 1950; [4] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНЫЕ И ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА — числа ξ_n (или цифры α_n), последовательность появления к-рых обладает теми или иными статистич. закономерностями (см. *Вероятностей теория*). Различают случайные числа (с. ч.), генерируемые каким-либо стохастич. устройством, и псевдослучайные числа (п. ч.), конструируемые с помощью арифметич. алгоритмов. При этом обычно (с бо́льшим или меньшим основанием) принимают, что полученная (или построенная) последовательность обладает комплексом частотных свойств, «типичным» для последовательности независимых реализаций какой-либо случайной величины ζ с функцией распределения $F(z)$, и говорят о (независимых) с. ч., распределенных по закону $F(z)$. Наиболее употребительны равномерно распределенные на отрезке [0,1] с. ч. ξ_n (р. р. с. ч.), $\mathsf{P}\{\xi_n<x\}=x$, а также равновероятные двоичные случайные знаки α_n (р. д. с. з.), $\mathsf{P}\{\alpha_n=0\}=\mathsf{P}\{\alpha_n=1\}=1/2$, и нормальные с. ч. η_n (н. р. с. ч.), распределенные по нормальному закону со средним 0 и дисперсией 1. С. ч. с произвольной функцией распределения $F(z)$ могут быть построены по последовательности р. р. с. ч. ξ_n как $\zeta_n=F^{-1}(\xi_n)$, т. е. найдены из уравнения $\xi_n=F(\zeta_n)$, $n=1, 2, \ldots$. Существуют и др. приемы построения; так, н. р. с. ч. аналитически проще получать из р. р. с. ч. парами:

$$\zeta_{2n-1}=\cos 2\pi\xi_{2n-1}\sqrt{-2\ln\xi_{2n}},$$

$$\zeta_{2n}=\sin 2\pi\xi_{2n-1}\sqrt{-2\ln\xi_{2n}}.$$

Разряды двоичной записи р. р. с. ч. являются р. д. с. з.; наоборот, группируя р. д. с. з. в последовательность бесконечных последовательностей, получают р. р. с. ч.

С. и п. ч. используются на практике в *игр теории*, *математической статистике*, *статистических испытаний методе* и криптографии для конкретной реализации недетерминированных алгоритмов и поведения, предсказуемого лишь «в среднем». Напр., если очередное $\alpha_n=0$, то игрок выбирает первую стратегию, а если $\alpha_n=1$, то — вторую.

Придать строгий математич. смысл понятию с. ч. удается только в рамках алгоритмич. теории вероятностей А. Н. Колмогорова [2] — П. Мартин-Лёфа [5]. Пусть $H=\times_{n=1}^{\infty}\{x_n : 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$ — единичный счетномерный гиперкуб с лебеговой мерой λ на нем. В H существует наибольшее конструктивно описываемое измеримое множество G нулевой меры. Тогда любую последовательность $\{x_n\} \notin G$ можно считать типичной и принять за последовательность р. р. с. ч. Аналогично может быть введено понятие конструктивной (ε, l)-типичности N-последовательности двоичных знаков a_j, $j=1, \ldots, N$, относительно системы всех событий $B \subset \{0; 1\}^N$ меры не более ε и длины описания не более l. Как видно из определения, типичная последовательность р. р. с. ч. сама не может быть конструктивной, и даже построение (ε, l)-типичной последовательности

случайных знаков требует чрезвычайно большого перебора. Поэтому на практике используют более просто устроенные алгоритмы, проверяя их статистич. «качества» небольшим количеством тестов. Так, конструируя р. р. с. ч., обязательно тестируют равномерную распределенность последовательности (см. [3]). В простых задачах выполнение нескольких тестов уже может гарантировать применимость последовательности. Иногда более эффективно использование коррелированных с. ч., как правило, их строят по последовательности р. р. с. ч.

Созданы также таблицы с. ч. и случайных знаков. Однако, по-видимому, нельзя гарантировать, что они удовлетворяют всем разумным статистич. тестам на некоррелированность.

Лит.: [1] Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [2] Kolmogorov A. N., «Sankhya», ser. A., 1963, v. 25, p. 369—76; [3] Коробов Н. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 3, с. 215—38; [4] Кнут Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 2, М., 1977; [5] Martin-Löf P., IEEE Transaction, IT, 1968, v. 14, p. 662—64; [6] Ченцов Н. Н., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, № 3, с. 632—43; [7] Шень А., «Семиотика и информатика», 1982, в. 18, с. 14—42.

Н. Н. Ченцов.

СЛУЧАЙНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ — вероятностная схема, в к-рой n частиц случайно размещаются в N ячейках. В наиболее простой схеме равновероятных размещений каждая из n частиц независимо от других частиц может попасть в любую фиксированную ячейку с вероятностью $1/N$. Пусть $\mu_r=\mu_r(n,\ N)$ — число ячеек, в к-рых после такого размещения оказалось ровно r частиц и пусть $0\leqslant r_1<r_2<\ldots<r_s$. Производящая функция

$$\Phi(z;\ x_1,\ \ldots,\ x_s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1,\ \ldots,\ k_S=0}^{\infty}\frac{N^n n^n}{n!}\times$$
$$\times\mathsf{P}\{\mu_{r_1}=k_1,\ \ldots,\ \mu_{r_S}=k_s\}\,x_1^{k_1}\ldots x_s^{k_s}$$

имеет следующий вид:

$$\Phi(z;\ x_1,\ \ldots,\ x_s)=$$
$$=\left[e^z+\frac{z^{r_1}}{r_1}(x_1-1)+\ldots+\frac{z^{r_s}}{r_s!}(x_s-1)\right]^N. \qquad (1)$$

Производящая функция (1) позволяет вычислять моменты μ_r и изучать асимптотич. свойства распределений μ_r при $n,\ N\to\infty$. Эти асимптотич. свойства в значительной степени определяются поведением параметра $\alpha=n/N$ — среднего числа частиц на одну ячейку. Если $n,\ N\to\infty$ и $\alpha=o(N)$, то при фиксированных r и t

$$\mathsf{E}\mu_r\sim Np_r(\alpha),\ \mathrm{Cov}(\mu_r,\ \mu_t)\sim N\sigma_{rt}(\alpha), \qquad (2)$$

где $p_r(\alpha)=\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}$,

$$\sigma_{rt}(\alpha)=p_r(\alpha)\left[\delta_{rt}-p_t(\alpha)-p_t(\alpha)\frac{(\alpha-r)(\alpha-t)}{\alpha}\right],$$

δ_{rt} — символ Кронекера. Можно выделить пять различных типов областей, в к-рых асимптотич. поведение μ_r различны.

Центральной областью наз. такая область изменения $n,\ N\to\infty$, для к-рой $\alpha=n/N\asymp 1$. Область $n,\ N\to\infty$, в к-рой

$$\alpha\to\infty,\ \mathsf{E}\mu_r\to\lambda,\ 0<\lambda<\infty,$$

наз. правой r-областью. Правой промежуточной областью наз. область изменения $n,\ N\to\infty$, в к-рой

$$\alpha\to\infty,\ \mathsf{E}\mu_r\to\infty.$$

Для $r\geqslant 2$ левой r-областью наз. область изменений $n,\ N\to\infty$, для к-рой

$$\alpha\to 0,\ \mathsf{E}\mu_r\to\lambda,\ 0<\lambda<\infty.$$

Левой промежуточной r-областью наз. область, в к-рой

$$\alpha\to 0,\ \mathsf{E}\mu_r\to\infty.$$

Левые и левые промежуточные r-области для $r=0,1$ считают совпадающими с соответствующими 2-областями.

В равновероятной схеме размещения в правой r-области μ_r имеет асимптотически пуассоновское распределение. В левой r-области μ_r имеет при $r\geqslant 2$ также в пределе пуассоновское распределение; при $r=0$ и $r=1$ предельные пуассоновские распределения имеют μ_0-N+n и $(n-\mu_1)/2$. В левых и правых промежуточных r-областях μ_r имеют асимптотически нормальное распределение. В центральной области доказана многомерная нормальная теорема для $\mu_{r_1},\ \mu_{r_2},\ \ldots,\ \mu_{r_s}$; параметры предельного нормального распределения определяются асимптотич. формулами (2) (см. [1]).

Размещение, в к-ром n частиц независимо друг от друга распределяются по N ячейкам и вероятность каждой из частиц попасть в j-ю ячейку равна $a_j,\ \sum_{i=1}^{N}a_i=1$, наз. полиномиальным. Для полиномиального размещения также можно ввести центральную, правые и левые области изменений n, N и a_l, для к-рых доказаны предельные нормальные и пуассоновские теоремы (см. [1], [3]). Пользуясь этими теоремами, можно рассчитать мощность *пустых ящиков критерия*. Пусть имеются независимые случайные величины $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_2$, каждая из к-рых имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$ (гипотеза H_0). Конкурирующая гипотеза H_1 соответствует другой функции распределения $F_1(x)$. Точки $z_0=-\infty<z_1<z_2<\ldots z_{N-1}<z_N=\infty$ выбирают так, чтобы $F(z_k)-F(z_{k-1})=1/N,\ k=1,\ \ldots,\ N$. Критерий пустых ящиков строится на основе статистики μ_0, равной числу полуинтервалов $(z_{k-1}z_k]$, в к-рые не попало ни одного значения ξ_i. Критерий пустых ящиков определяется критич. множеством $\mu_0>C$, при к-ром гипотеза H_0 отвергается. Поскольку μ_0 имеет при основной гипотезе H_0 распределение, определяемое равномерным размещением, а при конкурирующей гипотезе H_1 — распределение, определяемое полиномиальным размещением, то можно воспользоваться предельными теоремами для μ_0 при расчете мощности $\mathsf{P}\{\mu_0>C/H_1\}$ этого критерия (см. [2]).

В схеме размещения частиц комплектами предполагается, что частицы размещаются в N ячейках комплектами по m частиц, причем частицы одного комплекта могут располагаться в ячейках только по одной, а расположения комплектов независимы. Если все C_N^m расположения комплектов равновероятны, а число комплектов $n\to\infty$, то при ограниченных или слабо растущих m сохраняются свойства асимптотич. нормальности и предельной пуассоновости случайных величин μ_r.

Возможны различные обобщения схем размещения (см. [1]), связанные с целым рядом комбинаторных задач теории вероятностей (случайные подстановки, отображения, деревья и т. п.).

Лит.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976; [2] Севастьянов Б. А., «Труды ин-та прикладной математики Тбилисского ун-та», 1969, т. 2; с. 229—33; [3] Михайлов В. Г., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1981, т. 157, с. 138—152.

Б. А. Севастьянов.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС, стохастический процесс, вероятностный процесс, случайная функция времени,— процесс (т. е. изменение во времени состояния нек-рой системы), течение к-рого зависит от случая и для к-рого определена вероятность того или иного его течения. Типичным примером С. п. может служить *броуновского движения процесс*. Другими практически важными

примерами С. п. являются: процесс протекания тока в электрич. цепи, сопровождающийся неупорядоченными флуктуациями силы тока и напряжения (шумами); распространение радиоволн при наличии случайных замираний радиосигналов (федингов), создаваемых метеорологическими или иными помехами, и турбулентные течения жидкости или газа. К числу С. п. могут быть причислены и многие производственные процессы, сопровождающиеся случайными флуктуациями, а также процессы, встречающиеся в геофизике (напр., вариации земного магнитного поля, морское волнение, или микросейсмы,— высокочастотные беспорядочные колебания уровня земной поверхности), биофизике (напр., изменения биоэлектрич. потенциалов мозга, регистрируемые на электроэнцефалограмме) и экономике.

Математич. теория С. п. рассматривает мгновенное состояние системы, о к-рой идет речь, как точку нек-рого фазового пространства (пространства состояний) R; при этом С. п. представляется функцией $X(t)$ времени t со значениями из R. Обычно считается, что R — векторное пространство, причем наиболее изученным (и в то же время наиболее важным с точки зрения приложений) является еще более узкий случай, когда точки R задаются одним или несколькими числовыми параметрами (обобщенными координатами системы), т. е. С. п. можно рассматривать или просто как числовую функцию времени $X(t)$, в зависимости от случая принимающую различные значения, т. е. допускающую различные реализации $x(t)$ (о д н о м е р н ы й С. п.), или как подобную же векторную функцию $\boldsymbol{X}(t)=\{X_1(t), \ldots, X_k(t)\}$ (м н о г о м е р н ы й, или в е к т о р н ы й, С. п.). Изучение многомерных С. п. можно свести к изучению одномерных С. п. с помощью перехода от $\boldsymbol{X}(t)$ к вспомогательному процессу

$$X_{\boldsymbol{a}}(t)=(\boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{k} a_j X_j(t),$$

где $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_k)$ — произвольный k-мерный вектор; поэтому центральное место в теории С. п. занимает исследование одномерных процессов $X(t)$. Параметр t обычно принимает произвольные действительные значения или же значения из какого-то интервала действительной оси $\mathbb{R}^1$ (когда хотят подчеркнуть это обстоятельство, то говорят о С. п. с н е п р е р ы в н ы м в р е м е н е м), но он может пробегать и только целочисленные значения — тогда t наз. С. п. с д и с к р е т н ы м в р е м е н е м (или с л у ч а й н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю, или в р е м е н н ы́ м р я д о м).

Задание распределения вероятностей в бесконечномерном пространстве всевозможных вариантов протекания С. п. $X(t)$ (т. е. в пространстве реализаций $x(t)$) не укладывается в рамки классич. методов теории вероятностей и требует привлечения специального математич. аппарата. Исключением являются лишь частные классы С. п., вероятностный характер к-рых полностью определяется зависимостью функции $X(t)=X(t;\ \boldsymbol{Y})$ от нек-рого конечномерного случайного вектора $\boldsymbol{Y}=(Y_1, \ldots, Y_k)$, т. к. в данном случае вероятность того или иного протекания $X(t)$ зависит только от конечномерного распределения вероятностей вектора $\boldsymbol{Y}$. Практически важным примером С. п. такого рода может служить случайное гармонич. колебание вида

$$X(t)=A\cos(\omega t+\Phi),$$

где ω — фиксированное число, A и Φ — независимые случайные величины, часто используемое при исследовании амплитудно-фазовой модуляции в радиотехнике.

Широкий класс распределений вероятностей для С. п. может быть охарактеризован бесконечной совокупностью согласованных друг с другом конечномерных распределений вероятностей случайных векторов $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$, отвечающих всевозможным конечным подмножествам $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ значений аргумента t (см. *Случайная функция*). Однако задание всех этих распределений все же недостаточно для определения вероятностей событий, зависящих от значений $X(t)$ на бесконечном множестве значений t, т. е. не определяет однозначно С. п. $X(t)$.

П р и м е р. Пусть $X(t)=\cos(\omega t+\Phi)$, $0\leqslant t\leqslant 1$,— гармонич. колебание со случайной фазой Φ, Z — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, а С. п. $X_1(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, задается равенствами

$$X_1(t)=X(t) \text{ при } t\neq Z, \quad X_1(t)=X(t)+3 \text{ при } t=Z.$$

Так как $\mathsf{P}\{Z=t_1 \text{ или } Z=t_2, \ldots, \text{или } Z=t_n\}=0$ для любой фиксированной конечной группы точек $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, то все конечномерные распределения С. п. $X(t)$ и $X_1(t)$ являются одинаковыми. В то же время процессы $X(t)$ и $X_1(t)$ различаются между собой: в частности, все реализации процесса $X(t)$ непрерывны (имеют форму синусоиды), в то время как все реализации $X_1(t)$ имеют точку разрыва; все реализации $X(t)$ не превосходят числа 1, но ни одна реализация $X_1(t)$ этим свойством не обладает. Отсюда следует, что заданной системе конечномерных распределений вероятностей могут отвечать различные модификации С. п. и по одним только конечномерным распределениям нельзя вычислить ни вероятность того, что реализация С. п. будет непрерывной, ни того, что она будет ограничена нек-рой фиксированной постоянной.

Задание совокупности конечномерных распределений вероятностей часто позволяет, однако, выяснить, существует ли хоть один С. п. $X(t)$, имеющий эти конечномерные распределения, и такой, что его реализации являются непрерывными (или, напр., дифференцируемыми, или нигде не превосходящими заданной постоянной B) функциями с вероятностью 1, или же таких С. п. $X(t)$ вообще не существует. Типичным примером общего условия, гарантирующего существование С. п. $X(t)$ с непрерывными с вероятностью 1 реализациями, имеющего заданные конечномерные распределения, является у с л о в и е К о л м о г о р о в а: если конечномерные распределения вероятностей С. п. $X(t)$, определенного на интервале $[a, b]$, таковы, что при нек-рых $\alpha>0$, $b>0$ и $C<\infty$ для всех достаточно малых h выполняется неравенство

$$\mathsf{E}\,|X(t+h)-X(t)|^{\alpha}<C\,|h|^{1+\delta} \qquad (1)$$

(очевидно, накладывающее ограничения лишь на двумерные распределения $X(t)$), то С. п. $X(t)$ имеет модификацию с непрерывными с вероятностью 1 реализациями (см., напр., [1] — [6]). В частном случае гауссовского процесса $X(t)$ условие (1) может быть заменено более слабым условием:

$$\mathsf{E}\,|X(t+h)-X(t)|^{\alpha_1}<C_1\,|h|^{\delta_1} \qquad (2)$$

для нек-рых $\alpha_1>0$, $\delta_1>0$, $C_1>0$; при $\alpha_1=2$, $\delta_1=1$ условие (2) выполняется, напр., для *винеровского процесса* и *Орнштейна — Уленбека процесса*. В случаях когда при заданных конечномерных распределениях вероятностей существует модификация С. п. $X(t)$ такая, что ее реализации непрерывны (или, напр., дифференцируемы, или ограничены постоянной B) с вероятностью 1, все другие модификации этого же процесса обычно можно исключить из рассмотрения, потребовав, чтобы С. п. $X(t)$ удовлетворял нек-рому очень общему условию регулярности, к-рое в прикладных задачах практически всегда можно считать выполняющимся (см. *Сепарабельный процесс*).

Вместо того чтобы задавать бесконечную совокупность конечномерных распределений вероятностей С. п.

$X(t)$, можно также определить С. п., указав значение соответствующего *характеристического функционала*

$$\psi[l]=\mathsf{E}\exp\{il[X(t)]\}, \tag{3}$$

где $l[X(t)]$ пробегает достаточно широкий класс линейных функционалов, зависящих от $X(t)$. Если $X(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$,— непрерывный по вероятности С. п. (т. е. $\mathsf{P}\{|X(t+h)-X(t)|>\varepsilon\}\to 0$ при $h\to 0$ для любого $\varepsilon>0$), а $g(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то

$$\int_a^b X(t)\,dg(t)=l^{(g)}[X(t)]$$

будет случайной величиной; при этом можно считать, что $l[X]=l^{(g)}[X]$ в формуле (3) (причем $\psi[l^{(g)}]$ здесь удобно обозначить символом $\psi[g]$). Во многих случаях можно также еще сузить класс рассматриваемых линейных функционалов $l[X]$, ограничившись лишь функционалами вида

$$\int_a^b X(t)\varphi(t)\,dt=l_\varphi[X],$$

где $\varphi(t)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция t (интервал $[a, b]$ при этом может быть и бесконечным). Значения $\psi[l_\varphi]=\psi[\varphi]$ при широких условиях регулярности однозначно определяют все конечномерные распределения вероятностей С. п. $X(t)$, так как

$$\psi[\varphi]\longrightarrow\psi_{t_1,\ldots,t_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n),$$

где $\psi_{t_1,\ldots,t_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ — характеристич. функция случайного вектора $\{X(t_1),\ldots,X(t_n)\}$, при

$$\varphi(t)\longrightarrow\theta_1\delta(t-t_1)+\ldots+\theta_n\delta(t-t_n)$$

(здесь $\delta(t)$ есть δ-функция Дирака, а сходимость понимается в смысле сходимости обобщенных функций). Если же при таком предельном переходе функционал $\psi[\varphi]$ не стремится к конечному пределу, то это означает, что для С. п. X не существует конечных значений в фиксированной точке, а имеют смысл лишь сглаженные значения $l_\varphi[X]$, т. е. что характеристич. функционал $\psi[\varphi]$ задает не обыкновенный («классический») С. п. $X(t)$, а *случайный процесс обобщенный* $X=X(\varphi)$.

Задание совокупности конечномерных распределений вероятностей С. п. $X(t)$ упрощается в тех случаях, когда все они однозначно определяются распределениями лишь немногих низших порядков. Важнейшим классом С. п., для к-рых все многомерные распределения могут быть определены по значениям одномерных распределений случайных величин $X(t)$, являются последовательности независимых случайных величин (представляющие собой специальные С. п. с дискретным временем). Такие весьма частные С. п. могут изучаться в рамках классич. теории вероятностей, но существенно, что нек-рые важные классы С. п. могут быть эффективно заданы в виде функции от последовательности $Y(t)$, $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$, независимых случайных величин. Так, напр., значительный интерес представляют С. п.

$$X(t)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jY(t-j)$$

или

$$X(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jY(t-j),\quad t=0,\ \pm1,\ \ldots,$$

(см. *Скользящего среднего процесс*) и

$$X(t)=\sum_{j=1}^{\infty}Y_jh_j(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

где $h_j(t)$, $j=1, 2, \ldots$,— заданная система функций на интервале $[a, b]$ (см. *Спектральное разложение* случайной функции).

Весьма важны следующие три класса С. п., все конечномерные распределения к-рых определяются одномерными распределениями значений $X(t)$ и двумерными распределениями пар $\{X(t_1), X(t_2)\}$.

1) Класс *случайных процессов с независимыми приращениями* $X(t)$, для к-рых $X(t_2)-X(t_1)$ и $X(t_4)-X(t_3)$ при $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$ являются независимыми величинами. Здесь для задания С. п. $X(t)$ на интервале $[a, b]$ удобно использовать функции распределения $F_a(x)$ и $\Phi_{t_1,t_2}(z)$, где $a\leqslant t_1<t_2\leqslant b$, случайных величин $X(a)$ и $X(t_2)-X(t_1)$, причем функция $\Phi_{t_1,t_2}(z)$, очевидно, должна удовлетворять функциональному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{t_1,t_2}(z-u)\,d\Phi_{t_2,t_3}(u)=\Phi_{t_1,t_3}(z), \tag{4}$$
$$a\leqslant t_1<t_2<t_3\leqslant b.$$

Используя (4), можно показать, что если С. п. $X(t)$ непрерывен по вероятности, то его характеристич. функционал $\psi[g]$ может быть представлен в виде

$$\psi[g]=\exp\left\{i\int_a^b\gamma(t)\,dg(t)-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\beta(t)[g(b)-g(t)]\,dg(t)+$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b\left[e^{iy[g(b)-g(t)]}-1-\frac{iy[g(b)-g(t)]}{1+y^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1+y^2}{y^2}d_t\Pi_t(dy)\right\},$$

где $\gamma(t)$ — непрерывная функция, $\beta(t)$ — неубывающая непрерывная функция и $\Pi_t(dy)$ — возрастающая непрерывная по t мера, определяющие процесс с независимыми приращениями $X(t)$.

2) Класс *марковских процессов* $X(t)$, для к-рых в случае, когда $t_1<t_2$, условное распределение вероятностей $X(t_2)$ при условии, что заданы все значения $X(t)$ при $t\leqslant t_1$, зависит только от $X(t_1)$. Для задания марковского процесса $X(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, удобно использовать функцию распределения $F_a(x)$ значений $X(a)$ и переходную функцию $\Phi_{t_1,t_2}(x, z)$, где $t_1<t_2$, равную условной вероятности того, что $X(t_2)<z$ при условии, что $X(t_1)=x$. Функция $\Phi_{t_1,t_2}(x, z)$ должна удовлетворять родственному (4) функциональному *Колмогорова — Чепмена уравнению*, позволяющему при определенных условиях получить для нее более простые прямое и обратное *Колмогорова уравнения* и в ряде случаев дающему возможность определить эту функцию.

3) Класс *гауссовских процессов* $X(t)$, для к-рых все многомерные распределения вероятностей векторов $\{X(t_1),\ldots, X(t_n)\}$ являются гауссовскими (нормальными) распределениями. Так как нормальное распределение однозначно определяется своими первым и вторым моментами, то для задания гауссовского процесса $X(t)$ достаточно указать значения функций

$$\mathsf{E}X(t)=m(t)$$

и

$$\mathsf{E}X(t)X(s)=B(t, s),$$

где $B(t, s)$ должно быть неотрицательно определенным ядром таким, что и

$$b(t, s)=B(t, s)-m(t)m(s)$$

также является неотрицательно определенным ядром. Характеристич. функционал $\psi[g]$ гауссовского процесса $X(t)$ имеет вид

$$\psi[g]=\exp\left\{i\int_a^b m(t)\,dg(t)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b b(t, s)\,dg(t)\,dg(s)\right\}.$$

4) Еще одним важным классом С. п. является класс *стационарных случайных процессов* $X(t)$, статистич.

характеристики к-рых не меняются с течением времени, т. е. инвариантны относительно преобразования $X(t) \to X(t+a)$, где a — произвольное фиксированное число. Многомерные распределения вероятностей общего стационарного С. п. $X(t)$ не могут быть просто описаны, но для многих задач, касающихся таких процессов, достаточно знать лишь значения первых двух моментов $\mathsf{E}X(t)=m$ и $\mathsf{E}X(t)X(t+s)=B(s)$ (так что здесь оказывается нужным лишь предположение о стационарности в широком смысле, т. е. о том, что от t не зависят моменты $\mathsf{E}X(t)$ и $\mathsf{E}X(t)X(t+s)$). Существенно, что любой стационарный (или хотя бы стационарный в широком смысле) С. п. допускает спектральное разложение вида

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,dZ(\lambda), \qquad (5)$$

где $Z(\lambda)$ — случайный процесс с некоррелированными приращениями; отсюда, в частности, следует, что

$$B(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,dF(\lambda), \qquad (6)$$

где $F(\lambda)$ — монотонно неубывающая *спектральная функция* С. п. $X(t)$. Спектральные разложения (5) и (6) лежат в основе решения задач о наилучшей (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) линейной экстраполяции, интерполяции и фильтрации стационарных случайных процессов.

Математич. теория С. п. включает также большое число результатов, относящихся к ряду подклассов или, наоборот, обобщений перечисленных выше классов С. п. (в частности, к *Маркова цепям*, *диффузионным процессам*, *ветвящимся процессам*, *мартингалам*, *случайным процессам со стационарными приращениями* нек-рого порядка и др.).

Лит.: [1] Слуцкий Е. Е., Избр. труды, М., 1960, с. 269—80; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [4] их же, Теория случайных процессов, т. 1—3, М., 1971—75; [5] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [6] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975; [7] Розанов Ю. А., Случайные процессы, 2 изд., М., 1979; [8] Ито К., Вероятностные процессы, пер. с япон., в. 1—2, М., 1960—63; [9] Скороход А. В., Случайные процесссы с независимыми приращениями, М., 1964; [10] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963, [11] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [12] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

А. М. Яглом.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ — случайный процесс $X(t)$ такой, что существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=X'(t),$$

называемый производной случайного процесса $X(t)$; в зависимости от того, в каком смысле понимается этот предел, различают дифференцирование с вероятностью 1 и дифференцирование в среднем квадратичном. Условия дифференцируемости в среднем квадратичном естественно выражаются в терминах корреляционной функции

$$B(t_1, t_2)=\mathsf{E}X(t_1)\,X(t_2),$$

а именно $X'(t)$ существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$B''(t_1, t_2)=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}}\frac{B(t_1+\Delta t_1, t_2+\Delta t_2)-B(t_1-\Delta t_1, t_2)-B(t_1, t_2+\Delta t_2)+B(t_1, t_2)}{\Delta t_1\,\Delta t_2}.$$

Случайный процесс, имеющий среднеквадратичную производную, является абсолютно непрерывным, точнее, при каждом t с вероятностью 1

$$X(t)=X(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} X'(s)\,ds, \quad t\geqslant t_0.$$

Достаточным условием того, чтобы существовал эквивалентный данному процесс с непрерывно дифференцируемыми траекториями, может служить условие непрерывности его среднеквадратичной производной $X'(t)$, имеющей своей корреляционной функцией $B''(t_1,t_2)$. Для гауссовских процессов это условие является также необходимым.

Лит.: Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

Ю. А. Розанов.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ОБНОВЛЯЮЩИЙ — случайный процесс с достаточно «простой» структурой, построенный по исходному процессу и содержащий всю требуемую информацию об этом процессе. С. п. о. использовались в задаче линейного прогноза стационарных случайных последовательностей, в нелинейных задачах статистики случайных процессов и т. д. (см. [1] — [3]).

Понятие С. п. о. по-разному вводится в линейной и нелинейной теориях случайных процессов. В линейной теории (см. [4]) векторный случайный процесс x_t наз. обновляющим процессом для случайного процесса ξ_t с $\mathsf{E}|\xi_t|^2<\infty$, если x_t имеет некоррелированные компоненты с некоррелированными приращениями и

$$H_t(\xi)=H_t(x) \text{ для всех } t,$$

где $H_t(\xi)$, $H_t(x)$ — замкнутые в среднем квадратичном линейные оболочки всех значений ξ_s, x_s, $s\leqslant t$. Число компонент N, $N\leqslant\infty$, процесса x_t наз. кратностью обновляющего процесса и определяется однозначно по процессу ξ_t. В случае дискретного времени $N=1$, а в случае непрерывного времени $N<\infty$ только при нек-рых специальных предположениях относительно корреляционной функции процесса ξ_t (см. [4], [5]). В приложениях используется возможность представления ξ_t в виде линейной комбинации значений x_s, $s\leqslant t$.

В нелинейной теории (см. [5], [6]) обычно обновляющим случайным процессом наз. винеровский процесс x_t такой, что

$$\mathcal{F}_t^{\xi}=\mathcal{F}_t^{x},$$

где $\mathcal{F}_t^{\xi}$, $\mathcal{F}_t^{x}$ суть σ-алгебры событий, порожденные значениями ξ_s, x_s, $s\leqslant t$. В случае когда ξ_t, $0\leqslant t\leqslant T$, является *Ито процессом* со стохастич. дифференциалом

$$d\xi_t=a(t)\,dt+dw_t,$$

винеровский процесс $\overline{w}_t$, определяемый равенством

$$\overline{w}_t=\xi_t-\int_0^t \mathsf{E}(a(s)|\,\mathcal{F}_s^{\xi})\,ds,$$

является С. п. о. для ξ_t, если, напр.,

$$\mathsf{E}\int_0^T a^2(s)\,ds<\infty$$

и процессы a и w образуют гауссовскую систему (см. [6]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, № 1, с. 3—14; [2] Ширяев А. Н., «Пробл. передачи информации», 1966, т. 2, № 3, с. 3—22; [3] Kailath T., «IEEE Ttans. Inform. Theory», 1974, v. IT—20, № 2, p. 146—81; [4] Розанов Ю. А., Теория обновляющих процессов, М., 1974; [5] Ширяев А. Н., в кн.: Тр. Школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974), ч. 2, Вильнюс, 1975, с. 235—67; [6] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

А. А. Новиков.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ОБОБЩЕННЫЙ — случайный процесс X, зависящий от непрерывного временно́го аргумента t и такой, что его значения в фик-

сированные моменты времени, вообще говоря, не существуют, а существуют только «сглаженные значения процесса» $X(\varphi)$, описывающие результаты измерений значений этого процесса при помощи всевозможных линейных измерительных приборов, имеющих достаточно гладкую весовую (т. е. импульсную переходную) функцию $\varphi(t)$. С. п. о. $X(\varphi)$ представляет собой непрерывное линейное отображение пространства D бесконечно дифференцируемых финитных функций φ (или какого-либо другого пространства основных функций, используемого в теории обобщенных функций) в пространство L_0 случайных величин X, определенных на нек-ром вероятностном пространстве; его реализации $x(\varphi)$ являются обычными обобщенными функциями аргумента t. Классические (т. е. обыкновенные) случайные процессы $X(t)$ также можно рассматривать как специальные С. п. о., для к-рых

$$X(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,X(t)\,dt;$$

такое рассмотрение может быть полезным, в частности, в связи с тем, что для С. п. о. X всегда существуют производные $X^{(n)}$ любого порядка n, к-рые можно определить с помощью равенства

$$X^{(n)}(\varphi)=(-1)^n X(\varphi^{(n)})$$

(см., напр., *Случайный процесс со стационарными приращениями*). Важнейший пример С. п. о., не являющийся классическим случайным процессом,— процесс *белого шума*; обобщением понятия С. п. о. является понятие обобщенного случайного поля.

Лит. см. при ст. *Случайное поле обобщенное.* *А. М. Яглом.*

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ — случайный процесс $X(t)$ такой, что для любого натурального n и любых действительных $0\leqslant\alpha_1<\beta_1\leqslant\alpha_2<\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n<\beta_n$ приращения

$$X(\beta_1)-X(\alpha_1),\ X(\beta_2)-X(\alpha_2),\ \ldots,\ X(\beta_n)-X(\alpha_n)$$

являются взаимно независимыми случайными величинами. С. п. с н. п. наз. однородным, если распределение вероятностей для приращений $X(\alpha+h)-X(\alpha)$, $0\leqslant\alpha$, $0<h$, зависит только от h (но не от α). Так как добавление к $X(t)$ любой неслучайной функции $A(t)$ приводит снова к С. п. с н. п., то реализации С. п. с н. п. могут быть, вообще говоря, сколь угодно иррегулярными. Однако, «центрируя» процесс надлежащим образом (вычитая, напр., из процесса $X(t)$ функцию $f(t)$, определяемую соотношением $\mathsf{E}\arctg(X(t)-f(t))=0$), можно высказать о структуре «центрированного» процесса более определенные суждения. У него имеется не более чем счетное множество (неслучайное) точек t_j, в к-рых $X(t)$ имеет случайные скачки

$$X_j=X(t_j+0)-X(t_j-0),$$

а разность

$$Y(t)=X(t)-\sum\nolimits_{t_j<t}X_j$$

является стохастически непрерывным С. п. с н. п.: при любом $\varepsilon>0$ и $t'\to t$

$$\mathsf{P}\{|Y(t')-Y(t)|>\varepsilon\}\longrightarrow 0.$$

Винеровский процесс и *пуассоновский процесс* служат примерами стохастически непрерывных С. п. с н. п. (при этом реализации первого непрерывны с вероятностью единица, а реализации второго суть кусочно постоянные функции со скачками, равными единице). Важным примером С. п. с н. п. служат устойчивые процессы. Реализации стохастически непрерывного С. п. с н. п. с вероятностью единица могут иметь разрывы только 1-го рода. Распределение у такого процесса при любом t является безгранично делимым (см. *Безгранично делимое распределение*). При изучении С. п. с н. п. применяют метод *характеристических функций*. Задачи о вероятности достижения процессом каких-либо границ и о распределении вероятностей времени достижения решаются с привлечением т. н. *факторизационных тождеств*.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964.

Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС СО СТАЦИОНАРНЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ — случайный процесс $X(t)$ с дискретным или непрерывным временем t такой, что статистич. характеристики его приращений нек-рого фиксированного порядка не меняются во времени (т. е. инвариантны относительно временны́х сдвигов $t\to t+a$). Как и в случае *стационарных случайных процессов*, различают два типа С. п. со с. п., а именно — С. п. со с. п. в узком смысле, для к-рого все конечномерные распределения вероятностей приращений $X(t)$ заданного порядка в точках $t_1,\ \ldots,\ t_n$ и точках $t_1+a,\ \ldots,\ t_n+a$ при любом a совпадают друг с другом, и С. п. со с. п. в широком смысле, для к-рых средние значения приращения в момент t и вторые моменты приращений в моменты t и $t+s$ не зависят от t.

В случае процессов $X(t)$ с дискретным временем $t=0,\ \pm1,\ \ldots$ всегда можно перейти от рассмотрения случайного процесса $X(t)$ к рассмотрению нового случайного процесса

$$\Delta^{(n)}X(t)=X(t)-C_n^1X(t-1)+\ldots+(-1)^nC_n^nX(t-n),$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Если $X(t)$ — С. п. со с. п. n-го порядка, то процесс $\Delta^{(n)}X(t)$ будет уже стационарным в обычном смысле; поэтому в случае дискретного времени теория С. п. со с. п. сводится к теории более частных стационарных случайных процессов. Однако с точки зрения приложений использование понятия С. п. со с. п. и дискретным временем t часто оказывается весьма удобным, т. к. для многих встречающихся на практике явно нестационарных временных рядов $x(t)$, $t=1,\ 2,\ \ldots$, ряды их приращений $\Delta^{(n)}x(t)$ нек-рого порядка n уже можно считать реализациями стационарного случайного процесса $\Delta^nX(t)$. В частности, Дж. Бокс (G. Box) и Г. Дженкинс (G. Jenkins) (см. [1]) указали, что при решении многих практич. задач реальные временные ряды часто можно считать реализациями т. н. процесса авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего, представляющего собой специальный С. п. со с. п. и дискретным временем (см. также [2] — [4]).

Примерами С. п. со с. п. 1-го порядка (в узком смысле) с непрерывным временем t являются, в частности, *винеровский процесс* и *пуассоновский процесс*; оба эти процесса принадлежат также и к более узкому классу процессов с независимыми стационарными приращениями 1-го порядка. В случае непрерывного t теория С. п. со с. п. уже не сводится непосредственно к теории более простых стационарных процессов. Корреляционная теория (т. е. теория соответствующих процессов в широком смысле) С. п. со с. п. 1-го порядка была развита А. Н. Колмогоровым [5] (см. также [6]); подобная же теория С. п. со с. п. n-го порядка, где n — произвольное целое положительное число, рассматривалась в работах [7] — [9]. Центральное место в корреляционной теории С. п. со с. п. занимает вывод спектрального разложения таких процессов и их моментов 2-го порядка. Использование понятия обобщенного случайного процесса позволяет заметно упростить теорию С. п. со с. п.; так как в рамках теории обобщенных случайных процессов любой случайный процесс $X(t)$ имеет производные всех порядков (являющиеся, вообще говоря, обобщенными случайными процессами), то С. п. со с. п. n-го порядка можно также определить как случайный процесс $X(t)$, n-я

производная которого $X^{(n)}$ является (вообще говоря, обобщенным) стационарным случайным процессом (см. [9]).

Лит.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1—2, М., 1974; [2] Nelson C. R., Applied time series analysis for managerial foreca ting, S. F., 1973; [3] Anderson O. D., Time series analysis and forecasting. The Box—Jenkins approach, L — Boston, 1976; [4] Robinson E. A., Silva M. T., Digital foundations of time eries analysis: the Box — Jenkins approach, S. F., 1979; [5] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1940, т. 26, № 1, с. 6—9; [6] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [7] Яглом А. М., «Матем. сб.», 1955, т. 37, № 1, с. 141—96; [8] Пинскер М. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1955, т. 19, с. 319—45; [9] Ито К., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 139—51. *А. М. Яглом.*

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС СОГЛАСОВАННЫЙ — семейство случайных величин $X=(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, с выделенным на нем неубывающим семейством $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$ таких, что X_t являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми при каждом $t\geqslant 0$. Чтобы подчеркнуть свойство согласованности для таких процессов, часто используют запись

$$X=(X_t,\ \mathcal{F}t)_{t\geqslant 0}$$

или

$$X=(X_t, \mathcal{F}_t)$$

и говорят, что X является $\mathbb{F}$-адаптированным или адаптированным относительно семейства $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ или что X есть стохастич. процесс. Соответствующие определения даются и в случае дискретного времени, при этом термин «процесс» заменяется термином «последовательность».

Лит.: [1] Делламшери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975. *А. Н. Ширяев.*

СЛУЧАЙНЫЙ ТОЧЕЧНЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, соответствующий на прямой $\mathbb{R}^1$ последовательности случайных величин $\{t_i\}, \ldots, t_{-1}<t_0\leqslant 0<t_1<t_2<\ldots$. Каждому значению t_i ставится в соответствие случайная величина $\Phi\{t_i\}=1, 2, \ldots$, называемая кратностью. В теории массового обслуживания С. т. п. порождается моментами поступления заявок на обслуживание, в биологии — моментами импульсов в нервных волокнах и т. п.

Пусть X — полное сепарабельное метрич. пространство, $\mathfrak{B}_0$ — класс ограниченных борелевских множеств $B\subset X$, $N=\{\varphi\}$ — совокупность мер, принимающая целые значения, $\varphi(B)=l<\infty$, $\mathfrak{N}$ — минимальная σ-алгебра, порожденная подмножествами мер $\{\varphi : \varphi(B)=l\}\subset N$, $B\in\mathfrak{B}_0$, $l=0, 1, 2, \ldots$ Задание вероятностной меры P в измеримом пространстве $(N, \mathfrak{N})$ определяет С. т. п. Φ с фазовым пространством X, реализациями к-рого являются целозначные меры из N. Значения $x\in X$, для к-рых $\Phi\{x\}>0$, наз. точками С. т. п. Величина $\Phi(B)$ равна сумме кратностей точек С. т. п., попавших в B. С. т. п. Φ наз. простым, если $\Phi\{x\}\leqslant 1$ для любого $x\in X$. С. т. п. наз. ординарным, если для любых $B\in\mathfrak{B}_0$ и $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение $\zeta=(z_1, \ldots, z_n)$ множества B, что

$$\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\Phi(z_k)>1\}<\varepsilon.$$

Ординарные С. т. п. являются простыми. Важную роль играют факториальные моментные меры

$$\Lambda_k(B)=\mathsf{E}_p\Phi(B)[\Phi(B)-1]\ldots[\Phi(B)-k+1]$$

и их обобщения (E_p — математич. ожидание, $\Lambda_1(B)$ наз. мерой интенсивностей). Если $\Lambda_{2n}(B)<\infty$, то

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\Lambda_k(B)\leqslant\mathsf{P}\{\Phi\{B\}=0\}\leqslant\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}\Lambda_k(B),$$

$$\Lambda_0(B)=1.$$

Особую роль в теории С. т. п. играют пуассоновские С. т. п. Φ, для к-рых: а) значения $\Phi(B_i)$ на непересекающихся $B_i\in\mathfrak{B}_0$ являются взаимно независимыми случайными величинами (свойство отсутствия последействия), б)

$$\mathsf{P}\{\Phi(B_i)=l\}=\frac{[\Lambda_1(B)]^l}{l!}\exp\{-\Lambda_1(B)\}.$$

Для простого С. т. п.

$$\Lambda_1(B)=\inf\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\Phi(z_k)>0\},\qquad(*)$$

где inf берется по всем разбиениям ζ множества B. Соотношение (*) дает возможность находить явные выражения меры интенсивностей для многих классов С. т. п., порожденных случайными процессами или полями.

Обобщением С. т. п. являются т. н. маркированные С. т. п., в к-рых точкам x, $\Phi\{x\}>0$, сопоставляются метки $k(x)$ из нек-рого измеримого пространства $[K, \mathfrak{R}]$. Продолжительности обслуживания заявок, поступающих в систему массового обслуживания, можно рассматривать как метки.

В теории С. т. п. важное значение имеют соотношения, связывающие специальным образом заданные условные вероятности различных событий (пальмовские вероятности). Получены предельные теоремы для суперпозиции (суммирования), прореживания и др. операций над последовательностями С. т. п. В приложениях широко используются различные обобщения пуассоновских С. т. п.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Cox D. R., Isham V., Point processes, L., 1980; [3] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [4] Беляев Ю. К., Элементы общей теории случайных процессов, в кн.: Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969, с. 358—72. *Ю. К. Беляев.*

СЛУЧАЙНЫЙ ТОЧЕЧНЫЙ ПРОЦЕСС С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ — случайный точечный процесс, задаваемый последовательностью случайных величин $\{t_i\}$

$$\ldots<t_{-1}<t_0\leqslant 0<t_1<t_2<\ldots,$$

в к-рой интервалы $s_i=t_{i+1}-t_i$ являются взаимно независимыми случайными величинами. С. т. п. с о. п. тесно связаны с процессами восстановления (см. *Восстановления теория*), в к-рых s_i являются независимыми одинаково распределенными (при $i\neq 0$) случайными величинами. *Ю. К. Беляев.*

СЛУЧАЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ — обобщение понятия *случайной величины*. Термин «С. э.» был введен, повидимому, М. Фреше [1], отмечавшим, что развитие теории вероятностей и расширение области ее приложений привело к необходимости перейти от схем, где (случайные) исходы опыта могут быть описаны числом или конечным набором чисел, к схемам, где исходы опыта представляют собой, напр., ряды, функции, кривые, преобразования и т. п.

Впоследствии термин «С. э.» стал употребляться в основном применительно к выбранным «случайным образом» элементам какого-либо линейного топологич. пространства, в первую очередь гильбертовых и банаховых пространств. Точное определение, напр., С. э. X в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, напоминает определение случайной величины. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — нек-рое *вероятностное пространство*, $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $\mathfrak{X}^*$ — сопряженное к $\mathfrak{X}$ пространство. Отображение $X=X(\omega)$ пространства Ω элементарных событий ω в $\mathfrak{X}$ наз. случайным элементом, если всякий непрерывный линейный функционал $x^*(X(\omega))$ оказывается при этом случайной величиной, т. е. $\mathcal{A}$-измеримой функцией.

Пусть $\mathscr{L}$ — наименьшая σ-алгебра, относительно к-рой измеримы все непрерывные линейные функционалы. X есть С. э. в том и только в том случае, когда полные прообразы всех множеств из $\mathscr{L}$ $\mathcal{A}$-измеримы. В случае когда $\mathfrak{X}$ сепарабельно, $\mathscr{L}$ совпадает с σ-алгеброй борелевских подмножеств $\mathfrak{X}$.

На С. э. могут быть распространены основные понятия теории вероятностей, такие, как характеристич. функция, математич. ожидание, ковариация и т. п.; С. э. X наз. нормальным (гауссовым), если распределение вероятностей любого непрерывного линейного функционала $x^*(X)$ является нормальным. На последовательности независимых С. э. могут быть распространены закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, закон повторного логарифма, центральная предельная теорема и др. вероятностные утверждения. Возможность перенесения этих теорем в их классич. форме на случай банаховых пространств тесно связана с геометрией пространства. Важно отметить, что эта связь носит взаимный характер, так как вероятностные свойства часто оказываются на самом деле вероятностно-геометрическими — их справедливость в данном банаховом пространстве не только определяется геометрич. свойствами пространства, но и сама определяет эти свойства.

Так, напр., для того чтобы для любой последовательности независимых одинаково распределенных С. э. $X_1, X_2, \ldots$ со значениями в $\mathfrak{X}$ с нулевыми математич. ожиданиями и $\mathsf{E}\|X_j\|^2<\infty$ распределение нормированных сумм $\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$ слабо сходилось к распределению нормального С. э., необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{X}$ было т. н. пространством типа 2 (см. [4]).

Лит.: [1] Fréchet M., «Ann. inst. H. Poincaré», 1948, v. 10, p. 215—310; [2] Mourier E., Eléments aléatoires dans un espace de Banach (Thèse), P., 1955; [3] Вахания Н. Н., Вероятностные распределения в линейных пространствах, Тбилиси, 1971; [4] Hoffmann-Jørgensen J., Pisier G., «Ann. Probab.», 1976, v. 4, p. 587—89.

Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отыскание функций от каких-либо случайных величин, распределения вероятностей к-рых обладают заданными свойствами.

Пример 1. Пусть X — случайная величина, имеющая непрерывную и строго возрастающую функцию распределения $F(x)$. Тогда случайная величина $Y=F(X)$ имеет равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение, а случайная величина $Z=\Phi^{-1}(F(X))$ (где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения) имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Обратно, формула $X=F^{-1}(\Phi(Z))$ позволяет из случайной величины Z со стандартным нормальным распределением получить случайную величину X, имеющую заданную функцию распределения $F(x)$.

С. в. п. часто используются в связи с предельными теоремами теории вероятностей. Пусть, напр., последовательность случайных величин Z_n асимптотически нормальна с параметрами (0, 1). Ставится задача построения простых (и просто обратимых) функций f_n таких, чтобы случайные величины $V_n=Z_n+f_n(Z_n)$ были «более нормальны», чем Z_n.

Пример 2. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и имеют каждая равномерное распределение на $[-1, 1]$ и пусть

$$Z_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{n/3}}.$$

По центральной предельной теореме

$$\mathsf{P}\{Z_n<x\}-\Phi(x)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Полагая

$$V_n=Z_n-\frac{1}{20n}(3Z_n-Z_n^3),$$

получают

$$\mathsf{P}\{V_n<x\}-\Phi(x)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Пример 3. Случайные величины χ_n^2, $\sqrt{2\chi_n^2}$ и $(\chi_n^2/n)^{1/3}$ асимптотически нормальны при $n\to\infty$ (см. «*Хи-квадрат*» *распределение*). Равномерное отклонение соответствующих функций распределения от их нормальных аппроксимаций становится меньше 0,01 для χ_n^2 при $n\geqslant 354$, для $\sqrt{2\chi_n^2}$ (преобразование Фишера) при $n\geqslant 23$, для $(\chi_n^2/n)^{1/3}$ (преобразование Вилсона — Хилферти) при $n\geqslant 3$ это отклонение не превосходит 0,007.

С. в. п. издавна применялись и применяются в задачах математич. статистики как основа построения простых асимптотич. формул высокой точности. С. в. п. используют и в теории случайных процессов (напр., метод «одного вероятностного пространства»).

Лит.: [1] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, № 2, с. 136—49; [2] его же, там же, 1963, т. 8, № 2, с. 129—55; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [3 изд.], М., 1983.

В. И. Пагурова, Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ — задача об оценке значений случайного процесса $X(t)$ на нек-ром интервале $a<t<b$ по его наблюдаемым значениям вне этого интервала. Обычно имеют в виду интерполяционную оценку $\hat{X}(t)$, для к-рой среднеквадратичная ошибка интерполяции является минимальной в сравнении со всеми другими оценками:

$$\mathsf{E}\,|\hat{X}(t)-X(t)|^2=\min;$$

интерполяция наз. линейной, если ограничиваются линейными оценками. Одной из первых была поставлена и решена задача линейной интерполяции значения $X(0)$ стационарной последовательности, имеющая следующий аналог: в пространстве L_2 интегрируемых в квадрате функций на отрезке $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ найти проекцию функции $\varphi(\lambda)\in L_2$ на подпространство, порожденное функциями $e^{i\lambda k}\varphi(\lambda)$, $k=\pm1, \pm2, \ldots$; эта задача получила широкое обобщение в теории *стационарных случайных процессов* (см. [1], [2]). Примером для приложений может служить задача интерполяции случайного процесса, возникающего в системе

$$LX(t)=Y(t),\quad t>t_0,$$

с линейным дифференциальным оператором L порядка l и белым шумом $Y(t)$, $t>t_0$, в правой части; здесь при независимых от белого шума начальных значениях $X^{(k)}(t_0)$, $k=0, \ldots, l-1$, наилучшая интерполяционная оценка $\hat{X}(t)$, $a<t<b$, есть решение соответствующей краевой задачи

$$L^*L\hat{X}(t)=0,\quad a<t<b,$$

с формально-сопряженным оператором L^* и граничными условиями

$$\hat{X}^{(k)}(s)=X^{(k)}(s),\quad k=0, \ldots, l,$$

в граничных точках $s=a, b$. Для систем стохастических дифференциальных уравнений задача интерполяции одних компонент по значениям других наблюдаемых компонент приводит к соответствующим уравнениям интерполяции (см. [3]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Бюлл. МГУ», 1941, секц. А, т. 2, в. 6, с. 1—40; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

Ю. А. Розанов.

СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ, случайных процессов экстраполяция, — задача об оценке значений случайного процесса $X(t)$ в будущем $t>s$ по его наблюдаемым значениям до текущего момента времени s. Обычно имеют в виду экстраполяционную оценку $\hat{X}(t)$, $t>s$, для к-рой

среднеквадратичная ошибка $\mathsf{E}|\hat{X}(t)-X(t)|^2$ является минимальной в сравнении со всеми другими оценками, составленными по значениям рассматриваемого процесса в прошлом до момента s (прогнозирование наз. л и н е й н ы м, если ограничиваются линейными оценками).

Одной из первых была поставлена и решена задача линейного прогнозирования стационарной последовательности, имеющая следующий аналог: в пространстве L_2 интегрируемых в квадрате функций на отрезке $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ найти проекцию функции $\varphi(\lambda)\in L_2$ на подпространство, порожденное функциями $e^{i\lambda k}\varphi(\lambda)$, $k=0, -1, -2, \ldots$; эта задача получила широкое обобщение в теории *стационарных случайных процессов*. Примером для приложений может служить задача прогнозирования случайного процесса, возникающего в системе

$$LX(t)=Y(t),\quad t>t_0,$$

с линейным дифференциальным оператором L порядка l и белым шумом $Y(t)$, $t>t_0$ в правой части; здесь наилучший прогноз $\hat{X}(t)$, $t>s$ по значениям в моменты $t_0\leqslant t\leqslant s$ при независимых от белого шума начальных значениях $X^{(k)}(t_0)$, $k=0, \ldots, l-1$, может быть дан с помощью решения соответствующего уравнения

$$L\hat{X}(t)=0,\quad t>s,$$

с начальными условиями

$$\hat{X}^{(k)}(s)=X^{(k)}(s),\quad k=0,\ l-1.$$

Для систем стохастических дифференциальных уравнений задача прогнозирования одних компонент по значениям других наблюдаемых компонент приводит к соответствующим стохастич. уравнениям экстраполяции.

Лит. см. при ст. *Случайных процессов интерполяция.*

Ю. А. Розанов.

СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИЯ — задача об оценке значения случайного процесса $Z(t)$ в текущий момент t по каким-либо значениям другого, связанного с ним случайного процесса. Напр., речь может идти об оценке стационарного процесса $Z(t)$ по значениям $X(s)$, $s\leqslant t$, стационарно с ним связанного стационарного процесса (см., напр., [1]). Обычно имеют в виду оценку $\hat{Z}(t)$ с наименьшей среднеквадратичной ошибкой $\mathsf{E}|\hat{Z}(t)-Z(t)|^2$. Употребление термина «фильтрация» восходит к задаче о выделении сигнала из «смеси» сигнала и случайного шума, одна из важных модификаций к-рой есть задача оптимальной фильтрации в схеме, когда связь $Z(t)$ и $X(t)$ описывается *стохастическим дифференциальным уравнением*

$$dX(t)=Z(t)\,dt+dY(t),\quad t>t_0,$$

где независимый от $Z(t)$ шум представлен стандартным винеровским процессом $Y(t)$.

Широкое распространение в приложениях получил метод фильтрации (м е т о д К а л м а н а — Б ь ю с и), применимый к процессам $Z(t)$, к-рые описываются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями. Напр., если в указанной выше схеме

$$dX(t)=a(t)\,Z(t)\,dt+dY(t)$$

при нулевых начальных условиях, то

$$\hat{Z}(t)=\int_{t_0}^{t}c(t,\ s)\,dX(t),$$

где весовая функция $c(t,\ s)$ находится из уравнений:

$$\frac{d}{dt}c(t,\ s)=[a(t)-b(t)]\,c(t,\ s),\quad t>s,$$

$$c(s,\ s)=b(s),$$

$$\frac{d}{dt}b(t)=2a(t)\,b(t)-[b(t)]^2+1,\quad t>t_0,\qquad b(t_0)=0;$$

обобщение этого метода на нелинейные уравнения приводит к общим стохастич. уравнениям фильтрации (см. [2]).

В случае когда

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}c_kZ_k(t)$$

зависит от неизвестных параметров $c_1, \ldots, c_n$, интерполяционную оценку $\hat{Z}(t)$ можно дать, оценивая эти параметры по $X(s)$, $s\leqslant t$,— здесь применим метод наименьших квадратов и его обобщения (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Р о з а н о в Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] И б р а г и м о в И. А., Р о з а н о в Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970.

Ю. А. Розанов.

СМЕЖНЫЙ КЛАСС г р у п п ы G п о п о д г р у п п е H (л е в ы й) — множество элементов группы G, равное

$$aH=\{ah\mid h\in H\},$$

где a — нек-рый фиксированный элемент из G. С. к. наз. также левосторонним С. к. группы G по подгруппе H, определяемым элементом a. Всякий левый С. к. определяется любым из своих элементов. $aH=H$ тогда и только тогда, когда $a\in H$. Для любых a, $b\in G$ С. к. aH и bH либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, группа G распадается на непересекающиеся левые С. к. по подгруппе H — это разложение наз. л е в о с т о р о н н и м р а з л о ж е н и е м г р у п п ы G п о п о д г р у п п е H. Аналогично определяются п р а в ы е с м е ж н ы е к л а с с ы (множества Ha, $a\in G$) и п р а в о с т о р о н н е е р а з л о ж е н и е г р у п п ы G п о п о д г р у п п е H. Оба разложения — правостороннее и левостороннее — группы G по H состоят из одного и того же числа классов (в бесконечном случае совпадают мощности множеств этих классов). Это число (мощность) наз. и н д е к с о м п о д г р у п п ы H в группе G. Для нормальных делителей левостороннее и правостороннее разложения совпадают, и в этом случае говорят просто о р а з л о ж е н и и г р у п п ы п о е е н о р м а л ь н о м у д е л и т е л ю.

О. А. Иванова.

СМЕШАННАЯ ГРУППА — группа, к-рая содержит как элементы бесконечного порядка, так и отличные от единицы элементы конечных порядков (см. *Порядок* элемента группы).

О. А. Иванова.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА — задача для дифференциальных уравнений и систем с частными производными, содержащая *начальные условия* и *краевые условия*, а также задача с носителем данных, состоящем как из характеристич., так и нехарактеристических определенным образом ориентированных многообразий (см. *Смешанная и краевая задачи для гиперболических уравнений и систем*, *Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем*, *Смешанного типа уравнение*). С. з. наз. и краевые задачи для эллиптич. уравнений, когда на различных частях границы заданы условия разного рода (см. *Краевая задача* для эллиптического уравнения).

А. М. Нахушев.

СМЕШАННАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ — задачи отыскания решений уравнений и систем с частными производными гиперболич. типа, удовлетворяющих на границе области их задания (или ее части) определенным условиям (см. *Краевые условия*, *Начальные условия*).

Краевая задача для гиперболич. уравнений и систем, заданных в нек-рой области D евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, наз. с м е ш а н н о й, или н а ч а л ь н о - к р а е в о й, если искомое решение, наряду с краевыми условиями, должно удовлетворять и начальным или если носитель ∂D граничных данных состоит

как из характеристических, так и нехарактеристических определенным образом ориентированных многообразий.

Для гиперболич. уравнений 2-го порядка носителем начальных данных при постановке смешанной задачи является пространственно ориентированная часть границы ∂D. На временны́м образом ориентированной части ∂D, как правило, задаются краевые условия такого же типа, как и для параболич. уравнений (см. *Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем*).

Пусть Ω — область пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а

$$D=\{(x, x_0): x\in\Omega,\ 0<x_0<T\},$$

$$S=\{(x, x_0): x\in\partial\Omega,\ 0<x_0<T\},$$

$$\Omega_0=\{(x, x_0): x\in\Omega,\ x_0=0\},\ \Omega_T=\{(x, x_0): x\in\Omega,\ x_0=T\}.$$

В области D задано линейное гиперболич. уравнение 2-го порядка

$$u_{x_0x_0}-a^{ij}(x, x_0)\,u_{x_ix_j}+a^i(x, x_0)\,u_{x_i}+ +a^0(x, x_0)\,u_{x_0}+a(x, x_0)\,u=f(x, x_0), \quad (1)$$

где подразумевается суммирование от 1 до n по повторяющимся индексам i, j и форма $a^{ij}(x, x_0)\xi_i\xi_j$ положительно определена.

Основные смешанные задачи для уравнения (1) охватываются следующей постановкой: в области D найти решение $u=u(x, x_0)$ уравнения (1), удовлетворяющее на Ω_0 начальным условиям

$$u|_{x_0=0}=\tau(x), \quad u_{x_0}|_{x_0=0}=\nu(x), \quad (2)$$

а на S — одному из краевых условий

$$u|_S=\varphi_1(x, x_0); \quad (3)$$

$$\partial u/\partial N|_S=\varphi_2(x, x_0); \quad (4)$$

$$(\partial u/\partial N+\sigma(x, x_0)\,u)|_S=\varphi_3(x, x_0), \quad (5)$$

где N — конормаль относительного оператора $a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Задачи (2), (3); (2), (4) и (2), (5) принято соответственно называть первой, второй и третьей смешанной задачей для уравнения (1).

Для уравнения (1) при довольно общих предположениях относительно его коэффициентов и границы ∂D, а также для заданных функций доказаны существование и единственность как регулярных, так и обобщенных решений всех трех смешанных задач, исследованы структурные и дифференциальные свойства этих решений в замкнутой области $\overline{D}$ в зависимости от гладкости ее границы [8]. При $n=1$ решение смешанных задач выписывается в явном виде.

Смешанные задачи исследованы для широкого класса линейных и нелинейных гиперболич. уравнений и систем (см. *Квазилинейные гиперболические уравнения и системы*). Построена удовлетворительная теория смешанных задач для строго гиперболич. уравнений и систем вида

$$u_{x_0x_0}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x, x_0)\,\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}+f(x, x_0)$$

с начальными данными на (пространственно ориентированной) части границы области D, лежащей на плоскости $x_0=0$. Определенный успех достигнут и при изучении смешанных задач для гиперболич. уравнений и систем в случае, когда носители начальных или краевых условий представляют собой поверхности вырождения типа или порядка этих уравнений (см. *Вырожденное уравнение* с частными производными).

Наиболее существенные результаты получены для линейных уравнений 2-го порядка вида

$$u_{x_0x_0}-\frac{\partial}{\partial x_j}[a^{ij}(x, x_0)\,u_{x_i}]+b^i(x, x_0)\,u_{x_i}+ +b^0(x, x_0)\,u_{x_0}+c(x, x_0)\,u=f(x, x_0)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$a^{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda_0\mu_0x_0\,(b^i\xi_i)^2-\mu_0a^{ij}_{x_0}\xi_i\xi_j\ \ (\forall\xi\in\mathbb{R}^n),$$

где λ_0 и μ_0 — нек-рые положительные постоянные, и особенно для уравнений вида

$$y^mu_{xx}-u_{yy}+a(x, y)\,u_x+b(x, y)\,u_y+ +c(x, y)\,u=f(x, y),\ x_1=x,\ x_0\equiv y\geqslant 0,\ m=\text{const}. \quad (6)$$

К смешанным задачам с внутренними или внешними краевыми условиями (см. *Внешняя и внутренняя краевые задачи*) редуцируются математич. модели многих процессов теории рассеяния волн на препятствиях. Напр., к условию излучения Зоммерфельда (см. *Излучения условия*) приводит задача отыскания решения u волнового уравнения

$$\Box u\equiv u_{x_0x_0}-u_{x_1x_1}-\ldots-u_{x_nx_n}=0$$

для всех точек $x\in\mathbb{R}^n$, лежащих вне ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, если известно, что производная u по направлению внешней нормали и $\partial\Omega$ обращается в нуль для любого момента времени $x_0\geqslant 0$, а начальные условия соответствуют плоской волне, идущей из бесконечности в направлении оси x_1.

Основными краевыми задачами для гиперболич. уравнений и систем являются Гурса, Дарбу — Пикара и их многомерные аналоги (см. *Гурса задача*, *Коши характеристическая задача*, а также [1]).

Задачи Гурса, Дарбу — Пикара и их различные обобщения хорошо исследованы для гиперболич. уравнений и систем 2-го порядка с расщепленными главными частями вида

$$u_{xx}-u_{yy}+a(x, y)\,u_x+b(x, y)\,u_y+c(x, y)\,u=f(x, y),$$

где a, b и c — заданные действительные $(m\times m)$-матрицы, f — заданный, а u — искомый m-мерные векторы. Существенные результаты получены и для довольно широкого класса гиперболич. систем уравнений 2-го порядка с нерасщепленными главными частями при отсутствии параболич. вырождения. Обнаружен факт неединственности решения характеристич. задачи Гурса

$$u_i(x, x)=\varphi_i(x),\ u_i(x, -x)=\psi_i(x),\ x\geqslant 0,\ i=1, 2,$$

для гиперболич. системы

$$\frac{\partial^2u_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u_i}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2u_j}{\partial x\partial y}=0,\ i=1, 2,\ i+j=3,$$

с двумя независимыми переменными x, y и найден эффект влияния младших членов на корректность этой задачи [3]. Достаточно полно изучен вопрос влияния характера параболич. вырождений на корректность как локальных, так и нелокальных краевых задач для вырождающихся гиперболич. уравнений и систем [3]. В частности, исследованы основные (локальные) краевые задачи для линейных вырождающихся гиперболич. уравнений вида

$$u_{yy}-k(x, y)\,u_{xx}+a(x, y)\,u_x+b(x, y)\,u_y+ +c(x, y)\,u=f(x, y)$$

в ограниченных областях с произвольной кусочно гладкой границей, установлен факт влияния порядка нехарактеристич. вырождения на корректность задачи Дарбу и неравноправия характеристик как носителей краевых условий [10].

В связи с проблемой поиска многомерных аналогов задач Дарбу и Трикоми (см. *Смешанного типа урав-*

нения) начались интенсивные исследования нелокальных краевых задач и особенно задачи со смещением (см. [9]) для гиперболич. уравнений, когда на характеристич. частях границы задано условие, поточечно связывающее значения искомого решения или его (дробных) производных или интегралов определенного порядка.

Многие краевые задачи со смещением, изучаемые с большой полнотой и общностью в случае уравнения (1), охватываются следующей постановкой. В области, ограниченной характеристиками

$$\Gamma_0\colon x-\frac{2}{m+2}\,y^{(m+2)/2}=0,\ \Gamma_1\colon x+\frac{2}{m+2}\,y^{(m+2)/2}=1$$

и отрезком $I: 0<x<1$ прямой $y=0$, найти (достаточно гладкое) решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее на I локальному условию

$$\lim_{y\to+0}\left[A_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}+A_2(x)\frac{\partial u}{\partial y}+A_3u\right]=A_4(x),\ x\in I, \quad (7)$$

а на $\Gamma_0\cup\Gamma_1$ — нелокальному условию

$$B_1(x)\,D^{\alpha}_{0x}u[\theta_0(x)]+B_2(x)\,D^{\beta}_{1x}u[\theta_1(x)]+$$
$$+\lim_{y\to+0}\left[a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x)\frac{\partial u}{\partial y}+a_3(x)\,u\right]=$$
$$=B_3(x),\ x\in I. \quad (8)$$

Здесь A_i, B_i, a_i — заданные функции, D^{ε}_{jx} — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка $|\varepsilon|$, задаваемый формулой

$$D^{\varepsilon}_{jx}\varphi(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(-\varepsilon)}\int_j^x|x-t|^{-\varepsilon-1}\varphi(t)\,dt,$$

если $\varepsilon<0$, и

$$D^{\varepsilon}_{jx}\varphi(x)=\frac{d^{[\varepsilon]+1}}{dx^{[\varepsilon]+1}}\,D^{\varepsilon-[\varepsilon]-1}\varphi(x),\ j=0,\ 1,$$

если $\varepsilon>0$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $[\varepsilon]$ — целая часть ε; $\theta_j(x)$ — точка пересечения характеристики, выходящей из точки $x\in I$, с характеристикой Γ_j уравнения (1):

$$u[\theta_j(x)]=u(\operatorname{Re}\theta_j,\ \operatorname{Im}\theta_j).$$

Подробно изучены краевые задачи со смещением для уравнения вида (1), к-рые в характеристич. координатах ξ и η редуцируются к уравнению Эйлера — Дарбу — Пуассона

$$(\xi-\eta)\,u_{\xi\eta}-\beta u_{\xi}+\beta' u_{\eta}=0.$$

Частным случаем задачи (7) — (8) является задача Дарбу, к-рая состоит в отыскании (достаточно гладкого) решения $u(x, y)$ уравнения (6), удовлетворяющего (локальным) краевым условиям

$$u[\theta_0(x)]=\psi(x),\ u(x, 0)=\tau(x),\ x\in I;$$

или

$$u[\theta_1(x)]=\varphi(x),\ u_y(x, 0)=\nu(x),\ x\in I.$$

Условие $m<2$ или $a(x, y)=0(1)y^p$, $p>m/2-1$, $m\geqslant 2$ (условие Геллерстедта), является существенным для корректности задачи Дарбу (см. [3], [10]).

Качественно новым многомерным аналогом задачи Дарбу является задача Бицадзе, к-рая в случае волнового уравнения $\Box u=f(x, x_0)$ ставится следующим образом (см. [1]). В конечной области $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченной частью S_0 плоскости $x_n=0$ и двумя характеристич. поверхностями

$$S_1: x_0=|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},\ x_n\leqslant 0,$$

и

$$S_2: 1-x_0=|x|,\ x_n\leqslant 0,$$

найти решение уравнения, удовлетворяющее условиям $u|_{S_0}=0$, $u|_{S_2}=0$ или $u_{x_n}|_{S_0}=0$, $u|_{S_2}=0$.

Изучены и другие многомерные аналоги как задачи Дарбу, так и нелокальных краевых задач (типа [2], [3]) для гиперболич. уравнений в специальных областях, нехарактеристич. часть границы к-рых, как правило, представляет собой пространственно ориентированную поверхность. Наиболее полные результаты получены в случае уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона $x_0\Box u=ku_{x_0}$.

Для уравнения вида

$$u_{xy}+A(x, y)\,u_x+B(x, y)\,u_y+c(x, y)\,u=f(x, y) \quad (9)$$

весьма полно исследована нелокальная задача в следующей постановке. В области $\{(x, y): 0<x<h,\ 0<y<T\}$ найти (достаточно гладкое) решение $u(x, y)$ уравнения (9), если для всех $y\in[0, T]$ известно, что

$$u(x, 0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant h,\ \frac{\partial}{\partial y}\int_0^{x_0}u(x, y)\,dx=\tau(y),$$

или

$$u(x, 0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant h,\ \frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=1}^{q}\alpha_j(y)\,u(x^j, y)=\tau(y),$$

где x_0, x_1, ..., x_q — заданные точки из сегмента $[0, h]$.

В теорию краевых задач вносится новый аспект при переходе к гиперболич. уравнениям 3-го порядка вида

$$u_{xxy}+A(x, y)\,u_{xx}+a(x, y)\,u_x+b(x, y)\,u_y+c(x, y)\,u=f(x, y), \quad (10)$$

к-рые лежат в основе математич. моделей многих процессов и явлений теории тепломассообмена в пористых средах. Построена содержательная теория как локальных, так и нелокальных линейных краевых задач для гиперболич. уравнений вида (10), в частности создан аналог метода Римана.

Для линейных симметрических гиперболич. систем 1-го порядка (см. *Линейное гиперболическое уравнение и система*) в рамках теории систем уравнений 1-го порядка изучены краевые задачи с допустимыми (см. [6]) краевыми условиями на $\partial\Omega$.

Задача Дирихле, вообще говоря, не является корректной для гиперболич. уравнений и систем в произвольных областях. Методами энергетич. оценок и интегральных уравнений установлена корректность этой задачи для широкого класса гиперболич. уравнений 2-го порядка в специальных цилиндрич. областях.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Gellerstedt S., «Ark. mat., astr., fys.», 1937, bd 25A, № 29, s. 1—23; [4] Годунов С. К., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1979; [5] Джураев Т. Д., Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, Ташкент, 1979; [6] Дезин А. А., Общие вопросы теории граничных задач, М., 1980; [7] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г., Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосиб., 1969; [8] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; [9] Нахушев А. М., «Дифференциальные уравнения», 1969, т. 5, № 1, с. 44—59; [10] его же, там же, 1971, т. 7, № 1, с. 49—56; [11] Салахитдинов М. С., Уравнения смешанно-составного типа, Ташкент, 1974; [12] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [13] Шханукоев М. Х., «Дифференциальные уравнения», 1982, т. 18, № 4, с. 689—99.

А. М. Нахушев.

СМЕШАННАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ — задачи отыскания решений

$$u(x, t)=(u_1(x, t),\ \ldots,\ u_m(x, t))$$

в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ ($(x, t)=(x_1, \ldots, x_n, t)$ — точка пространства $\mathbb{R}^{n+1}$) параболич. системы уравнений или при $m=1$ параболич. уравнения, удовлетворяющих нек-рым дополнительным условиям на границе ∂D (или на ее части) области D.

Пусть Ω — область пространства $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а D — цилиндр $\{x\in\Omega,\ 0<t<T\}$ с боковой поверхностью $\Gamma=\{x\in\partial\Omega,\ 0<t<\Gamma\}$, нижним основанием $\Omega_0=\{x\in\Omega,\ t=0\}$ и верхним основанием $\Omega_T=\{x\in\Omega,\ t=T\}$. Смешанные задачи для линейной параболической по Петровскому системы

$$u_1+\sum_{|\alpha|\leqslant 2p} A_\alpha(x,\ t)\,D_x^\alpha u=f(x,\ t),\ (x,\ t)\in D,\ (1)$$
$$f(x,\ t)=(f_1(x,\ t),\ \ldots,\ f_m(x,\ t)),$$

в цилиндре D заключаются в отыскании решений этой системы, удовлетворяющих начальному условию

$$u|_{\Omega_0}=\varphi(x),\qquad (2)$$

$\varphi(x)=(\varphi_1(x_1),\ \ldots,\ \varphi_m(x))$, и краевому условию

$$B\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u\,|_\Gamma=\psi(x,\ t),\qquad (3)$$

где $\psi(x,\ t)=(\psi_1(x,\ t),\ \ldots,\ \psi_p(x,\ t))$, а $B\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — прямоугольная матрица с элементами

$$B_{ij}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{|\alpha|\leqslant q_{i,\,j}} b_\alpha^{i,\,j}(x,\ t)\,D_x^\alpha,$$
$$i=1,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ \ldots,\ p.$$

Пусть рассматриваемая система равномерно параболична.

Классич. решением смешанной задачи (1) — (3) наз. вектор-функция $u(x,\ t)$, принадлежащая

$$C_{x,\,t}^{2p,\,1}(D)\cap C_{x,\,t}^{q,\,0}{}_1(D\cup\Gamma)\cap C(D\cup\Gamma\cup\overline{\Omega}_0),$$

где $q=\max q_{i,j}$ при $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant p$, и удовлетворяющая в D системе (1), а на Ω_0 и Γ — условиям (2) и (3) соответственно. Иногда рассматриваются обобщения понятия классич. решения; в частности, при определении классич. решения можно отказаться от требования непрерывности в точках из $\overline{\Gamma}\cap\overline{\Omega}_0$, заменив его условием ограниченности решения в D.

Если для рассматриваемой задачи выполнено дополнительности условие (условие Лопатинского), то (пусть для простоты область Ω ограничена) при достаточной гладкости данных задачи (коэффициентов в (1) и (3) и вектор-функций f, φ и ψ) и выполнения согласований условий существует и единственно классич. решение.

Основными смешанными задачами для общего линейного равномерно параболич. уравнения 2-го порядка

$$u_t-Lu\equiv u_t-\sum_{i,\,j=1}^n (a_{ij}(x,\ t)\,u_{x_i})_{x_j}-$$
$$-\sum_{i=1}^n b_i(x,\ t)\,u_{x_i}-c(x,\ t)\,u=f(x,\ t),\ (x,\ t)\in D,\ (1')$$
$$a_{ij}(x,\ t)=a_{j,\,i}(x,\ t),\ i=1,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

являются задачи отыскания решений этого уравнения, удовлетворяющих начальному условию

$$u|_{\Omega_0}=\varphi(x)\qquad (2')$$

и одному из краевых условий

$$u|_\Gamma=\psi(x,\ t)\qquad (4)$$

— первая смешанная задача, или

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_\Gamma=\psi(x,\ t)\qquad (5)$$

— вторая смешанная задача, или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N}+\sigma(x,\ t)\,u\right)\Big|_\Gamma=\psi(x,\ t)\qquad (6)$$

— третья смешанная задача, где N — конормаль эллиптич. оператора L.

Каждая из этих задач удовлетворяет дополнительности условию и, следовательно, при достаточной гладкости данных задачи и выполнении условий согласования имеет классич. решение; это решение может быть получено с помощью метода потенциала, метода конечных разностей, *Галеркина метода*, а в случае, когда функции $a_{i,\,j}$, $i=1,\ \ldots,\ n$, $j=1,\ \ldots,\ n$, c, σ, не зависят от t, $b_i\equiv 0$, $i=1,\ \ldots,\ n$, и с помощью *Фурье метода*. Для разрешимости, напр., первой смешанной задачи для уравнения (1) достаточно потребовать, чтобы коэффициенты уравнения принадлежали пространству Гёльдера $C^\alpha(\overline{D})$ при нек-ром $\alpha>0$ и, кроме того, коэффициенты $\alpha_{i,\,j}(x,\ t)$ имели принадлежащие $C^\alpha(\overline{D})$ производные $\frac{\partial a_{i,\,j}}{\partial x_i}$, $i=1,\ \ldots,\ n$, $j=1,\ \ldots,\ n$, функция $f(x,\ t)$ принадлежала $C^\alpha(\overline{D})$, функции φ и ψ были непрерывны соответственно на $\overline{\Omega}_0$ и $\overline{\Gamma}$ и $\varphi|_{\partial\Omega}=\psi(x,\ 0)$. При этом достаточно, чтобы граница $\partial\Omega$ области Ω удовлетворяла следующему условию: для любой точки $x^0\in\partial\Omega$ существует замкнутый шар S, имеющий единственную общую точку с Ω — точку x^0 : $S\cap\Omega=x^0$. Аналогичное утверждение при нек-рых условиях на боковую поверхность (пусть боковая поверхность не содержит характеристич. точек — точек касания с плоскостями $t=\text{const}$) справедливо и в случае нецилиндрич. области D.

Теоремы существования основных смешанных задач для уравнения (1′) справедливы и при других требованиях на заданные функции и область Ω. Напр., решение первой смешанной задачи в цилиндрич. области D для однородного *теплопроводности уравнения* с непрерывными функциями φ и ψ, удовлетворяющими условию согласования $\varphi|_{\partial\Omega}=\psi(x,\ 0)$, существует, если область Ω такова, что *Дирихле задача* для *Лапласа уравнения* разрешима в Ω (существует классич. решение) при произвольной непрерывной граничной функции.

Пусть коэффициенты a_{ij}, b_i, c измеримы и ограничены в D, а функция σ измерима и ограничена на Γ, $f\in L_2(D)$, $\varphi\in L_0(\Omega)$, функция ψ в случае первой смешанной задачи является следом на Γ нек-рой функции из *Соболева пространства* $W_2^{1,\,0}(D)$, а в случае третьей (и второй) смешанной задачи принадлежат $L_2(\Gamma)$.

Принадлежащая пространству $W_2^{1,\,0}(D)$ функция $u(x,\ t)$, след к-рой на Γ равен ψ: $u|_\Gamma=\psi$, наз. обобщенным решением первой смешанной задачи (1′), (2′), (4), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D\left[-uv_t+\sum_{i,\,j=1}^n a_{i,\,j}u_{x_i}v_{x_j}-\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{i=1}^n b_iu_{x_i}+cu\right)v\right]dx\,dt=$$
$$=\int_D fv\,dx\,dt+\int_{\Omega_0}\varphi v\,dx$$

при всех v из пространства Соболева $W_2^1(D)$, удовлетворяющих условиям $v|_\Gamma=0$, $v|_{\Omega_T}=0$.

Принадлежащая пространству $W_2^{1,0}(D)$ функция $u(x,\ t)$ наз. обобщенным решением третьей (второй, если $\sigma\equiv 0$) смешанной задачи (1), (2), (6), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D\left[-uv_t+\sum_{i,\,j=1}^n a_{i,\,j}u_{x_i}v_{x_j}-\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{i=1}^n b_iu_{x_i}+cu\right)v\right]dx\,dt+\int_\Gamma\sigma uv\,dS=$$
$$=\int_D fv\,dx\,dt+\int_{\Omega_0}\varphi v\,dx+\int_\Gamma\psi v\,dS$$

при всех v из $W_2^1(D)$, удовлетворяющих условию $v|_{\Omega_T}=0$.

Обобщенное решение каждой из этих задач существует, единственно и, если $f\in L_p(D)$ при достаточно большом p, непрерывно в D и даже удовлетворяет условию Гёльдера с нек-рым показателем $\alpha>0$. При увеличении гладкости заданных функций и границы области и при выполнении условий согласования увеличивается гладкость обобщенного решения. Так, напр., пусть для уравнения теплопроводности $\varphi\equiv 0$ и $\psi\equiv 0$ и $\partial\Omega$ является достаточно гладкой поверхностью; обобщенное решение первой смешанной задачи принадлежит $W_2^{2(s+1),\,s+1}(D)$, если $f\in W_2^{2s,\,s}(D)$ и выполнены условия согласования

$$f|_{\partial\Omega_0}=(\Delta f+f_t)|_{\partial\Omega_0}=\ldots=\sum_{i=0}^{s-1}\Delta^i\frac{\partial^{s-1-i}f}{\partial t^{s-1-i}}\Big|_{\partial\Omega_0}. \quad (7)$$

В частности, если $f\in L_2(D)$, то решение принадлежит $W_2^{2,\,1}(D)$, для $(x,\,t)\in D$ удовлетворяет уравнению теплопроводности и его след на Ω_0 равен нулю; если $f\in W_2^{2s,\,s}$ при достаточно большом s и выполнены условия согласования (7), то в силу *вложения теорем* обобщенное решение является классическим. Аналогичное утверждение справедливо и для обобщенных решений основных смешанных задач для уравнения (1′) при достаточной гладкости коэффициентов.

Пусть $\Omega=\mathbb{R}^n$; задача отыскания решения в полосе $D=\mathbb{R}^n\times(0,\,T)$ параболич. системы уравнений (1), удовлетворяющих на характеристике $\Omega_0=\{x\in\mathbb{R}^n,\,t=0\}$ начальному условию (2), наз. *Коши задачей* для уравнения (1). Классич. решением задачи Коши (1), (2) наз. вектор-функция $u(x,\,t)$, принадлежащая $C^{2p,\,1}(D)\cap C(D\cup\Omega_0)$ и удовлетворяющая в D системе (1), а на Ω_0 — начальному условию (2). Если правая часть $f(x,\,t)$ принадлежит пространству Гёльдера $C^\alpha(\overline{D})$ при нек-ром $\alpha>0$, а коэффициенты — достаточно гладкие в $\overline{D}$, ограниченные вместе со своими производными функции, то для любой непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^n$ начальной вектор-функции $\varphi(x)$ существует ограниченное в D решение задачи Коши и ограниченное решение задачи Коши единственно.

Условие ограниченности может быть заменено условием «не слишком быстрого роста». Напр., для уравнения 2-го порядка справедливо следующее утверждение. Пусть коэффициенты уравнения (1′)

$$a_{i,\,j}(x,\,t),\ b_i(x,\,t),\ c(x,\,t)\ \text{и}\ \frac{\partial a_{i,\,j}(x,\,t)}{\partial x_i}$$

принадлежат пространству Гёльдера $C^\alpha(\overline{D})$ при нек-ром $\alpha>0$, а непрерывная в $\mathbb{R}^n$ функция $\varphi(x)$ и непрерывная в $\overline{D}$ и локально непрерывная по Гёльдеру по переменным x равномерно по $t\in[0,\,T]$ (с нек-рым показателем $\alpha>0$) функция $f(x,\,t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi(x)|\leqslant Ce^{h|x|^2},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

$$|f(x,\,t)|\leqslant Ce^{h|x|^2},\ (x,\,t)\in D.$$

Тогда в полосе $D=\mathbb{R}^n\times(0,\,T)$ при достаточно малом (зависящем от h) T существует решение задачи Коши (1′), (2′); оно представляется в виде

$$u(x,\,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,\,t;\,\xi,\,0)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,\,t;\,\xi,\,\tau)f(\xi,\,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $\Gamma(x,\,t;\,\xi,\,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1′), и удовлетворяет оценке

$$|u(x,\,t)|\leqslant C_1e^{h|x|^2} \quad (8)$$

с нек-рыми положительными и постоянными C_1 и k. Условие (8) гарантирует единственность решения задачи Коши.

В случае уравнения с постоянными коэффициентами можно указать условие типа (8) на рост решения, необходимое и достаточное для единственности решения задачи Коши. Напр., для того чтобы в классе функций, удовлетворяющих неравенству

$$|u(x,\,t)|\leqslant Ce^{|x|\,h(|x|)},$$

где $h(|x|)$ — положительная непрерывная на $[0,\,\infty)$ функция, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности было единственно, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл $\int_0^\infty\frac{dr}{h(r)}$.

Для параболич. уравнений можно рассматривать и задачи без начальных условий (задача Фурье). Напр., для однородного уравнения теплопроводности — задачу отыскания решения этого уравнения в цилиндре $D=\{x\in\Omega,\ -\infty<t<+\infty\}$, где Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, удовлетворяющего краевому условию

$$u(x,\,t)|_{x\in\partial\Omega}=\psi(x,\,t).$$

Если функция ψ непрерывна и ограничена, то существует ограниченное решение задачи Фурье; ограниченное решение задачи Фурье единственно.

Для параболич. уравнений и систем можно рассматривать первую смешанную задачу в нецилиндрич. области D и в случае, когда боковая поверхность содержит характеристич. точки (точки касания с плоскостями $t=\text{const}$). В частности, можно рассматривать *Дирихле задачу* — краевые условия задаются на всей границе ∂D. При определенных условиях на множество характеристич. точек и на порядок касания в характеристич. точках границы ∂D с характеристич. плоскостью задача Дирихле однозначно разрешена (в пространстве $W_2^{B^0}$). Напр., пусть (для простоты) $D\subset\mathbb{R}^2$ — строго выпуклая плоская область и пусть уравнение границы в окрестности верхней характеристич. точки $(x^0,\,t^0)$ имеет вид $x-x^0=\varphi_1(t)$ при $x\leqslant x^0$ и $x-x^0=\varphi_2(t)$ при $x\geqslant x^0$, $t^0-\delta<t\leqslant t^0$. Тогда условие расходимости обоих интегралов $\int_{t^0-\delta}^{t^0}|\varphi_i(t)|^{-2p}dt$, $i=1,2$, гарантирует существование и единственность решения задачи Дирихле для параболич. уравнения 2-го порядка. Это условие является и необходимым в данном классе уравнений.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [2] Ильин В. А., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2, с. 97—154; [3] Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, № 3, с. 3—146; [4] Кружков С. Н., «Матем. сб.», 1964, т. 65, № 4, с. 522—70; [5] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967; [6] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [7] ее же, «Математ. сб.», 1950, т. 27, № 2, с. 175—84; [8] Михайлов В. П., «Матем. сб.», 1963, т. 61, № 1, с. 40—64; [9] его же, «Матем. сб.», 1963, т. 62, № 2, с. 140—59; [10] Нэш Дж., «Математика», 1960, т. 4, № 1, с. 31—52; [11] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [12] его же, «Бюлл. Моск. ун-та (А)», 1938, т. 1, в. 7, с. 1— 72; [13] его же, «Comp. math», 1934, № 1, с. 383—419; [14] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [15] Солонников В. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 83, с. 3—163; [16] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [17] Тихонов А. Н., «Бюлл. Моск. ун-та (А)», 1938, т. 1, в. 9, с. 1—43; [18] его же, «Матем. сб.», 1935, т. 42, № 2, с. 199—216; [19] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [20] Эйдельман С. Д., Параболические системы, М., 1964.

В. П. Михайлов.

СМЕШАННОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ — дифференцированное уравнение с частными производными, к-рое в области задания принадлежит различным ти-

пам (эллиптическому, гиперболическому или параболическому).

Линейное (или квазилинейное) дифференциальное уравнение 2-го порядка с двумя неизвестными переменными

$$Au_{xx}+2B_{xy}+Cu_{yy}=f(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y) \qquad (1)$$

и с непрерывными коэффициентами в области задания Ω является С. т. у., если в этой области дискриминант $\Delta=AC-B^2$ характеристич. формы

$$Ady^2+2B\,dx\,dy+C\,dx^2\equiv Q$$

обращается в нуль, не будучи там тождественно равным нулю.

Кривая δ, определяемая уравнением $\Delta=0$, наз. параболической линией уравнения (1), или линией вырождения (изменения) типа уравнения.

Если дискриминант Δ в области Ω не меняет знака при переходе точки $(x,\ y)$ через параболич. линию δ, то уравнение (1) относится к вырожденным уравнениям эллиптико-параболического ($\Delta\geqslant 0$) или гиперболо-параболического ($\Delta\leqslant 0$) типа (см. *Вырожденное уравнение* с частными производными).

При нек-рых условиях гладкости коэффициентов A, B, C и параболич. линии δ существуют неособое действительное преобразование независимых переменных, приводящее уравнение (1) со знакопеременным дискриминантом Δ (в окрестности выбранной точки линии δ, где $A^2+B^2+C^2\neq 0$) к одному из следующих канонич. видов (обозначения для независимых переменных сохранены):

$$y^{2m+1}u_{xx}+u_{yy}=F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y), \qquad (2)$$

$$u_{xx}+y^{2m+1}u_{yy}=F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y). \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) являются С. т. у. (эллиптико-параболич. типа) в любой области, содержащей внутри себя интервал линии вырождения $y=0$.

Область Ω задания С. т. у. принято называть смешанной областью, а краевые задачи в смешанных областях — смешанными краевыми задачами. Часть Ω^+ (Ω^-) смешанной области Ω, где уравнение принадлежит эллиптическому (гиперболическому) типу, наз. областью эллиптичности (гиперболичности).

К отысканию определенных решений С. т. у. сводятся многие проблемы прикладного характера, в частности проблемы околозвукового течения сжимаемой среды и безмоментной теории оболочек.

С. т. у. (1) наз. уравнением первого рода (второго рода), если всюду вдоль параболич. линии характеристич. форма $Q\neq 0$ ($Q=0$). Уравнение Чаплыгина

$$k(y)\,u_{xx}+u_{yy}=0, \qquad (4)$$

где $k(y)$ — непрерывно дифференцируемая монотонная функция такая, что $yk(y)>0$ при $y\neq 0$, — типичный пример С. т. у. 1-го рода. При $k(y)=y$ уравнение (4) принято называть *Трикоми уравнением*.

Важной моделью С. т. у. (с разрывными коэффициентами при старших производных) является уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$\operatorname{sign} y\,u_{xx}+u_{yy}=0. \qquad (5)$$

Одной из основных краевых задач для С. т. у. (первого рода) является задача Трикоми, к-рая для уравнения вида (2) ставится следующим образом. Пусть Ω — конечная односвязная область евклидовой плоскости независимых переменных x и y, ограниченная простой жордановой кривой σ с концами в точках $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, лежащей в полуплоскости $y>0$, и частями AC и BC характеристик уравнения (2), выходящими из точки $C(1/2,\ y_C)$, $y_C<0$. Задача Трикоми заключается в отыскании решения $u(x,\ y)$ уравнения (2), непрерывного в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω и принимающего наперед заданные значения на кривой $\sigma\cup AC$.

В теории задачи Трикоми существенную роль играет принцип экстремума Бицадзе, к-рый в случае уравнения (5) гласит: решение $u(x,\ y)$ уравнения (5) из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$, обращающееся в нуль на характеристике AC : $x+y=0$, $0\leqslant x\leqslant 1/2$, в замыкании $\overline{\Omega}^+$ области эллиптичности $\Omega^+=\Omega\cap\{y>0\}$ своего экстремума достигает на кривой σ.

Этот принцип, из к-рого следует единственность и устойчивость решения задачи Трикоми, а также обоснование альтернирующего метода его отыскания, распространен на весьма широкий класс линейных и квазилинейных С. т. у. В частности, этому классу принадлежат уравнения Чаплыгина (и Трикоми), если $k(y)$ дважды непрерывно дифференцируема и $5k'^2\geqslant 4kk'$ при $y<0$. Принцип экстремума Бицадзе остается в силе и для уравнения

$$\operatorname{sign} y\cdot|y|^{\alpha}u_{xx}+u_{yy}=0,\ \alpha=\text{const}>0. \qquad (6)$$

Решение задачи Трикоми для уравнения (6) в соответствующей смешанной области Ω выписывается в явном виде, если эллиптич. часть σ границы этой области совпадает с т. н. нормальным контуром σ_0:

$$x^2+\left(\frac{2}{\alpha+2}\right)^2 y^{\alpha+2}=1/4.$$

В общем случае при определенных условиях на кривую σ и на класс искомых решений задача Трикоми для уравнения (6) эквивалентно редуцируется к сингулярному интегральному уравнению, безусловная разрешимость к-рого следует из единственности решения. Метод интегральных уравнений успешно применяется и при доказательстве существования решения задачи Трикоми и др. смешанных задач для более общих уравнений вида

$$\operatorname{sign} y\cdot|y|^{\alpha}u_{xx}+u_{yy}=F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)$$

со степенным вырождением порядка α.

Методы теории функций и функционального анализа, особенно метод априорных оценок, позволили значительно расширить класс С. т. у. и смешанных областей, для к-рых имеет место единственность и существование (обобщенного) решения как задачи Трикоми, так и ряда др. смешанных задач.

Существенным обобщением задачи Трикоми является общая смешанная задача Бицадзе, к-рая в случае уравнения (5) ставится следующим образом. Пусть Ω — односвязная смешанная область, ограниченная лежащей в полуплоскости $y>0$ простой жордановой кривой σ с концами в точках $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$ и выходящими из этих точек (гладкими) монотонными кривыми Γ_0 и Γ_1, к-рые пересекаются в точке $C(x_1,\ y_1)$, $y_1<0$. Предполагается, что кривые Γ_0 и Γ_1 принадлежат области, ограниченной характеристиками $x+y=0$, $x-y=1$ и отрезком AB : $0\leqslant x\leqslant 1$ прямой $y=0$. Через B_0 и B_1 обозначены точки пересечения характеристик $x-y=x_0$ и $x+y=x_0$ с кривыми Γ_0 и Γ_1, где x_0 — любая фиксированная точка из полуинтервала $x_1+y_1<x_1\leqslant x_1-y_1$, а через γ_0 и γ_1 — части кривых Γ_0 и Γ_1, лежащих между точками A, B_0 и B, B_1 соответственно. Общая смешанная задача Бицадзе заключается в отыскании регулярного (при $y\neq 0$, $x\pm y\neq x_0$) решения уравнения (5) в области Ω, к-рое непрерывно в $\overline{\Omega}$, имеет непрерывные первые производные в Ω при $x\pm y\neq x_0$ и удовлетворяет заданным краевым условиям на кривых σ, γ_0 и γ_1. Единствен-

ность и существование решения этой задачи как для уравнения (5), так и для более общих уравнений доказаны при нек-рых условиях геометрич. характера на границу области Ω, особенно на кривую σ. Общую смешанную задачу Бицадзе можно считать полностью исследованной в частном случае, когда кривая Γ_1 совпадает ($x_0=1$) с выходящей из точки B характеристикой BC. Важным следствием корректности общей смешанной задачи Бицадзе, напр. для уравнения (5), является тот факт, что для смешанных областей вида Ω *Дирихле задача* некорректна независимо от величины и формы области гиперболичности Ω^-.

Для довольно широкого класса линейных уравнений

$$k(y)u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=f$$

установлено, что на корректность задачи Дирихле в соответствующих смешанных областях вида Ω существенное влияние может оказать коэффициент $a(x, y)$.

Смешанной задачей нового типа является з а д а ч а Ф р а н к л я. Пусть односвязная область Ω ограничена: отрезком $A'A$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, прямой $x=0$; гладкой кривой σ с концами в точках $A(0, 1)$ и $B(a, 0)$, расположенной в квадранте $x>0$, $y>0$; отрезком CB : $a_1\leqslant x\leqslant a$ прямой $y=0$ и проходящей через точки $A'(0, -1)$, $C(a_1, 0)$ характеристикой рассматриваемого С. т. у., напр. уравнения (4). Задача Франкля состоит в отыскании решения $u(x, y)$ С. т. у. в области Ω, когда на $\sigma\cup CB$ задаются значения $u(x, y)$, а на $A'A$ — условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(0, y)-u(0, -y)=f(y),\ -1\leqslant y\leqslant 1,\ x=0.$$

Эта задача исследована в основном для модельных С. т. у. Задача Франкля весьма полно решена для уравнения (5), если кривая σ : $x=x(s)$, $y=y(s)$ такова, что $dy/ds\geqslant 0$, где s — длина σ, отсчитываемая от точки $B(a, 0)$.

Сформулированные основные краевые задачи для С. т. у. 1-го рода с соответствующими изменениями перенесены на С. т. у. 2-го рода. Эти изменения вызваны тем, что задача Дирихле для эллиптич. уравнений с характеристич. вырождением на части границы не всегда является корректно поставленной.

В постановке краевых задач для уравнения (1) в смешанных областях вносится новый аспект, если линия δ изменения типа одновременно представляет собой линию вырождения порядка уравнения, напр. в случае уравнения

$$y^{2p}u_{xx}+yu_{yy}+\beta u_y=0, \qquad (7)$$

где p — натуральное число, а β — постоянная, удовлетворяющая неравенству $1-2p<2\beta<1$.

Для уравнений (5), (6), (7), помимо указанных задач, исследован также ряд принципиально новых краевых задач, к-рые в основном характеризуются тем, что вся граница $\sigma\cup AC\cup BC$ области Ω (где ставится задача Трикоми) является носителем краевых условий: на кривой σ задано, напр., условие Дирихле, а на $AC\cup BC$ — нек-рое нелокальное условие, поточечно связывающее значения искомого решения или его (дробной) производной определенного порядка. В частности, эти задачи включают простой пример корректной самосопряженной смешанной краевой задачи.

Изучаются краевые задачи для С. т. у. и систем в областях, содержащих внутри себя части нескольких линий вырождения типа или одну замкнутую параболич. линию.

Аналоги задачи Трикоми рассматривались и для нек-рого класса С. т. у. и систем с двумя независимыми переменными и уравнений высокого порядка.

Значительные затруднения возникают при отыскании правильно поставленных задач для С. т. у. с многими независимыми переменными. Тем не менее в этом направлении получен ряд важных результатов. Установлено, что для уравнения

$$\operatorname{sign} z\cdot u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(x, y, z), \qquad (8)$$

к-рое представляет собой простую модель С. т. у. с временны́м образом ориентированной плоскостью $z=0$ вырождения типа, корректно поставленной является следующая задача. Пусть Ω — конечная односвязная трехмерная область, ограниченная нек-рой кусочно гладкой поверхностью $z=f(x, y)\geqslant 0$ и характеристиками S_1 : $x+x_0=\sqrt{y^2+z^2}$, S_2 : $x-x_0=\sqrt{y^2+z^2}$ уравнения (8). Требуется найти непрерывную в Ω функцию $u(x, y, z)$ с непрерывными в Ω производными 1-го порядка, удовлетворяющую уравнению (8) в области Ω при $z\neq 0$ и обращающуюся в нуль на σ и на одной из характеристик S_1 или S_2. Доказаны существование слабого и единственность сильного решения этой задачи и для более общего уравнения

$$\operatorname{sign} x_n\cdot u_{x_0x_0}+\Delta_x u=f(x_0, x),\ x=(x_1, \ldots, x_n),$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Для уравнения

$$x_0^{2m}\Delta_x u-x_0u_{x_0x_0}+(m-1/2)u_{x_0}=0 \qquad (9)$$

с пространственно ориентированной гиперплоскостью $x_0=0$ вырождения типа и порядка в смешанной области Ω специального вида поставлены и исследованы краевые задачи, в к-рых часть границы $\partial\Omega$, лежащая в полупространстве $x_0<0$, является носителем данных $u(x_0, x)$, а лежащая в полупространстве $x_0>0$ часть границы $\partial\Omega$ (характеристич. коноид уравнения (9)) — носителем нек-рых интегральных средних для $u(x_0, x)$.

Исследовались и другие модельные С. т. у. в трехмерных ограниченных и неограниченных областях, в т. ч. уравнения

$$z^{2m+1}u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\ z^{2m+1}(u_{xx}+u_{yy})+u_{zz}=0.$$

Найден также критерий единственности решения задачи Дирихле для широкого класса самосопряженных С. т. у. в цилиндрич. областях.

Лит.: [1] Б е р с Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, пер. с англ., М., 1961; [2] Б и ц а д з е А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [3] е г о ж е, К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа, в сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972; [4] Б и ц а д з е А. В., Н а х у ш е в А. М., «Докл. АН СССР», 1972, т. 205, № 1; [5] В е к у а И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [6] К а р а т о п р а к л и е в Г. Д., «Дифференциальные уравнения», 1969, т. 5, № 1, с. 199—205; [7] К е л д ы ш М. В., «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, № 2, с. 181—83; [8] С а л а х и т д и н о в М. С., «Изв. АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук», 1969, № 1, с. 27—33; [9] С м и р н о в М. М., Уравнения смешанного типа, М., 1970; [10] С о л д а т о в А. П., «Дифференциальные уравнения», 1973, т. 9, № 2, с. 325—32; [11] Т р и к о м и Ф., О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, пер. с итал., М.— Л., 1947; [12] Ф р а н к л ь Ф. И., Избранные труды по газовой динамике, М., 1973; [13] F r i e d r i c h s K. O., «Communication Pure and Appl. Math.», 1958, v. 11, № 3, p. 333—418; [14] G e l l e r s t e d t S., «Ark. mat., astr., fys.», 1936, bd 26A, № 3, s. 1—32; [15] G e r m a i n P., B a d e r R., «C.r. Acad. sci.», 1951, t. 232, p. 463—65. *А. М. Нахушев.*

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ в е к т о р о в $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на векторное произведение векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]).$$

См. *Векторная алгебра.*

СМЕШАННЫЙ ПРОЦЕСС АВТОРЕГРЕССИИ-СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО, А Р С С - п р о ц е с с — стационарный в широком смысле случайный процесс

$X(t)$ с дискретным временем $t=0, \pm 1, \ldots$, значения к-рого удовлетворяют разностному уравнению

$$X(t)+a_1X(t-1)+\ldots+a_pX(t-p)=$$
$$=Y(t)+b_1Y(t-1)+\ldots+b_qY(t-q), \qquad (1)$$

где $EY(t)=0$, $EY(t)Y(s)=\sigma^2\delta_{ts}$, δ_{ts} — символ Кронекера (т. е. $Y(t)$ — процесс белого шума со спектральной плотностью $\sigma^2/2\pi$), p и q — нек-рые неотрицательные целые числа, а $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ — постоянные коэффициенты. Если все корни уравнения

$$\varphi(z)=1+a_1z+\ldots+a_pz^p=0$$

по модулю отличны от единицы, то стационарный С. п. а.-с. с. $X(t)$ существует и имеет *спектральную плотность*

$$f(\lambda)=(\sigma^2/2\pi)\,|\psi(e^{i\lambda})|^2\,|\varphi(e^{i\lambda})|^{-2},$$

где $\psi(z)=1+b_1z+\ldots+b_qz^q$. Однако для того, чтобы решение уравнения (1) при фиксированных начальных значениях $X(t_0-1), \ldots, X(t_0-p)$ стремились при $t-t_0\to\infty$ к стационарному процессу $X(t)$, необходимо, чтобы все корни уравнения $\varphi(z)=0$ располагались вне единичного круга $|z|\leqslant 1$ (см., напр., [1], [2]).

Класс гауссовских С. п. а.-с. с. совпадает с классом стационарных процессов, имеющих спектральную плотность и являющихся одномерной компонентой многомерного марковского процесса (см. [3]). Частными случаями С. п. а.-с. с. являются *авторегрессионные процессы* (при $q=0$) и *скользящего среднего процессы* (при $p=0$). Обобщением С. п. а.-с. с. являются введенные в рассмотрение Дж. Боксом (G. Box) и Г. Дженкинсом (G. Jenkins) (см. [1]) и часто используемые в прикладных задачах процессы авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего — нестационарные процессы со стационарными приращениями такие, что их приращения нек-рого фиксированного порядка образуют С. п. а.-с. с.

Лит.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1—2, М., 1974; [2] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [3] Doob J. L., «Ann. Math. Stat.», 1944, v. 15, p. 229—82. *А. М. Яглом.*

СМЕШАННЫХ ОБЪЕМОВ ТЕОРИЯ — раздел теории выпуклых тел, изучающий функционалы, возникающие при рассмотрении линейных комбинаций тел (см. *Сложение* множеств).

Объем V линейной комбинации $\sum_{i=1}^r\lambda_iK_i$ выпуклых тел K_i в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами $\lambda_i\geqslant 0$ является однородным многочленом степени n относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$:

$$V\left(\sum_{i=1}^r\lambda_iK_i\right)=\sum_{i_1=1}^r\ldots\sum_{i_n=1}^r V_{i_1\ldots i_n}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_n}. \qquad (*)$$

Коэффициенты $V_{i_1\ldots i_n}$ предполагаются симметричными относительно перестановок индексов и обозначаются $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$, поскольку они зависят только от тел $K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}$; эти коэффициенты наз. смешанными объемами (с. о.) тел $K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}$.

Значение С. о. т. связано с универсальностью понятия с. о.: при подстановке в $V(K, K_1, \ldots, K_{n-1})$ конкретных тел $K_1, \ldots, K_{n-1}$ получаются многие величины, связанные с телом K. В их числе: объем, площадь поверхности, интеграл по поверхности от элементарной симметрич. функции главных кривизн (в случае C^2-гладкого тела), а также соответствующие характеристики проекции тела на i-мерную плоскость, $0<i<n$. Частным случаем разложения (*) является разложение Штейнера для объемов параллельных тел в $\mathbb{R}^3$:

$$V_\varepsilon=V+S\varepsilon+\pi B\varepsilon^2+\tfrac{4}{3}\pi\varepsilon^3,$$

где V — объем, S — площадь поверхности, B — интегральная средняя кривизна исходного тела, V_ε — объем его ε-окрестности. С. о. $V(K_1, \ldots, K_n)$ инвариантен относительно параллельных переносов любого тела K_i, монотонен (по включению тел), непрерывен и неотрицателен; $V(K_1, \ldots, K_n)>0$ тогда и только тогда, когда в каждом K_i можно провести по отрезку так, чтобы эти отрезки были линейнонезависимы (см. [1]).

Если K' — проекция K на гиперплоскость, ортогональную единичному отрезку e, то

$$V(K_1, \ldots, K_{n-1}, e)=nV\left(K_1', \ldots, K_{n-1}'\right).$$

Объем проекции тела K на p-мерное подпространство наз. p-й внешней поперечной мерой. Соотношения между средними значениями $W_p(K)$ этих мер — один из объектов интегральной геометрии. Функционалы $W_p(K)$ с точностью до множителя совпадают с p-ми интегралами кривизны:

$$V_p(K)=V(\underbrace{K, \ldots, K}_{p}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-p}),$$

где U — единичный шар. Для C^2-гладких строго выпуклых тел с. о. $V_p(K)$, $0<p<n$, равен интегралу от p-й элементарной симметрич. функции D_p главных радиусов кривизны, рассматриваемой как функция нормали на сфере S^{n-1}. В случае общих выпуклых тел $V_p(K)$ есть полное значение определяемой ниже меры $\mu_p(\omega)$ на S^{n-1}, называемой функцией кривизны. (В гладком случае D_p есть плотность μ_p.) Подобно тому как объем тела K есть $\frac{1}{n}$ интеграла от его *опорной функции* $K(u)$ по его поверхностной функции, т. е. по площади поверхности, перенесенной на S^{n-1} сферическим отображением, так и с. о. n тел представим интегралом от опорной функции $K_1(u)$ одного из них по нек-рой мере $\mu(\omega)=\mu(K_2, \ldots, K_n, \omega)$ на S^{n-1}, зависящей от остальных тел и называемой смешанной поверхностной функцией тел $K_2, \ldots, K_n$:

$$V(K_1, \ldots, K_n)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}K_1(u)\,d\mu.$$

Функция кривизны $\mu_p(\omega)$ определяется равенством

$$\mu_p(\omega)=\mu(\underbrace{K, \ldots, K}_{p}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-p-1}, \omega).$$

Основным содержанием С. о. т. являются неравенства между с. о. (см. [2], [3]). В их числе — неравенство Минковского

$$V^n(K, L, \ldots, L)\geqslant V(K)V^{n-1}(L)$$

и квадратичное неравенство Минковского

$$V^2(K, L, \ldots, L)\geqslant V(L)\,V(K, K, L, \ldots, L).$$

Эти неравенства тесно связаны с *Брунна — Минковского теоремой*, справедливой не только для выпуклых тел. Обобщает эти неравенства Александрова — Фенхеля неравенство, допускающее следующую модификацию (см. [2]):

$$V^m(K_1, \ldots, K_m, L_1, \ldots, L_{n-m})\geqslant$$
$$\geqslant\prod_{i=1}^m V(K_i, \ldots, K_i, L_1, \ldots, L_{n-m}).$$

В частности,

$$V^n(K_1, \ldots, K_n)\geqslant V(K_1)\ldots V(K_n).$$

Полная система неравенств, характеризующая с. о. $V(K_1, \ldots, K_n)$, получена для двух тел, в связи с этим установлены нек-рые более общие неравенства (см. [4]).

Многие геометрич. неравенства, напр. *изопериметрическое неравенство классическое* и ряд его уточнений, являются для выпуклых тел частными случаями неравенств для с. о.; экстремум одного из функционалов $V_p(K)$ при фиксации другого из них достигается для шара. Неравенства С. о. т. использованы при доказательстве единственности решения обобщенной проблемы Минковского (см. [2]), устойчивости в проблемах Минковского (см. [5]) и Вейля (см. [6]), при решении проблемы Ван дер Вардена о перманенте (см. [7]). Бесконечномерный аналог понятий С. о. т. нашел применение в теории гауссовских случайных процессов (см. [7]).

С. о. т. оказалась глубоко связанной с алгебраич. геометрией. Многочлену $f(z_1,\ldots,z_n)$ от n комплексных переменных сопоставляют многогранник Ньютона $Nw(f)$. Для этого каждому одночлену $z_1^{a_1}\ldots z_n^{a_n}$, входящему в f с ненулевым коэффициентом, сопоставляется точка $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$; многогранник $Nw(f)$ есть выпуклая оболочка этих точек. Типичное число решений системы полиномиальных уравнений $f_1=\ldots=f_n=0$ равно деленному на $n!$ с. о. многогранника $Nw(f)$. Эта связь позволила, в частности, дать алгебраич. доказательство неравенства Александрова — Фенхеля (см. [10]).

В С. о. т. выпуклое тело отождествляют с его опорной функцией; допускается распространение на разности этих функций, а затем — на произвольные непрерывные функции на сфере (см. [2], [9]). Из аналогичного разложения для вектора центра тяжести тела $\sum_{i=1}^r \lambda_i K_i$, умноженного на объем этого тела, определяются т. н. смешанные направляющие векторы, являющиеся векторным аналогом смешанных объемов. Центры тяжести функций кривизны тела K с точностью до постоянного множителя совпадают со смешанными направляющими векторами K и шара U (см. [11]).

Лит.: [1] Minkowski H., Gesam. Abh., Bd 2, Lpz.— B., 1911; [2] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1937, t. 2, № 5, с. 947—72, № 6, с. 1205—38; 1938, t. 3, № 1, с. 27—46, № 2, с. 227—51; [3] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964; [4] Shephard G., «Mathematika», 1960, v. 7, № 14, p. 125—38; [5] Дискант В. И., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 3, с. 669—73; [6] Волков Ю. А., «Укр. геометр. сб.», 1968, № 5—6, с. 44—69; [7] Егорычев Г. П., Решение проблемы Ван-дер-Вардена для перманентов, Красноярск, 1980; [8] Судаков В. Н., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 1, с. 43—45; [9] Busemann H., Ewald G., Shephard G., «Math. Ann.», 1963, Bd 151, № 1, S. 1—41; [10] Хованский А. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 4, с. 160—61; [11] Schneider R., «Abh. math. Semin. Univ. Hamburg», 1972, Bd 37, S. 112—32.

Ю. Д. Бураго.

СМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка, математич. ожидание к-рой не совпадает с оцениваемой величиной.

Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$, и пусть $T=T(X)$ — точечная статистич. оценка функции $f(\theta)$, заданной на параметрич. множестве Θ. Предполагается, что математич. ожидание $\mathsf{E}_\theta\{T\}$ оценки T существует. Если в этих условиях функция

$$b(\theta)=\mathsf{E}_\theta\{T\}-f(\theta)=\mathsf{E}_\theta\{T-f(\theta)\}$$

не равна тождественно нулю, т. е. если $b(\theta)\not\equiv 0$, то T наз. смещенной оценкой функции $f(\theta)$, а сама функция $b(\theta)$ наз. смещением или систематической ошибкой оценки T.

Пример. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — взаимно независимые одинаково нормально $N_1(a,\sigma^2)$ распределенные случайные величины и пусть

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n).$$

В таком случае статистика

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$$

является С. о. дисперсии σ^2, так как

$$\mathsf{E}\{S_n^2\}=\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n},$$

т. е. оценка S_n^2 имеет смещение $b(\sigma^2)=-\sigma^2/n$, при этом квадратичный риск этой С. о. равен

$$\mathsf{E}\{(S_n^2-\sigma^2)^2\}=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4.$$

Наилучшей *несмещенной оценкой* параметра σ^2 является статистика

$$s_n^2=\frac{n}{n-1}S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2,$$

квадратичный риск к-рой равен

$$\mathsf{D}\{s_n^2\}=\mathsf{E}\{(s_n^2-\sigma^2)\}=\frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

В данном случае при $n>2$ квадратичный риск С. о. S_n^2 меньше квадратичного риска наилучшей несмещенной оценки s_n^2.

Существуют ситуации, когда несмещенные оценки не существуют. Так, напр., не существует несмещенной оценки для абсолютной величины $|a|$ математич. ожидания a нормального закона $N_1(a,\sigma^2)$, т. е. для $|a|$ можно построить только С. о.

Лит.: [1] Крамер Г., Математич. методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

М. С. Никулин.

СМИРНОВА КЛАСС $E_p(G)$ — совокупность функций $f(z)$, голоморфных в односвязной области $G\subset\mathbb{C}$ с жордановой спрямляемой границей Γ и таких, что для каждой из этих функций существует последовательность замкнутых жордановых спрямляемых кривых $\Gamma_n(f)\subset G$, $n=1,2,\ldots$, со свойствами: 1) $\Gamma_n(f)$ при $n\to\infty$ стремится к Γ в том смысле, что если $G_n(f)$ — ограниченная область с границей $\Gamma_n(f)$, то

$$G_1(f)\subset G_2(f)\subset\ldots\subset G_h \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(f)=G;$$

2) $\sup_n\{\int_{\Gamma_n(f)}|f(z)|^p|dz|\}<\infty$ ($p>0$ задано).

Это определение, предложенное М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [2], эквивалентно определению В. И. Смирнова [1], в к-ром вместо $\Gamma_n(f)$ фигурируют кривые $\gamma(\rho)$, являющиеся образами соответствующих окружностей $|w|=\rho<1$ при нек-ром однолистном конформном отображении $z=\varphi(w)$ круга $|w|<1$ на область G, а супремум берется по $\rho\in(0,1)$.

Классы $E_p(G)$ являются наиболее известным и изученным обобщением *Харди классов* H_p и связаны с ними следующим соотношением: $f\in E_p(G)$ тогда и только тогда, когда

$$f(\varphi(w))(\varphi'(w))^{1/p}\in H_p.$$

По своим свойствам классы $E_p(G)$ наиболее близки классам H_p в случае *Смирнова областей* G. Изучалось обобщение С. к. на случай произвольных областей G с границами конечной длины по Хаусдорфу. См. также *Граничные свойства аналитических функций.*

Лит.: [1] Смирнов В. И., «Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. наук», 1932, № 3, с. 337—72; [2] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., «Ann. sci École Norm. supér.», 1937, t. 54, p. 1—38; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [5] Duren P. L., Theory of H^p-spaces, N.Y.— L., 1970.

Е. П. Долженко.

СМИРНОВА КРИТЕРИЙ — непараметрический статистич. критерий, применяемый для проверки гипотезы об однородности двух выборок.

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ и $Y_1,\ldots,Y_m$ — взаимно независимые случайные величины, причем каждая выборка состоит из одинаково непрерывно распределенных элементов, и пусть надлежит проверить гипотезу H_0,

согласно к-рой обе выборки извлечены из одной и той же совокупности. Если

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)} \text{ и } Y_{(1)} \leqslant Y_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant Y_{(m)}$$

— вариационные ряды, отвечающие данным выборкам, а $F_n(x)$ и $G_m(x)$ — соответствующие им функции эмпирич. распределения, то гипотезу H_0 можно записать в виде следующего тождества

$$H_0: \mathsf{E}F_n(x) \equiv \mathsf{E}G_m(x).$$

Далее, пусть в качестве возможных альтернатив к H_0 рассматриваются гипотезы

$$H_1^+ = \sup_{|x|<\infty} \mathsf{E}[G_m(x) - F_n(x)] > 0,$$

$$H_1^- = \inf_{|x|<\infty} \mathsf{E}[G_m(x) - F_n(x)] < 0,$$

$$H_1 = \sup_{|x|<\infty} |\mathsf{E}[G_m(x) - F_n(x)]| > 0.$$

Для проверки гипотезы H_0 против односторонних альтернатив H_1^+ и H_1^-, а также против двусторонней H_1, Н. В. Смирновым предложены статистич. критерии, построенные на статистиках

$$D_{m,n}^+ = \sup_{|x|<\infty} [G_m(x) - F_n(x)] = \max_{1\leqslant k\leqslant m} \left(\frac{k}{m} - F_n(X_{(k)})\right),$$

$$D_{m,n}^- = -\inf_{|x|<\infty} [G_m(x) - F_n(x)] = \max_{1\leqslant k\leqslant m} \left(F_n(X_{(k)}) - \frac{k-1}{m}\right),$$

$$D_{m,n} = \sup_{|x|<\infty} |G_m(x) - F_n(x)| = \max\left(D_{m,n}^+, D_{m,n}^-\right)$$

соответственно, причем, как следует из определений статистик $D_{m,n}^+$ и $D_{m,n}^-$, при справедливости проверяемой гипотезы H_0, статистики $D_{m,n}^-$ и $D_{m,n}^+$ распределены одинаково. В основе этих критериев лежит следующая теорема: если $\min(m, n) \to \infty$ так, что отношение m/n остается постоянным, то при справедливости гипотезы H_0 для любого $y > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}^+ < y\right\} = 1 - e^{-2y^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} < y\right\} = K(y),$$

где $K(y)$ — функция распределения Колмогорова. Были получены (см. [4] — [6]) асимптотич. разложения для функций распределения статистик $D_{m,n}^+$ и $D_{m,n}$.

Согласно С. к. с уровнем значимости Q гипотеза H_0 отвергается в пользу одной из рассматриваемых альтернатив H_1^+, H_1^-, H, если статистика, соответствующая выбранной альтернативе, превосходит Q — критическое значение критерия, для вычисления к-рого рекомендуется пользоваться аппроксимациями, полученными Л. Н. Большевым [2] с помощью асимптотич. преобразований Пирсона.

См. также *Колмогорова критерий*, *Колмогорова — Смирнова критерий*.

Лит.: [1] Смирнов Н. В., «Бюлл. МГУ», 1939, т. 2, в. 2, с. 3—14; [2] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129—55; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [4] Королюк В. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 4, с. 369—97; [5] Чжан Ли-цянь, «Математика», 1960, т. 4, № 2, с. 135—59; [6] Боровков А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 4, с. 605—24.

М. С. Никулин.

СМИРНОВА ОБЛАСТЬ, область типа C, область типа S,— ограниченная односвязная область G с жордановой спрямляемой границей на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со свойством: существует такое однолистное конформное отображение $z = \varphi(w)$ круга $|w| < 1$ на область G, что гармонич. функция $\ln|\varphi'(w)|$ при $|w| < 1$ представима интегралом Пуассона по своим угловым граничным значениям $\ln|\varphi'(e^{i\theta})|$:

$$\ln|\varphi'(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)} \ln|\varphi'(e^{it})|\,dt.$$

Эти области введены В. И. Смирновым [1] в 1928 при исследовании полноты системы многочленов в *Смирнова классе* $E_2(G)$. Проблема существования несмирновских областей с жордановыми спрямляемыми границами была решена М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [2], давшими тонкую и сложную конструкцию таких областей и соответствующих отображающих функций φ с дополнительным свойством: $|\varphi'(e^{i\theta})| = 1$ почти для всех $e^{i\theta}$. Основные *граничные свойства аналитических функций* в круге присущи и функциям, аналитическим в С. о., причем многие из таких свойств справедливы в С. о. и только в них. Примеры С. о. дают жордановы области, границы к-рых суть кривые Ляпунова или кусочно ляпуновские кривые с ненулевыми углами.

Лит.: [1] Смирнов В. И., «Ж. Ленингр. физ.-матем. об-ва», 1928, т. 2, № 1, с. 155—79; [2] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., «Ann. sci. École norm. supér», 1937, t. 54, p. 1—38; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Ловатер А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259; [5] Тумаркин Г. Ц., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1962, № 13, с. 47—55.

Е. П. Долженко.

СНЕДЕКОРА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Фишера F-распределение*.

СНОБОЛ — *алгоритмический язык*, предназначенный для программирования задач обработки символьной информации, т. е. представленной словами в нек-ром алфавите. В литературе по программированию такие слова наз. строками, или цепочками, а образующие их буквы — литерами. На основе начального варианта С., разработанного в нач. 1960-х гг., было создано несколько версий языка, из к-рых наиболее стабильной оказалась версия С.-4. Аналогично *рефалу*, С. имеет своей теоретич. предпосылкой *нормальные алгорифмы* А. А. Маркова, в к-рых основной вычислительной операцией является обнаружение в слове A вхождения заданного подслова B с последующей заменой этого вхождения на другое слово C.

Общая структура программ на С. типична для алгоритмич. языков. Программа имеет вид последовательности операторов (инструкций) присваивания, сопоставления с образцом, замещения, передачи управления, ввода, вывода и останова. В выражениях могут употребляться как примитивные операции, предикаты и функции, так и функции, определяемые программистом (в т. ч. и рекурсивные). Любая инструкция может быть помечена. Метка в С. может трактоваться как строковая переменная, значением к-рой является инструкция, помеченная этой меткой. Основными типами данных являются строки, целые и действительные числа, имена, образцы. Базисным типом является строка, все остальные данные имеют строковое представление, совпадающее с их способом записи в программе. Однородные данные могут объединяться в массивы и таблицы, произвольные данные объединяются в наборы заданной длины и с заданными именами для каждой позиции (поля) набора. Имена обозначают переменные, метки, формальные параметры и функции. Строки в С. могут быть любой длины. Переменные не имеют постоянно приписываемого им типа, однако *операнды* каждой операции или примитивной функции ожидают данных определенного типа, преобразуя аргументы к ожидаемому типу либо выдавая сообщение об ошибке.

Наиболее характерной операцией С. является сопоставление строки с образцом. Образец — это особое выражение С., создающее в нек-рой последователь-

ности группу контрольных строк и определенную дисциплину движения слева направо (сканирования) вдоль сопоставляемой строки, называемой субъектом. Сопоставление — это последовательность элементарных проверок. Элементарная проверка устанавливает, является ли очередная контрольная строка подстрокой остатка (справа от точки сканирования) субъекта. В зависимости от успеха или неуспеха элементарной проверки происходит либо выработка сообщения об успехе или неуспехе сопоставления в целом, либо переход к следующей контрольной строке образца и перенос точки сканирования. В результате успешного сопоставления в субъекте выделяется последовательность нек-рых подстрок. Эти подстроки могут быть присвоены указанным переменным либо замещены на другие подстроки.

Примитивным образцом является выражение, значение к-рого есть строка, а успехом сопоставления с ней является вхождение этой строки в субъект. Конкатенация AB образцов A и B создает образец, успех в сопоставлении с к-рым требует успеха в сопоставлении с A, а затем — успеха в сопоставлении остатка субъекта с образцом B. Альтернация $A|B$ образцов A и B создает образец, сопоставление с к-рым успешно при сопоставимости либо с A, либо с B. Если A — образец и X — переменная, то конструкция A, X означает образец, успешное сопоставление с к-рым сохраняет в качестве значения X ту контрольную строку, вхождение к-рой в субъект привело к успеху.

Инструкция сопоставления с образцом имеет вид VA, где V — переменная-субъект и A — образец. Условная передача управления изображается инструкцией VA : $F(M1)S(M2)$, где $M1$ и $M2$ — метки перехода в случае неудачи и удачи сопоставления соответственно. Инструкция замещения имеет вид $VA=E$, где E — строковое выражение, значение к-рого при успешном сопоставлении замещает в V выделенную подстроку.

С. имеет развитую библиотеку примитивных функций, к-рые в сочетании с операциями конкатенации и альтернации позволяют создать емкие образцы и компактно записывать в виде инструкции замещения весьма сложные правила анализа и преобразования строк. Программы на С. обрабатываются программирующим процессором интерпретационного типа. Программа транслируется в промежуточную форму, к-рая исполняется с помощью интерпретатора. С. реализован для всех главных архитектур современных ЭВМ. Реализация этого языка содействовала разработке эффективных алгоритмов манипулирования в памяти ЭВМ строками переменной длины.

Лит.: [1] Farber D. J., Griswold R. E., Polonsky I. P., «J. Assoc. Comput. Mach.», 1964, v. 11, № 1, p. 21—30; [2] Griswold R. E., String and list processing in SNOBOL 4. Techniques and applications, Englewood Cliffs (N. Y.), 1975; [3] Грисуолд Р., Поудж Дж., Полонски И., Язык программирования СНОБОЛ-4, пер. с англ., М., 1980.

А. П. Ершов.

СОБОЛЕВА КЛАСС функций — другое название *Соболева пространства*.

СОБОЛЕВА ОБОБЩЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — локально суммируемая обобщенная производная от локально суммируемой функции (см. *Обобщенная функция*).

Подробнее, если Ω есть открытое множество в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и $F(x)$ и $f(x)$ — заданные на Ω локально суммируемые функции, то $f(x)$ есть обобщенная частная производная по x_j по Соболеву от функции $F(x)$ на Ω:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=f(x),\ x\in\Omega,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

если выполняется равенство

$$\int_\Omega F(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx=-\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

для любых бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций $\varphi(x)$; эта производная — С. о. п.— определена только почти всюду на Ω.

Другое эквивалентное определение С. о. п.: пусть локально суммируемую на Ω функцию $F(x)$ можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что она будет локально абсолютно непрерывной по x_j для почти всех в смысле $(n-1)$-мерной меры точек $(x_1,\ldots,x_{j-1},\ x_{j+1},\ldots,\ x_n)$. Тогда функция F будет иметь обычную частную производную x_j почти для всех $x\in\Omega$. Если она локально суммируема, то она и наз. С. о. п.

Третье эквивалентное определение С. о. п.: пусть для определенных на Ω функций $F(x)$ и $f(x)$ можно подобрать последовательность непрерывно дифференцируемых на Ω функций $\{F_k(x)\}$ таких, что для любой области ω, замыкание к-рой принадлежит Ω, имеет место

$$\int_\omega |F_n(x)-F(x)|\,dx\longrightarrow 0,$$

$$\int_\omega\left|\frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j}-f(x)\right|dx\longrightarrow 0,\quad k\longrightarrow\infty;$$

тогда $f(x)$ есть С. о. п. от $F(x)$ на Ω.

По индукции определяются С. о. п. на Ω от F (если они существуют) более высокого порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j},\qquad \frac{\partial^3 F}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k},\ \ldots$$

Они не зависят от порядка дифференцирования, напр.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_i}$$

почти всюду на Ω.

Лит.: [1] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, [2 изд.], Новосиб., 1962; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975.

С. М. Никольский.

СОБОЛЕВА ПРОСТРАНСТВО — пространство $W_p^l(\Omega)$ функций $f=f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$, определенных на множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ (обычно открытом) и интегрируемых с p-й степенью их модуля вместе со своими *обобщенными производными* до порядка l включительно ($1\leqslant p\leqslant\infty$).

Норма функции $f\in W_p^l(\Omega)$ определяется при помощи равенства

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)}=\sum_{|k|\leqslant l}\|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)}. \qquad (1)$$

Здесь

$$f^{(k)}=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},\quad f^{(0)}=f,$$

есть обобщенная частная производная от f порядка $|k|=\sum_{j=1}^n k_j$ и норма

$$\|\psi\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int_\Omega|\psi(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\quad(1\leqslant p\leqslant\infty).$$

При $p=\infty$ эта норма равна существенному максимуму:

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}\operatorname{vrai}|\psi(x)|\quad(p=\infty),$$

т. е. нижней грани чисел A, для к-рых неравенство $A<|\psi(x)|$ имеет место на множестве меры нуль.

Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$ определено и впервые применено в теории краевых задач математич. физики в [1], [2].

Благодаря тому что в определении С. п. участвуют не обычные, а обобщенные производные, оно является полным, т. е. банаховым пространством.

Наряду с $W_p^l(\Omega)$ рассматривается его линейное подпространство, обозначенное $W_{pc}^l(\Omega)$ и состоящее из

функций, имеющих равномерно непрерывные на Ω частные производные l-го порядка. Подпространство $W^l_{pc}(\Omega)$ имеет преимущества перед $W^l_p(\Omega)$, однако оно не замкнуто в метрике $W^l_p(\Omega)$ и само по себе не является полным пространством, но для широкого класса областей (с липшицевой границей, см. ниже) при $1\leqslant p<\infty$ пространство $W^l_{pc}(\Omega)$ плотно в $W^l_p(\Omega)$, т. е. для таких областей пространство $W^l_p(\Omega)$, кроме полноты, приобретает новое свойство, заключающееся в том, что каждая принадлежащая к нему функция может быть как угодно хорошо приближена в метрике $W^l_p(\Omega)$ функциями из $W^l_{pc}(\Omega)$.

Выражение (1) для нормы функции $f\in W^l_p(\Omega)$ удобно заменить на следующее выражение:

$$\|f\|'_{W^l_p(\Omega)}=\Big(\int_\Omega\sum_{|k|\leqslant l}|f^{(k)}(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\ (1\leqslant p<\infty). \tag{1'}$$

Норма (1′) эквивалентна норме (1) (т. е. $c_1\|f\|\leqslant\|f\|'\leqslant c_2\|f\|$, где c_1, $c_2>0$ не зависят от f). При $p=2$ норма (1′) гильбертова, и это широко используется в приложениях.

Граница Г ограниченной области Ω наз. л и п ш и ц е в о й, если, какова бы ни была точка $x^0\in\Gamma$, найдется прямоугольная система координат $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ с началом в этой точке и прямоугольник

$$\Delta=\{\xi:|\xi|<\delta,\quad j=1,\ \ldots,\ n-1,\ \ |\xi_n|<\delta\}$$

такой, что пересечение $\Gamma\Delta$ описывается функцией $\xi_n=\psi(\xi')$,

$$\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\in\Delta'=\{\xi':|\xi_j|<\delta,\ j=1,\ldots,n-1\},$$

удовлетворяющей на Δ' (проекции Δ на плоскость $\xi_n=0$) условию Липшица

$$|\psi(\xi'_1)-\psi(\xi'_2)|\leqslant M|\xi'_1-\xi'_2|,\quad \xi'_1,\ \xi'_2\in\Delta',$$

где константа M не зависит от указанных точек ξ'_1, ξ'_2 и $|\xi|^2=\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2$. Гладкие и многие кусочно гладкие границы охватываются понятием липшицевой границы.

Для области с липшицевой границей норма (1) эквивалентна следующей:

$$\|f\|_{W^l_p(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|'_{w^l_p(\Omega)},$$

где полунорма

$$\|f\|'_{w^l_p(\Omega)}=\sum_{|k|=l}\|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)}.$$

Можно рассматривать более общие анизотропные пространства (классы) $W^l_p(\Omega)$, где $l=(l_1,\ldots,l_n)$ — положительный вектор (см. *Вложения теоремы*). Для каждого такого вектора l эффективно и в известной мере исчерпывающе определяется класс областей $\mathfrak{M}^{(l)}$, обладающих тем свойством, что если $\Omega\subset\mathfrak{M}^{(l)}$, то любую функцию $f\in W^l_p(\Omega)$ можно продолжить на $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса. Точнее, можно определить на $\mathbb{R}^n$ функцию $\overline{f}(x)$ со свойствами

$$\overline{f}(x)=f(x),\quad x\in\Omega,\ \|\overline{f}\|_{W^l_p(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\|f\|_{W^l_p(\Omega)},$$

где c не зависит от f (см. [3]).

Благодаря этому свойству неравенства типа теорем вложения для функций $f\in W^l_p(\mathbb{R}^n)$ автоматически переносятся на функции $f\in W^l_p(\Omega)$, $\Omega\in\mathfrak{M}^{(l)}$.

Для векторов вида $l=(l_1,\ldots,l_n)$ области $\Omega\in\mathfrak{M}^{(l)}$ имеют липшицевы границы. Для них $W'_p(\Omega)=W^l_p(\Omega)$.

Исследование пространств (классов) $W^l_p(\Omega)$ ($\Omega\in\mathfrak{M}^{(l)}$) ведется на основе специальных интегральных представлений функций, принадлежащих этим классам. Первое такое представление получено (см. [1], [2]) для изотропного пространства $W^l_p(\Omega)$ области Ω, звездной относительно нек-рого шара. Дальнейшее развитие этого метода см., напр., в [3].

Классы W^l_p и W^l_p получили обобщение на случай дробных чисел или векторов $l=(l_1,\ldots,l_n)$ с дробными компонентами l_j.

Пространство $W^l_p(\Omega)$ рассматривают и для отрицательных целых l. Элементами его являются, вообще говоря, *обобщенные функции* f, т. е. линейные функционалы (f,φ) над финитными в Ω бесконечно дифференцируемыми функциями φ.

По определению, обобщенная функция f принадлежит классу $W^{-l}_p(\Omega)$ при натуральном $l=1,2,3,\ldots$, если конечна верхняя грань:

$$\|f\|_{W^{-l}_p(\Omega)}=\sup(f,\varphi),$$

распространенная на указанные функции φ с нормой в метрике $W^l_q(\Omega)$, не превышающей единицу ($1/p+1/q=1$). Можно еще сказать, что функции $f\in W^{-l}_p(\Omega)$, $l=1,2,\ldots$, образуют пространство, сопряженное к банахову пространству $W^l_q(\Omega)$.

Лит.: [1] С о б о л е в С. Л., «Матем. сб.», 1938, т. 4, с. 471—97; [2] е г о ж е, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, [2 изд.], Новосиб., 1962; [3] Б е с о в О. В., И л ь и н В. П., Н и к о л ь с к и й С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1974; [4] Н и к о л ь с к и й С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.

С. М. Никольский.

СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ — собственный вектор оператора, действующего в функциональном пространстве.

В. С. Шульман.

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ о п е р а т о р а (п р е о б р а з о в а н и я) A векторного пространства L над полем k — элемент $\lambda\in k$ такой, что существует ненулевой вектор $x\in L$, удовлетворяющий условию

$$Ax=\lambda x.$$

Вектор x в этом равенстве наз. *собственным вектором* оператора A, принадлежащим С. з. λ. В случае, когда оператор A линеен, С. з.— это такой элемент $\lambda\in k$, что оператор $A-\lambda I$ (где I — тождественный оператор) не инъективен. Если пространство L конечномерно, то С. з. совпадают с корнями *характеристического многочлена* $\det\|A-\lambda E\|$ (из поля k), где A — матрица линейного преобразования A в нек-ром базисе, а E — единичная матрица. Кратность С. з. как корня этого многочлена наз. а л г е б р а и ч е с к о й к р а т н о с т ь ю. Для любого линейного преобразования конечномерного пространства над алгебраически замкнутым полем k множество С. з. непусто. Оба условия — конечномерность и алгебраич. замкнутость — существенны. Напр., поворот евклидовой плоскости ($k=\mathbb{R}$) на любой угол, не кратный π, не имеет С. з. С другой стороны, для оператора в гильбертовом пространстве, сопряженного сдвигу, каждое число из открытого единичного круга — С. з.

Совокупность всех С. з. линейного преобразования конечномерного пространства наз. с п е к т р о м л и н е й н о г о п р е о б р а з о в а н и я. Линейное преобразование n-мерного пространства диагонализируемо (т. е. существует базис, в котором матрица преобразования диагональна) тогда и только тогда, когда алгебраическая кратность каждого С. з. равна его г е о м е т р и ч е с к о й к р а т н о с т и — размерности собственного подпространства (см. *Собственный вектор*), соответствующего данному С. з. В частности, для диагонализируемости линейного преобразования достаточно, чтобы оно имело n различных С. з.

Собственное значение квадратной матрицы A над полем k (или характеристический корень) — корень ее характеристического многочлена.

Лит. см. при статьях *Линейное преобразование*, *Матрица*.

Т. С. Пиголкина, В. С. Шульман.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ; численные методы нахождения — методы вычисления собственных значений и соответствующих собственных функций дифференциальных операторов. Колебания упругих ограниченных тел описываются уравнением

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=L\varphi, \tag{1}$$

где $L\varphi$ — нек-рое дифференциальное выражение. Если решение уравнения (1) искать в виде

$$\varphi=T(t)\,u(x),$$

то относительно функции u получается уравнение

$$L(u)+\lambda u=0 \tag{2}$$

внутри ограниченной области при нек-рых однородных условиях на ее границе. Значения параметра λ, при к-рых существуют отличные от тождественного нуля решения уравнения (2), удовлетворяющие однородным краевым условиям, наз. собственными значениями (числами), а их соответствующие решения — собственными функциями. Возникающая при этом дифференциальная задача на собственные значения состоит в нахождении собственных значений λ и соответствующих им собственных функций.

Численное решение дифференциальной задачи на собственные значения проводится в три этапа:

1) сведение задачи к более простой, напр. к алгебраической (дискретной);

2) выяснение точности дискретной задачи;

3) вычисление собственных значений дискретной задачи (см. *Линейная алгебра*; численные методы).

Сведение к дискретной задаче. Сведение задачи (2) к ее дискретной модели производится в основном *сеток методом* и *проекционными методами*. При этом естественно требовать, чтобы основные свойства исходной задачи сохранялись в ее дискретном аналоге. В частности, должна сохраняться самосопряженность соответствующих дискретных операторов в пространстве функций дискретного аргумента.

Одним из методов такого сведения является интегро-интерполяционный метод. Напр., пусть поставлена задача

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right)+\lambda u=0,\quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$u(0)=0,\quad u(1)=0. \tag{4}$$

Эта задача возникает, напр., при изучении поперечных колебаний неоднородной струны и продольных колебаний неоднородного стержня.

На отрезке $[0, 1]$ вводится разностная сетка $\overline{\omega}$ с узлами $x_i=ih$, $i=0,1,\ldots, N$, $h=1/N$. Каждому узлу x_i, $i=1,\ldots, N-1$, ставится в соответствие элементарная область $S_i\{x_i-h/2\leqslant x\leqslant x_i+h/2\}$. Интегрирование по областям S_i уравнения (3) приводит к выражению

$$\left.\begin{aligned}\frac{w_{i-1/2}-w_{i+1/2}}{h}&=\lambda\frac{1}{h}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}u\,dx,\\ w_{i\pm1/2}&=\left(\frac{1}{p}\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i\pm h/2}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Пусть

$$u=\mathrm{const}=u_i,\quad x_i-h/2\leqslant x\leqslant x_i+h/2,$$

$$w=\mathrm{const}=w_{i-1/2},\quad x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i.$$

Тогда

$$w_{i-1/2}=\frac{u_i-u_{i-1}}{ha_i},\quad a_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}p(x)\,dx. \tag{6}$$

При подстановке (6) в (5) получается уравнение

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{v_{i+1}-v_i}{a_{i+1}h}-\frac{v_i-v_{i-1}}{a_ih}\right)=\lambda^h v_i,\quad i=1, 2, \ldots, N-1,$$

где v — искомая сеточная функция. Краевые условия $v_0=0$, $v_N=0$ приводят к алгебраич. задаче на собственные значения

$$Av=\lambda^h v, \tag{7}$$

где A — трехдиагональная симметрич. матрица порядка $n=N-1$ (см. [10]).

Вариационно-разностный метод сведения к дискретной задаче используется, когда задача на собственные значения может быть сформулирована как вариационная. Напр., собственные значения задачи (3), (4) являются стационарными значениями функционала

$$\frac{D[u]}{H[u]},\quad D[u]=\int_0^1\frac{1}{p(x)}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx;\quad H[u]=\int_0^1u^2\,dx.$$

При замене интегралов квадратурными суммами, а производных — разностными отношениями, дискретный аналог функционала имеет вид

$$\frac{D^h[v]}{H^h[v]},\quad D^h[v]=\sum_{i=1}^N\frac{1}{a_i}\left(\frac{v_i-v_{i-1}}{h}\right)^2h;$$

$$H^h[v]=\sum_{i=0}^N v_i^2h,$$

где a_i — разностный аналог коэффициента $p(x)$, к-рый может быть вычислен по формуле (6). Дискретный аналог задачи (3), (4) получается из необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(D^h[v]-\lambda^hH^h[v])=0,\quad i=1, 2, \ldots, N-1.$$

Дифференцирование приводит снова к задаче (7) (см. [9]).

Проекционно-разностный метод сведения к дискретной задаче состоит в следующем. Выбирается линейно независимая координатная система функций α_i, $i=1, 2,\ldots, n$, и линейно независимая проекционная система функций β_j, $j=1, 2,\ldots, n$. Приближенные собственные функции ищутся в виде

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^n v_i\alpha_i.$$

Коэффициенты разложения v_i и приближенные собственные значения определяются из условия

$$(L\tilde{u}+\tilde{\lambda}\tilde{u},\ \beta_j)=0,\quad j=1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве. [При совпадении координатной и проекционной систем говорят о методе Бубнова — Галеркина. Если, кроме того, оператор дифференциальной задачи самосопряженный, то метод наз. методом Рэлея — Ритца (см. [4]).] В частности, для задачи (3), (4), если все $\alpha_i=\beta_i$ удовлетворяют (4), условие (8) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n v_i\int_0^1\left(\frac{1}{p(x)}\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d\alpha_j}{dx}-\tilde{\lambda}\alpha_i\alpha_j\right)dx=0,$$

$$j=1, \ldots, n. \tag{9}$$

Чтобы упростить получение алгебраич. задачи, систему функций α_i выбирают почти ортогональной.

Взяв в качестве координатной и проекционной систем функции вида

$$\alpha_i(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\\ \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\\ 0, & x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

$x_i=ih$ из (9) получают

$$\frac{v_i-v_{i-1}}{a_ih}-\frac{v_{i+1}-v_i}{a_{i+1}h}-$$
$$-\lambda^h[(\rho v)_{i-1}+(\rho^* v)_i+(\rho v)_{i+1}]=0,$$

где

$$a_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{p(x)},$$

$$\rho_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\alpha_i\alpha_{i+1}\,dx,\quad \rho_i^*=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\alpha_i^2\,dx.$$

Таким образом, вместе с краевыми условиями получается обобщенная задача на собственные значения:

$$Av=\lambda^h Dv,\quad h=1/N.$$

Здесь A и D — трехдиагональные симметрич. матрицы порядка $n=N-1$.

Перечисленными методами получаются дискретные модели в случае и др. уравнений. Напр., для стержня:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\lambda ru;$$

для мембраны:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\lambda ru=0;$$

для пластины:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k_{11}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+k_{12}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(k_{33}\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(k_{21}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+k_{22}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=\lambda ru.$$

Собственные векторы, соответствующие λ_k, удовлетворяют однородной системе алгебраич. уравнений:

$$(A-\lambda_kE)v_k=0.$$

Задача нахождения всех собственных значений и собственных векторов матрицы A наз. *полной проблемой* собственных значений. Задача нахождения нескольких собственных значений матрицы A наз. *частичной проблемой* собственных значений. В случае алгебраич. систем, соответствующих рассматриваемой задаче, наиболее часто возникает частичная проблема собственных значений. Применение традиционных методов ее решения требует весьма значительного объема вычислений ввиду плохой разделенности собственных значений матрицы A. В этом случае наиболее эффективны модифицированные градиентные методы с использованием спектрально эквивалентных операторов (см. [16]) и многосеточные методы (см. [17]).

Лит.: [1] Бублик Б. Н., Численное решение задач динамики пластин и оболочек, К., 1969; [2] Воеводин В. В., Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы, М., 1966; [3] Гулд С., Вариационные методы в задачах о собственных значениях, пер. с англ., М., 1970; [4] Коллатц Л., Задачи на собственные значения, пер. с нем., М., 1968; [5] Приказчиков В. Г., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 4, с. 648—57; [6] его же, там же, 1969, т. 9, № 2, с. 315—336; [7] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [8] Самокиш Б. А., «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1958, № 5(6), с. 105—21; [9] Саульев В. К., «Вычисл. математика», 1957, № 1, с. 87—115; [10] Тихонов А. Н., Самарский А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 5, с. 784—805; [11] Уилкинсон Дж., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [12] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [13] Хао Шоу, «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 6, с. 1014—31; [14] Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [15] Сьярле Ф., Метод конечных элементов для эллиптических задач, пер. с англ., М., 1980; [16] Дьяконов Е. Г., Орехов М. Ю., «Матем. заметки», 1980, т. 27, № 5, с. 795—812; [17] Hackbusch W., «SIAM. J. Numer. Analysis», 1979, v. 16, № 2, p. 201—15.

В. Г. Приказчиков.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, численные методы нахождения — методы вычисления полного спектра интегрального оператора или его части (чаще всего ставится задача отыскания одного — двух минимальных или максимальных по модулю собственных значений).

Сопутствующей задачей часто бывает задача приближенного численного нахождения собственных или, более общо, корневых функций данного интегрального оператора, соответствующих искомым собственным значениям. Наибольшее значение имеет задача нахождения собственных значений (и функций) линейного интегрального оператора Фредгольма.

Численные методы нахождения собственных значений интегральных операторов Фредгольма. Задача о собственных значениях и собственных функциях интегрального оператора Фредгольма заключается в нахождении таких комплексных чисел λ, для к-рых существует нетривиальное (в данном функциональном классе) решение интегрального уравнения

$$\lambda A\varphi=\lambda\int_D K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=\varphi(x). \qquad (1)$$

В уравнении (1) $K(x,\ s)$ — функция (или матрица-функция) двух групп переменных x и s такая, что интегральный оператор с ядром K — фредгольмов в рассматриваемом функциональном классе; D — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Функциональным классом может быть пространство $C(D)$ непрерывных функций на D, или $L_2(D)$ — квадратично интегрируемых функций на D, или другие функциональные пространства.

Основным приближенным способом решения задачи на собственные значения (1) является следующий. Выбирается нек-рая аппроксимация интегрального оператора в правой части (1) (см. *Фредгольма уравнение*; численные методы), напр., интеграл заменяется квадратурной формулой:

$$\int_D K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds\approx\sum_{i=1}^N a_i^{(N)}K(x,\ s_i)\,\varphi(s_i)=\tilde{A}\varphi, \qquad (2)$$

где s_i — узлы квадратурной формулы, $a_i^{(N)}$ — ее веса (см. [3] — [5]).

Вместо задачи (1) рассматривается задача на нахождение собственных значений и соответствующих корневых многообразий нек-рой матрицы, естественным образом связанной с аппроксимацией (2). Именно,

$$\lambda\sum_{i=1}^N a_i^{(N)}K(s_j,\ s_i)\,\tilde{\varphi}(s_i)=\tilde{\varphi}(s_j),\quad j=1,\ \ldots,\ N. \qquad (3)$$

Для решения задачи (3) можно воспользоваться любыми методами нахождения собственных значений и векторов (более общо — корневых многообразий), разработанных в линейной алгебре (см. *Линейная алгебра*; численные методы). Найденные собственные значения и векторы алгебраич. задачи (3) будут близки к нек-рым собственным значениям и элементам основной задачи (1), если в определенном смысле близки операторы A и $\tilde{A}$. Вместо (2) можно использовать и иные аппроксимации интегрального оператора. Основная задача (1) при этом редуцируется к алгебраич. задаче, аналогичной задаче (3). Исследование близости решений задач (1) и (3) проводится методами функционального анализа в рамках общей теории приближенных методов.

При этом задача на собственные значения (1) интерпретируется как задача нахождения собственных значений нек-рого вполне непрерывного оператора A, действующего в банаховом пространстве Ф:

$$\lambda A\varphi=\varphi. \qquad (4)$$

Задача (3) интерпретируется как задача на собственные значения оператора $\tilde{A}$, близкого к A, но действующего, вообще говоря, в другом пространстве $\tilde{\Phi}$ (связанном с Ф):

$$\lambda \tilde{A}\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}. \qquad (5)$$

В общей теории приближенных методов доказываются различные теоремы о близости решений задач (4) и (5). В качестве примера подобных утверждений можно привести следующее. Пусть A_n — последовательность операторов действующих в Ф и

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0.$$

Тогда

$$\overline{\bigcup_n \sigma(A_n)}\supseteq\sigma(A),$$

где $\sigma(\cdot)$ — спектр соответствующих операторов. В этом случае каждое $\tilde{\Phi}$ совпадает с Ф.

Большинство общих оценок близости собственных значений и элементов приближенной задачи (5) к собственным значениям (элементам) в задаче (4) не являются эффективными: эти оценки содержат постоянные, значения к-рых обычно не известны. Для контроля точности в таком случае можно использовать последовательность приближенных собственных значений (элементов), приближающуюся к искомому собственному значению (элементу) в (1) [или (4)]. Такую последовательность целесообразно строить, не используя непосредственно последовательность задач типа (5) с последовательно уточняющимся оператором $\tilde{A}$, т. к. этот путь приводит к весьма громоздким вычислениям. Вместо этого можно применять различные алгоритмы уточнения (напр., основанные на теории возмущений).

Обобщенные задачи о собственных значениях. В приложениях исследуются и более общие, чем (4) задачи о нахождении критич. параметров типа собственных значений. В абстрактной форме подобные задачи могут быть сформулированы следующим образом.

Требуется найти, при каких значениях параметра λ уравнение

$$A(\lambda,\ \varphi)=\varphi \qquad (6)$$

имеет более одного решения относительно φ (A — некоторый нелинейный интегральный оператор в банаховом пространстве Ф, зависящий от комплексного параметра λ).

В задаче (6) могут быть дополнительные ограничения на $\|\varphi\|$ и на λ (напр., ищутся только такие λ, к-рые удовлетворяют условию $|\lambda|\leqslant R$, R задано и $\|\varphi\|\leqslant R$).

С задачей (6) тесно связаны различные задачи о точках бифуркации в нелинейных интегральных уравнениях. Представляет интерес задача (6), в к-рой оператор $A(\lambda, \varphi)$ линеен относительно φ, но параметр λ входит не мультипликативно. Общая задача о точках бифуркации может быть редуцирована к такой форме. Кроме того, задача об отыскании собственных значений линейного оператора (1), лежащих в круге $|\lambda|\leqslant R$, R — фиксирована, сводится к более общей задаче (6), в к-рой однако линейный по φ оператор $A(\lambda, \varphi)$ имеет конечномерную область значений. Действительно, пусть $\hat{A}$ — интегральный оператор с вырожденным ядром, по норме близкий к A, причем $\|\hat{A}-A\|\leqslant\delta$. Соотношение (1), определяющее собственные значения, может быть записано в виде:

$$[E+\lambda(\hat{A}-A)]\varphi=\lambda\hat{A}\varphi.$$

Если $|\lambda|<1/\delta$, то оператор $E+\lambda(\hat{A}-A)$ обратим; собственные значения λ, удовлетворяющие неравенству $|\lambda|<1/\delta$ могут быть найдены из соотношения

$$Z=\lambda\hat{A}(E+\lambda(\hat{A}-A))^{-1}Z, \qquad (7)$$

где $Z=[E+\lambda(\hat{A}-A)]\varphi$. Уравнение (7) эквивалентно (относительно Z) нек-рой системе линейных алгебраич. уравнений. Приравнивание к нулю ее определителя дает уравнение, корни к-рого являются собственными значениями интегрального оператора (1). Это рассуждение справедливо вообще для произвольного вполне непрерывного оператора A в банаховом пространстве Ф, если этот оператор допускает аппроксимацию по норме операторами с конечномерной областью значений. Конструкция (7) может быть использована для уточнения приближенно найденного собственного значения (и собственной функции).

Общая задача (6) может быть приближенно (аппроксимацией оператора A) сведена к конечномерной задаче типа (6). В случае более сложных задач рассматриваемого типа для отыскания собственных значений используется метод Монте-Карло (см. [7]).

Лит.: [1] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [2] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [4] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [5] Мысовских И. П., «Методы вычислений», 1973, в. 8, с. 3—10; [6] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [7] Владимиров В. С., Соболь И. М., «Вычислительная математика», 1958, № 3, с. 130—37. *А. Б. Бакушинский.*

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ, свободные колебания,— колебания, совершающиеся в динамич. системе при отсутствии внешнего воздействия при сообщении ей в начальный момент внешнего возмущения, выводящего систему из состояния равновесия. Характер С. к. в основном определяется внутренними силами, обусловленными физич. строением системы. Энергия, необходимая для движения, поступает в систему от внешнего воздействия в начальный момент движения.

Примером С. к. могут служить малые колебания консервативной системы с n степенями свободы около устойчивого состояния равновесия. Уравнения движения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{si}\ddot{q}_i+c_{si}q_i)=0,\quad s=1,\ \ldots,\ n, \qquad (1)$$

где q_i — обобщенные координаты, a_{si}, c_{si} — постоянные коэффициенты. Общее решение системы (1) состоит из суммы n гармонич. колебаний:

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}A_j\Delta_i(k_j^2)\sin(k_jt+\beta_j),\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

где A_j, β_j — постоянные интегрирования. k_j — собственные частоты — корни уравнения частот

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & \ldots & c_{1n}-a_{1n}k^2\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n1}-a_{n1}k^2 & \ldots & c_{nn}-a_{nn}k^2\end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

(предполагается, что нет нулевых и кратных частот), $\Delta_i(k_j^2)$ — минор, соответствующий i-му столбцу и последней строке определителя (2). Величины $A_j\Delta_i(k_j^2)$, $k_jt+\beta_j$, β_j — соответственно амплитуда, фаза и начальная фаза j-гармоники. Из рассмотренного примера следует: гармонич. колебания одной и той же частоты для всех координат происходят в фазе или противофазе; распределение амплитуд колебаний данной собственной частоты по координатам определяется физич. устройством системы.

Лит.: [1] Бабаков И. М., Теория колебания, 2 изд., М., 1965; [2] Бутенин Н. В., Теория колебаний, М., 1963; [3] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 2 изд.,

М., 1964; [4] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959.

Н. В. Бутенин.

СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР оператора A, действующего в векторном пространстве L над полем k — ненулевой вектор $x \in L$, к-рый переводится данным оператором в пропорциональный ему вектор, т. е.

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in k.$$

Коэффициент $\lambda \in k$ наз. *собственным значением* оператора A.

Если оператор A линеен, то множество L_λ всех С. в., отвечающих собственному значению λ вместе с нулевым вектором, является линейным подпространством. Оно наз. собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ, и совпадает с ядром $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ оператора $A-\lambda I$ (т. е. с множеством векторов, переводимых этим оператором в 0). Если L — топологич. векторное пространство и A — непрерывный оператор, то L_λ замкнуто для любого λ. Вообще говоря, собственное подпространство не обязано быть конечномерным, но если A вполне непрерывен (компактен), то L_λ конечномерно для любого ненулевого λ.

В сущности, наличие С. в. у операторов в бесконечномерных пространствах — явление довольно редкое, хотя важные для приложений операторы специальных классов (интегральные, дифференциальные и т. п.) часто обладают обширными наборами С. в.

Обобщением понятий С. в. и собственного подпространства являются понятия *корневого вектора* и корневого подпространства. У нормальных (в частности, самосопряженных или унитарных) операторов все корневые векторы являются собственными, и собственные подпространства, отвечающие различным С. в., взаимно ортогональны.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

Т. С. Пиголкина, В. С. Шульман.

СОБСТВЕННЫЙ МОРФИЗМ — морфизм схем, отделимый, универсально замкнутый и имеющий конечный тип. Морфизм схем $f: X \to Y$ наз. замкнутым, если для любого замкнутого $Z \subset X$ множество $f(Z)$ замкнуто в Y, и универсально замкнутым, если для любой замены базы $Y' \to Y$ замкнут морфизм $X \times_Y Y' \to Y'$. Свойство быть С. м. сохраняется при композиции морфизмов, замене базы и для декартова произведения морфизмов. С. м. близки к проективным морфизмам: любой проективный морфизм собственный, собственный и квазипроективный морфизм проективен. Любой С. м. доминируется проективным (лемма Чжоу). См. также *Полное алгебраическое многообразие*, *Проективная схема*.

С. м. обладают рядом хороших когомологич. свойств. 1) Если морфизм $f: X \to Y$ собственный и F — когерентный пучок O_X-модулей, то для любого $q \geqslant 0$ пучки O_Y-модулей $R^q f_*(F)$ когерентны (теорема конечности). Аналогичный факт имеет место и для этальных когомологий. В частности, если X — полная схема над полем k, то пространства когомологий $H^q(X, F)$ конечномерны. 2) Для любой точки $y \in Y$ пополнение $O_{Y,y}$-модуля $R^q f_*(F)_y$ совпадает с

$$\varprojlim_n H^q(f^{-1}(y),\ F/J^{n+1}F),$$

где J — идеал подсхемы $f^{-1}(y)$ в X (теорема о сравнении). 3) Если X — собственная схема над полным локальным кольцом A, то категории когерентных пучков на X и на ее формальном пополнении $\hat{X}$ эквивалентны (теорема алгебраизуемости). Существуют аналитич. аналоги первого и третьего свойств. Напр. (см. [3]): для полной $\mathbb{C}$-схемы X любой аналитический когерентный пучок на $X(\mathbb{C})$ алгебраизуем и

$$H^q(X, F) = H^q(X(\mathbb{C}), F^{\mathrm{an}}).$$

4) Пусть $f: X \to Y$ — С. м., F — пучок конечных абелевых групп в этальной топологии X, ξ — геометрич. точка схемы Y; тогда слой пучка $R^q f_*(F)$ в точке ξ изоморфен $H^q(f^{-1}(\xi), F|_{f^{-1}\xi})$ (теорема о замене базы, см. [2]).

Лит.: [1] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique, t. 2—3, P., 1961—63; [2] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 1—3, B.— [a. o.], 1972—73; [3] Revêtements étales et groupe fondamental, B. — [a. o.], 1971; [4] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.

В. И. Данилов.

СОВЕРШЕННАЯ ГРУППА — группа G такая, что ее *центр* есть единичная подгруппа (т. е. G — т. н. группа без центра) и любой ее автоморфизм является внутренним (см. *Внутренний автоморфизм*). Группа автоморфизмов С. г. G изоморфна самой группе G (с чем и связан термин «совершенная»). Примерами С. г. являются *симметрические группы* S_n при $n \neq 2, 6$. Если нек-рая группа T содержит нормальный делитель, являющийся С. г., то T разлагается в прямое произведение нек-рых своих подгрупп $T = B \times K$ такое, что K — централизатор B в T.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

СОВЕРШЕННАЯ МЕРА — понятие, введенное Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоровым в [1] с целью «достижения полной гармонии между абстрактной теорией меры и теорией меры в метрических пространствах». Дальнейшее развитие теории обнаружило другие аспекты ценности этого понятия: с одной стороны, класс С. м. весьма широк, с другой — в рамках С. м. не возможен ряд неприятных технич. осложнений, возможных в общей теории меры.

Конечная мера μ на σ-алгебре S подмножеств множества X наз. совершенной, если для любой действительной измеримой функции f на X и любого множества $E \subset \mathbb{R}$ такого, что $f^{-1}(E) \subset S$

$$\mu(f^{-1}(E)) = \inf\{\mu(f^{-1}(G)) : G \supset E,\ G \in \mathfrak{G}\},$$

где $\mathfrak{G}$ — класс открытых подмножеств $\mathbb{R}$. Для совершенности μ достаточно, чтобы для любой действительной измеримой функции f на X существовало борелевское множество $B \subset \mathbb{R}$ такое, что $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(X)$, и необходимо, чтобы для любой действительной измеримой функции f на X и любого множества $E \subset \mathbb{R}$, для к-рого $f^{-1}(E) \in S$, существовало бы такое борелевское множество $B \subset E$, что

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Всякая дискретная мера совершенна. Мера, заданная на σ-алгебре подмножеств сепарабельного метрич. пространства, содержащей все открытые множества, совершенна тогда и только тогда, когда мера любого измеримого множества есть верхняя грань мер лежащих в нем компактов. Ограничение С. м. μ на любую σ-подалгебру σ-алгебры S совершенно. Мера, индуцированная С. м. μ на всяком подмножестве $X_1 \in S$ с $\mu(X_1) > 0$, совершенна. Образ С. м. μ при измеримом отображении (X, S) в другое измеримое пространство совершенен. Мера совершенна тогда и только тогда, когда совершенно ее пополнение. Для того чтобы всякая мера на любой σ-подалгебре σ-алгебры S подмножеств множества X была совершенна, необходимо и достаточно, чтобы для любой действительной измеримой функции f множество $f(X)$ было абсолютно измеримым (т. е. принадлежало области определения пополнения всякой борелевской меры на $\mathbb{R}$). Если $X \subset \mathbb{R}$ и S есть σ-алгебра борелевских подмножеств X, то всякая мера на S совершенна тогда и только тогда, когда X абсолютно измеримо.

Всякое пространство (X, S, μ) с С. м. такое, что S имеет счетное число образующих $\{S_i\}$, отделяющих точки X (т. е. для любых x, $y \in X$, $x \neq y$ найдется

$$i: x \in S_i, \quad y \notin S_i \text{ или } x \notin S_i, \quad y \in S_i),$$

почти изоморфно нек-рому пространству $(L, \mathscr{L}, \lambda)$, образованному мерой Лебега на конечном отрезке и не более, чем счетной последовательностью точек положительной массы (существуют $N \in S$ с $\mu(N)=0$ и взаимнооднозначное отображение φ $X \setminus N$ на L такие, что φ и φ^{-1} измеримы и $\lambda = \mu\varphi^{-1}$).

Пусть I — произвольное множество индексов и каждому $i \in I$ соответствует пространство с С. м. (X_i, S_i, μ_i); $X = \Pi_{i \in I} X_i$, и пусть $\mathscr{A}$ — алгебра, порожденная классом множеств вида $\{x \in X : x_i \in A \in S_i\}$. Если на $\mathscr{A}$ задана конечно аддитивная мера μ' такая, что $\mu'(\{x \in X : x_i \in A\}) = \mu_i(A)$ для любых $i \in I$ и $A \in S_i$, то: 1) μ' счетно аддитивна на $\mathscr{A}$, 2) продолжение μ меры μ' на σ-алгебру S, порожденную алгеброй $\mathscr{A}$, совершенно.

Пусть (X, S, P) — пространство с совершенной вероятностной мерой и S_1, S_2 — две σ-подалгебры σ-алгебры S, причем S_1 имеет счетное число образующих. Тогда существует регулярная условная вероятность на S_1 при условии S_2, т. е. существует функция $p(\cdot, \cdot)$ на $X \times S_1$ такая, что: 1) при фиксированном x $p(x, \cdot)$ есть вероятностная мера на S_1; 2) при фиксированном E $p(\cdot, E)$ измерима относительно S_2; 3) $\int_F p(x, E) P(dx) = P(E \cap F)$ для всех $E \in S_1$ и $F \in S_2$. Более того, функцию $p(\cdot, \cdot)$ можно выбрать так, что меры $p(x, \cdot)$ будут совершенными. Пусть (X, S), $(Y, \mathscr{T})$ — два измеримых пространства и $q(\cdot, \cdot)$ — переходная вероятность на $X \times \mathscr{T}$, т. е. $q(\cdot, E)$ измерима относительно S и $q(x, \cdot)$ есть вероятностная мера на $\mathscr{T}$ для любых $x \in X$, $E \in \mathscr{T}$. Если $q(x, \cdot)$ дискретны и P — совершенная вероятностная мера на S, то мера $\int q(x, \cdot) P(dx)$ совершенна.

С. м. тесно связаны с компактными мерами. Класс подмножеств $\mathscr{K}$ наз. к о м п а к т н ы м, если $K_i \in \mathscr{K}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \phi$ влечет $\bigcap_{i=1}^{n} K_i = \phi$ для нек-рого n. Конечная мера μ на (X, S) наз. к о м п а к т н о й, если существует компактный класс $\mathscr{K}$ такой, что для любых $\varepsilon > 0$ и $E \in S$ можно выбрать $K \in \mathscr{K}$ и $E_1 \in S$ так, чтобы $E_1 \subset K \subset E$ и $\mu(E \setminus E_1) < \varepsilon$. Всякая компактная мера совершенна. Для того чтобы мера была совершенной, необходимо и достаточно, чтобы ее ограничение на любую σ-подалгебру со счетным числом образующих было компактным.

Лит.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] M a r c z e w s k i E., «Fundam. math.», 1953, v. 40, p. 113—24; [3] R y l l - N a r d z e w s k i C., там же, p. 125—30; [4] С а з о н о в В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, с. 391—414; [5] R a m a c h a n d r a n D., Perfect measures, pt 1— Basic theory, pt 2— Special topics, Delhi, 1979 (ISI lecture notes, № 5, 7). *В. В. Сазонов.*

СОВЕРШЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — совершенная дизъюнктивная или совершенная конъюнктивная нормальная форма (см. *Булевых функций нормальные формы*).

СОВЕРШЕННО НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — *нормальное пространство*, каждое замкнутое подмножество к-рого имеет тип G_δ.

СОВЕРШЕННОЕ БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ — расширение Y *вполне регулярного пространства* X такое, что замыкание в Y границы любого открытого множества $U \subset X$ служит границей $O(U)$, где $O(U)$ — максимально открытое в Y множество, для к-рого $O(U) \cap X = U$. Эквивалентные требования: а) $O(U \cup V) = O(U) \cup O(V)$ для любой пары непересекающихся открытых множеств U, V; б) если замкнутое множество F разбивает X на открытые множества U и V, то замыкание F в Y разбивает Y на $O(U)$ и $O(V)$; в) ни в одной из своих точек $Y \setminus X$ не разбивает Y локально. С. б. р. характеризуется также как монотонный образ *Стоуна — Чеха бикомпактного расширения* βX, причем βX в том и только в том случае является единственным С. б. р. X, когда $X = A \cup M$, где A — бикомпакт, а $\dim M = 0$. Локальная связность X влечет локальную связность любого совершенного расширения Y с 1-й аксиомой счетности (а также расширений, предшествующих Y). Среди всех С. б. р. X минимальное С. б. р. μX существует тогда и только тогда, когда у X имеется хотя бы одно расширение с пунктиформным *наростом*. Нарост в μX пунктиформен, причем μX является при этом максимальным среди всех расширений с пунктиформными наростами. Всякий гомеоморфизм X распространяется до гомеоморфизма μX, а всякое совершенное отображение X на X' продолжается до отображения μX на $\mu X''$ (при условии, что $\mu X'$ существует).

М. И. Войцеховский.

СОВЕРШЕННОЕ КОЛЬЦО л е в о е — ассоциативное кольцо, каждый левый модуль над к-рым обладает проективным накрытием. П р а в о е с о в е р ш е н н о е к о л ь ц о определяется аналогично. Левое С. к. может и не быть правым С. к.

Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R — левое С. к.; (2) каждое множество попарно ортогональных идемпотентов кольца R конечно и каждый ненулевой правый R-модуль имеет ненулевой цоколь; (3) R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов; (4) R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных правых идеалов; (5) каждый правый R-модуль удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных подмодулей; (6) радикал Джекобсона J кольца R исчезает справа (т. е. для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ элементов из J найдется такой номер n, что произведение $a_1 \ldots a_n = 0$) и факторкольцо R/J классически полупросто; (7) каждый плоский левый R-модуль проективен; (8) R содержит такие идемпотенты $e_1, \ldots, e_n$, что $\sum e_i = 1$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$ и $e_i R e_i$ — локальное кольцо для каждого i; (9) каждый левый R-модуль удовлетворяет условию максимальности для циклич. подмодулей; (10) для каждого n каждый левый R-модуль удовлетворяет условию максимальности для n-порожденных подмодулей; (11) каждый проективный левый R-модуль допускает разложение, относительно к-рого дополняемы все прямые слагаемые (см. *Крулля — Ремака — Шмидта теорема*).

Кольцо матриц над С. к. является С. к. Идемпотентные идеалы С. к. порождаются идемпотентами, центральными по модулю радикала. Групповое кольцо RG является С. к. тогда и только тогда, когда R — С. к., а группа G конечна. Кольцо всех эндоморфизмов абелевой группы A оказывается С. к. в том и только в том случае, когда A разлагается в прямую сумму конечной группы и конечного числа экземпляров аддитивной группы рациональных чисел. Локальные С. к. характеризуются возможностью дополнения до базы каждой линейно независимой подсистемы любого свободного левого модуля. Эквивалентны также следующие свойства: (1) R — С. к. и все его факторкольца самоинъективны; (2) все факторкольца кольца R квазифробениусовы; (3) все факторкольца кольца R кообразующие; (4) R — однорядное кольцо.

Лит.: [1] К а ш Ф., Модули и кольца, пер. с нем., М., 1981; [2] Ф е й с К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 19, М., 1981, с. 31—134 (см. также указанные там предыдущие обзоры по теории модулей).

Л. А. Скорняков.

СОВЕРШЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество F топологич. пространства X, являющееся замкнутым множеством и одновременно плотным в себе (т. е. не имею-

щим изолированных точек). Другими словами, F совпадает со своим *производным множеством*. Примеры С. м.: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, *канторово множество*. *М. И. Войцеховский.*

СОВЕРШЕННОЕ НЕПРИВОДИМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — *совершенное отображение* f пространства X на пространство Y, являющееся неприводимым (т. е. Y не является образом никакого замкнутого в X множества, отличного от X). *М. И. Войцеховский.*

СОВЕРШЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное замкнутое отображение топологич. пространств, при к-ром прообразы всех точек бикомпактны. С. о. во многом аналогичны непрерывным отображениям бикомпактов в хаусдорфовы пространства (каждое такое отображение совершенно), но сферой действия имеют класс всех топологич. пространств. В классе вполне регулярных пространств С. о. характеризуются существованием у них непрерывного продолжения на нек-рые бикомпактные расширения, при к-ром *наросты* расширений отображаются в наросты. С. о. сохраняет метризуемость, паракомпактность, вес, полноту по Чеху в сторону образа; другие инварианты (напр., характер пространства) оно преобразует правильным образом. Класс С. о. замкнут относительно операций произведения и композиции. Сужение С. о. на замкнутое подпространство является С. о. (не так обстоит дело для факторных и открытых отображений).

Названные свойства С. о. привели к тому, что класс этих отображений стал играть стержневую роль в классификации топологич. пространств. Прообразы метрич. пространств при С. о. охарактеризованы как паракомпактные перистые (p)-пространства. Класс паракомпактных p-пространств замкнут уже в обе стороны относительно С. о. Важным свойством С. о. является возможность сузить каждое из них на нек-рое замкнутое подпространство, не уменьшая образа, так, чтобы получившееся отображение было неприводимым — не допускало дальнейшего сужения на замкнутое подпространство без уменьшения образа. Неприводимые С. о. являются отправной точкой построения теории *абсолютов* топологич. пространств. При неприводимом С. о. π-вес образа всегда равен π-весу отображаемого пространства и число Суслина образа равно числу Суслина отображаемого пространства. Если вполне регулярное T_1-пространство X отображается на вполне регулярное T_1-пространство Y посредством С. о., то X гомеоморфно замкнутому подпространству топологич. произведения пространства Y на нек-рый бикомпакт. Диагональное произведение С. о. и непрерывного отображения всегда является С. о., в частности диагональное произведение С. о. и уплотнения является гомеоморфизмом, и если топологическое пространство совершенно отображается и уплотняется на нек-рое (вообще говоря, другое) метрическое пространство, то оно само метризуемо.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *А. В. Архангельский.*

СОВЕРШЕННОЕ ПОЛЕ — поле k, любой многочлен над к-рым сепарабелен. Иначе говоря, любое алгебраич. расширение поля k — *сепарабельное расширение*. Все остальные поля наз. несовершенными. Все поля характеристики 0 совершенны. Поле k конечной характеристики p совершенно тогда и только тогда, когда $k=k^p$, т. е. возведение в степень p является автоморфизмом поля k. Конечные поля и алгебраически замкнутые поля совершенны. Пример несовершенного поля — поле $F_q(X)$ рациональных функций над полем F_q, где F_q — поле из $q=p^n$ элементов. С. п. k совпадает с полем инвариантов группы всех k-автоморфизмов алгебраич. замыкания $\overline{k}$ поля k. Любое алгебраич. расширение С. п. снова совершенно.

Для произвольного поля k характеристики $p>0$ с алгебраич. замыканием $\overline{k}$ поле

$$k^{p^{-\infty}}=\bigcup_n k^{p^{-n}}\subset\overline{k}$$

является наименьшим С. п., содержащим k. Оно наз. совершенным замыканием поля k в $\overline{k}$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963. *Л. В. Кузьмин.*

СОВЕРШЕННОЕ ЧИСЛО — целое положительное число, обладающее свойством, что оно совпадает с суммой всех своих положительных делителей, отличных от самого этого числа.

Таким образом, целое число $n\geqslant 1$ является С. ч., если

$$n=\sum_{0<d<n,\ d/n}1.$$

С. ч. являются, напр., числа 6, 28, 496, 8128, 33550336,...

С. ч. тесно связаны с простыми *Мерсенна числами*, т. е. с простыми числами вида 2^m-1. Еще Евклид установил, что число

$$n=2^{m-1}(2^m-1)$$

является совершенным, если 2^m-1 — простое число. Л. Эйлер (L. Euler) показал, что этими числами исчерпываются все четные С. ч.

До сих пор (1983) неизвестно, будет ли конечным или бесконечным множество четных С. ч., т. е. неизвестно, будет ли конечным или бесконечным множество простых чисел Мерсенна 2^m-1. Неизвестно также, существуют ли нечетные С. ч.

До 1983 найдено 27 четных С. ч. Первые 23 из них соответствуют следующим значениям m : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4219, 4423, 9689, 9941, 11213. Список С. ч. с 12-го по 24-е указан в [2]. Четные С. ч. с 25-го по 27-е соответствуют следующим значениям m : 21701, 23209, 44497 (см. [3]). Показано (см. [4]), что нечетных С. ч. нет в интервале от 1 до 10^{50}.

Лит.: [1] Dickson L. E., History of the theory of numbers, v. 1, Wash., 1919, repr., N.—Y., 1952; [2] Nankar M. L., «Ganita Bhāratī», 1979, v. 1, N 1—2, p. 7—8; [3] Slowinski D., «J. Recreational Math.», 1979, v. 11, p. 258—61; [4] Hagis P., «Math. Comp.», 1973, v. 27, p. 951—53. *С. А. Степанов.*

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — общий термин, относящийся к распределению нескольких случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве. Пусть случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ определены на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}\}$ и принимают значения в измеримых пространствах $(\mathfrak{X}_k, \mathcal{B}_k)$. Совместным распределением этих величин наз. функция $P_{X_1\ldots X_n}(B_1,\ldots,B_n)$, определенная на множествах $B_1\in\mathcal{B}_1,\ldots,B_n\in\mathcal{B}_n$ как

$$P_{X_1,\ldots X_n}(B_1,\ \ldots,\ B_n)=\mathsf{P}\{X_1\in B_1,\ \ldots,\ X_n\in B_n\}.$$

В связи с С. р. говорят о совместной функции распределения и о совместной плотности вероятности.

Если $X_1,\ldots,X_n$ — обычные действительные случайные величины, то С. р. есть распределение случайного вектора $(X_1,\ldots,X_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. *Многомерное распределение*). Если $X(t)$, $t\in T$,— случайный процесс, то С. р. значений $X(t_1),\ldots,X(t_n)$ при $t_1,\ldots,t_n\in T$ наз. конечномерными распределениями случайного процесса $X(t)$.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973. *А. В. Прохоров.*

СОВМЕСТНОСТЬ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ — свойство методов суммирования, состоящее в непротиворечивости результатов применения этих методов. Методы A и B совместны, если они не могут суммировать одну и ту же последовательность или ряд к различным пределам, в противном случае они наз. несов-

местными методами суммирования. Точнее, пусть A и B — методы суммирования, напр. последовательностей, A^* и B^* — поля суммируемости этих методов. Методы A и B совместны, если

$$\overline{A}(x)=\overline{B}(x) \qquad (*)$$

для любого $x\in A^*\cap B^*$, где $\overline{A}(x)$ и $\overline{B}(x)$ — числа, к к-рым суммируется последовательность x соответственно методами A и B. Напр., все *Чезаро методы суммирования* (C, k) при $k>-1$ совместны, все регулярные *Вороного методы суммирования* совместны.

Если U — нек-рое множество последовательностей и $A(x)=B(x)$ для любого $x\in A^*\cap B^*\cap U$, то говорят, что методы A и B совместны на множестве U. Методы A и B вполне совместны (для действительных последовательностей), если равенство (*) справедливо и в том случае, когда в поля суммируемости методов включены последовательности, суммируемые этими методами к $+\infty$ и $-\infty$.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960. *И. И. Волков.*

СОВПАДЕНИЕ, связь,— группа наблюдений в выборке, имеющих равные значения. Пусть независимые случайные величины $X_1,\ldots, X_n$ подчиняются одному и тому же абсолютно непрерывному вероятностному закону, плотность вероятности к-рого есть $p(x)$. В таком случае, с вероятностью 1 среди наблюдений $X_1, X_2,\ldots, X_n$ не будет равных, т. е. $X_i\neq X_j$ если $i\neq j$, и, следовательно, каждый член $X_{(i)}$ вариационного ряда

$$X_{(1)}<X_{(2)}<\ldots<X_{(n)}, \qquad (*)$$

построенного по выборке $X_1,\ldots, X_n$, будет строго больше ему предшествующего $X_{(i-1)}$.

Однако на практике в силу ошибок округлений при вычислении случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ могут появиться несколько групп наблюдений, в каждой из к-рых наблюдения равны между собой. Каждая такая группа совпавших наблюдений наз. совпадением. Таким образом, в общем случае вместо (*) экспериментатор может наблюдать вариационный ряд

$$X_{(1)}=\ldots=X_{(\tau_1)}<X_{(\tau_1+1)}=\ldots=X_{(\tau_1+\tau_2)}<\ldots$$
$$\ldots<X_{(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{k-1}+1)}=\ldots=X_{(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_k)},$$

где все $\tau_i\geqslant 1$, $\tau_1+\ldots+\tau_k=n$, вследствие чего, если присутствуют С., т. е. если существуют $\tau_j\geqslant 2$, возникают трудности при определении вектора рангов, к-рый играет основную роль при построении *ранговых статистик*. Еще нет четких рекомендаций для определения рангов совпавших наблюдений. Наиболее распространены два подхода к решению этой задачи. Первый заключается в применении рандомизации. Согласно этому подходу в качестве рангов элементов

$$X_{(\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+1)}=\ldots=X_{(\tau_1+\ldots+\tau_j)},$$

образующих j-ю группу, можно взять любую перестановку чисел

$$\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{j-1}+1,\ \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{j-1}+2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_j$$

с вероятностью $1/\tau_j!$. Достоинство этого подхода заключается в его простоте, но при нек-рых альтернативах относительно закона распределения случайной величины X_i на результатах статистич. выводов может сказаться примененная рандомизация.

При втором подходе рекомендуется всем совпавшим наблюдениям

$$X_{(\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+1)}=\ldots=X_{(\tau_1+\ldots+\tau_j)},$$

образующим j-ю группу, приписать один и тот же т. н. средний ранг

$$t_j=\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+\frac{\tau_j+1}{2},$$

равный среднему арифметическому чисел $\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+1$, $\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+2,\ldots$, $\tau_1+\ldots+\tau_j$. Естественно, что такая процедура тоже сказывается на свойствах ранговых статистик, что следует учитывать на практике. Например, при построении статистики W *Вилкоксона критерия* при наличии С. рекомендуется пользоваться именно средними рангами, при этом математич. ожидание $\mathsf{E}W$ статистики W остается таким же, как и в случае отсутствия С., а дисперсия $\mathsf{D}W$ уменьшается за счет усреднения рангов и становится равной

$$\mathsf{D}W=\frac{mn(m+n-1)}{12}\left\{1-\frac{1}{(m+n)[(m+n)^2-1]}\sum_{j=1}^{k}\tau_j(\tau_j^2-1)\right\},$$

что следует учитывать при нормализации статистики W.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *М. С. Никулин.*

СОГЛАСИЯ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, применяемый в задаче проверки согласия, суть к-рой заключается в следующем. Пусть $X_1, X_2,\ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения к-рого $F(x)$ неизвестна. В таком случае задача статистич. проверки гипотезы H_0, согласно к-рой $F(x)\equiv F_0(x)$, где $F_0(x)$ — нек-рая заданная функция распределения, наз. задачей проверки согласия. Напр., если $F_0(x)$ — непрерывная функция распределения, то в качестве С. к. для проверки H_0 можно воспользоваться *Колмогорова критерием*.

См. также *Непараметрические методы статистики*. *М. С. Никулин.*

СОГЛАСОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, вероятностные меры,— понятие теории вероятностей и теории меры. О С. р. для наиболее важного и часто встречающегося в приложениях случая произведения пространств см. в ст. *Мера*. Ниже дается более общая конструкция. Пусть I множество индексов с отношением предпорядка $\leqslant$, фильтрующееся вправо. И пусть имеется проективная система множеств: для каждого $i\in I$ задано множество X_i и для всякой пары индексов $i\leqslant j$ имеется отображение π_{ij} множества X_j в X_i, причем если $i\leqslant j\leqslant k$, то $\pi_{ik}=\pi_{ij}\circ\pi_{jk}$ и π_{ii} для всякого $i\in I$ есть тождественное отображение X_i на X_i. Предполагается, что для всякого $i\in I$ задана σ-алгебра S_i подмножеств X_i так, что если $i\leqslant j$, то отображение $\pi_{ij}(X_j, S_j)$ в (X_i, S_i) измеримо. Пусть, наконец, для каждого $i\in I$ задано распределение (или, более общо, мера) μ_i на S_i. Система распределений (мер) $\{\mu_i\}$ наз. согласованной (или проективной системой распределений (мер)), если $i\leqslant j$ влечет $\mu_i=\mu_j\pi_{ij}^{-1}$. При определенных дополнительных условиях на проективном пределе $X=\varprojlim(X_i, \pi_{ij})$ существует мера μ (проективный предел проективной системы $\{\mu_{ij}\}$) такая, что если π_i — каноническая проекция X на X_i, то $\mu_i=\mu\pi_i^{-1}$ для всех $i\in I$.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Bochner S., Harmonic analysis and the theory of probability, Berkeley — Los Angeles, 1955; [3] Metivier M., «Ann. mat. pura ed appl.», 1963, t. 63, p. 225—352; [4] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977. *В. В. Сазонов.*

СОЕДИНЕНИЕ, джойн, топологических пространств X и Y — топологическое пространство, обозначаемое $X*Y$ и определяемое как факторпространство произведения $X\times Y\times[0, 1]$ по разбиению, элементами к-рого служат множества $x\times Y\times 0$ $(x\in X)$ и $X\times y\times 1$

($y \in Y$) и отдельные точки множества $X \times Y \times [0, 1] \setminus (X \times Y \times O \cup X \times Y \times 1)$.

Примеры: если X состоит из одной точки, то $X * Y$ есть *конус* над Y; $S^n * Y$ гомеоморфно $(n+1)$-кратной *надстройке* над Y. В частности, $S^n * S^m \approx S^{n+m+1}$. Операция С. коммутативна и ассоциативна. Для вычисления гомологий С. (с коэффициентами из области главных идеалов) используется аналог формулы Кюннета

$$\tilde{H}_{r+1}(X * Y) \approx \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(X) \otimes \tilde{H}_j(Y) \oplus \oplus \sum_{i+j=r-1} \operatorname{Tor}(\tilde{H}_i(X), \tilde{H}_j(Y)).$$

Соединение r-связного пространства и s-связного пространства является $(r+s+2)$-связным. Операция С. лежит в основе конструкции Милнора универсального *главного расслоения*. *М. Ш. Фарбер.*

СОИЗМЕРИМЫЕ И НЕСОИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ — две однородные величины (напр., длины или площади), обладающие или соответственно не обладающие т. н. общей мерой (так называют величину той же природы, что и рассматриваемые, и содержащуюся целое число раз в каждой из них). Примерами несоизмеримых величин могут служить длины диагонали и стороны квадрата или площади круга и квадрата, построенного на радиусе. Если величины соизмеримы, то их отношение выражается рациональным числом, отношение же несоизмеримых величин — иррациональным. *По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.*

СОКРАЩЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА булевой функции — *дизъюнктивная нормальная форма* (д. н. ф.), представляющая собой дизъюнкцию всех простых импликант данной функции. *Конъюнкция* $\mathfrak{A}$ наз. импликантой булевой функции f, если справедливо соотношение $\mathfrak{A} \to f \equiv 1$. Импликанта наз. простой, если после вычеркивания из нее любой буквы она перестает быть импликантой. Построение С. н. ф. является первым этапом *булевых функций минимизации*, поскольку минимальная д. н. ф. получается из сокращенной удалением нек-рых импликант. Число конъюнкций в С. н. ф. характеризует трудоемкость выполнения этого этапа. Оценки этой величины (см. *Булевых функций нормальные формы*) показывают, что вообще говоря, С. н. ф. сложнее исходного задания функции; при переходе к С. н. ф. от совершенной сокращаются только длины конъюнкций, число же их значительно увеличивается. Кроме того, у «почти всех» булевых функций в С. н. ф. нет конъюнкций, состоящих менее чем из $n - \log_2 n$ букв; подавляющая часть конъюнкций состоит из $n - \log_2 \log_2 n$ букв. *В. В. Глаголев.*

СОЛВМНОГООБРАЗИЕ, разрешимое многообразие,— однородное пространство M связной разрешимой группы Ли G; его можно отождествить с пространством смежных классов G/H, где H — стационарная подгруппа нек-рой точки многообразия M.

Примеры: $\mathbb{R}^n$, тор T^n, многообразие Ивасавы N/I (где N — группа всех верхних треугольных матриц с единицами на диагонали в GL (3, $\mathbb{R}$), I — подгруппа всех целых точек в N), K^2 (бутылка Клейна), Mb (лист Мёбиуса).

Первым среди С. был изучен более узкий класс *нильмногообразий*, т. е. однородных пространств нильпотентных групп Ли (таковы $\mathbb{R}^n$, T^n, N/I, а K^2 и Mb нильмногообразиями не являются). Для них А. И. Мальцевым были доказаны следующие утверждения (см. [5]). 1) Всякое нильмногообразие $M = G/H$ диффеоморфно $M^* \times \mathbb{R}^n$, где M^* — компактное нильмногообразие. 2) Если M компактно и действие G на M эффективно, то стационарная подгруппа H является *дискретной подгруппой*. 3) Нильпотентная группа Ли G может транзитивно и локально эффективно действовать на нек-ром компактном многообразии тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{G}$ имеет $\mathbb{Q}$-форму. При этом если G односвязна, то она изоморфна унипотентной алгебраич. группе, определенной над $\mathbb{Q}$, и H является арифметич. подгруппой в G. 4) Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ компактного нильмногообразия M (изоморфная H, если G односвязна и ее действие на M локально эффективно) определяет его однозначно с точностью до диффеоморфизма. Фигурирующие здесь группы $\pi_1(M)$ — это в точности всевозможные конечно порожденные нильпотентные группы без кручения.

Эти результаты отчасти обобщаются на произвольные С. Так, для произвольного С. M существует С. M', конечнолистно накрывающее его и диффеоморфное $M^* \times \mathbb{R}^n$, где M^* — нек-рое компактное С. Произвольное С. не всегда разлагается в прямое произведение $M^* \times \mathbb{R}^n$, но диффеоморфно (см. [1], [4]) пространству векторного расслоения над нек-рым компактным С. (для Mb соответствующим расслоением является нетривиальное линейное расслоение над S^1). Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ произвольного С. M полициклична и, если M компактно, определяет многообразие однозначно с точностью до диффеоморфизма. Группа π изоморфна $\pi_1(M)$ для нек-рого компактного С. M тогда и только тогда, когда она включается в точную последовательность вида

$$\{e\} \longrightarrow \Delta \longrightarrow \pi \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow \{e\},$$

где Δ — нек-рая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. В каждой полициклич. группе существует подгруппа конечного индекса, изоморфная $\pi_1(M)$ для нек-рого компактного С. M. Если разрешимая группа Ли G действует на компактном С. $M = G/H$ транзитивно и локально эффективно, то M расслаивается над тором со слоем $N/H \cap N$, где N — нильрадикал в G. Компактность С. $M = G/H$ эквивалентна наличию на MG-инвариантной меры, относительно к-рой объем M конечен.

Каждое С. M асферично (т. е. гомотопич. группы $\pi_i(M) = 0$ при $i \geqslant 2$). Среди всех компактных однородных пространств компактные С. характеризуются асферичностью и разрешимостью группы $\pi_1(M)$ (см. [3]).

Лит.: [1] Auslander L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, № 2, p. 227—85; [2] Auslander L., Szczarba R., «Amer. J. math.», 1975, v. 97, № 1, p. 260—81; [3] Горбацевич В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 2, с. 285—307; [4] Mostow G., «Amer. J. math.», 1971, v. 93, № 1, p. 11—32; [5] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977. *В. В. Горбацевич.*

СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ПОЛЕ, трубчатое поле,— векторное поле, не имеющее ни источников, ни стоков, т. е. дивергенция к-рого равна нулю во всех его точках. Поток С. п. через любую замкнутую кусочно гладкую ориентированную границу любой области равен нулю. С. п. характеризуется т. н. векторным потенциалом — функцией $A(M)$ такой, что $a = \operatorname{rot} A(M)$. Примеры С. п.: поле скоростей несжимаемой жидкости, магнитное поле внутри бесконечного соленоида. *А. Б. Иванов.*

СОЛИТОН — решение нелинейного эволюционного уравнения, к-рое в каждый момент времени локализовано в нек-рой области пространства, причем размеры области с течением времени остаются ограниченными, а движение центра области можно интерпретировать как движение частицы. С. уравнения Кортевега — де Фриса

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

описывает уединенную волну

$$u_s(x, t) = 3v/\operatorname{ch}^2[v^{1/2}(x - vt - x_0)/2]$$

и однозначно определяется двумя параметрами: скоростью $v > 0$ и положением максимума в фиксированный момент времени $t = 0$, $x = x_0$. Это уравнение обладает

также n-солитонными решениями, к-рые при больших временах ($t\to\pm\infty$) можно приближенно записать в виде суммы n слагаемых $u_s(x,\ t)$, каждое из к-рых характеризуется своей скоростью v_i и положением центра $x_{0i}^{\pm}$. Для n-солитонного решения набор скоростей до столкновения ($t\to-\infty$) и после столкновения ($t\to+\infty$) остается неизменным, возникают только сдвиги центров С. $x_{0i}^{+}\neq x_{0i}^{-}$. Найдено много нелинейных эволюционных уравнений с двумя независимыми переменными, к-рые обладают решениями с приведенными выше свойствами. Так, С. нелинейного уравнения Шрёдингера

$$i\psi_t=-\psi_{xx}-|\psi|^2\psi,\quad \psi\in\mathbb{C},$$

однозначно определяется четырьмя параметрами; С. синус Гордона уравнения

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi=0$$

определяется двумя параметрами v, x_0

$$\varphi_s=4\arctg[\exp\pm(x-vt-x_0)/\sqrt{1-v^2}],$$

и существует двойной С., к-рый определяется четырьмя параметрами; аналогичная ситуация для уравнения Буссинеска

$$\varphi_{xx}-\varphi_{tt}+(\varphi^2)_{xx}+\varphi_{xxxx}=0,$$

для уравнения Хироты

$$\varphi_t+i3\alpha|\varphi|^2\varphi_x+\beta\varphi_{xx}+i\sigma\varphi_{xxx}+\delta\varphi|^2\varphi=0,\ \alpha\beta=\sigma\delta,$$

и т. д. Существуют физически интересные уравнения и с большим числом независимых переменных, к-рые имеют солитонные решения с приведенными выше свойствами. Напр., С. уравнения Кадомцева — Петвиашвили

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x=u_{yy},$$

локализованный по x и y, равен

$$u(x,\ y,\ t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left(\frac{1}{\nu^2}+|x+i\nu y-3\nu^2t|^2\right),\quad \nu\in\mathbb{R}.$$

В физич. литературе термин «С.» означает частицеподобное решение нелинейных уравнений классич. теории поля, для к-рого плотности энергии и импульса остаются локализованными в окрестности нек-рой точки пространства в любой момент времени. В ряде случаев локализация может иметь место вблизи замкнутых линий, поверхностей. Такие локализованные решения наз. также кинками, монополями. При отыскании таких решений играют роль топологич. соображения, в частности для ряда моделей удается построить ток $J_\mu(x)$, дивергенция к-рого равна нулю независимо от уравнений движения, а соответствующий интеграл движения (топологич. заряд) $Q=\int J_0(x)d^3x$ оценивает снизу функционал энергии.

Лит.: [1] Скотт А., Чжу Ф., Маклафлин Д., «ТИИЭР», 1973, т. 61, № 10, с. 79—124; [2] Карпман В. И., Нелинейные волны в диспергирующих средах, М., 1973; [3] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 1, с. 55—136.

П. П. Кулиш.

СОНИНА ИНТЕГРАЛ — представление цилиндрич. функции интегралом по контуру

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}t^{-\nu-1}\,dt,$$

где ν — произвольно, $\mathrm{Re}\,z>0$ или $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$. Интеграл этого типа рассмотрен Н. Я. Сониным (1870). Иногда С. и. называют интеграл вида:

$$J_{m+n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{2^n\Gamma(n+1)}\int_0^\infty J_m(x\sin t)\sin^{m+1}t\cos^{2n+1}t\,dt,$$
$$m,\ n>-1.$$

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [2] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, 2 изд., пер. с нем., М., 1968.

А. Б. Иванов.

СООБЩЕНИЙ КВАНТОВАНИЕ — разбиение множества возможных сообщений, вырабатываемых *источником сообщений*, на конечное (иногда счетное) число непересекающихся подмножеств A_i так, чтобы сообщения каждого класса могли быть представлены с заданной *сообщений точностью воспроизведения* нек-рым специально выбранным элементом этого подмножества $a_i\in A_i$. Заданному С. к. соответствует способ кодирования источника сообщений, задаваемый кодирующей функцией $\varphi(x)=a_i$, если $x\in A_i$. Квантование позволяет заменить передачу непрерывного сигнала дискретным сигналом без нарушения условий точности воспроизведения сообщений.

Лит.: [1] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [2] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [4] Berger T., Rate distortion theory, N. Y., 1971.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

СООБЩЕНИЙ СКОРОСТЬ СОЗДАНИЯ — величина, характеризующая *информации количество*, создаваемое за единицу времени *источником сообщений*. С. с. с. источника сообщений u с дискретным временем, вырабатывающего сообщение $\xi=(\ldots,\ \xi_{-1},\ \xi_0,\ \xi_1,\ldots)$, образованное последовательностью случайных величин $\{\xi_k,\ k=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ldots\}$, принимающих значение из нек-рого дискретного множества X, определяется равенством

$$\overline{H}(u)=\lim_{n-k\to\infty}\frac{1}{n-k}H(\xi_k^n),\qquad (*)$$

если такой предел существует. Здесь $H(\xi_k^n)$ — энтропия случайной величины $\xi_k^n=(\xi_k,\ldots,\ \xi_n)$. Величину $\overline{H}(u)$, определяемую равенством (*), называют также энтропией (на символ) источника сообщений.

Доказать существование предела (*) и явно его вычислить удается, напр., для стационарных источников; явные формулы для $\overline{H}(u)$ получены для стационарных марковских источников и гауссовских источников. Понятие С. с. с. $\overline{H}(u)$ тесно связано с понятием *избыточности* источника сообщений.

Если u — стационарный эргодич. источник сообщений с конечным числом состояний, то справедливо следующее свойство асимптотической равнораспределенности (теорема Макмиллана, [1]). Пусть $P(x^L)=\mathsf{P}\{\xi^L=x^L\}$, где $x^L=(x_1,\ldots,\ x_L)$ суть значения $\xi^L=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_L)$ — отрезка сообщений длины L. Для произвольных $\varepsilon>0$, $\delta>0$ существует $L_0(\varepsilon,\ \delta)$ такое, что при всех $L\geqslant L_0(\varepsilon,\ \delta)$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{-\log P(\xi^L)}{L}-\overline{H}(u)\right|>\delta\right\}<\varepsilon.$$

Лит.: [1] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

СООБЩЕНИЙ ТОЧНОСТЬ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ — мера качества передачи сообщений от *источника сообщений* к получателю (адресату) по *каналу связи*. Требования, предъявляемые к С. т. в. в теории передачи информации, обычно трактуют статистически, выделяя класс W допустимых совместных распределений для пары $(\xi,\ \tilde{\xi})$ в множестве всех вероятностных мер в произведении $(\mathfrak{X}\times\tilde{\mathfrak{X}},\ S_{\mathfrak{X}}\times S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$, где $(\mathfrak{X},\ S_{\mathfrak{X}})$ — измеримое пространство значений сообщения ξ, вырабатываемого источником, а $(\tilde{\mathfrak{X}},\ S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ — измеримое пространство значений воспроизводимого сообщения $\tilde{\xi}$, получаемого адресатом. С. т. в. часто задают при помощи меры иска-

жения $\rho(x, \tilde{x})$, $x \in \mathfrak{X}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}$, являющейся неотрицательной измеримой функцией от x и $\tilde{x}$. При этом множество допустимых сообщений W выделяют формулой

$$\mathsf{E}\rho(\xi, \tilde{\xi}) \leqslant \varepsilon, \qquad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — нек-рое число.

В частности, когда $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}}) = (X^n, S_{X^n})$, $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}}) = (\tilde{X}^n, S_{\tilde{X}^n})$, часто рассматривают покомпонентное условие С. т. в., при к-ром

$$\rho(x^n, \tilde{x}^n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \rho_0(x_k, \tilde{x}_k),$$

где $x^n = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $\tilde{x}^n = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{X}^n$, $x_k \in X$, $\tilde{x}_k \in \tilde{X}$, $k = 1, \ldots, n$, а $\rho_0(x, \tilde{x})$, $x \in X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$,— снова неотрицательная измеримая функция. В этом случае вместо условия (1) иногда также рассматривают следующее условие

$$\mathsf{E}\rho_0(\xi_k, \tilde{\xi}_k) \leqslant \varepsilon \text{ для всех } k = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

В случае, когда $X = \tilde{X}$ и

$$\rho_0(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = \tilde{x}, \\ 1, & \text{если } x \neq \tilde{x}, \end{cases}$$

условия (1) и (2) переходят соответственно в ограничения на среднюю *ошибочного декодирования вероятность* или максимальную вероятность ошибочного декодирования отдельных компонент сообщения. В случае источников с непрерывными пространствами (напр., гауссовских) часто полагают $\rho_0(x, \tilde{x}) = (x - \tilde{x})^2$.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Berger T., Rate distortion theory, N. Y., 1971. *Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.*

СООТВЕТСТВИЕ — понятие, распространяющее на случай двух, вообще говоря, различных множеств или однотипных математич. структур понятие *бинарного отношения*. С. широко используют в математике, а также в различных прикладных областях: теоретич. программировании, теории графов, теории систем, математич. лингвистике и т. д.

Соответствием между множествами A и B наз. любое подмножество R декартова произведения $A \times B$. Другими словами, С. между A и B состоит из нек-рых упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Как правило, С. обозначают тройкой (R, A, B) и, наряду с записью $(a, b) \in R$, пишут также aRb или $R(a, b)$. Иногда вместо «соответствие» говорят «бинарное отношение» (в широком смысле, не предполагая, что множества A и B совпадают).

Для конечных множеств широко используются матричное и графовое представления С. Пусть в множестве A имеется n элементов, в множестве B имеется m элементов и (R, A, B) — нек-рое С. Этому С. сопоставляется матрица размером $n \times m$, строки к-рой помечены элементами из A, столбцы — элементами из B и в к-рой на пересечении a-й строки и b-го столбца стоит 1, если $(a, b) \in R$, и 0 в противном случае. Обратно, каждая $(n \times m)$-матрица, состоящая из нулей и единиц, описывает вполне определенное С. между A и B. При графовом представлении элементы множеств A и B изображаются точками на плоскости. Обычно эти точки обозначаются теми же буквами, что и соответствующие элементы. Точки a и b соединяются дугой, идущей от a к b, если $(a, b) \in R$. Таким образом, С. представляется ориентированным графом.

Все С. между множествами A и B образуют полную булеву алгебру, нулем к-рой служит пустое С., а единицей — т. н. полное соответствие, состоящее из всех пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$. Пусть $R \subseteq A \times B$. Множество

$$D_R = \{a \in A \mid \exists b \ \ (a, b) \in R\}$$

наз. областью определения С. R, а множество

$$B_R = \{b \in B \mid \exists a \ \ (a, b) \in R\}$$

— областью значений, или образом, этого С. Соответствие R всюду определено, если $D_R = A$; С. R сюръективно, если $B_R = B$. Для каждого $a \in A$ множество

$$\mathrm{Im}_R a = \{b \in B \mid \ (a, b) \in R\}$$

наз. образом элемента a относительно R; для каждого $b \in B$ множество

$$\mathrm{Coim}_R b = \{a \in A \mid \ (a, b) \in R\}$$

наз. прообразом элемента b относительно R. При этом

$$D_R = \bigcup_{b \in B} \mathrm{Coim}_R b, \quad B_R = \bigcup_{a \in A} \mathrm{Im}_R a.$$

Всякое С. R устанавливает *Галуа соответствие* между подмножествами множества A и подмножествами множества B. Именно, каждому подмножеству $X \subseteq A$ сопоставляется подмножество $X' = \bigcap_{a \in X} \mathrm{Im}_R a \subseteq B$. Вместе с дуальным С., к-рое каждому $Y \subseteq B$ сопоставляет множество $Y' = \bigcap_{b \in Y} \mathrm{Coim}_R b$, соответствие Галуа задает на каждом из множеств A и B оператор замыкания.

Инволюция $R^{\#}$ или R^{-1} С. (R, A, B) определяется равенством

$$R^{\#} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Инволюция устанавливает биекцию между С. (R, A, B) и С. (S, B, A), к-рая является изоморфизмом булевых алгебр. Для С. (R, A, B) и (S, B, C) произведение, или композиция, определяется равенством

$$(RS, A, C) = \{(a, c) \mid \exists b \ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Умножение С. ассоциативно. Единицами для этого умножения служат диагональные бинарные отношения. Кроме того, $(RS)^{\#} = S^{\#}R^{\#}$ и из $R_1 \subseteq R_2$ следует $R_1^{\#} \subseteq R_2^{\#}$. Поэтому все С. между нек-рой совокупностью множеств образуют упорядоченную *категорию с инволюцией*. Умножение и инволюция позволяют выражать свойства С. с помощью алгебраич. соотношений. Напр., С. (R, A, B) всюду определено, если $RR^{\#} \supseteq E_A$ (E_A— диагональ множества A); С. R функционально, т. е. является графиком функции из A в B, если $RR^{\#} \supseteq E_A$ и $R^{\#}R \subseteq E_B$.

Для всякого С. R существуют такие функциональные С. F и G, что $R = F^{\#}G$. Кроме того, для всякого С. R справедливо включение $R \subseteq RR^{\#}R$. Соответствие R наз. дифункциональным, если $R = RR^{\#}R$. Всякое дифункциональное С. индуцирует на области определения и на образе отношения эквивалентности, фактормножества по к-рым равномощны. Такое описание справедливо только для дифункциональных С.

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс однотипных математич. структур, замкнутый относительно конечных декартовых произведений. Под С. между структурами A и B из $\mathfrak{A}$ понимают подструктуру R произведения $A \times B$. Так вводятся групповые С., модульные С., кольцевые С. и т. п. Такие С. часто допускают полезные описания своего строения. Пусть, напр., A и B — группы и R — подгруппа прямого произведения $A \times B$. Множества

$$K_R = \{a \in A \mid (a, 1) \in R\}, \ I_R = \{b \in B \mid (1, b) \in R\}$$

наз. ядром и неопределенностью С. R. При этом K_R — нормальный делитель в D_R, I_R — нормальный делитель в B_R и факторгруппы D_R/K_R и

B_R/I_R изоморфны. Из этого описания, в частности, следует, что все групповые С. дифункциональны.

Лит.: [1] Курош А. Г., Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974; [2] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [3] Цаленко М. Ш., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1980, т. 41, с. 241—85. *М. Ш. Цаленко.*

СООТВЕТСТВИЕ ГРАНИЦ при конформном отображении — свойство однолистного конформного отображения f конечносвязной области G на область D плоскости z, состоящее в том, что отображение f можно продолжить до *гомеоморфизма* между теми или иными бикомпактными расширениями $\tilde{G}$ и $\tilde{D}$ областей G и D, то есть f индуцирует гомеоморфизм границ $\tilde{G}\setminus G$ и $\tilde{D}\setminus D$. Для обычных (евклидовых) границ ∂G и ∂D областей G и D это свойство не всегда имеет место. Напр., конформное отображение круга K индуцирует гомеоморфизм евклидовых границ ∂K и ∂D, если ∂D гомеоморфна окружности.

Известно несколько бикомпактных расширений односвязной области со свойством С. г. при конформном отображении. Исторически первым из них было расширение Каратеодори (см. [1], а также [2]). Оно наиболее наглядно и часто используется при изучении конформных и других отображений. Элементы получающейся при этом границы К. Каратеодори назвал простыми концами (см. *Граничные элементы*). Была построена теория С. г. при переменном конформном отображении односвязных областей (см. [3]).

Лит.: [1] Мышкис А. Д., Суворов Г. Д., «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 4, с. 822—24; [2] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1913, Bd 73, S. 323—70; [3] Суворов Г. Д., «Матем. сб.», 1953, т. 33 (75), № 1, с. 73—100; [4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [5] Коллингвуд Э. Ф., Ловатер А. Дж., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [6] Суворов Г. Д., Семейства плоских топологических отображений, Новосиб., 1965; [7] Суворов Г. Д., Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле, К., 1981; [8] Иванов О. В., Суворов Г. Д., Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области, К., 1982. *Б. П. Куфарев.*

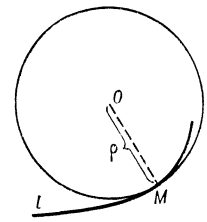
СООТВЕТСТВИЯ ГРАНИЦ ПРИНЦИП — принцип, формулируемый следующим образом. Говорят, что для отображения f имеет место С. г. п., если из того, что f есть непрерывное отображение замыкания $\overline{G}$ области G на замыкание $\overline{D}$ области D и f есть гомеоморфизм $\overline{G}\setminus G$ на $\overline{D}\setminus D$, следует, что f есть топологич. отображение $\overline{G}$ на $\overline{D}$. Таким образом, С. г. п.— свойство, в нек-ром смысле обратное свойству *соответствия границ*.

Если G и D — плоские области, их евклидовы границы гомеоморфны окружности и D ограничена, то для функций f, аналитических в G, выполняется С. г. п., то есть f — конформное отображение G на D. Кроме этой, в практике конформных отображений используются и другие формы С. г. п. (см. [1]). С. г. п. доказан для ориентируемых отображений в евклидовом пространстве (см. [2]).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [2] Кудрявцев Л. Д., «Докл. АН СССР», 1954, т. 14, № 5, с. 921—23; [3] Пинчук С. И., «Матем. сб.», 1980, т. 111, № 1, с. 67—94. *Б. П. Куфарев.*

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ КВАДРИКА — поверхность 2-го порядка, имеющая с поверхностью в данной ее точке касание 2-го порядка. Примерами С. к. являются *Дарбу квадрика*, *Ли квадрика*. *В. С. Малаховский.*

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ОКРУЖНОСТЬ в точке M кривой l — окружность, имеющая с l в точке M касание порядка $n\geqslant 2$ (см. *Соприкосновение*). Если кривизна кривой l в точке M равна нулю, то С. о. вырождается в прямую. Радиус С. о. наз. радиусом кривизны кривой l в точке M, а центр С. о.— центром кривизны (см. рис.). Если кривая l плоская



и задана уравнением $y=f(x)$, то радиус С. о. определяется формулой

$$\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|.$$

Если кривая l пространственная и задана уравнениями

$$x=x(u),\quad y=y(u),\quad z=z(u),$$

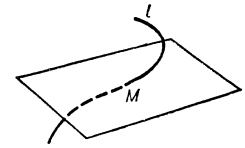
то радиус С. о. определяется формулой

$$\rho=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}$$

(здесь штрихи означают дифференцирование по параметру u).

Иногда С. о. наз. соприкасающимся кругом. *БСЭ-3.*

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ в точке M кривой l — плоскость, имеющая с l в точке M касание порядка $n\geqslant 2$ (см. *Соприкосновение*). С. п. может быть также определена как предел переменной плоскости, проходящей через три точки кривой l, когда эти точки стремятся к точке M. Обычно кривая, кроме исключительных случаев, пронизывает свою С. п. в точке соприкосновения (см. рис.). Если кривая l задана уравнениями



$$x=x(u),\quad y=y(u),\quad z=z(u),$$

то уравнение С. п. имеет вид

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0,$$

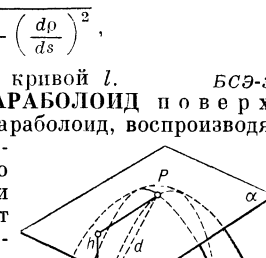
где X, Y, Z — текущие координаты, а x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' вычисляются в точке соприкосновения; если все три коэффициента при X, Y, Z в уравнении С. п. исчезают, то С. п. делается неопределенной (может совпадать с любой плоскостью, проходящей через касательную). *БСЭ-3.*

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ СФЕРА в точке M кривой l — сфера, имеющая с l в точке M касание порядка $n\geqslant 3$ (см. *Соприкосновение*). С. с. может быть также определена как предел переменной сферы, проходящей через четыре точки кривой l, когда эти точки стремятся к точке M. Если радиус кривизны кривой l в точке M равен ρ, а σ — кручение, то формула для вычисления радиуса С. с. имеет вид

$$R=\sqrt{\rho^2+\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2},$$

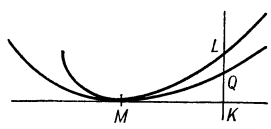
где ds — дифференциал дуги кривой l. *БСЭ-3.*

СОПРИКАСАЮЩИЙСЯ ПАРАБОЛОИД поверхности в точке M — параболоид, воспроизводящий форму поверхности вблизи этой точки с точностью до величин 2-го порядка малости относительно расстояния от точки P. Пусть Ф — параболоид (см. рис.) с вершиной P, касающийся поверхности в этой точке, h и d — расстояние произвольной точки Q поверхности соответственно от параболоида и от точки P. Параболоид Ф наз. С. п., если отношение $h/d^2\to 0$ при $Q\to P$. При этом не исключается вырождение параболоида в параболич. цилиндр или плоскость. В каждой точке ре-



гулярной поверхности существует и притом единственный С. п. С помощью С. п. производится классификация точек поверхности (см. *Эллиптическая точка*, *Гиперболическая точка*, *Параболическая точка*, *Уплощения точка*). *Д. Д. Соколов.*

СОПРИКОСНОВЕНИЕ кривой q с кривой l в данной точке M — геометрическое понятие, означающее, что q имеет с l в точке M касание максимального порядка по сравнению с любой кривой из нек-рого заранее данного семейства кривых $\{q\}$, включающего q. Порядок касания кривых q и l считается равным n, если отрезок QL есть величина $n+1$ порядка малости по отношению к отрезку MK (см. рис., где отрезок QL перпендикулярен к общей касательной кривых q и l в точке M). Таким образом, среди всех кривых семейства $\{q\}$ С. с кривой l имеет та кривая, к-рая наиболее тесно прилегает к l (для нее отрезок QL имеет максимальный порядок малости). Кривая семейства $\{q\}$, к-рая имеет С. с кривой l в данной ее точке M, наз. соприкасающейся кривой данного семейства в указанной точке кривой l. Напр., *соприкасающейся окружностью* в точке M кривой l является окружность, к-рая в этой точке имеет с l максимальный порядок касания по сравнению с любой другой окружностью.



Аналогично вышеизложенному определяется понятие соприкосновения поверхности S, принадлежащей данному семейству поверхностей $\{S\}$, с какой-нибудь кривой l (или с поверхностью) в нек-рой ее точке M (в этих случаях порядок касания определяется также аналогично предыдущему; следует только вместо касательной прямой MK, изображенной на рис., рассматривать касательную плоскость поверхности S в точке M).

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [3] Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, пер. с франц., М., 1960; [4] Залгаллер В. А., Теория огибающих, М., 1975. *БСЭ-3.*

СОПРЯЖЕННАЯ МАТРИЦА, эрмитово сопряженная матрица, с данной (прямоугольной или квадратной) матрицей $A=\|a_{ik}\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел — матрица A^*, каждый элемент a^*_{ik} к-рой комплексно сопряжен с элементом a_{ki} матрицы A, то есть $a^*_{ik}=\overline{a_{ki}}$. С. м. совпадает с комплексно сопряженной транспонированной матрицей: $A^*=(\overline{A}')$.

Свойства С. м.:

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\quad (\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*,$$

$$(AB)^*=B^*A^*,\quad (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*,\quad (A^*)^*=A.$$

С. м. соответствуют сопряженным между собой линейным отображениям унитарных пространств в ортонормированных базисах.

Лит. см. при ст. *Матрица.* *Т. С. Пиголкина.*

СОПРЯЖЕННАЯ СЕТЬ — сеть линий на поверхности, образованная двумя семействами линий такими, что в каждой точке поверхности линии сети различных семейств имеют *сопряженные направления*. Если координатная сеть является С. с., то коэффициент M второй квадратичной формы поверхности тождественно равен нулю. В окрестности каждой точки поверхности, не являющейся точкой уплощения, может быть введена параметризация так, чтобы координатные линии образовывали С. с. При этом одно семейство координатных линий можно взять произвольно, лишь бы линии этого семейства не имели асимптотич. направлений. Важными примерами С. с. являются асимптотич. сеть и сеть линий кривизны.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969. *Е. В. Шикин.*

СОПРЯЖЕННАЯ ФУНКЦИЯ — понятие теории функций, являющееся конкретным отражением нек-рого инволютивного оператора для соответствующего класса функций.

1) С. ф. к комплекснозначной функции f наз. функцию $\overline{f}$, значения к-рой являются комплексно сопряженными к значениям f.

2) С. ф. к гармонической функции — см. *Сопряженные гармонические функции.*

3) С. ф. к 2π-периодической суммируемой на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ наз. функцию

$$\overline{f}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}-\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt;$$

она существует почти всюду и почти всюду совпадает с (C, α)-суммой, $\alpha>0$, или суммой Абеля — Пуассона *сопряженного тригонометрического ряда.*

4) С. ф. к функции $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$, определенной на векторном пространстве X, находящемся в двойственности (относительно билинейной формы $\langle x, y\rangle$) с векторным пространством Y — функция на Y, задаваемая соотношением

$$f^*(y)=\sup_{x\in X}(\langle x, y\rangle-f(x)). \qquad (*)$$

Для функции, заданной на Y, сопряженная функция определяется аналогично.

С. ф. к функции одного переменного $f_p(x)=\frac{|x|^p}{p}$, $1<p<\infty$, будет функция

$$f_{p'}(y)=\frac{|y|^{p'}}{p'},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1;$$

С. ф. к функции $f(x)=\frac{(x, x)}{2}$ в гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ будет функция $\langle y, y\rangle/2$. С. ф. к норме $N(x)=\|x\|$ в нормированном пространстве будет функция $N^*(y)$, равная нулю, если $\|x\|\leqslant 1$, и равная $+\infty$, если $\|x\|>1$.

Если f — гладкая растущая на бесконечности быстрее линейной функция, то f^* — не что иное, как *Лежандра преобразование* функции f. Для одномерных строго выпуклых функций определение, равносильное $(*)$, было дано У. Юнгом [1], в других терминах У. Юнг определял С. ф. к функции

$$f(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt,$$

где φ непрерывна и строго возрастает, соотношением

$$f^*(y)=\int_0^y\psi(t)\,dt,$$

где ψ — функция, обратная к φ. Определение $(*)$ для одномерных функций было впервые предложено С. Мандельбройтом (S. Mandelbrojt), в конечномерном случае — В. Фенхелем [2], в бесконечномерном — Ж. Моро [3] и А. Брёнстедом [4]. Для выпуклой функции и сопряженной с ней выполнено неравенство Юнга

$$\langle x, y\rangle\leqslant f(x)+f^*(y).$$

С. ф.— выпуклая замкнутая функция. Оператор сопряжения*: $f\to f^*$ однозначно отображает совокупность собственных выпуклых замкнутых функций на X на совокупность собственных выпуклых замкнутых функций на Y (теорема Фенхеля — Моро).

Подробнее см. [5] и [6].

См. также *Выпуклый анализ*, *Опорная функция*, *Двойственность* в экстремальных задачах и выпуклом анализе.

Лит.: [1] Young W. H., «Proc. Roy. Soc. A», 1912, v. 87, p. 225—29; [2] Fenchel W., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [3] Moreau J. J., Fonctions convexes en dualité, Montpellier, 1962; [4] Brondsted A., «Math. Fys. Medd. Danske vid. Selsk.», 1964, bd 34, № 2, p. 1—26; [5] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [6] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление, М., 1979. *В. М. Тихомиров.*

СОПРЯЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению $l(y)=0$ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $l^*(\xi)=0$, где

$$l(y)\equiv a_0(t)\,y^{(n)}+\ldots+a_k(t)\,y^{(n-k)}+\ldots+a_n(t)\,y \quad (1)$$
$$(y^{(\nu)}=d^\nu y/dt^\nu,\ y(\cdot)\in C^n(I),\ a_k(\cdot)\in C^{n-k}(I),$$
$$a_0(t)\neq 0,\ t\in I;$$

$C^m(I)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых комплекснозначных функций на $I=(\alpha,\beta)$) и

$$l^*(\xi)\equiv(-1)^n(\overline{a}_0\xi)^{(n)}+\ldots+(-1)^{n-k}(\overline{a}_k\xi)^{(n-k)}+\ldots$$
$$\ldots+\overline{a}_n\xi,\ \xi\in C^n(I) \quad (2)$$

(черта означает операцию комплексного сопряжения). Из определения следует, что

$$(l_1+l_2)^*=l_1^*+l_2^*,\quad(\lambda l)^*=\overline{\lambda}l^*,$$

где λ — скаляр. Сопряженным к уравнению $l^*(\xi)=0$ является уравнение $l(y)=0$. Для любых n раз непрерывно дифференцируемых функций $y(t)$ и $\xi(t)$ справедливо тождество Лагранжа:

$$\overline{\xi}l(y)-\overline{l^*(\xi)}\,y=\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\times$$
$$\times(a_{n-k}\overline{\xi})^{(j)}\,y^{(k-j-1)}\Big\},$$

из к-рого следует формула Грина:

$$\int_s^\tau[\overline{\xi}l(y)-\overline{l^*(\xi)}\,y]\,dt=$$
$$=\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(a_{n-k}\overline{\xi})^{(j)}\,y^{(k-j-1)}\Big|_{t=s}^{t=\tau}.$$

Если $y(t)$, $\xi(t)$ — произвольные решения уравнений $l(y)=0$ и $l^*(\xi)=0$, то

$$\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(a_{n-k}\overline{\xi})^{(j)}\,y^{(k-j-1)}\equiv\text{const},\ t\in I.$$

Знание $m(\leqslant n)$ линейно независимых решений уравнения $l^*(\xi)=0$ позволяет понизить порядок уравнения $l(y)=0$ на m единиц (см. [1] — [3]).

Для системы дифференциальных уравнений

$$L(x)=0,\quad L(x)\equiv\dot{x}+A(t)\,x,\quad t\in I,$$

с непрерывной комплекснозначной $(n\times n)$-матрицей $A(t)$, сопряженная система определяется равенством

$$L^*(\psi)\equiv-\dot{\psi}+A^*(t)\,\psi=0,\quad t\in I$$

(см. [1], [4]); здесь $A^*(t)$ — эрмитово сопряженная матрица к матрице $A(t)$. Тождество Лагранжа и формула Грина приобретают вид

$$(\overline{\psi},\ L(x))-(\overline{L^*(\psi)},\ x)=\frac{d}{dt}(\overline{\psi},\ x),$$
$$\int_s^\tau[(\overline{\psi},\ L(x))-(\overline{L^*(\psi)},\ x)]\,dt=(\overline{\psi},\ x)\Big|_{t=s}^{t=\tau};$$

здесь $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение (сумма произведений одноименных координат). Если $x(t)$, $\psi(t)$ — произвольные решения уравнений $L(x)=0$, $L^*(\psi)=0$, то

$$(\overline{\psi}(t),\ x(t))\equiv\text{const},\quad t\in I.$$

Понятие С. д. у. тесно связано с общим понятием *сопряженного оператора*. Если, напр., l — линейный дифференциальный оператор, действующий из пространства $C^n(I)$ в пространство $C(I)$ по формуле (1), то сопряженный дифференциальный оператор l^* действует из пространства $C^*(I)$, сопряженного к $C(I)$, в пространство $C^{n*}(I)$, сопряженное к $C^n(I)$. Сужение оператора l^* на пространство $C^n(I)$ определяется формулой (2) (см. [5]).

С. д. у. определяется, кроме того, для линейного дифференциального уравнения с частными производными (см. [6], [5]).

Пусть $\Delta=[t_0,\ t_1]\subset I$ и U_k — линейные и линейно независимые функционалы на пространстве $C^n(\Delta)$. Тогда сопряженная краевая задача к линейной краевой задаче

$$l(y)=0,\ t\in\Delta,\ U_k(y)=0,\ k=1,\ \ldots,\ m,\ m<2n, \quad (2)$$

определяется равенствами

$$l^*(\xi)=0,\ U_j^*(\xi)=0,\ j=1,\ \ldots,\ 2n-m. \quad (3)$$

Здесь U_j^* — линейные функционалы на пространстве $C^n(\Delta)$, описывающие сопряженные краевые условия, т. е. определяемые так, чтобы равенство (см. *Грина формулы*)

$$\int_{t_0}^{t_1}[\overline{\xi}l(y)-\overline{l^*(\xi)}\,y]\,dt=0$$

выполнялось для любой пары функций $y(\cdot)$, $\xi(\cdot)\in C^n(\Delta)$, удовлетворяющей условиям $U_k(y)=0$, $k=1,\ldots,m$, $U_j^*(\xi)=0$, $j=1,\ \ldots,\ 2n-m$.

Если

$$U_k(y)\equiv\sum_{p=1}^n[\alpha_{kp}y^{(p-1)}(t_0)+\beta_{kp}y^{(p-1)}(t_1)]$$

— линейные формы переменных

$$y^{(p-1)}(t_0),\quad y^{(p-1)}(t_1),\quad p=1,\ \ldots,\ n,$$

то $U_j^*(\xi)$ — тоже линейные формы переменных

$$\xi^{(p-1)}(t_0),\quad \xi^{(p-1)}(t_1),\quad p=1,\ \ldots,\ n.$$

Пример. Для задачи

$$\ddot{y}+a(t)\,y=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$y(0)+\alpha y(1)+\beta\dot{y}(1)=0,$$
$$\dot{y}(0)+\gamma y(1)+\delta\dot{y}(1)=0$$

с действительными $a(t)$, α, β, γ, δ, сопряженная краевая задача имеет вид

$$\ddot{\xi}+a(t)\,\xi=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$\alpha\xi(0)+\gamma\dot{\xi}(0)+\xi(1)=0,$$
$$\beta\xi(0)+\delta\dot{\xi}(0)+\dot{\xi}(1)=0.$$

Если задача (2) имеет k линейно независимых решений (в этом случае ранг краевой задачи $r=n-k$), то задача (3) имеет $m-n+k$ линейно независимых решений (ее ранг $r'=2n-m-k$). При $m=n$ задачи (2), (3) имеют одинаковое число линейно независимых решений; поэтому при $m=n$ задача (2) не имеет решений, кроме тривиального, в том и только в том случае, когда этим свойством обладает сопряженная краевая задача (3). Справедлива альтернатива Фредгольма: полуоднородная краевая задача

$$l(y)=f(t),\quad U_k(y)=0,\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

имеет решение, если функция $f(t)$ ортогональна ко всем нетривиальным решениям $\xi(t)$ сопряженной краевой задачи (3), т. е.

$$\int_{t_0}^{t_1}\overline{\xi}(t)\,f(t)\,dt=0$$

(см. [1] — [3], [7]).

Для задачи о собственных значениях

$$l(y)=\lambda y,\quad U_k(y)=0,\quad k=1,\ \ldots,\ n, \quad (4)$$

сопряженной задачей о собственных значениях наз. задача

$$l^*(\xi)=\mu\xi,\quad U_j^*(\xi)=0,\quad j=1,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

Если λ — собственное значение задачи (4), то $\mu=\overline{\lambda}$ — собственное значение задачи (5). Собственные функции $y(t)$, $\xi(t)$, отвечающие собственным значениям λ и μ задач (4) и (5) соответственно, ортогональны, если $\lambda\neq\mu$ (см. [1] — [3]):

$$\int_{t_0}^{t_1}\overline{y}(t)\,\xi(t)\,dt=0.$$

Для линейной краевой задачи

$$L(x)\equiv\dot{x}+A(t)\,x=0,\quad U(x)=0,\quad t\in\Delta, \tag{6}$$

где U есть m-вектор-функционал на пространстве $C_n(\Delta)$ непрерывно дифференцируемых комплекснозначных n-вектор-функций, $m<2n$, сопряженная краевая задача определяется равенствами

$$L^*(\psi)=0,\quad U^*(\psi)=0,\quad t\in\Delta \tag{7}$$

(см. [1]); здесь U^* есть $(2n-m)$-вектор-функционал, определяемый так, чтобы равенство

$$(\psi(t),\ x(t))\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}=0$$

выполнялось для любой пары функций $x(\cdot)$, $\psi(\cdot)\in C_n^1(\Delta)$, удовлетворяющей условиям

$$U(x)=0,\quad U^*(\psi)=0.$$

Задачи (6), (7) обладают свойствами, аналогичными перечисленным выше (см. [1]).

Понятие сопряженной краевой задачи тесно связано с понятием сопряженного оператора [5]. Сопряженная краевая задача определяется также для линейной краевой задачи для уравнения с частными производными (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [6] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976; [7] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981. *Е. Л. Тонков.*

СОПРЯЖЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ к линейному преобразованию А — линейное преобразование А* евклидова (или унитарного) пространства L такое, что для любых векторов x и y из L имеет место равенство скалярных произведений

$$(Ax,\ y)=(x,\ A^*y).$$

С. л. п.— частный случай понятия сопряженного линейного отображения. Преобразование А* определяется по А единственным образом. Если L конечномерно, то для всякого А существует С. л. п. А*, причем его матрица B в базисе $e_1,\ldots,e_n$ связана с матрицей A линейного преобразования А в том же базисе соотношением

$$B=\overline{G}^{-1}A^*\overline{G},$$

где A^*— сопряженная с A матрица, а G — *Грама матрица* базиса $e_1,\ldots,e_n$.

В евклидовом пространстве линейное преобразование А и его сопряженное А* имеют одинаковые характеристич. многочлены, равные определители, следы, одинаковые собственные значения. В унитарном пространстве их характеристич. многочлены, определители, следы, собственные значения комплексно сопряжены. *Т. С. Пиголкина.*

СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО к топологическому векторному пространству E — векторное пространство E^*, состоящее из непрерывных линейных функционалов на E. Если E — локально выпуклое пространство, то функционалы $f\in E^*$ разделяют точки E (теорема Хана — Банаха). Если E — нормированное пространство, то E^* является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Наряду с сильной топологией, определенной нормой $\|f\|$, в E^* рассматривают и слабую $*$-топологию.

Лит.: [1] Райков Д. А., Векторные пространства, М., 1962. *В. И. Ломоносов.*

СОПРЯЖЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, гармонически сопряженные функции,— пара действительных гармонич. функций (г. ф.) u и v, являющихся действительной и мнимой частями нек-рой аналитич. функции $f=u+iv$ комплексного аргумента. В случае одного комплексного переменного $z=x+iy$ г. ф. $u=u(x,\ y)$ и $v=v(x,\ y)$ являются С. г. ф. в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда они удовлетворяют в D системе уравнений Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

В системе (1) роль г. ф. u и v не симметрична: функция v является сопряженной для u, но для v сопряженной будет не u, а $-u$. Если задана г. ф. $u=u(x,\ y)$, то С. г. ф. $v=v(x,\ y)$ и вся аналитич. функция $f=u+iv$ легко определяются с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого ic; это можно сделать, напр., по формуле Гурса

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overline{z^0}}{2},\ \frac{z-\overline{z^0}}{2i}\right)-u(x^0,\ y^0)+ic \tag{2}$$

в окрестности нек-рой точки $z^0=x^0+iy^0$ из области определения u.

В случае многих комплексных переменных $z=x+iy=(z_1,\ldots,z_n)=(x_1,\ldots,x_n)+i(y,\ldots,y_n)$, $n>1$, система Коши — Римана становится переопределенной:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{\partial v}{\partial y_k},\quad \frac{\partial u}{\partial y_k}=-\frac{\partial v}{\partial x_k},\quad k=1,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что при $n>1$ функция u уже не может быть задана как произвольная г. ф.— она должна принадлежать подклассу *плюригармонических функций*; сопряженную плюригармонич. функцию v можно и в этом случае найти по формуле (2).

Известны различные аналоги системы С. г. ф. $(u,\ v)$ в виде вектор-функции $f=(u_1,\ldots,u_m)$, компоненты к-рой $u_j=u_j(x_1,\ldots,x_n)$ суть действительные функции действительных переменных $x_1,\ldots,x_n$. Такова, напр., градиентная система $f=(u_1,\ldots,u_n)$, удовлетворяющая обобщенной системе уравнений Коши — Римана

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\ i\neq j, \tag{4}$$

к-рая записывается также в сокращенном виде:

$$\operatorname{div}f=0,\quad \operatorname{rot}f=0.$$

Если условия (4) выполняются в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, гомеоморфной шару, то существует г. ф. h в D такая, что $f=\operatorname{grad}h$. При $n=2$ получают, что u_2+iu_1 есть аналитич. функция переменного $z=x_1+ix_2$. Поведение решений системы (4) в нек-рых вопросах аналогично системе Коши — Римана (1), напр. при изучении граничных свойств (см. [3]).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Стейн М., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974. *Е. Д. Соломенцев.*

СОПРЯЖЕННЫЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — координаты на поверхности, в к-рых вторая квадратичная форма записывается в виде

$$\mathrm{II} = -\Lambda^2(u, v)(du^2+dv^2).$$

С. и. к. всегда могут быть введены в достаточно малой окрестности эллиптич. точки регулярной поверхности. В достаточно малой окрестности гиперболич. точки регулярной поверхности можно ввести координаты, в к-рых

$$\mathrm{II} = \Lambda^2(u, v)(du^2-dv^2),$$

однако в этом случае часто пользуются т. н. асимптотическими координатами $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, при к-рых

$$\mathrm{II} = \tilde{\Lambda}(\tilde{u}, \tilde{v})\, d\tilde{u}\, d\tilde{v}.$$

Д. Д. Соколов.

СОПРЯЖЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ — пара направлений, исходящих из точки P поверхности S и таких, что содержащие их прямые являются сопряженными диаметрами индикатрисы Дюпена поверхности S в точке P. Для того чтобы направления $(du : dv)$, $(\delta u : \delta v)$ в точке P поверхности S были С. н., необходимо и достаточно выполнения условия

$$Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0,$$

где L, M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S, вычисленные в точке P. Примеры: *асимптотические направления*, *главные направления*.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969. *Е. В. Шикин.*

СОПРЯЖЕННЫЕ СВЯЗНОСТИ — линейные связности Γ и $\tilde{\Gamma}$, задаваемые операторами *ковариантного дифференцирования* ∇ и $\tilde{\nabla}$, такие, что

$$ZB(X, Y) = B(\nabla_Z X, Y) + B(X, \tilde{\nabla}_Z Y) + 2\omega(Z)\, B(X, Y),$$

где X, Y, Z — произвольные векторные поля, $B(\cdot,\cdot)$ — нек-рая квадратичная форма, $\omega(\cdot)$ — нек-рая линейная форма. Говорят также, что ∇ и $\tilde{\nabla}$ сопряжены относительно B. В координатной форме (здесь $X \Rightarrow \partial_i$, $B \Rightarrow b_{ij}$, $\omega \Rightarrow \omega_i$, $\nabla \Rightarrow \Gamma^k_{ij}$):

$$\partial_k b_{ij} - \Gamma^s_{ki} b_{sj} - \tilde{\Gamma}^s_{kj} b_{is} = 2\omega_k b_{ij}.$$

Для операторов кривизны R и $\tilde{R}$ и кручения T и $\tilde{T}$ связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно выполняются соотношения

$$B(R(T, Z)X, Y) + B(X, \tilde{R}(T, Z)Y) =$$
$$= 2\{\omega([T, Z]) - T\omega(Z) + Z\omega(T)\}\, B(X, Y),$$

$$B(Z, \Delta T(X, Y)) - B(\Delta T(Z, Y)X) =$$
$$= B(\Delta T(Z, X), Y), \quad \Delta T = \tilde{T} - T.$$

В координатной форме:

$$R^m_{rsj} b_{im} + \tilde{R}^m_{rsi} b_{jm} = -2(\partial_r \omega_s - \partial_s \omega_r) b_{ij},$$

$$\Delta T^s_{ij} b_{su} - \Delta T^s_{kj} b_{si} - \Delta T^s_{ki} b_{sj} = 0.$$

Лит.: [1] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976. *М. И. Войцеховский.*

СОПРЯЖЕННЫЙ КЛАСС ФУНКЦИЙ — понятие теории функций, являющееся конкретным отображением *двойственности* в функциональных пространствах. Так, если класс функций X рассматривается как банахово или топологическое векторное пространство, то С. к. ф. наз. класс функций, изометрически изоморфный сопряженному пространству X^*. Напр., между пространствами $(L^p[a, b])^*$ и $L^q[a, b]$ при $1 \leqslant p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ существует изометрич. изоморфизм, при к-ром соответственные элементы x^* и g связаны соотношением

$$x^*(f) = \int_a^b g(x) f(x)\, dx.$$

Если рассматривается нек-рый класс 2π-периодических суммируемых на $[-\pi, \pi]$ функций X, то С. к. ф. наз. класс функций, сопряженных к функциям из X. Напр., класс функций, сопряженных к $L^p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$, совпадает с классом таких функций f из $L^p[-\pi, \pi]$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Класс функций, сопряженных к $\mathrm{Lip}\alpha$, $0 < \alpha < 1$, совпадает с классом таких функций из $\mathrm{Lip}\alpha$, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$.

Лит.: [1] Frechet M., «C. r. Acad. sci.», 1907, t. 144, p. 1414—16; [2] Riesz F., там же, S. 1409—11; [3] Priwaloff I., «Bull. soc. math. France», 1916, t. 44, p. 100—03; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., [ч. 1], М., 1962. *Т. П. Лукашенко.*

СОПРЯЖЕННЫЙ МОДУЛЬ, двойственный модуль, дуальный модуль, — модуль гомоморфизмов модуля в основное кольцо. Точнее, пусть M — левый модуль над кольцом R. Абелеву группу $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ гомоморфизмов модуля M в левый R-модуль R можно превратить в правый R-модуль M^*, полагая

$$x(\varphi\lambda) = (x\varphi)\lambda, \quad x \in M, \ \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R), \ \lambda \in R.$$

Этот правый модуль M^* наз. С. м. модуля M. Если $x \in M$, то можно определить элемент $\bar{x} \in M^{**}$, положив $\bar{x}(\varphi) = x\varphi$ для всех $\varphi \in M^*$. Этим определяется гомоморфизм модуля M в M^{**}. Гомоморфизмом является и отображение $\zeta : M^* \otimes_R C \to \mathrm{Hom}_R(M, C)$ (C — левый R-модуль), определяемое равенством

$$x((\varphi \otimes c)\zeta) = (x\varphi)c, \quad x \in M, \ \varphi \in M^*, \ c \in C.$$

Оба эти гомоморфизма являются изоморфизмами, если M — конечно порожденный проективный модуль [2]. Из свойств функтора Hom вытекает изоморфизм $(\Sigma M_\alpha)^* \cong \Pi M_\alpha^*$ (Σ — прямая сумма, Π — прямое произведение) и существование гомоморфизма M^{***} в M^*. Сквозное отображение $M^* \to M^{***} \to M^*$ является тождественным. Однако M^{***} не обязательно изоморфен M^*. Важными являются и модули без кручения в смысле Басса, т. е. модули, для к-рых указанный выше гомоморфизм M в M^{**} оказывается мономорфизмом. Это свойство равносильно вложимости модуля M в прямое произведение нек-рого множества экземпляров основного кольца. Если R нётерово справа и слева, то отображение $M \to M^*$ осуществляет двойственность между категориями всех левых и всех правых конечно порожденных R-модулей тогда и только тогда, когда R квазифробениусово.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [3] Мишина А. П., Скорняков Л. А., Абелевы группы и модули, М., 1969. *Л. А. Скорняков.*

СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор A^*, действующий из пространства Y^* в пространство X^* (сильно сопряженные с локально выпуклыми пространствами Y и X соответственно), к-рый строится по линейному оператору $A : X \to Y$ следующим образом. Пусть D_A — область определения оператора A, всюду плотная в X. Если для всех $x \in D_A$ имеет место

$$\langle Ax, g\rangle = \langle x, g^*\rangle. \qquad (*)$$

где $Ax \in Y$, $g \in Y^*$, $g^* \in X^*$, то на множестве D_{A^*} элементов g, удовлетворяющих (*), однозначно опреде-

лен оператор $A^*g=g^*$, действующий из D_{A^*} в X^*. Если $D_A=X$ и A — линейный непрерывный оператор, то A^* — также линейный непрерывный оператор. Если, кроме того, X и Y — линейные нормированные пространства, то $\|A^*\|=\|A\|$. Если A — вполне непрерывный оператор, то таков же и A^*. Наиболее подробно изучены свойства С. о., когда X и Y — гильбертовы пространства.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Соболев.*

СОПРЯЖЕННЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД к ряду

$$\sigma=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

— ряд

$$\overline{\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty} -b_n\cos nx+a_n\sin nx.$$

Эти ряды являются соответственно действительной и мнимой частями ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)\,z^n$$

при $z=e^{ix}$. Формула для частных сумм $\overline{\sigma}[f]$ сопряженного к ряду Фурье функции $f(x)$ тригонометрич. ряда

$$\overline{S}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{D}_n(t-x)\,dt,$$

где $\overline{D}_n(x)$ — сопряженное *Дирихле ядро*. Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$, то необходимым и достаточным условием сходимости ряда $\overline{\sigma}[f]$ в точке x_0 является существование *сопряженной функции* (см. п. 3) $\overline{f}(x_0)$, к-рая представляет тогда сумму ряда $\overline{\sigma}[f]$. Если $f(x)$ — суммируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, то ряд $\overline{\sigma}[f]$ суммируется почти всюду методами (C, α), $\alpha>0$, и методом Абеля — Пуассона и почти всюду совпадает с сопряженной функцией $\overline{f}(x)$. Если функция $\overline{f}(x)$ суммируема, то сопряженный ряд $\overline{\sigma}[f]$ является ее рядом Фурье. Функция $\overline{f}(x)$ может быть несуммируемой; для таких обобщений интеграла Лебега, как *A-интеграл* и *Бокса интеграл*, сопряженный ряд $\overline{\sigma}[f]$ всегда является рядом Фурье сопряженной функции.

Лит.: [1] Tauber A., «Monatsch. Math. Phys.», 1891, Bd 2, S. 79—118; [2] Joung W. H., «Sitzungsber. math.-naturwiss. Hb. Bayerischen Akad. Wiss. München», 1911, Bd 41, S. 361—71; [3] Priwaloff I., «Bull. Soc. math. France», 1916, t. 44, p. 100—103; [4] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1919, с. 61—104; [5] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951; [6] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [7] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107; [8] Жижашвили Л. В., Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969. *Т. П. Лукашенко.*

СОПРЯЖЕННЫЙ ФУНКТОР — понятие, выражающее универсальность и естественность многих важных математич. конструкций: свободных универсальных алгебр, различных пополнений, прямых и обратных пределов и т. д.

Пусть $F:\mathfrak{K}\to\mathfrak{L}$ — одноместный ковариантный функтор из категории $\mathfrak{K}$ в категорию $\mathfrak{L}$. Функтор F индуцирует функтор

$$H^F(X,\ Y)=H_{\mathfrak{L}}(F(X),\ Y):\mathfrak{K}^*\times\mathfrak{L}\longrightarrow\mathfrak{S},$$

где $\mathfrak{K}^*$ — категория, двойственная категории $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ — категория множеств, $H_{\mathfrak{L}}(X,\ Y)$: $\mathfrak{L}^*\times\mathfrak{L}\to\mathfrak{S}$ — основной теоретико-множественный функтор. Функтор H^F контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. Аналогично, любой ковариантный функтор $G:\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$ индуцирует функтор

$$H_G(X,\ Y)=H_{\mathfrak{K}}(X,\ G(Y)):\mathfrak{K}^*\times\mathfrak{L}\longrightarrow\mathfrak{S},$$

также контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму. Функторы F и G сопряжены, или образуют сопряженную пару, если функторы H^F и H_G изоморфны, т. е. существует естественное преобразование $\theta: H^F\to H_G$, к-рое устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами морфизмов $H_{\mathfrak{L}}(F(X),\ Y)$ и $H_{\mathfrak{K}}(X,\ G(Y))$ для любых объектов $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$. Преобразование θ наз. сопряжением F с G; функтор F наз. левым сопряженным к функтору G, а G — правым сопряженным к F (что обозначается $\theta: F\dashv G$ или просто $F\dashv G$). Преобразование $\theta^{-1}: H_G\to H^F$ наз. косопряжением.

Пусть $\theta: F\dashv G$. Для любых объектов $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ пусть

$$\varepsilon_X=\theta(1_{F(X)}),\quad \eta_Y=\theta^{-1}(1_{G(Y)}).$$

Семейства морфизмов $\{\varepsilon_X\}$ и $\{\eta_Y\}$ определяют естественные преобразования $\varepsilon:\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}\to FG$ и $\eta: GF\to\mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$, к-рые наз. соответственно единицей и коединицей сопряжения θ. Для преобразований ε и η справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon_{G(Y)}G(\eta_Y)=1_{G(Y)},\ F(\varepsilon_X)\eta_{F(X)}=1_{F(X)}.$$

Вообще, пара естественных преобразований $\varphi:\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}\to FG$ и $\psi: GF\to\mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$ состоит из единицы и коединицы нек-рого сопряжения, когда выполнены равенства

$$\varphi_{G(Y)}G(\psi_Y)=1_{G(Y)},\ F(\varphi_X)\psi_{F(X)}=1_{F(X)}$$

для любых объектов X и Y. Естественное преобразование $\varphi:\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}\to FG$ является единицей нек-рого сопряжения тогда и только тогда, когда для любого морфизма $\alpha: X\to G(Y)$ из категории $\mathfrak{K}$ существует такой единственный морфизм $\alpha': F(X)\to Y$ в категории $\mathfrak{L}$, что $\alpha=\varepsilon_X G(\alpha')$. Последнее свойство выражает тот факт, что объект $F(X)$ свободен над X относительно функтора G в смысле следующего определения. Объект $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ вместе с морфизмом $\varepsilon: X\to G(Y)$ свободен над объектом $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, если всякий морфизм $\alpha: X\to G(Y')$ однозначно представим в виде $\alpha=\varepsilon G(\alpha')$ для нек-рого морфизма $\alpha': Y\to Y'$. Функтор $G:\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$ тогда и только тогда обладает левым С. ф., когда для каждого $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ существует объект Y, свободный над X относительно G.

Примеры С. ф.

1) Если $G:\mathfrak{L}\to\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — категория множеств, то G обладает левым С. ф. тогда и только тогда, когда он представим. Представимый функтор $G\simeq H^A=H_{\mathfrak{S}}(A,\ Y)$ обладает левым С. ф. тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{L}$ имеются любые копроизведения $\coprod^*_{x\in X}A_x$, где $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{S}$ и $A_x=A$ для всех $x\in X$.

2) В категории множеств $\mathfrak{S}$ для любого множества A основной функтор $H^A(Y)=H(A,\ Y)$ сопряжен слева функтору $X\times A$.

3) В категории абелевых групп функтор $\mathrm{Hom}\,(A,\ Y)$ сопряжен слева функтору $X\otimes A$ тензорного умножения на A, а функтор вложения полной подкатегории периодич. групп сопряжен справа функтору взятия периодич. части произвольной абелевой группы.

4) Пусть $P:\mathfrak{A}\to\mathfrak{S}$ — пренебрегающий функтор из произвольного многообразия универсальных алгебр в категорию множеств. Функтор P обладает левым С. ф. $F:\mathfrak{S}\to\mathfrak{A}$, к-рый каждому множеству X сопоставляет свободную алгебру многообразия $\mathfrak{A}$ с множеством X свободных образующих.

5) Функтор вложения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{L},\mathfrak{K}}:\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$ произвольной рефлективной подкатегории $\mathfrak{L}$ категории $\mathfrak{K}$ сопряжен слева $\mathfrak{L}$-рефлектору. В частности, функтор вложения категории абелевых групп в категорию групп

обладает левым С. ф., к-рый каждой группе G сопоставляет ее факторгруппу по коммутанту.

Свойства С. ф. Функтор, сопряженный слева к данному функтору, определен однозначно с точностью до изоморфизма функторов. Сопряженный слева функтор унивалентен тогда и только тогда, когда единица сопряжения состоит из мономорфизмов. Он перестановочен с копределами и переводит нулевые объекты и нулевые морфизмы в нулевые объекты и нулевые морфизмы соответственно.

Пусть $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{C}$ — полные слева и локально малые слева категории. Функтор $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ тогда и только тогда обладает сопряженным слева функтором $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$, когда выполнены следующие условия: а) функтор G перестановочен с пределами; б) для каждого $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ хотя бы одно из множеств $H(X, G(Y))$, $Y \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$, непусто; в) для каждого $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ существует такое множество $S \subset \mathrm{Ob}\mathfrak{C}$, что всякий морфизм $\alpha : X \to G(Y)$ представим в виде $\alpha = \varphi G(\alpha')$, где $\varphi : X \to G(B)$, $B \in S$, $\alpha' : B \to Y$.

Переход к двойственным категориям позволяет установить двойственность между понятиями «функтор, сопряженный слева», и «функтор, сопряженный справа», что позволяет выводить свойства сопряженных справа функторов из свойств сопряженных слева функторов.

Понятие С. ф. непосредственно связано с понятием *тройки* (монады) в категории.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [2] Mac Lane S., Categories for the working mathematician, N. Y., 1971.

М. Ш. Цаленко.

СОПРЯЖЕННЫЙ ЭЛЕМЕНТ к элементу x группы G — элемент x' такой, что

$$x' = g^{-1}xg$$

для нек-рого элемента g из G. Говорят также, что x' получается на x трансформированием при помощи элемента g. Для С. э. используется иногда степенное обозначение: x^g.

Если A и B два подмножества группы G, то через A^B принято обозначать множество

$$\{a^b \mid a \in A, \quad b \in B\}.$$

Множество $M^g = \{x^g | x \in M\}$, где g — нек-рый фиксированный элемент из G, наз. сопряженным с множеством M в группе G. В частности, две подгруппы U и V наз. сопряженными подгруппами, если $U = V^g$ для нек-рого g из G. Если подгруппа $H = H^g$ для любого элемента $g \in G$ (т. е. H содержит все элементы, сопряженные с ее элементами), то H наз. самосопряженной подгруппой в G, или *нормальным делителем*.

О. А. Иванова.

СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax = b$ с положительно определенной матрицей A. Это прямой и итерационный метод одновременно: при любом начальном приближении он сходится за конечное число итераций, давая точное решение. В С. г. м. матрица системы не меняется в процессе вычислений, на каждой итерации она используется лишь для умножения на вектор. Поэтому порядок систем, решаемых на ЭВМ, может быть высоким, он определяется объемом числовой информации, задающей матрицу.

Структура С. г. м. как прямого метода основана на процессе последовательной A-ортогонализации системы векторов, представляющем собой обычный процесс ортогонализации (см. *Ортогонализации метод*) относительно скалярного произведения $(x, y) = x^T A y$. Если $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ есть A-ортогональный базис пространства, то точное решение x^* системы при любом начальном приближении x_0 может быть получено из разложения

$$x^* - x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j, \quad \alpha_j = \frac{(r_0, s_j)}{(s_j, As_j)},$$

где $r_0 = b - Ax_0$—невязка x_0. В С. г. м. A-ортогональные векторы $s_1, s_2, \ldots, s_n$ строятся процессом A-ортогонализации невязок $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ последовательности приближений $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, вычисляемых по формулам

$$x_k = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j s_j, \quad \alpha_j = \frac{(r_0, s_j)}{(s_j, As_j)}.$$

Построенные таким образом векторы $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ и $s_1, s_2, \ldots, s_n$ обладают следующими свойствами:

$$(r_i, r_j) = 0, \ i \neq j; \ (r_i, s_j) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, i. \quad (1)$$

Расчетные формулы С. г. м. даются следующими рекуррентными соотношениями (см. [1]):

$$\left.\begin{gathered} s_1 = r_0; \ x_i = x_{i-1} + \alpha_i s_{i-1}, \ \alpha_i = -\frac{(s_{i-1}, r_{i-1})}{(s_{i-1}, As_{i-1})}, \\ r_i = r_{i-1} + \alpha_i A s_{i-1}, \ s_i = r_i + \beta_i s_{i-1}, \\ \beta_i = -\frac{(r_i, As_{i-1})}{(s_{i-1}, As_{i-1})}. \end{gathered}\right\} \quad (2)$$

Процесс заканчивается при нек-ром $k \leqslant n$, для к-рого $r_k = 0$. При этом $x^* = x_k$. Момент обрыва процесса определен начальным приближением x_0. Из рекуррентных соотношений (2) следует, что векторы $r_0, r_1, \ldots, r_i$ являются линейными комбинациями векторов $r_0, Ar_0, \ldots, A^i r_0$. Так как векторы $r_0, r_1, \ldots, r_i$ ортогональны, то обращение в нуль r_i возможно лишь тогда, когда векторы $r_0, Ar_0, \ldots, A^i r_0$ линейно зависимы, напр. когда в разложении r_0 по базису из собственных векторов A только i компонент отличны от нуля. Этим соображением можно руководствоваться при выборе начального приближения.

С. г. м. относится к классу методов, в к-рых за решение принимается вектор, минимизирующий нек-рый функционал. Для вычисления этого вектора строится итерационная последовательность, сходящаяся к точке минимума. Последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n$ в (2) осуществляет минимизацию функционала $f(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$. На i-м шаге процесса (2) вектор s_i совпадает с направлением скорейшего спуска (градиентом) для поверхности $f(x) = c$ в $(n-i)$-мерном эллипсоиде, представляющем собой сечение поверхности плоскостью, сопряженной направлениям $s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}$.

Описанный процесс С. г. м. или близкие к нему имеют много различных названий: метод Ланцоша, метод Хестенса, метод Штифеля и т. д. Из всех методов, осуществляющих минимизацию функционала, С. г. м. является наилучшим в стратегич. плане: он дает максимальную минимизацию за n шагов. Однако вычисления (2) в реальных условиях машинной арифметики чувствительны к ошибкам округления, и условия (1) могут быть нарушены. Это препятствует окончанию процесса за n шагов. Поэтому С. г. м. продолжают за n итераций, рассматривая его как бесконечный итерационный процесс минимизации функционала. Известны модификации схемы вычислений (2), более устойчивые к ошибкам округления (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1963; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, М., 1960; [3] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1974.

Г. Д. Ким.

СОСТАВНОЙ ИДЕАЛ — идеал кольца или алгебры, не являющийся *простым идеалом*.

СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА — сокращенный вариант термина «состоятельная последовательность оценок», применяемый к последовательности статистич. оценок, сходящейся к оцениваемой величине.

В теории вероятностей существуют несколько различных понятий сходимости, из к-рых для теории статистич. оценивания наиболее важными являются сходимость по вероятности и сходимость с вероятностью 1. Если последовательность статистич. оценок сходится по вероятности к оцениваемой величине, то про эту последовательность говорят, что она является «слабо состоятельной», или просто «состоятельной», употребляя термин «сильная состоятельность» по отношению к последовательности оценок, сходящейся с вероятностью 1 к оцениваемой величине.

Пример 1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково нормально $N(a, \sigma^2)$ распределенные случайные величины. Тогда статистики

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$$

и

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

являются С. о. для параметров a и σ^2 соответственно.

Пример 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения к-рого есть $F(x)$. В этом случае функция эмпирич. распределения $F_n(x)$, построенная по исходной выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$, является С. о. функции распределения $F(x)$.

Пример 3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же закону Коши, плотность вероятности к-рого есть $p(x)=1/[1+(x-\mu)^2]$. Для любого натурального числа n статистика

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$$

подчиняется исходному закону Коши и, следовательно, последовательность оценок $\overline{X}_n$ не сходится по вероятности к μ, т. е. в данном примере последовательность $\overline{X}_n$ не является состоятельной. С. о. для μ в данном случае является выборочная медиана.

С. о. обладает следующим свойством: если f — непрерывная функция, а T_n — С. о. параметра θ, то в свою очередь $f(T_n)$ является С. о. для $f(\theta)$. Наиболее распространенный метод получения точечных статистич. оценок — *максимального правдоподобия метод* — приводит к С. о. Следует отметить, что если существует С. о. T_n параметра θ, то она не является единственной, т. к. любая оценка вида $T_n+\beta_n$, где β_n — последовательность случайных величин, сходящаяся по вероятности к нулю, является С. о. для θ. Этот факт принижает значение понятия С. о.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

М. С. Никулин.

СОСТОЯТЕЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ — *статистический критерий*, достоверно отличающий проверяемую гипотезу от альтернативы при неограниченном увеличении числа наблюдений.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$, и пусть проверяется гипотеза $H_0: \theta\in\Theta_0\subset\Theta$ против альтернативы $H_1: \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$, при этом ошибка 1-го рода (см. *Значимости уровень*) задана заранее и равна α $(0<\alpha<0{,}5)$. Далее, пусть по первым n наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ построен статистич. критерий уровня α для проверки H_0 против H_1 и пусть $\beta_n(\theta)$, $\theta\in\Theta$, — его *мощности критерия функция*, показывающая при каждом θ, с какой вероятностью этот критерий отклоняет H_0, если случайная величина X_i подчиняется закону P_θ, при этом $\beta_n(\theta)\leqslant\alpha$ при всех $\theta\in\Theta_0$. Неограниченно увеличивая число наблюдений, можно построить последовательность статистич. критериев заданного уровня α, предназначенных для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1, при этом соответствующая им последовательность функций мощности $\{\beta_n(\theta)\}$ будет удовлетворять условию

$$\beta_n(\theta)\leqslant\alpha \text{ для любого } n \text{ при всех } \theta\in\Theta_0.$$

Если в этих условиях последовательность функций мощности $\{\beta_n(\theta)\}$ такова, что для любого фиксированного $\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n(\theta)=1,$$

то говорят, что построена состоятельная последовательность статистич. критериев уровня α для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1. Часто, допуская при этом определенную вольность, говорят, что построен С. к. Так как функция $\beta_n(\theta)$, $\theta\in\Theta_1$, являющаяся сужением функции мощности $\beta_n(\theta)$, $\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$, на множество Θ_1, есть мощность статистич. критерия, построенного по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то в терминах мощности свойство состоятельности последовательности статистич. критериев выражается в том, что соответствующие им мощности $\beta_n(\theta)$, $\theta\in\Theta_1$, сходятся на Θ_1 к функции, тождественно равной 1 на Θ_1.

Пример. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, функция распределения к-рых принадлежит семейству $H=\{F(x)\}$ всех непрерывных функций распределения на $\mathbb{R}^1$, и пусть $p=(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ — вектор положительных вероятностей такой, что $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$. Далее, пусть $F_0(x)$ — произвольная функция распределения из семейства H. Функция распределения $F_0(x)$ и вектор p однозначно определяют разбиение числовой оси на k полуинтервалов $(x_0; x_1]$, $(x_1; x_2], \ldots, (x_{k-1}; x_k]$, где

$$x_0=-\infty,\quad x_k=+\infty,$$

$$x_i=F_0^{-1}(p_1+\ldots+p_i)=\inf\{x: F_0(x)\geqslant p_1+\ldots+p_i\},$$

$$i=1, 2, \ldots, k-1.$$

Иначе говоря, границы полуинтервалов суть квантили функции распределения $F_0(x)$. С помощью полуинтервалов $(x_0; x_1], (x_1; x_2], \ldots, (x_{k-1}; x_k]$ семейство H можно разбить на два непересекающихся множества H_0 и H_1 по следующему правилу: функция распределения F из H принадлежит H_0 тогда и только тогда, если

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=p_i,\quad i=1, 2, \ldots, k,$$

в противном случае $F\in H_1$. Пусть, далее, $\nu_n=(\nu_{n1}, \nu_{n2}, \ldots, \nu_{nk})$ — вектор частот, получающийся в результате группировки первых n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n>k)$ по полуинтервалам $(x_0; x_1], \ldots, (x_{k-1}; x_k]$. В этих условиях для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой функция распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принадлежит множеству H_0, против альтернативы H_1, по к-рой функция распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принадлежит множеству H_1, можно воспользоваться критерием «хи-квадрат», основанным на статистике

$$X_n^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(\nu_{ni}-np_i)^2}{np_i}.$$

Согласно критерию «хи-квадрат» с уровнем значимости α $(0<\alpha<0{,}5)$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, коль скоро $X_n^2>\chi_{k-1}^2(\alpha)$, где $\chi_{k-1}^2(\alpha)$ — верхняя α-квантиль «хи-квадрат» распределения с $k-1$ степенями свободы.

Из общей теории критериев типа «хи-квадрат» следует, что при справедливости гипотезы H_1

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{X_n^2 > \chi^2_{k-1}(\alpha) \mid H_1\right\} = 1,$$

что и означает состоятельность критерия «хи-квадрат» для проверки H_0 против H_1. Если же в множестве H_0 выделить произвольное непустое подмножество H_0' и рассмотреть задачу статистич. проверки гипотезы H_0' против альтернативы $H_0''=H_0\setminus H_0'$, то, как очевидно, последовательность критериев «хи-квадрат», основанных на статистиках X_n^2, не будет состоятельной, т. к.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{X_n^2 > \chi^2_{k-1}(\alpha) \mid H_0\right\} \leqslant \alpha < 1$$

и, в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{X_n^2 > \chi^2_{k-1}(\alpha) \mid H_0''\right\} \leqslant \alpha < 1.$$

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

СОФОКУСНЫЕ КРИВЫЕ, конфокальные кривые,— линии 2-го порядка, имеющие общие фокусы. Если F и F' — две данные точки плоскости, то через каждую точку плоскости проходит один эллипс и одна гипербола, имеющие F и F' своими фокусами (рис. 1).

Каждый эллипс ортогонален любой софокусной с ним гиперболе, т. е. пересекается с ней (в четырех точках) под прямым углом. Все множество софокусных эллипсов и гипербол в надлежащей системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1, \qquad (*)$$

где c — расстояние фокусов от начала координат, а λ — переменный параметр. При $\lambda > c^2$ это уравнение определяет эллипс, при $0 < \lambda < c^2$ — гиперболу (при $\lambda < 0$ — мнимую линию 2-го порядка). Если один из фокусов стремится к бесконечности, то в пределе получаются два

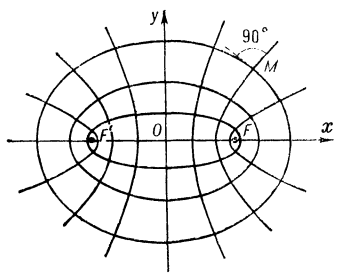


Рис. 1.

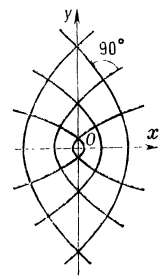


Рис. 2.

семейства софокусных парабол (рис. 2); любые две параболы, относящиеся к разным семействам, также ортогональны друг другу. При помощи софокусных эллипсов и гипербол на плоскости вводится система так наз. эллиптических координат. Именно, если $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, то, подставляя ее координаты x и y в уравнение (*), получают квадратное уравнение для λ; корни его λ_1, λ_2 и наз. эллиптич. координатами точки M. Сами софокусные эллипсы и гиперболы составляют координатную сеть эллиптической координатной системы, т. е. определяются уравнениями $\lambda_1 = \mathrm{const}$, $\lambda_2 = \mathrm{const}$. *БСЭ-з.*

СОХОЦКОГО ТЕОРЕМА, теорема Вейерштрасса, теорема Вейерштрасса — Сохоцкого — Казорати: каково бы ни было комплексное число w (допускается и $w=\infty$), существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к *существенно особой точке* a аналитич. функции $w=f(z)$ комплексного переменного z, что

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Эта С. т. явилась первым результатом, характеризующим предельное множество $C(f, a)$ аналитич. функции f в существенно особой точке a: согласно С. т., $C(f, a)$ тотально, т. е. совпадает с расширенной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}_w$ переменного w. С. т. доказана Ю. В. Сохоцким [1] (см. также [2]). К. Вейерштрасс изложил эту теорему в работе 1876 (см. [3]). Дополнительная информация о поведении аналитич. функции в окрестности существенно особой точки содержится в *Пикара теореме*.

На аналитич. отображения $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $n>1$, пространства $\mathbb{C}^n$ многих комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$ С. т. непосредственно не распространяется (см. [5]).

Лит.: [1] Сохоцкий Ю. В., Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями, СПБ, 1868; [2] Casorati F., Teorica delle funzioni di variabili complesse, Pavia, 1868; [3] Weierstrass K., Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Math. Werke, Bd 2, B., 1895, S. 77—124; [4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

СОХОЦКОГО ФОРМУЛЫ — формулы, найденные впервые Ю. В. Сохоцким [1] и выражающие граничные значения интеграла типа Коши. С более полными доказательствами, но значительно позже С. ф. были получены независимо Й. Племелем [2].

Пусть $\Gamma: t=t(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$, $t(0)=t(l)$, — замкнутая гладкая жорданова кривая на плоскости комплексного переменного z, $\varphi(t)$ — заданная на Γ комплексная плотность интеграла типа Коши, относительно к-рой предполагается, что она удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant C\,|t_1 - t_2|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1;$$

D^+ — область внутри Γ, D^- — внешняя область;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad z \in \Gamma, \qquad (1)$$

— интеграл типа Коши. Тогда для любой точки $t_0 \in \Gamma$ существуют пределы

$$\Phi^+(t_0) = \lim_{z\to t_0,\, z\in D^+} \Phi(z),$$

$$\Phi^-(t_0) = \lim_{z\to t_0,\, z\in D^-} \Phi(z),$$

к-рые выражаются формулами Сохоцкого

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{2}\varphi(t_0), \\ \Phi^-(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{1}{2}\varphi(t_0), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

или, иначе,

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},$$

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0).$$

Интеграл вдоль Γ в правых частях С. ф. понимается в смысле главного значения по Коши и наз. сингулярным интегралом. Таким образом, принимая при высказанных условиях $\Phi^+(t)$ (или $\Phi^-(t)$) в качестве значений интеграла $\Phi(z)$ на Γ, получают функцию $\Phi(z)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}^+ = D^+ \cup \Gamma$ (соответственно в $\overline{D}^+ = D^- \cup \Gamma$); в целом $\Phi(z)$ иногда описывают как кусочно аналитич. функцию.

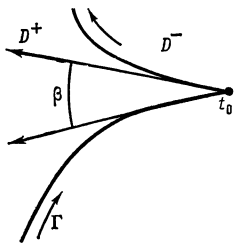
Если $\alpha<1$, то $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ также непрерывны по Гёльдеру на Γ с тем же показателем α, а если $\alpha=1$, то с

любым показателем $\alpha'<1$. Для угловых точек t_0 (см. рис.) кусочно гладкой кривой Г С. ф. принимают вид

$$\Phi^+(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\left(1-\frac{\beta}{2\pi}\right)\varphi(t_0),$$
$$\Phi^-(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{\beta}{2\pi}\varphi(t_0),\ 0\leqslant\beta\leqslant2\pi. \qquad (3)$$

В случае, разомкнутой кусочно гладкой кривой Г С. ф. (2) и (3) остаются в силе для внутренних точек дуги Г.

С. ф. играют основную роль при решении граничных задач теории функций и сингулярных интегральных уравнений (см. [3], [5]), а также при решении различных прикладных задач теории функций (см. [4]).



Естественно возникает вопрос о возможном расширении условий на контур Г и плотность $\varphi(t)$ с тем, чтобы С. ф., хотя бы с некрыми оговорками, сохраняли силу. Наиболее значительные результаты в этом направлении принадлежат В. В. Голубеву и И. И. Привалову (см. [6], [8]). Напр., пусть Г — спрямляемая жорданова кривая, а плотность $\varphi(t)$ по-прежнему непрерывна по Гёльдеру на Г. Тогда С. ф. (2) имеют место почти всюду на Г, причем под $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ понимаются угловые граничные значения интеграла типа Коши соответственно изнутри и извне Г, но функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, вообще говоря, уже не непрерывны в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$.

О пространственных аналогах С. ф. см. в [7].

Лит.: [1] Сохоцкий Ю. В., Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды, СПБ, 1873; [2] Plemelj J., «Monatsh. Math. und Phys.», 1908, Bd 19, S. 205—10, 211—45; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [4] его же, Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [5] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [6] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [7] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [8] Хведелидзе Б. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики, т. 7, М., 1975, с. 5—162. *Е. Д. Соломенцев.*

СОХРАНЕНИЯ ОБЛАСТИ ПРИНЦИП — свойство голоморфных функций в областях комплексной плоскости: множество значений всякой непостоянной голоморфной функции в области $D\subset\mathbb{C}$ также является областью, т. е. открыто и связно. Основным здесь является свойство открытости образа, к-рое следует из *Руше теоремы* или из *аргумента принципа*. С. о. п. можно рассматривать как обобщение *максимума модуля принципа* для голоморфных функций.

С. о. п. справедлив для голоморфных функций на произвольном комплексном многообразии: множество значений любой непостоянной голоморфной функции на связном комплексном многообразии X есть область на комплексной плоскости. Он выполняется также для голоморфных отображений комплексных многообразий в римановы поверхности. Однако голоморфные отображения $f: X\to Y$ в комплексные многообразия Y размерности больше 1 в общем не являются открытыми: если f непостоянно, но, скажем, ранг f всюду меньше $\dim Y$, то образ $f(X)\subset Y$ вообще не имеет внутренних точек. Открытость может нарушаться и в случае, когда $\operatorname{rank} f<\dim Y$ на множествах малой размерности. Напр., при отображении

$$(z_1,\ z_2)\longrightarrow(z_1,\ z_1z_2)$$

пространства $\mathbb{C}^2$ в себя образом будет неоткрытое множество $\mathbb{C}^2\setminus\{w_1=0,\ w_2\neq0\}$. С. о. п. для голоморфных отображений выполняется, если условие непостоянности f заменять более сильными требованиями, одним из самых простых является условие нульмерности множества точек, в к-рых $\operatorname{rank} f<\dim Y$.

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; [2] Геннинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969. *Е. М. Чирка.*

СОЧЕТАНИЕ из m элементов по n — подмножество мощности n нек-рого исходного конечного множества мощности m. Число С. из m элементов по n, обозначаемое C_m^n или $\binom{m}{n}$, равно

$$\frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Производящая функция для последовательности C_m^n, $n=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, $C_m^0=1$, имеет вид

$$\sum_{n=0}^m\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m.$$

С. можно рассматривать так же как неупорядоченную выборку объема n из генеральной совокупности из m элементов. В комбинаторике С.— это класс эквивалентности *размещений* из m элементов по n, при этом два размещения объема n из данного m-элементного множества считаются эквивалентными, если они состоят из одних и тех же элементов, взятых одно и то же число раз. В случае, когда берутся размещения без повторений, каждый класс эквивалентности определяется множеством элементов любого размещения из этого класса и поэтому может рассматриваться как С. В случае размещений с повторениями приходят к обобщению понятия С., и тогда класс эквивалентности размещений с повторениями наз. сочетанием с повторениями. Число С. с повторениями из m по n равно $\binom{m+n-1}{n}$, а производящая функция для этих чисел имеет вид

$$\sum_{k=0}^\infty\binom{m+k-1}{k}x^k=(1-x)^{-m}.$$

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. М. Михеев.*

СПАРИВАНИЕ — отображение, заданное на декартовом произведении двух множеств; в зависимости от конкретных условий на это отображение накладываются требования билинейности, непрерывности и др. С. $X\times Y\to Z$ определяет отображение множества X во множество функций, действующих из Y в Z (или в нек-рое его подмножество, составленное, напр., из гомоморфизмов, непрерывных отображений и т. д.). Утверждения о свойствах так получаемого отображения составляют суть различных теорем двойственности в алгебре, топологии и функциональном анализе. *М. Ш. Фарбер.*

СПЕКТР оператора — совокупность $\sigma(A)$ чисел $\lambda\in\mathbb{C}$, для к-рых оператор $A-\lambda I$ не имеет всюду определенного ограниченного обратного. Здесь A — линейный оператор в комплексном банаховом пространстве X, I — тождественный оператор в X. Если A не замкнут в X, то $\sigma(A)=\mathbb{C}$, поэтому обычно рассматривают С. замкнутых операторов (для операторов, допускающих замыкание, иногда их С. наз. спектр замыкания).

Если $A-\lambda I$ не инъективен или не сюръективен, то $\lambda\in\sigma(A)$. В первом случае λ наз. собственным значением оператора A; совокупность $\sigma_p(A)$ собственных значений наз. точечным спектром. Во втором случае λ наз. точкой непрерывного спектра $\sigma_c(A)$ или остаточного спектра $\sigma_r(A)$ в зависимости от того, плотно или не плотно в X подпространство $(A-\lambda I)X$.

Существуют и другие классификации точек С., напр. $\sigma(A)=\sigma_a(A)\cup\sigma_d(A)$, где $\sigma_a(A)$ состоит из аппрокси-

мативных собственных значений ($\lambda \in \sigma_a(A)$, если существуют $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$,

$$\|(A-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0),$$

$$\sigma_d(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = 0,$$

$$\overline{(A-\lambda I)X} = (A-\lambda I)X \neq X\}.$$

При этом $\sigma_d(A) \subset \sigma_r(A)$ и, значит, $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \sigma_a(A)$. В теории возмущений рассматривается предельный спектр $\sigma_{\lim}(A)$, состоящий из предельных точек $\sigma(A)$ и изолированных собственных значений бесконечной кратности, вейлевский спектр, равный пересечению С. всех компактных возмущений, и др.

Если оператор A ограничен, то $\sigma(A)$ компактен и не пуст (в этом случае $\sigma(A)$ совпадает со *спектром* элемента A банаховой алгебры $B(X)$); в общем случае можно утверждать лишь, что $\sigma(A)$ замкнут в $\mathbb{C}$. На множестве $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ определена аналитическая $B(X)$-значная функция $R_A(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1}$, наз. резольвентой A ($\rho(A)$ наз. резольвентным множеством). С помощью резольвенты строится функциональное исчисление от оператора A на функциях, аналитических в окрестности $\sigma(A)$:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda,$$

где Γ — контур, охватывающий $\sigma(A)$ (неограниченность A накладывает на выбор Γ нек-рые ограничения); дополнительные условия на геометрию С. и асимптотику резольвенты позволяют расширить это функциональное исчисление.

С. функций от оператора определяются формулой

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

(теорема об отображении спектра); С. $\sigma(A^*)$ сопряженного оператора совпадает с $\sigma(A)$, если A ограничен, а в общем случае $\sigma(A^*) \subset \sigma(A)$.

Если $\dim X < \infty$, то $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ и X раскладывается в прямую сумму инвариантных относительно A подпространств, в каждом из к-рых A индуцирует оператор с одноточечным С.; поисками бесконечномерных аналогов такого разложения занимается *спектральная теория* операторов. См. также *Спектральный анализ*, *Спектральный синтез*, *Спектральный оператор*, *Спектральное разложение*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1962; [2] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972.

В. С. Шульман.

СПЕКТР, прямой и обратный спектр в категории $\mathscr{C}$. Прямым спектром $\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$ в категории $\mathscr{C}$ наз. семейство объектов $\{Y^\alpha\}$ с индексами из направленного множества $\Lambda = \{\alpha\}$ и семейство морфизмов $\{f^\beta_\alpha : Y^\alpha \to Y^\beta\}$ из $\mathscr{C}$ (определенных при $\alpha \leqslant \beta$), для к-рых:

1) $f^\alpha_\alpha = 1_{Y^\alpha} : Y_\alpha \longrightarrow Y^\alpha$, $\alpha \in \Lambda$;

2) $f^\gamma_\alpha = f^\beta_\alpha \circ f^\gamma_\beta : Y^\alpha \longrightarrow Y^\gamma$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$.

Можно определить категорию $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$, объектами к-рой служат семейства морфизмов $\{g_\alpha : Y^\alpha \to Z\}_{\alpha \in \Lambda}$ таких, что $g_\alpha = g_\beta \circ f^\beta_\alpha$, если $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \Lambda$. В этой категории морфизмом объекта $\{g_\alpha : Y^\alpha \to Z\}$ в объект $\{g'_\alpha : Y^\alpha \to Z'\}$ наз. такой морфизм $h : Z \to Z'$ категории $\mathscr{C}$, что $hg_\alpha = g'_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$. Инициальный (начальный) объект категории $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$ наз. пределом прямого спектра $\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$. Пределы прямых спектров (прямой спектр) множеств, топологич. пространств, R-модулей являются примерами прямых спектров в соответствующих категориях.

Двойственным образом, обратным спектром $\{Y_\alpha, f^\beta_\alpha\}$ в категории $\mathscr{C}$ наз. семейство объектов $\{Y_\alpha\}$ с индексами из направленного множества $\Lambda = \{\alpha\}$ и семейство морфизмов $\{f^\beta_\alpha : Y_\beta \to Y_\alpha\}$ категории $\mathscr{C}$ (определенных, если $\alpha \leqslant \beta$), для к-рых:

1) $f^\alpha_\alpha = 1_{Y_\alpha} : Y_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$;

2) $f^\gamma_\alpha = f^\beta_\alpha \circ f^\gamma_\beta : Y_\gamma \longrightarrow Y_\alpha$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$.

Можно определить категорию $\operatorname{inv}\{Y_\alpha, f^\beta_\alpha\}$, объектами к-рой являются занумерованные семейства таких морфизмов $\{g_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, что $g_\alpha = f^\beta_\alpha \circ g_\beta$, если $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \Lambda$, а морфизмом объекта $\{g_\alpha : X \to Y_\alpha\}$ в объект $\{g'_\alpha : X' \to Y_\alpha\}$ является морфизм $h : X \to X'$ категории $\mathscr{C}$ такой, что $g'_\alpha h = g_\alpha$ при $\alpha \in \Lambda$. Терминальный (интегральный) объект категории $\operatorname{inv}\{Y_\alpha, f^\beta_\alpha\}$ наз. пределом обратного спектра $\{Y_\alpha, f^\beta_\alpha\}$. Пределы обратных спектров (обратный спектр) множеств, групп, R-модулей являются пределами обратных спектров в соответствующих категориях.

Понятие обратного спектра — категорное обобщение топологич. понятия *проекционного спектра*.

Лит.: [1] Спеньер, Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

М. И. Войцеховский.

СПЕКТР элемента банаховой алгебры — совокупность чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для к-рых $a - \lambda e$ необратим (алгебра предполагается комплексной, a — данный элемент, e — единица алгебры). С. — непустое компактное множество (теорема Гельфанда — Мазура). В случае коммутативной алгебры С. совпадает с множеством значений на этом элементе всех характеров алгебры.

На понятии С. основывается построение функционального исчисления от элементов банаховой алгебры: естественное исчисление многочленов от элемента a банаховой алгебры A продолжается до непрерывного гомоморфизма кольца ростков голоморфных в окрестности спектра $\sigma(a)$ функций в A. Необходимость рассматривать функции от нескольких переменных приводит к понятию С. системы элементов банаховой алгебры. Если A коммутативна, то, по определению, С. системы $\{a_i\}_{i=1}^n$ ее элементов — это множество $\sigma(\{a_i\}) \subset \mathbb{C}^n$ всех наборов вида $\{\varphi(a_i)\}_{i=1}^n$, где φ — *характер* A. В общем случае определяют левый и правый спектры системы $\{a_i\}_{i=1}^n$, включая в них те наборы $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, для к-рых система $\{a_i - \lambda_i e\}$ содержится в нетривиальном левом (правом) идеале алгебры; С. системы элементов наз. объединение левого и правого спектров. Основные результаты многопараметрич. спектральной теории, а также иные подходы к понятию С. системы элементов см. в [1] — [4].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972; [2] Harte R., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 78, p. 871—75; [3] Taylor J., «J. Funct. Anal.», 1970, v. 6, p. 172—91; [4] Żelazko W., «Studia Math.», 1979, t. 64, p. 249—61.

В. С. Шульман.

СПЕКТР C^*-АЛГЕБРЫ — множество классов унитарной эквивалентности неприводимых представлений C^*-алгебры. В спектр вводят топологию, считая замыканием любого подмножества совокупность всех (классов эквивалентности) представлений, ядра к-рых содержат пересечение ядер всех представлений этого множества. Для коммутативной C^*-алгебры спектр как топологич. пространство совпадает с пространством *характеров* (гомеоморфен пространству максимальных идеалов). В общем случае спектр C^*-алгебры является базой разложения ее представлений в прямые интегралы неприводимых представлений.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

В. С. Шульман.

СПЕКТР ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $\{T_t\}$ с фазовым пространством X и инвариантной мерой μ — общее название для различных спектральных инвариантов и спектральных свойств соответствующей группы (или полугруппы) унитарных (изометрических) операторов сдвига

$$(U_t f)(x) = f(T_t x)$$

в гильбертовом пространстве $L_2(X, \mu)$. Для динамич. системы в узком смысле слова — *измеримого потока* $\{T_t\}$ или *каскада* $\{T^n\}$ — речь идет о спектральных инвариантах одного *нормального оператора*: во втором случае — унитарного оператора $(U_T f) = f(Tx)$, а в первом — производящего самосопряженного оператора A однопараметрич. группы унитарных операторов $\{U_t\}$ (согласно теореме Стоуна, $U_t = e^{itA}$).

«Спектральная» терминология в теории динамич. систем несколько отличается от обычной. *Спектр* U_T (или A) в обычном смысле, т. е. множество тех λ, при к-рых оператор $U_T - \lambda E$ (или $A - \lambda E$) не имеет ограниченного обратного, для всех практически интересных T и $\{T_t\}$ совпадает с окружностью $|\lambda| = 1$ или с $\mathbb{R}$ (см. [1], [2]). Поэтому: а) спектр в обычном смысле не содержит информации о свойствах данной динамич. системы, отличающих ее от других; б) у спектра в обычном смысле слова практически никогда нет изолированных точек, так что спектр является непрерывным (в обычном смысле слова), причем это опять-таки не содержит информации о специфич. свойствах данной системы. По этой причине в теории динамич. систем говорят о непрерывном спектре в случае, когда у U_T или A нет собственных функций, кроме констант; о дискретном спектре — когда собственные функции образуют полную систему в $L_2(X, \mu)$; о смешанном спектре — в остальных случаях.

Свойства динамич. системы, к-рые определяются ее С. д. с., наз. спектральными. Таковы *эргодичность* (она эквивалентна тому, чтобы у U_T — соответственно у A — собственное значение 1 — соответственно 0 — было однократным) и *перемешивание*. Имеется полная метрич. классификация эргодич. динамич. систем с дискретным спектром; такая система определяется С. д. с. с точностью до метрич. изоморфизма [3]. Аналогичная теория построена и для более общих групп преобразований, нежели $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ (см. [4]). В некоммутативном случае формулировки усложняются, причем С. д. с. уже не полностью определяет систему. Если спектр не дискретный, то ситуация гораздо сложнее.

Лит.: [1] Ionescu Tulcea A., в кн.: Ergodic theory, N. Y.— L., 1963, p. 273—92; [2] Goldstein S., в кн.: Internat. conference on dynamical systems in math. physics, P., 1976 («Astérisque», v. 40); [3] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [4] Макки Г. У., в кн.: Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, М., 1966, с. 195—206.

Д. В. Аносов.

СПЕКТР КОЛЬЦА — окольцованное топологич. пространство Spec A, точками к-рого являются простые идеалы $\mathfrak{p}$ кольца A с *Зарисского топологией* на нем (к-рая наз. также спектральной топологией). При этом предполагается, что кольцо A коммутативно и с единицей. Элементы кольца A можно рассматривать как функции на пространстве Spec A, полагая $a(\mathfrak{p}) = a \bmod \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$. Пространство Spec A несет пучок локальных колец $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}\, A)$, называемый структурным пучком. Для точки $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ слой пучка $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}\, A)$ над $\mathfrak{p}$ — это локализация $A_{\mathfrak{p}}$ кольца A относительно $\mathfrak{p}$.

Любому гомоморфизму колец $\varphi : A \to A'$, переводящему единицу в единицу, отвечает непрерывное отображение $\varphi^* : \mathrm{Spec}\, A' \to \mathrm{Spec}\, A$. Если N — нильрадикал кольца A, то естественное отображение $\mathrm{Spec}\, A/N \to \mathrm{Spec}\, A$ является гомеоморфизмом топологич. пространств.

Для ненильпотентного элемента $f \in A$ пусть $D(f) = \mathrm{Spec}\, A \setminus V(f)$, где $V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid f \in \mathfrak{p}\}$. Тогда окольцованные пространства $D(f)$ и $\mathrm{Spec}\, A_{(f)}$, где $A_{(f)}$ — локализация A относительно f, изоморфны. Множества $D(f)$ наз. главными открытыми множествами. Они образуют базис топологич. пространства Spec A. Точка $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ замкнута тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца A. Сопоставляя точке $\mathfrak{p}$ ее замыкание $\bar{\mathfrak{p}}$ в Spec A, получают взаимно однозначное соответствие между точками пространства Spec A и множеством замкнутых неприводимых подмножеств в Spec A. Пространство Spec A квазикомпактно, но, как правило, не является хаусдорфовым. Размерностью пространства Spec A наз. наибольшее n, для к-рого существует цепочка различных замкнутых неприводимых множеств $Z_0 \subset \ldots \subset Z_n \subseteq \mathrm{Spec}\, A$.

Многие свойства кольца A можно охарактеризовать в терминах топологич. пространства Spec A. Напр., кольцо A нётерово тогда и только тогда, когда Spec A — нётерово пространство; пространство Spec A неприводимо тогда и только тогда, когда кольцо A/N является областью целостности; размерность Spec A совпадает с размерностью Крулля кольца A и т. д.

Иногда рассматривают максимальный спектр $\mathrm{Specm}\, A$ — подпространство пространства Spec A, состоящее из замкнутых точек. Для градуированного кольца A рассматривают также проективный спектр $\mathrm{Proj}\, A$. Если $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, то точки $\mathrm{Proj}\, A$ — это простые однородные идеалы $\mathfrak{p}$ кольца A такие, что $\mathfrak{p} \not\supset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Л. В. Кузьмин.

СПЕКТР МАТРИЦЫ — совокупность ее *собственных значений*. См. также *Характеристический многочлен* матрицы.

СПЕКТР ПРОСТРАНСТВ — представляющий объект для обобщенной теории когомологий, введен в [1].

Спектром пространств $\boldsymbol{M}$ наз. последовательность топологических (как правило, клеточных) пространств $\{M_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ вместе с отображениями $s_n : \Sigma M_n \to M_{n+1}$, где Σ — *надстройка*. С. п. образуют категорию; при этом морфизм спектра $\boldsymbol{M}$ в спектр $\boldsymbol{N}$ — это, грубо говоря, «кофинальная часть» нек-рой функции $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$, к-рая задается семейством отображений $f_n : M_n \to N_n$ с $t_n \circ \Sigma f_n = f_{n+1} \circ s_n$ (t_n относится к $\boldsymbol{N}$ так, как s_n к M). Определяются также гомотопные морфизмы, вводится понятие гомотопич. эквивалентности С. п. и строится гомотопич. категория С. п. [2]. Вводятся *Постникова системы* С. п.

Надстройкой $\Sigma \boldsymbol{M}$ над С. п. $\boldsymbol{M}$ наз. С. п. $\Sigma \boldsymbol{M} = \{N_n\} = \Sigma M_n$. Пусть $(\Sigma^{-1}\boldsymbol{M})_n = M_{n-1}$, тогда Σ и Σ^{-1} — гомотопически взаимно обратные функторы, так что в категории С. п. в отличие от категории пространств функтор надстройки обратим, и это обстоятельство делает удобной категорию С. п. Вообще, в категории С. п. все рассуждения, связанные со стабилизацией (напр., построение спектральной последовательности Адамса), приобретают естественный вид.

Примеры С. п. 1) Для любого пространства X определяется С. п. $\boldsymbol{X} = \{M_n\}$, где $M_n = *$ при $n < 0$ и $M_n = \Sigma^n X$ при $n \geqslant 0$, а s_n есть естественное отождествление $\Sigma(\Sigma^n X) \to \Sigma^{n+1}(X)$. Так, для $X = S^0$ возникает спектр сфер $\{S^n\}$.

2) Спектр пространств Эйленберга — Маклейна $H(\pi)$ (или $\boldsymbol{EM}(\pi)$), где π — абелева группа. Гомотопич. эквивалентность $\omega_n : K(\pi, n) \to \Omega K(\pi, n+1)$, где $K(\pi, n)$ — *Эйленберга — Маклейна пространство*, а ΩX — *петель пространство* над X, задает сопряженное ото-

бражение $s_n : \Sigma K(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$, так что имеем С. п. $\{K(\pi, n), S_n\}$. Этот С. п. представляет обычную теорию когомологий с коэффициентами в π.

3) Пусть X — такое пространство, что $\Omega^d X \simeq X$ для нек-рого $d>0$. Для $n=ad+b$, $0 \leqslant b < d$, $a \in \mathbb{Z}$ пусть $M_n = \Omega^{d-b} X$. Возникает последовательность $\{M_n\}$ вида $\{\ldots, X, \Omega^{d-1}X, \Omega^{d-2}X, \ldots, \Omega^1 X, X \simeq \Omega^d X, \ldots\}$. Гомотопич. эквивалентность $\omega : M_n \to \Omega M_{n+1}$ задает, как и в примере 2, отображение $s_n : \Sigma M_n \to M_{n+1}$, так что имеем С. п. Напр., для *классифицирующего пространства* $BU = \lim BU_n$, где U_n — унитарная группа, имеем $\Omega^2(BU \times \mathbb{Z}) \simeq BU \times \mathbb{Z}$ (теорема Ботта), и возникает С. п. $\{\ldots, U, BU \times \mathbb{Z}, U, BU \times \mathbb{Z}, \ldots\}$, представляющий комплексную K-теорию. Аналогичное верно и для вещественной K-теории ($\Omega^8(BO \times \mathbb{Z}_2) \simeq BO \times \mathbb{Z}_2$).

4) Всевозможные *Тома спектры*, представляющие *кобордизмы*.

Для двух С. п. $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ определено их приведенное произведение $\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{N}$ (аналог обычного приведенного произведения пространств). Умножением в С. п. $\boldsymbol{M}$ наз. ассоциативный (в надлежащем смысле) морфизм $\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$. С. п., снабженный умножением, наз. кольцевым, или мультипликативным, и представимая им теория когомологий мультипликативна.

Попытка преодоления трудностей, связанных с «плохой ассоциативностью» вышеупомянутого умножения, привела к пересмотру оснований теории С. п. Именно, в [6] введено понятие бескоординатного С. п. как семейства пространств $\{M_V\}$ (и соответствующих отображений), индексированного линейными подпространствами V из $\mathbb{R}^\infty = \lim_{n \to \infty} \mathbb{R}^n$. Категория бескоординатных С. п. изоморфна обычной категории С. п., но спаривание $\wedge$ в ней легче контролируется, и потому она играет важную роль при рассмотрении тонких геометрич. вопросов, связанных с высшими структурами в С. п. [6], ориентациями в теории когомологий и т. п.

Лит.: [1] Lima E., «Summa Brasiliens. Math.», 1959, с. 91—148; [2] Свитцер Р., Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии, пер. с англ., М., 1984; [3] Адамс Дж., Бесконечнократные пространства петель, пер. с англ., М., 1982; [4] Мей Дж., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 6, с. 137—195; [5] May J., E_∞-ring spaces and E_∞-ring spectra, v. 577, N. Y., 1977.

Ю. Б. Рудяк.

СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА — унитальный гомоморфизм нек-рой булевой алгебры множеств в булеву алгебру проекторов в банаховом пространстве. Всякий оператор T в банаховом пространстве X определяет С. м. на совокупности открыто-замкнутых подмножеств его спектра $\sigma(T)$ по формуле

$$E(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (zI - T)^{-1}\, dz,$$

где Γ — жорданова кривая, отделяющая α от $\sigma(T) \setminus \alpha$. При этом $TE(\alpha) = E(\alpha)T$ и $\sigma(T|E(\alpha)X) \subset \overline{\alpha}$. Построение удовлетворяющих этим условиям С. м. на более широких булевых алгебрах множеств — одна из основных задач *спектральной теории* линейных операторов.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2— Спектральная теория, М., 1966, ч. 3— Спектральные операторы, М., 1974.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ, авторегрессионная спектральная оценка, — оценка $f_q^*(\lambda)$ *спектральной плотности* $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса с дискретным временем такая, что фиксированное число q отвечающих ей автокорреляций низших порядков совпадает с соответствующими эмпирическими автокорреляциями, подсчитанными по данным наблюдений, и при этом удельная энтропия гауссовского случайного процесса со спектральной плотностью $f_q^*(\lambda)$ оказывается наибольшей возможной. Если из наблюдений известны N выборочных значений x_t, $t=1, \ldots, N$, представляющих собой отрезок одной реализации действительного стационарного процесса X_t, имеющего спектральную плотность $f(\lambda)$, то С. о. м. э. $f_q^*(\lambda)$ будет определяться соотношениями

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\lambda f_q^*(\lambda)\, d\lambda = r_k^* \equiv$$

$$\equiv N^{-1} \sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+k}, \qquad k=0, 1, \ldots, q, \qquad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f_q^*(\lambda)\, d\lambda = \max, \qquad (2)$$

где знак $\equiv$ означает «равно по определению». С. о. м. э. имеет вид

$$f_q^*(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi |1 + \beta_1 \exp(i\lambda) + \ldots + \beta_q \exp(iq\lambda)|^2}, \qquad (3)$$

где коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_q$, σ^2 определяются из $q+1$ уравнений (1) (см. [1]). Формула (3) показывает, что С. о. м. э. совпадает с т. н. авторегрессионной спектральной оценкой (см. [2], [3]). Положительное целое число q в применении к С. о. м. э. играет роль, родственную той, к-рую играет обратная ширина спектрального окна в случае непараметрич. оценивания спектральной плотности с помощью сглаживания периодограммы (см. *Спектральное окно*, *Статистические задачи* теории случайных процессов). Имеются нек-рые методы оценивания оптимального значения q по данным наблюдений (см., напр., [1], [4], [5]). Значения коэффициентов $\beta_1, \ldots, \beta_q$, σ^2 могут быть найдены, в частности, с помощью решения системы уравнений Юла — Уокера

$$r_k^* + \sum_{j=1}^{q} \beta_j r_{|k-j|}^* = 0, \qquad k=1, \ldots, q, \qquad (4)$$

$$r_0^* + \sum_{j=1}^{q} \beta_j r_j^* = \sigma^2; \qquad (5)$$

существуют и другие, вычислительно более удобные, методы расчета этих коэффициентов (см., напр., [1], [4] — [6]).

С. о. м. э. и обобщающие их *спектральные оценки параметрические* в случае относительно небольшого объема выборки или спектральных плотностей сложной формы обладают определенными преимуществами перед непараметрич. оценками функции $f(\lambda)$: они обычно имеют более правильную форму и обладают лучшей разрешающей способностью, т. е. позволяют лучше различать близкие пики графика спектральной плотности (см. [1], [4] — [7]). Поэтому С. о. м. э. широко используются в прикладном *спектральном анализе* стационарных случайных процессов.

Лит.: [1] Modern spectrum analysis, N. Y., 1978; [2] Parzen E., «Radio Sci.», 1964, v. 68, p. 937—51; [3] Akaike H., «Ann. Inst. Stat. Math.», 1969, v. 21, № 3, p. 407—19; [4] Nonlinear methods of spectral analysis, B. — [a. o.], 1979; [5] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5—51; [6] Методы спектрального оценивания. Тематич. вып., там же, 1982, т. 70, № 9; [7] Писаренко В. Ф., в сб.: Вычислительная сейсмология, в. 10, М., 1977, с. 118—49.

А. М. Ягломъ.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ — оценка спектральной плотности $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса, отвечающая нек-рой фиксированной параметрич. модели $f(\lambda)$ (т. е. гипотезе о том, что функция $f(\lambda)$ принадлежит определенному семейству спектральных плотностей, описываемых конечным числом параметров). При нахождении С. о. п. данные наблюдений над процессом используются лишь для оценки неизвестных параметров модели, т. е. задача оценивания спектральной плотности здесь сводится к статистич. задаче оценки параметров. Наиболее широко используемой на практике С. о. п. является *спектральная оценка максимальной энтропии*, отвеча-

ющая допущению, что функция $[f(\lambda)]^{-1}$ представляет собой квадрат нек-рого тригонометрич. многочлена фиксированного порядка. Более общий класс С. о. п., сравнительно часто применяющийся в прикладных задачах, опирается на использование модели *смешанного процесса авторегрессии-скользящего среднего*, т. е. на предположение о том, что $f(\lambda)$ представляет собой отношение квадратов модулей двух тригонометрич. многочленов фиксированных порядков (см. [1]—[3]).

Лит.: [1] Nonlinear methods of spectral analysis, B.— [a. o.], 1979; [2] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5—51; [3] Методы спектрального оценивания. Тематич. вып., там же, 1982, т. 70, № 9. *А. М. Яглом.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ стационарного случайного процесса или однородного случайного поля в n-мерном пространстве — преобразование Фурье ковариационной функции стационарного в широком смысле случайного процесса или однородного в широком смысле случайного поля. Стационарные случайные процессы и однородные случайные поля, преобразование Фурье ковариационной функции к-рых существует, наз. процессами, имеющими С. п.

Пусть

$$X(t)=\{X_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$$

есть n-мерный стационарный случайный процесс, а

$$X(t)=\int e^{it\lambda}\Phi(d\lambda),\quad \Phi=\{\Phi_k\}_{k=\overline{1,n}}$$

— его спектральное представление (Φ_k — спектральная случайная мера, отвечающая k-й компоненте $X_k(t)$ многомерного случайного процесса $X(t)$); интегрирование здесь проводится в пределах $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ в случае дискретного времени t и в пределах $-\infty<\lambda<+\infty$ в случае непрерывного времени t. Процесс $X(t)$ имеет С. п.

$$f(\lambda)=\{f_{k,l}(\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}},$$

если все элементы

$$F_{k,l}(\Delta)=\mathsf{E}\Phi_k(\Delta)\overline{\Phi_l(\Delta)},\quad k,\ l=\overline{1,n},$$

спектральной меры $F=\{F_{k,l}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$ абсолютно непрерывны и

$$f_{k,l}(\lambda)=\frac{F_{k,l}(d\lambda)}{d\lambda}.$$

В частности, если для процесса $X(t)$, $t=0,\pm1,\ldots$, выполняется соотношение

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}|B_{k,l}(t)|<\infty,\quad k,\ l=\overline{1,n},$$

где

$$B(t)=\{B_{k,l}(t)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}=\{\mathsf{E}X_k(t+s)\overline{X_l(s)}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$$

— ковариационная функция процесса $X(t)$, то $X(t)$ имеет С. п. и

$$f_{k,l}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\sum_{t=-\infty}^{\infty}B_{k,l}(t)\exp\{-i\lambda t\},$$
$$-\infty<\lambda<\infty,$$
$$k,\ l=\overline{1,n}.$$

Аналогично обстоит дело и в случае процессов $X(t)$ с непрерывным временем t. С. п. $f(\lambda)$ иногда наз. спектральной плотностью 2-го порядка, в отличие от старших С. п. (см. *Спектральный семиинвариант*).

Однородное n-мерное случайное поле $X(t_1,\ldots,t_n)$ имеет С. п. $f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, если его спектральная функция $F(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ обладает тем свойством, что ее смешанная производная $\partial^nF/\partial\lambda_1\ldots\partial\lambda_n$ существует почти всюду, причем

$$f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\partial^nF/\partial\lambda_1\ldots\partial\lambda_n$$

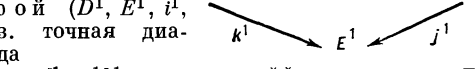
и

$$F(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\int_{\lambda_{01}}^{\lambda_1}\ldots\int_{\lambda_{0n}}^{\lambda_n}f(\mu_1,\ldots,\mu_n)\,d\mu_1\ldots d\mu_n+$$
$$+\text{const}.$$

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963. *И. Г. Журбенко.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность дифференциальных модулей, каждый из к-рых является модулем гомологий предшествующего дифференциального модуля. Обычно рассматривают С. п. биградуированных (реже градуированных или триградуированных) модулей, к-рые изображают графически в виде наложенных друг на друга таблиц на плоскости. Более общо, рассматривают также С. п. объектов произвольной *абелевой категории* (напр., бимодулей, колец, алгебр, коалгебр, алгебр Хопфа и т. д.).

Все известные С. п. получаются из точных пар. Точной парой $(D^1, E^1, i^1, j^1, k^1)$ наз. точная диаграмма вида



Гомоморфизм $d^1=j^1k^1$ является дифференциалом в E^1. По каждой точной паре можно построить производную точную пару $(D^2, E^2, i^2, j^2, k^2)$, для к-рой $D^2=\operatorname{Im} i^1$ и $E^2=H(E^1, d^1)$. Итерирование этой конструкции дает С. п. $E=\{E^n, d^n\}$.

1) С. п. Лере. Фильтрованный цепной комплекс модулей $(\{K^p\}, d)$ определяет точную пару биградуированных модулей $D^1_{p,q}=H_{p+q}(K^p)$, $E^1_{p,q}=H_{p+q}(K^p/K^{p-1})$. В ассоциированной С. п. бистепень дифференциала d^r равна $(-r, r-1)$ и

$$E^r_{p,q}=\frac{\operatorname{Ker}\left(d^{r-1}_{p,q}:E^{r-1}_{p,q}\longrightarrow E^{r-1}_{p-r+1,\,q+r-2}\right)}{\operatorname{Im}\left(d^{r-1}_{p+r-1,\,q-r+2}:E^{r-1}_{p+r-1,\,q-r+2}\longrightarrow E^{r-1}_{p,q}\right)}\cong$$
$$\cong\frac{\operatorname{Im}\left(H_{p+q}(K^p/K^{p-r})\longrightarrow H_{p+q}(K^p/K^{p-1})\right)}{\operatorname{Im}\left(\partial:H_{p+q+1}(K^{p+r-1}/K^p)\longrightarrow H_{p+q}(K^p/K^{p-1})\right)}.$$

Модули $F_{p,q}=\operatorname{Im}(H_{p+q}(K^p)\to H_{p+q}(K))$ образуют фильтрацию в $H_*(K)$. Биградуированный модуль

$$E^\infty_{p,q}=F_{p,q}/F_{p-1,q+1}\cong$$
$$\cong\frac{\operatorname{Im}\left(H_{p+q}(K^p)\longrightarrow H_{p+q}(K^p/K^{p-1})\right)}{\operatorname{Im}\left(\partial:H_{p+q+1}(K/K^p)\longrightarrow H_{p+q}(K^p/K^{p-1})\right)}$$

наз. присоединенным к $H_*(K)$. Фильтрация $\{K^p\}$ наз. регулярной, если $K^p=0$ при $p<0$, $E^1_{p,q}=0$ при $q<0$ и $K=\bigcup K^p$. Для регулярной фильтрации $E^r_{p,q}=0$ или $p<0$ или $q<0$; такая С. п. наз. С. п. первой четверти. Кроме того, $E^r_{p,q}\cong E^{r+1}_{p,q}\cong E^\infty_{p,q}$ при $r>\max(p, q+1)$. В этом случае говорят, что С. п. сходится к $H_*(K)$, и пишут $E^r_{p,q}\Rightarrow H_{p+q}(K)$.

2) С. п. Лере — Серра. Частный случай С. п. Лере возникает из цепного (или коцепного) комплекса фильтрованного топологич. пространства. Напр., фильтрация клеточного разбиения X его остовами дает вырожденную С. п. $E^r_{p,q}\Rightarrow H_{p+q}(X)$, для к-рой $E^r_{p,q}=E^\infty_{p,q}=0$ при $q\neq0$ и $E^2_{n,0}=E^\infty_{n,0}=H_n(X)$. С. п. Лере — Серра получается из фильтрации тотального пространства E расслоения в смысле Серра $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$ прообразами $p^{-1}(B^n)$ остовов B^n базы B. Если слой F и база B

линейно связны, то для каждой группы коэффициентов G это дает С. п. $E_{p,q}^r \Rightarrow H_{p+q}(E, G)$ с дифференциалами d^r бистепени $(-r, r-1)$, для к-рой

$$E_{p,q}^1 \cong C_p(B) \otimes H_q(F; G) \text{ и } E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F, G)),$$

где $\mathcal{H}_q(F; G)$ — система локальных коэффициентов над B, состоящая из групп $H_q(F; G)$. При этом гомоморфизм $i_* : H_n(F; G) \to H_n(E; G)$ совпадает с композицией

$$H_n(F; G) = E_{0,n}^2 \longrightarrow E_{0,n}^r = E_{0,n}^\infty = F_{0,n} \subset H_n(E; G),$$

а гомоморфизм $p_* : H_n(E; G) \to H_n(B; G)$ совпадает с композицией

$$H_n(E; G) = F_{n,0} \longrightarrow E_{n,0}^\infty = E_{n,0}^r \subset E_{n,0}^2 = H_n(B; G),$$

где r достаточно велико. Дифференциал $d_{n,0}^n$ С. п. совпадает с *трансгрессией*: $\tau : H_n(B; G) \to H_{n-1}(F; G)$.

Этой гомологич. С. п. Лере — Серра двойственна когомологич. С. п. Лере — Серра $E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(E; G)$ с дифференциалами d_r бистепени $(r, -r+1)$, для к-рой $E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; G))$. Если G является кольцом, то каждый член E_r является биградуированным кольцом, дифференциал d_r является дифференцированием кольца E_r и умножение в E_{r+1} индуцировано умножением в E_r. Если G — поле и база B односвязна, то $E_2^{**} \cong H^*(B; G) \otimes H^*(F; G)$.

3) С. п. Атьи — Хирцебруха (— Уайтхеда) получается применением функтора обобщенных (ко)гомологий $h_*(\ )$ к той же фильтрации пространства E. В ее когомологич. варианте $E_r^{p,q} \Rightarrow h^{p+q}(E)$, $E_2^{p,q} = H^p(B; h^q(F))$. В отличие от С. п. Лере — Серра С. п. Атьи — Хирцебруха для тривиального расслоения $id : X \to X$, вообще говоря, невырождена.

4) С. п. Эйленберга — Мура ассоциирована с каждым квадратом расслоений

$$\begin{array}{ccc} E & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & B \end{array}.$$

В ее когомологич. варианте

$$E_r \Rightarrow H^*(E; R), \quad E_2^{p,q} \cong \mathrm{Tor}_{H^*(B; R)}^{p,q}(H^*(X, R); H^*(Y, R)).$$

Если R — поле и квадрат состоит из H-пространств и H-отображений, то эта С. п.— в категории биградуированных алгебр Хопфа.

5) С. п. Адамса $E_r^{s,t}$ пишется для каждого простого $p \geqslant 2$ и любых пространств X и Y (удовлетворяющих нек-рым условиям конечности). Для нее

$$E_2^{s,t} \cong \mathrm{Ext}_{A_p}^{s,t}(H^*(X; \mathbb{Z}_p); H^*(Y; \mathbb{Z}_p)),$$

где A_p — *Стинрода алгебра* mod p. Бистепень d_r равна $(r, r-1)$. Эта С. п. сходится в том смысле, что при $r > s$ существует мономорфизм $E_{r+1}^{s,t} \to E_r^{s,t}$ и, значит, определена группа $E_\infty^{s,t} = \bigcap_{r>s} E_r^{s,t}$. Существует такая убывающая фильтрация $\{F^s\}$ группы $\{Y, X\}$ стабильных гомотопич. классов отображений $Y \to X$, что

$$F^s\{S^{t-s}Y X\}/F^{s+1}\{S^{t-s}Y, X\} \cong E_\infty^{s,t},$$

а $F^\infty = \bigcap_{s \geqslant 0} F^s$ состоит из всех элементов группы $\{Y, X\}$ конечного порядка, взаимно простого с p. Эта С. п. при $X = Y = S^0$ позволяет «в принципе» вычислить p-компоненты стабильных гомотопич. групп сфер. С. п. Адамса обобщена А. С. Мищенко и С. П. Новиковым на произвольные *обобщенные теории когомологий*. Имеются также обобщения С. п. Адамса, сходящиеся к нестабильным гомотопич. группам.

Лит.: [1] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970; [2] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, М., 1969; [3] Серр Ж.-П., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. переводов, М., 1958, с. 9—114; [4] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [5] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [6] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [7] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [8] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [9] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, с. 855—951; [10] Adams J. F., Stable homotopy and generalised homology, Chi.— L., 1974; [11] Switzer R. M., Algebraic topology: homotopy and homology, B.— Hdlb.— N. Y., 1975; [12] Smith L., Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [13] Ravenel D. C., в кн.: Geometric applications of homotopy theory, II, B.— Hdlb.— N. Y., 1978, p. 404—75.

С. Н. Малыгин.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ дифференциальных операторов — раздел общей спектральной теории операторов, к-рый изучает спектральные свойства дифференциальных операторов в различных пространствах функций, особенно в гильбертовых пространствах измеримых функций.

Пусть Ω_n — область в $\mathbb{R}^n$, Γ — ее граница,

$$l(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad (1)$$

— линейный дифференциальный оператор (д. о.), и

$$l_j(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{\alpha, j}(x) D^\alpha u \big|_\Gamma = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \qquad (2)$$

— краевые условия, заданные линейными д. о. l_j. Здесь

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \ D = (D_1, \ldots, D_n), \ D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

α_j — неотрицательные целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{nj}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, а функции a_α и $b_{\alpha j}$ определены в Ω_n и Γ соответственно. В дальнейшем везде, где нет особых оговорок, предполагается, что a_α и $b_{\alpha j}$ — достаточно гладкие функции при $n > 1$ и $a_{1n}(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$, если $n = 1$ и $\Omega_1 = (a, b)$.

Самосопряженные расширения д. о. Пусть L_0' — д. о., к-рый задается выражением (1) на функциях из $C_0^\infty(\Omega_n)$, т. е. имеющих производные любого порядка и обращающихся в нуль вне компакта, лежащего внутри Ω_n. Если для любой пары функций $u(x)$ и $v(x)$ из $C_0^\infty(\Omega_n)$

$$\delta_{\Omega_n} l(x, D, u)\, \overline{v}\, dx = \int_{\Omega_n} u \overline{l(x, D, v)}\, dx, \qquad (3)$$

то L_0' наз. симметрическим д. о., а l — формально самосопряженным д. о. Пусть L_0 — замыкание д. о. L_0' в $L_2(\Omega_n)$. Тогда д. о. L_0 и сопряженный к нему L_0^* соответственно наз. минимальным и максимальным операторами, порожденными $l(x, D)$; L_0^* — расширение д. о. L_0. Важной задачей теории д. о. является описание L_0 и L_0^*, а также всех самосопряженных расширений д. о. L_0.

Здесь можно применять абстрактную теорию *расширений* симметрич. операторов. Однако для д. о. самосопряженные расширения часто удается описать в терминах граничных условий.

Пусть

$$H_\pm = \{u(x) \mid u(x) \in D(L_0^*), \ L_0^* u = \pm iu\} \qquad (4)$$

— *дефектные подпространства* оператора L_0. Если $\dim H_\pm = 0$, то $L_0 = L_0^*$, и д. о. L_0^* наз. существенно самосопряженным. Любые из следующих условий достаточны для существенной само-

сопряженности д. о. L_0' в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Формально самосопряженный д. о. $l(x, D)$ имеет вид

$$-\sum_{k,\,j=1}^{n} D_k a_{kj}(x) D_j + q(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (5)$$

с действительными коэффициентами, и L_0' ограничен снизу; имеет вид (5), является эллиптическим, a_{kj} — постоянные, $q(x) \geqslant -Q(|x|)$, $Q(r)$ монотонно не убывает и интеграл

$$\int^{\infty} Q^{-1/2}(r)\, dr = \infty;$$

имеет постоянные и действительные коэффициенты; имеет ограниченные коэффициенты, а главный член — эллиптич. типа с действительными и постоянными коэффициентами.

Пусть д. о. L_0 имеет конечные индексы дефекта $n_{\pm} = \dim H_{\pm}$, что является характерным для обыкновенных д. о. В этом случае числа $n_{\pm}$ совпадают с размерностями подпространств решений уравнений $l(u) = \pm iu$ из $L_2(a, b)$. Поэтому $n_{\pm} < m$ и вычисление индексов дефекта д. о. связано с качественной теорией и асимптотич. методами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $n=1$, $x \in (a, b)$. Если $n_+ \neq n_-$, то д. о. L_0' не имеет ни одного самосопряженного расширения. Если $n_+ = n_- = k$, то для самосопряженности расширений д. о. L_0' надо задавать k граничных условий и они полностью описаны. Граничные условия принимают простой вид, когда выражение L_0' имеет два регулярных конца или имеет один регулярный конец, но $m = 2k$, $n_{\pm} = k$. Конец a наз. р е г у л я р н ы м, если $a > -\infty$ и $\frac{1}{a_m(x)}$, $a_j(x)$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ суммируемы на $[a, \beta]$ при любом $\beta < b$.

Имеются примеры д. о. с частными производными в $L_2(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 3$, с разрывными коэффициентами и с конечными индексами дефекта, но их теория еще слабо развита. В терминах граничных условий описаны не все самосопряженные расширения симметрич. д. о. с частными производными в ограниченной области, но описаны разнообразные расширения с заданными свойствами.

Пусть l — формально самосопряженный эллиптический д. о. четного порядка $m = 2k$ с действительными коэффициентами, $C_k^{\infty}(\Omega_n)$ — множество всех функций, имеющих производные любого порядка в ограниченной замкнутой области $\bar{\Omega}_n$ и удовлетворяющих краевым условиям типа Дирихле $D^{\alpha}u = 0$, $x \in \Gamma$, $|\alpha| \leqslant k-1$. Тогда д. о., определенный выражением l с областью определения $C_k^{\infty}(\Omega_n)$, является симметрическим, а его замыкание L_m — самосопряженным. Имеются другие примеры конкретных самосопряженных краевых условий для д. о., из них наиболее полно изучены д. о. 2-го порядка с краевыми условиями типа Дирихле, Неймана и третьего рода.

С п е к т р а л ь н ы й а н а л и з с а м о с о п р я ж е н н о г о д. о. Всякий самосопряженный д. о. L допускает спектральное разложение вида

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_{\lambda}, \qquad (6)$$

где E_{λ} — разложение единицы (ортогональное семейство *проекторов*). Однако общая формула не дает непосредственного разложения по собственным функциям конкретных самосопряженных д. о., и поэтому важно уметь семейство E_{λ} выразить с помощью собственных функций. Если самосопряженный д. о. L имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}$ с соответствующими ортонормированными собственными функциями $\{\varphi_k(x)\}$, то E_{λ} — интегральный оператор с (спектральным) ядром

$$E(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_k \in (0,\, \lambda]} \varphi_n(x)\, \varphi_n(y). \qquad (7)$$

При наличии непрерывного спектра у д. о. вопрос становится сложным: для непрерывного спектра нет собственных функций из $L_2(\Omega_n)$. Однако имеют место следующие результаты.

Пусть L — самосопряженный обыкновенный д. о. вида (1) в $L_2(-\infty, \infty)$, $\varphi_1(x, \lambda), \ldots, \varphi_m(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения $lu = \lambda u$. Тогда существует монотонная матричная функция $\sigma(\lambda) = \|\sigma_{ij}(\lambda)\|_{i,\,j=1}^{m}$ (спектральная мера) такая, что разложение единицы E_{λ} д. о. L задается ядром

$$E(x, y, \lambda) = \int_0^{\lambda} \sum_{i,\,j=1}^{m} \varphi_i(x, \lambda)\, \varphi_j(y, \lambda)\, d\sigma_{ij}(\lambda). \qquad (8)$$

Далее, для любой функции $f(x)$ из $L_2(-\infty, \infty)$ интеграл

$$\{F_j(\lambda)\} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j(x, \lambda)\, f(x)\, dx \right\} \qquad (9)$$

сходится в пространстве вектор-функций $L_2(-\infty, \infty;\ d\sigma(\lambda))$, порожденном мерой $\sigma(\lambda)$, и обратно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,\,j=1}^{m} F_i(\lambda)\, \varphi_j(x, \lambda)\, d\sigma_{ij}(\lambda)$$

сходится к $f(x)$ в $L_2(-\infty, \infty)$. Если выражение (1) имеет один регулярный конец a и $m = 2k$, а индексы дефекта $n_{\pm} = k$, то функции $\varphi_1(x, \lambda), \ldots, \varphi_k(x, \lambda)$ выбираются так, чтобы они образовали фундаментальную систему в классе решений уравнения $lu = \lambda u$, удовлетворяющих краевым условиям в a, и в этом случае порядок спектральной меры будет равен k.

Пусть L — самосопряженный эллиптич. д. о. в $L_2(\Omega_n)$. Тогда его разложение единицы E — интегральный оператор с ядром $E(x, y, \lambda)$ и существует неубывающая функция $\rho(\lambda)$ такая, что для любых чисел λ_1 и λ_2 имеет место

$$E(x, y, \lambda_1) - E(x, y, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(x, y, \lambda)\, d\rho(\lambda), \qquad (10)$$

при этом при каждом λ существует конечная или бесконечная система $\{\varphi_j(x, \lambda)\}$ решений уравнения $lu = \lambda u$ и

$$\varphi(x, y, \lambda) = \sum_j \varphi_j(x, \lambda)\, \varphi_j(y, \lambda). \qquad (11)$$

Для оператора Шрёдингера $Lu \equiv -\Delta u + q(x)u$, $x \in \mathbb{R}^3$, при условии $|q(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-2-\varepsilon}$ ядро $E(x, y, \lambda)$ явно выражается через решения задачи теории рассеяния.

Для произвольных самосопряженных д. о. с частными производными также справедливы формулы (10), (11), в этом случае $\{\varphi_j(x, \lambda)\}$ могут быть обобщенными функциями, но конечного порядка.

Характер сходимости разложения по собственным функциям д. о. и асимптотич. свойства спектрального ядра помогают в обосновании метода Фурье при решении уравнений математич. физики. Для обыкновенных д. о. имеет место следующий окончательный результат — т е о р е м а р а в н о с х о д и м о с т и: разложения заданной суммируемой функции по собственным функциям д. о., ограниченного снизу, и интеграл Фурье сходятся или расходятся в точке одновременно. Для д. о. с частными производными вопрос становится сложным.

К а ч е с т в е н н а я т е о р и я с п е к т р а д. о. занимается изучением природы спектра в зависимости от поведения коэффициентов, геометрии области и граничных условий.

Имеется серия признаков дискретности спектра д. о. Наиболее общим является следующий критерий и его обобщения: если $q(x) \geqslant 1$, то для дискретности

спектра д. о., порожденного выражением $lu=-u''+q(x)u$ в $L_2(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $j>0$

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_x^{x+j} q(t)\,dt=\infty.$$

Для д. о. с частными производными обобщение этого критерия принимает более сложный вид. Имеются другие, более простые признаки дискретности спектра д. о., напр. самосопряженный д. о., порожденный выражением (5), будет иметь дискретный спектр, если $q(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$; самосопряженный д. о. L_m имеет дискретный спектр.

Изучение природы спектра при наличии непрерывной части становится трудной задачей. Вот нек-рые результаты: 1) если обыкновенный д. о. определяется формально самосопряженным выражением (1) с периодич. коэффициентами на $(-\infty, \infty)$ с общим периодом, то его спектр непрерывный и состоит из последовательности непересекающихся интервалов, концы к-рых стремятся к $-\infty$ или $+\infty$; 2) если д. о. определяется выражением $(-1)^k(D_1^2+\ldots+D_n^2)^k+q(x)\,BL_2(\mathbb{R}^n)$ и $\lim q(x)=0$, $|x|\to+\infty$, непрерывный спектр его заполняет $[0, \infty]$, а отрицательный спектр дискретный и может иметь предельную точку в нуле. Если $k=1$, $|q(x)|\leqslant M(|x|)$ и

$$\int^\infty rM(r)\,dr<\infty \qquad (M(r)=O(r^{-1})),$$

то отрицательный спектр будет конечным (на непрерывном спектре нет собственных значений).

Природа спектра зависит также от граничных условий. В ограниченной области описаны конкретные граничные условия, при выполнении к-рых самосопряженный д. о. Лапласа имеет непрерывную часть спектра. Это — результат бесконечности индексов дефекта минимального д. о. Лапласа в области с границей.

Функции от самосопряженного д. о. изучаются с целью решения смешанных задач для дифференциальных уравнений, а также для внутренних задач теории д. о. Пусть L — эллиптич. д. о. порядка m. Хорошо изучена резольвента $(L+\lambda)^{-1}$ при $\lambda>0$ и функции $\exp(-Lt)$ и $\exp(iL^{1/m}t)$ при $t>0$. Последние являются разрешающими операторами для обобщенного уравнения теплопроводности $u_t=-Lu$, $u(0, x)=f(x)$ и обобщенного волнового уравнения $u_t=iL^{1/m}u$, $u(0, x)=f(x)$. Все три оператор-функции являются интегральными с ядрами $R(x, y, \lambda)$, $K(x, y, t)$, $G(x, y, t)$ (функции Грина) соответственно. Формула

$$R(x, y, \lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}K(x, y, t)\,dt \qquad (12)$$

устанавливает связь между R и K. Нек-рые свойства $R(x, y, \lambda)$: если L — эллиптический самосопряженный д. о. порядка m в $L_2(\Omega_n)$, то при $p>n/2m$ оператору $(L+\lambda)^{-p}$ отвечает ядро типа Карлемана; при $p>n/m$ оператор $(L_m+\lambda)^{-p}$ является ядерным и поэтому

$$S_p(L+\lambda)^{-p}=\sum_{k=1}^\infty(\lambda_k+\lambda)^{-p}, \qquad (13)$$

где $\{\lambda_k\}$ — собственные значения д. о. L_m. Имеются и другие признаки ядерности оператора $(L+\lambda)^{-p}$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Аналитич. и асимптотич. свойства функций Грина дают полезную информацию о спектральных характеристиках д. о. L. Напр., если в (13) известно поведение $S_p(L+\lambda)^{-p}$ при $\lambda\to\infty$, то применение тауберовых теорем позволяет найти асимптотику λ_k. То же самое удается, если известна асимптотика $S_p\exp(-Lt)$ при $t\to+0$. Асимптотика $R(x, y, \lambda)$ и $K(x, y, t)$ устанавливается, напр., методом параметрикс, методом потенциалов и т. д. Так, на этом пути удалось найти асимптотику λ_k для обширного класса эллиптич. д. о. Для определения асимптотики спектрального ядра $E(x, y, \lambda)$ эллиптич. д. о. оказалось эффективным изучение асимптотики ядра $G(x, y, t)$ при $t\to0$ с дальнейшим применением различных тауберовых теорем. В частности, при $x=y$, $x\notin\Gamma$

$$E(x, x, \lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{l_0(x,\,\xi)<\lambda}d\xi+O(\lambda^{(n-1)/m}).$$

Несамосопряженные д. о. Наиболее полные результаты имеются для обыкновенных д. о. на конечном отрезке. Пусть д. о. L определяется выражением (1) при $n=1$, $a_m(x)\equiv1$ на функциях, имеющих $(m-1)$ абсолютно непрерывные производные и удовлетворяющие краевым условиям:

$$l_{\nu_0}(u)+l_{\nu_1}(u)\equiv2_\nu u^{(k_\nu)}(0)+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}\alpha_{\nu_j}u^{(j)}(0)+$$

$$+\beta_\nu u^{(k_\nu)}(1)+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}\beta_{\nu_j}u^{(j)}(1)=0, \qquad 1\leqslant\nu\leqslant m.$$

Здесь $m-1\geqslant k_1\geqslant\ldots\geqslant k_m\geqslant0$, $k_{\nu-2}<k_\nu$ и числа a_ν, b_ν одновременно не равны нулю. Пусть краевые условия (2) являются регулярными. Таковыми будут краевые условия типа Штурма — Лиувилля ($m=2k$, $l_{\nu_0}(u)=l_{\nu_1}(u)=0$, $1\leqslant\nu\leqslant m-1$) и периодич. типа ($\alpha_\nu=\beta_\nu=1$). Тогда д. о. L имеет бесконечное число собственных значений, к-рые имеют точную асимптотику; система собственных и присоединенных функций д. о. L полна в $L_p(0, 1)$; разложение функций $f(x)$ из $D(L)$ по собственным и присоединенным функциям д. о. L сходится равномерно на $(0, 1]$. Факт полноты системы собственных и присоединенных функций имеет место также при нек-рых нерегулярных краевых условиях, в частности типа распадающихся ($l_{\nu_0}(u)=0$, $1\leqslant\nu\leqslant m_1$, $l_{\nu_1}(u)=0$, $1\leqslant\nu\leqslant m_2$, $m_1\neq m_2$, $m_1+m_2=m$), однако сходимость разложения в ряд по собственным и присоединенным функциям справедлива только для узкого класса (l-аналитических) функций.

Пусть L_0 — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H — имеет собственные значения $\{\lambda_k\}$ и при нек-ром $p>0$ оператор L_0^{-p} является ядерным. Пусть L_1 — другой оператор такой, что $L_1L_0^{-1}$ является вполне непрерывным. Тогда система собственных и присоединенных векторов оператора L_0+L_1 полна в H (теорема Келдыша). Применение этой теоремы дает классы д. о., к-рые имеют полную систему собственных и присоединенных функций.

Пусть L_m — д. о. в $L_2(\Omega_n)$ и

$$L_1u=\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}d_\alpha(x)D^\alpha u,$$

тогда система собственных и присоединенных функций для д. о. L_m+L_1 полна в $L_2(\Omega_n)$. Однако разложение функции в ряд по этой системе, вообще говоря, расходится и суммируется со скобками по обобщенному методу Абеля.

Если область Ω_n неограничена, то для выполнения условий теоремы Келдыша надо налагать дополнительные условия на рост коэффициентных функций д. о.

Мало изучены несамосопряженные д. о. с непрерывной частью спектра. Это связано с тем, что для них нет аналога теоремы о спектральном разложении. Исключение составляет д. о., порожденный выражением $-\frac{d^2x}{dx^2}+q(x)$ при $x\in[0, \infty)$ или $x\in(-\infty, \infty)$ с комплекснозначной функцией $q(x)$. Пусть $\varphi(x, k)$ является решением уравнения $-u^{(4)}+q(x)u=k^2u$ при $0\leqslant x<\infty$ и удовлетворяет начальным условиям $\varphi(0, k)=1$,

$\varphi'(0, k)=h$. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — финитные функции из $L_2(0, \infty)$ и

$$F_j(k)=\int_0^\infty f_j(x)\,\varphi(x, k)\,dx.$$

Тогда существует линейный функционал R на линейном топологич. пространстве G такой, что $F_1F_2\in G$,

$$(R, F_1F_2)=\int_0^\infty f_1(x)\,f_2(x)\,dx.$$

Пространство G — множество всех целых четных функций первого порядка роста конечного типа, суммируемых на действительной оси. Если $xq(x)\in L_1(0, \infty)$, то R явно вычисляется. В этом случае на непрерывном спектре появляются спектральные особенности — полюсы ядра резольвенты, к-рые не являются собственными значениями д. о. Спектральные особенности присущи несамосопряженным операторам и из-за них вопросы разложения (и его сходимость) по собственным функциям принимают более сложный характер. Для д. о.

$$Lu\equiv\left(-D_1^2-D_2^2-D_3^2+q(x)\right)u$$

в $L_2(\mathbb{R}^3)$ в предположении, что комплексная функция $q(x)$ убывает экспоненциально, также найден вид спектрального разложения через решение задачи теории рассеяния с учетом влияния спектральных особенностей.

В обратных задачах спектрального анализа требуется определение д. о. по некрым спектральным характеристикам.. Полностью решены задачи определения одномерных дифференциальных уравнений Шрёдингера и систем типа Дирака по спектрам различных расширений, по спектральной мере, по данным рассеяния, т. е. по асимптотич. поведению нормированных собственных функций, и т. д. Обратные задачи нашли приложение в интегрировании нелинейных уравнений.

С. т. дифференциальных операторов возникла в связи с исследованиями колебания струны и вызвала к жизни теорию ортогональных разложений (18—19 вв.). Систематич. изучение самосопряженного д. о. 2-го порядка на конечном отрезке начинается с 1830 (*Штурма — Лиувилля задача*) и в 19 в. было предметом многих исследований, в частности в связи с теорией специальных функций. Однако замкнутость системы собственных функций д. о. Штурма — Лиувилля была доказана только в 1896, тогда же изучен и характер сходимости разложения по собственным функциям. Теория сингулярных д. о. берет свое начало в 1909—1910, когда было найдено спектральное разложение самосопряженного неограниченного д. о. 2-го порядка с произвольной структурой спектра и, по существу, введено понятие индекса дефекта и получены первые результаты по теории расширений. Интерес к сингулярным д. о. возрос с 1920 с возникновением квантовой механики. Систематич. исследование несамосопряженных сингулярных д. о. началось с 1950, когда были заложены основы теории операторных пучков и указан метод доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций для д. о.

Лит.: [1] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [2] Глазман И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963; [3] Данфорд Н., Шварц Дж. - Т., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [4] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [5] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; [6] Марченко В. А., Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля, К., 1972; [7] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [8] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, пер. с англ., ч. 1—2, М., 1960—61; [9] Фаддеев Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1963, т. 69; 1964, т. 73, с. 314—36; [10] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 28—83; 1977, т. 32, в. 1, с. 107—30; [11] Березанский Ю. М., «Укр. матем. ж.», 1974, т. 26, в. 5, с. 579—590; [12] Гасымов М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 41—112; [13] Левитан Б. М., Гасымов М. Г., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 2, с. 3—63; [14] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., там же, 1976, т. 31, в. 1, с. 55—136; [15] Коcтюченко А. Г., в кн.: IV летняя математическая школа, К., 1968, с. 42—117; [16] Хёрмандер Л., «Математика», 1969, т. 13, № 6, с. 114—37.

М. Г. Гасымов.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ линейных операторов — раздел функционального анализа, изучающий структуру линейного оператора на основании свойств его спектральных характеристик (расположения спектра, поведения резольвенты, асимптотики собственных значений и т. д.). При этом под описанием структуры оператора может пониматься нахождение эквивалентного ему оператора в фиксированном классе конкретных (часто функциональных) моделей; определенный способ его восстановления из совокупности более простых операторов (напр., в форме прямой суммы или прямого интеграла); отыскание базиса, в к-ром матрица оператора имеет наиболее простой вид, доказательство полноты системы корневых векторов; полное описание решетки инвариантных подпространств, выделение максимальных цепочек инвариантных подпространств (треугольное представление); построение достаточно широкого функционального исчисления и т. д.

Весьма популярна (и плодотворна) в С. т. идея разложения оператора в прямую сумму операторов, соответствующую разбиению его спектра. Первые (для пространств бесконечной размерности) результаты такого рода получил Ф. Рисс (F. Riesz, 1909), предложивший следующую конструкцию. Пусть T — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X, $\sigma(T)$ — его спектр, $R_T(\lambda)$ — его резольвента (т. е. $R_T(\lambda)=(T-\lambda I)^{-1}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$); тогда формула

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\oint_\Gamma f(\lambda)\,R_T(\lambda)\,d\lambda,$$

где Γ — произвольный контур, охватывающий $\sigma(T)$, определяет функциональное исчисление на алгебре ростков голоморфных функций в окрестности $\sigma(T)$. Если δ — открыто-замкнутое подмножество $\sigma(T)$ и f — функция, равная 1 в окрестности δ и 0 в окрестности $\sigma(T)\setminus\delta$, то получается проектор $P_T(\delta)$, перестановочный с T и такой, что $\sigma(T|P_T(\delta)X)=\delta$.

Более общая С. т. основывается на понятии спектрального подпространства. Спектральным многообразием оператора T, соответствующим замкнутому подмножеству $\delta\in\sigma(T)$, наз. совокупность $X_T(\delta)$ всех векторов $x\in X$, имеющих в $\mathbb{C}\setminus\delta$ локальную резольвенту (т. е. аналитическую X-значную функцию $f(\lambda)$, удовлетворяющую условию $(T-\lambda I)f(\lambda)=x$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\delta$); спектральное подпространство — это замыкание спектрального многообразия. Если любые две локальные резольвенты одного и того же вектора совпадают на пересечении областей их определения (это означает, что локальная резольвента нулевого вектора равна нулю — условие, выполненное, напр., для всех операторов без собственных значений), то говорят, что оператор имеет свойство однозначного распространения. В этом случае для каждого $x\in X$ определена локальная резольвента с максимальной областью определения, дополнение к к-рой наз. локальным спектром оператора T на векторе x и обозначается $\sigma(T, x)$. Таким образом, для оператора T, обладающего свойством однозначного распространения,

$$X_T(\delta)=\{x\in X:\sigma(T, x)\subset\delta\};$$

если при этом $X_T(\delta)$ замкнуто, то $\sigma(T|X_T(\delta))\subset\delta$. В общем случае аналогичное включение для спектральных подпространств не выполнено. Спектральные под-

пространства удовлетворяют условию дуальности $X_T(\delta_1)^\perp \supset X_{T^*}(\delta_2)$ (δ_1 и δ_2 — непересекающиеся замкнутые множества), однако другое естественное условие $X_T(\overline{G_1})^\perp \subset \overline{X_{T^*}(G_2)}$ (G_1 и G_2 открыты, $G_1 \cup G_2 = \sigma(T)$) может нарушаться. Это включение становится справедливым, если его правую часть заменить «слабым спектральным подпространством» $X_T^W(\overline{G}_2)$ (по определению, $X_T^W(\delta)$ состоит из векторов $x \in X$, для к-рых каждому $\varepsilon > 0$ поставлена в соответствие аналитическая X-значная функция $f_\varepsilon(\lambda)$ со свойством $\|(T-\lambda I) f_\varepsilon(\lambda) - x\| \leqslant \varepsilon$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta$). Известны достаточные условия более сильной отделимости спектра. В частности, для операторов с вещественным спектром условие умеренности роста резольвенты

$$\int_0 \log^+\log^+ (\sup_s \| R_T(s+it) \|)\, dt < \infty$$

влечет существование (для любого открытого покрытия спектра) семейства T-инвариантных подпространств с вписанными в покрытие спектрами сужений, линейно порождающих X. Фактически такие операторы принадлежат классу разложимых операторов, к-рый можно определить требованием замкнутости спектральных многообразий и следующим условием: для любого открытого покрытия $\{G_i\}_{i=1}^n$ спектра T подпространства $X_T(\overline{G}_i)$ линейно порождают X. Этот класс операторов содержит все операторы, резольвенты к-рых удовлетворяют условию аналитич. мажорантности (таковы, в частности, компактные операторы, слабые возмущения спектральных операторов, мультипликаторы рядов Фурье в l^p, J-симметричные операторы) и устойчив относительно аналитич. отображений и (при нек-рых ограничениях) предельных переходов, относительно образования сужений и факторов. В то же время обилие спектральных подпространств (при достаточно богатом спектре) обеспечивает содержательность С. т. Построен пример оператора, находящегося вне рамок каких бы то ни было спектральных разложений ввиду того, что спектры всех его сужений на инвариантные подпространства совпадают с отрезком $[0, 1]$.

Даже в случае разреженного спектра сужения оператора на спектральные подпространства могут обладать достаточно сложным строением (тонкой структурой). Так, всякий полюс резольвенты — собственное значение, подъем к-рого (максимальная из длин корневых цепочек) равен порядку полюса; соответствующее спектральное подпространство является корневым подпространством. В случае операторов, действующих в конечномерных пространствах, это приводит к разложению оператора в прямую сумму жордановых клеток, построенных по корневым цепочкам. Аналоги жорданова представления занимают важное место и в общей С. т.; при этом роль жордановых клеток могут играть операторы с одноточечным спектром и циклич. вектором, операторы с линейно упорядоченной решеткой инвариантных подпространств (такие операторы наз. одноклеточными; среди операторов в конечномерных пространствах таким свойством обладают только жордановы клетки) или операторы, имеющие простые конкретные представления (модели). Однако возможность такого разложения не универсальна — существуют операторы, решетка инвариантных подпространств и спектр к-рых устроены слишком сложно, чтобы их можно было считать элементарными «клетками», в то же время не обладающие ни одной парой непересекающихся инвариантных подпространств. Более того, неизвестно (1984), всякий ли ограниченный оператор (в пространстве, размерность к-рого больше 1) обладает нетривиальным инвариантным подпространством. Положительный ответ на этот вопрос получен для компактных операторов, операторов, перестановочных с компактными, близких к эрмитовым или унитарным, субнормальных, а также принадлежащих нек-рым специальным классам.

Часть результатов конечномерной С. т. имеет простые аналоги в С. т. компактных операторов. Так, спектр компактного оператора не более чем счетен и его точкой сгущения может быть лишь 0, ненулевые точки спектра являются полюсами резольвенты, причем корневые подпространства конечномерны, сопряженный оператор имеет ту же структуру сужений на корневые подпространства. Однако даже в том случае, когда точечный спектр достаточно богат и корневые векторы оператора T порождают все пространство X (в таких случаях говорят, что T — полный оператор), разложение X в прямую сумму корневых подпространств может быть неосуществимо из-за геометрич. особенностей их взаимного расположения.

Если пространство X — гильбертово (в этом случае будем писать H вместо X), то всякий компактный оператор $T \in \mathscr{L}(H)$ представляется в виде суммы ряда

$$\sum_n s_n f_n \otimes e_n,$$

т. е.

$$Tx = \sum_n s_n (x, f_n) e_n, \quad x \in H,$$

где $\{s_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, а $\{f_n\}$ и $\{e_n\}$ — ортонормированные системы. Числа $s_n = s_n(T)$ наз. сингулярными числами, или s-числами, оператора T; они совпадают с собственными значениями оператора $(TT^*)^{1/2}$, занумерованными в порядке убывания с учетом кратностей. Кроме того, $s_n(T) = \inf \|TP\|$, где P пробегает множество проекторов коранга n (минимаксная характеризация сингулярных чисел), и $s_n(T)$ совпадает с расстоянием от T до множества операторов ранга n, что количественно выражает соответствие между скоростью убывания сингулярных чисел оператора и его близостью к операторам конечного ранга. На этом основаны оценки сингулярных чисел для сумм и произведений, из к-рых следует, что определенные условия на скорость убывания s-чисел выделяют идеалы в алгебре операторов. В частности,

$$\gamma_p = \{T : |T|_p \equiv (\sum s_n^p(T))^{1/p} < \infty\} —$$

идеал, являющийся при $p \geqslant 1$ банаховым пространством относительно нормы $|T|_p$. Пространство γ_2 — гильбертово, его элементы наз. операторами Гильберта — Шмидта; любой L_2-реализации пространства H соответствует представление всех операторов Гильберта — Шмидта интегральными операторами с квадратично суммируемыми ядрами. Операторы из γ_1 наз. ядерными или операторами со следом: определенный на идеале операторов конечного ранга след продолжается до непрерывного функционала на γ_1, значение к-рого на любом операторе совпадает с суммой (ряда) диагональных элементов его матрицы, а также с суммой собственных значений. Для операторов вида $I+T$, где $T \in \gamma_1$, вводится понятие определителя (бесконечное произведение, составленное из собственных значений): функция $\det(I-\mu T)$ наз. характеристическим определителем оператора T. Характеристич. определитель является естественным обобщением характеристич. многочлена матрицы и, ввиду наличия удобных оценок, играет полезную роль в С. т. ядерных операторов. В частности, резольвента оператора $T \in \gamma_1$ выражается через характеристич. определитель по формуле (восходящей к Э. Фредгольму, E. Fredholm, 1903)

$$R_T(\lambda) = F_T(\lambda^{-1}) \det(I - \lambda^{-1} T)^{-1},$$

где F_T — целая оператор-функция, коэффициенты к-рой выражаются в терминах «частичных следов» оператора T. Получаемые таким образом формулы и оценки резольвенты переносятся на операторы из γ_p, $p>1$ (что важно для приложений), и приводят к следующим критериям полноты: 1) если $T=A(I+S)$, где $A=A^*\in\gamma_p$, S компактен и $\operatorname{Ker} A=0$, то T полон (теорема Келдыша, имеющая многочисленные приложения в С. т. дифференциальных операторов); 2) если $T\in\gamma_p$ и область значений квадратичной формы (Tx, x) содержится в нек-ром угле величины π/p, то T полон.

Компактные операторы, спектры к-рых состоят из единственной точки $\lambda=0$ (условие, противоположное условию полноты), наз. вольтерровыми, ввиду того что интегральные операторы Вольтерра

$$Tf(x)=\int_0^x K(x, y)f(y)\,dy$$

являются их моделями Точнее, всякий вольтерров оператор Гильберта — Шмидта унитарно эквивалентен интегральному оператору Вольтерра в пространстве вектор-функций; операторы, не принадлежащие γ_2, имеют модели, ядра к-рых — обобщенные функции. Такие интегральные представления являются аналогами треугольных представлений для матриц. Развита техника интегрирования операторных функций по цепочке проекторов и на ее основе получено абстрактное треугольное представление вольтеррова оператора

$$T=\int_{\mathcal{P}} P(T-T^*)\,dP,$$

где $\mathcal{P}$ — максимальная цепочка T-инвариантных проекторов. Это привело к уточнению и обобщению основных теорем теории интегральных моделей, доказательству важных соотношений между распределениями собственных значений эрмитовых компонент вольтерровых операторов, близких к единичному, построению треугольных факторизаций операторов, установлению связи С. т. с нек-рыми вопросами теории краевых задач для канонич. систем дифференциальных уравнений (в частности, позволило операторными методами исследовать вопросы устойчивости таких систем).

Долго остававшаяся открытой проблема существования цепочек ранга 1 для произвольного компактного оператора была решена отрицательно. Существование инвариантных цепочек ранга 1 доказано для диссипативных операторов с ядерной мнимой компонентой, вследствие чего их треугольные представления имеют наиболее законченный вид. Для таких операторов построена и теория жордановых представлений, сходная с классической (конечномерной): всякий оператор разлагается в квазипрямую сумму одноклеточных, причем одноклеточность в этом классе операторов эквивалентна существованию циклич. вектора. В этой теории центральную роль играет понятие характеристической оператор-функции (х. о.-ф.).

Тесно связанное с геометрич. конструкциями теории унитарных дилатаций понятие х. о.-ф. сжатия (т. е. оператора, норма к-рого не превосходит единицы) лежит в основе С. т. этого класса операторов. Х. о.-ф. сжатия T — это функция $\theta_T(\lambda)$, определенная в открытом единичном круге $\Delta\in\mathbb{C}$, принимающая значения в пространстве операторов, действующих из $\overline{D_T(H)}$ в $\overline{D_{T^*}(H)}$ (где $D_T=(I-T^*T)^{1/2}$), и удовлетворяющая соотношению

$$\theta_T(\lambda)D_T=D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}(I\lambda-T).$$

Х. о.-ф. аналитична в Δ и является сжимающей $\|\theta_T(\lambda)\|\leqslant 1$; если T^n и T^{*n} стремятся к нулю в сильной операторной топологии (такие операторы образуют класс C_{00}), то θ_T — внутренняя функция, т. е. ее предельные значения на $\partial\Delta$ почти всюду унитарны. Обратно, по любой внутренней операторнозначной функции $\theta:\Delta\to\mathcal{B}(E_1, E_2)$ можно построить сжатие T, для к-рого $\theta_T=\theta$, ограничивая оператор умножения на λ в пространстве Харди $H^2_{E_2}(\Delta)$ на ортогональное дополнение K_θ к подпространству $\theta H^2_{E_1}$. Эта конструкция, наз. функциональной моделью сжатия, дает возможность переводить задачи С. т. на язык классич. теории функций, где они приобретают вид проблем интерполяции, рациональной аппроксимации, аналитич. продолжения, специальной факторизации и т. д. Функциональную модель можно использовать для построения более богатого функционального исчисления, определяя для $\varphi\in H^\infty(\Delta)$ оператор $\varphi(T)$ как ограничение на K_θ оператора умножения на $\varphi(\lambda)$ (условие $T\in C_{00}$ здесь не обязательно, важно, чтобы T был вполне неунитарным). Если это исчисление не инъективно, т. е. $\varphi(T)=0$ для нек-рой функции $\varphi\in H^\infty$, $\varphi\neq 0$, то T наз. сжатием класса C_0. Сжатие $T\in C_0$ обладает минимальной внутренней функцией m_T (образующей в идеале всех функций, аннулирующих T); m_T является аналогом минимального многочлена матрицы — в терминах ее характеристик описываются многие спектральные свойства T. Так, полнота сжатия $T\in C_0$ имеет место тогда и только тогда, когда m_T — *Бляшке произведение* (и в этом случае T допускает *спектральный синтез*). Точечный спектр $\sigma_p(T)$ сжатия $T\in C_0$ совпадает с множеством нулей функции m_T, а $\sigma(T)$ получается из $\sigma_p(T)$ добавлением тех точек окружности $\partial\Delta$, через к-рые m_T не может быть аналитически продолжена. То, что сжатия класса C_0 имеют в Δ не более чем счетный спектр, указывает на ограниченность этого класса; с другой стороны, ему принадлежат, напр., все сжатия, для к-рых дефектные операторы D_T, D_{T^*} ядерные. Если D_T, D_{T^*} — операторы ранга 1, то функциональная модель действует в классич. пространстве Харди $H^2(\Delta)$ и полностью определяется скалярной внутренней функцией $m=m_T=\theta_T$, в связи с чем принято обозначение $T=S(m)$. С. т. сжатий $S(m)$ наиболее тесно связана с теорией аналитич. функций и наиболее изучена; эти сжатия играют роль жордановых клеток в С. т. сжатий класса C_0 ввиду того, что всякое сжатие $T\in C_0$ квазиподобно прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^N S(m_i)$. Более привычное жорданово разложение (на одноклеточные операторы) для $T\in C_0$ не всегда возможно.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2 — Спектральная теория, М., 1966; ч. 3—Спектральные операторы, М., 1974; [2] Radjavi H., Rosenthal P., Invariant subspaces, B., 1973; [3] Colojara I., Foias C., The theory of generalized spectral operators, N. Y., 1968; [4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [5] их же, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967; [6] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [7] Николь'кий Н. К., Лекции об операторе сдвига, М., 1980. *В. С. Шульман.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, разложение единицы, — монотонное непрерывное слева в сильной операторной топологии отображение $P(\cdot)$ действительной прямой во множество ортогональных проекторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to-\infty} P(t)=0,\qquad \lim_{t\to+\infty} P(t)=I.$$

Всякая самосопряженная (т. е. принимающая самосопряженные значения) сильно счетно аддитивная борелевская *спектральная мера* $E(\cdot)$ на прямой определяет С. ф. по формуле $P(t)=E(-\infty, t)$ и для всякой С. ф. существует единственная определяющая ее спектральная мера.

Понятие С. ф. является основным в спектральной теории самосопряженных операторов: по теореме о *спектральном разложении*, всякий такой оператор имеет интегральное представление $\int_{-\infty}^{\infty} t dP(t)$, где $P(t)$ — нек-рая С. ф. Аналогичную роль в теории симметрических операторов играет понятие обобщенной С. ф.— так называется отображение действительной прямой во множество неотрицательных операторов, удовлетворяющее всем условиям, накладываемым на С. ф., за исключением проекторнозначности. Всякая обобщенная С. ф. может быть продолжена в более широком пространстве (теорема Наймарка).

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Наймарк М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 1, с. 53—104. *В. С. Шульман.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ стационарного случайного процесса или однородного случайного поля в n-мерном пространстве — функция круговой частоты λ или соответственно волнового вектора $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, входящая в *спектральное разложение* ковариационной функции стационарного в широком смысле случайного процесса или однородного в широком смысле случайного поля в n-мерном пространстве. Класс С. ф. стационарных случайных процессов совпадает с классом всевозможных ограниченных монотонно неубывающих функций λ, а класс С. ф. однородных случайных полей — с классом функций n переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, отличающихся лишь неотрицательным постоянным множителем от n-мерных функций распределения. *А. М. Яглом.*

СПЕКТРАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО — 1) С. м. оператора A в нормированном пространстве — такое подмножество $S\in\mathbb{C}$, что

$$\|p(A)\|\leqslant \sup\{|p(z)|: z\in S\}$$

для любого многочлена $p(z)$. Так, единичный круг — С. м. для любого сжатия (оператора, норма к-рого не превосходит единицы) в гильбертовом пространстве (теорема Неймана). Этот результат тесно связан с существованием унитарной степенной дилатации у любого сжатия (степенной дилатацией оператора A в гильбертовом пространстве H наз. такой оператор A_1 в гильбертовом пространстве $H_1\subset H$, что $P_H A_1^n|_H=A^n$, $n\in\mathbb{Z}^+$); компактное подмножество $S\in\mathbb{C}$ спектрально для A тогда и только тогда, когда S имеет нормальную степенную дилатацию со спектром в ∂S. Минимальный радиус круга, являющегося С. м. для всякого сжатия в банаховом пространстве, равен e.

2) С. м., множество спектрального синтеза, для коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ — замкнутое подмножество пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, являющееся оболочкой ровно одного идеала $I\in\mathfrak{A}$. В случае, когда $\mathfrak{A}$ — групповая алгебра локально компактной абелевой группы, С. м. наз. также множествами гармонического синтеза.

Лит.: [1] Neumann J., «Math. Nachr.», 1951, Bd 4, S. 258—81; [2] Кацнельсон В. Э., Мацаев В. И., «Теория функций, функц. анализ и их приложения», 1966, в. 3, с. 3—10. *В. С. Шульман.*

СПЕКТРАЛЬНОЕ ОКНО оценки спектральной плотности — функция круговой частоты λ, определяющая весовую функцию, используемую при непараметрич. оценивании *спектральной плотности* $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с помощью сглаживания *периодограммы*, построенной по данным наблюдений за процессом. Обычно за оценку значения спектральной плотности в точке λ_0 принимают интеграл по $d\lambda$ от произведения периодограммы в точке λ на выражение типа $B_N A(B_N(\lambda-\lambda_0))$, где $A(\lambda)$ — фиксированная функция частоты, принимающая наибольшее значение в точке $\lambda=0$ и такая, что ее интеграл по всем значениям λ равен единице (именно эту функцию и наз. спектральным окном, хотя иногда тот же термин прилагается и к функции $B_N A(B_N\lambda)$), а B_N^{-1} — зависящая от размера выборки N (т. е. от длины наблюдавшегося отрезка реализации процесса $X(t)$) и при $N\to\infty$ стремящаяся к нулю (но медленнее, чем N^{-1}) ширина С. о. Преобразование Фурье С. о. (а в случае дискретного времени t, когда $-\pi\leqslant\lambda<\pi$ — совокупность коэффициентов Фурье С. о.) наз. корреляционным окном оценки спектральной плотности; оно определяет весовую функцию дискретного или непрерывного аргумента (в зависимости от того, дискретно или непрерывно время t), на к-рую надо умножить эмпирич. автокорреляции, построенные по выборке, для того чтобы преобразование Фурье полученного произведения совпало с рекомендуемой *спектральной плотности оценкой*.

Лит.: [1] Blackman R. B., Tukey J. W., The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering, N. Y., 1959; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1—2, М., 1971—72; [3] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980. *А. М. Яглом.*

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ линейного оператора — представление оператора в виде интеграла по *спектральной мере (спектральной функции)*. Для любого самосопряженного оператора T в гильбертовом пространстве H существует такая спектральная функция $P(\cdot)$, что

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty} t dP(t).$$

Это означает, что

$$D_T=\left\{x\in H: \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 d(P(t)x, x)<\infty\right\},$$

$$(Tx, y)=\int_{-\infty}^{+\infty} t d(P(t)x, y)$$

для любых $x\in D_T$, $y\in H$. Спектральная функция самосопряженного оператора T может быть вычислена через его резольвенту $R(\lambda, T)$ по формуле

$$P(b)-P(a)=\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{a+\delta}^{b-\delta}(R(\lambda-i\varepsilon, T)-R(\lambda+i\varepsilon, T))\,d\lambda.$$

Из теоремы о С. р. самосопряженного оператора следует возможность реализации самосопряженных операторов операторами умножения и существование функционального исчисления на борелевских функциях.

Используя С. р. самосопряженного оператора и теорию расширений с выходом из пространства (см. [2]), можно получить интегральное представление *симметрического оператора* через обобщенную спектральную функцию. Аналогично строится интегральное представление *изометрических операторов*. При этом аналогия между С. р. самосопряженных и унитарных операторов, с одной стороны, и интегральными представлениями симметрических и изометрических — с другой, далеко не полная (отсутствие единственности обобщенных спектральных функций, отсутствие сильной сходимости интегралов, сравнительная узость функционального исчисления и т. п.).

Для любого ограниченного *нормального оператора* T в гильбертовом пространстве H существует такая счетно аддитивная в сильной операторной топологии самосопряженная спектральная мера $E(\cdot)$ на σ-алгебре борелевских подмножеств комплексной плоскости, что

$$T=\int_{\mathbb{C}} zE(dz).$$

При этом supp $E(\cdot)=\sigma(T)$, $TE(\alpha)=E(\alpha)T$, $\sigma(T|E(\alpha)H)\subset\overline{\alpha}$. Эта теорема допускает следующую удобную переформулировку: всякий ограниченный нормальный оператор унитарно эквивалентен оператору умножения на нек-рую существенно ограниченную функцию в пространстве $L^2(S, \Sigma, \mu)$, причем мера μ может быть выбрана конечной, если пространство сепарабельно.

Из теоремы о С. р. следует существование функционального исчисления от нормального оператора, т. е. гомоморфизма $f\to f(T)$ алгебры существенно ограниченных борелевских функций на $\sigma(T)$ в алгебру ограниченных операторов, удовлетворяющего условию $id(T)=T$ и переводящего всякую ограниченную поточечно сходящуюся последовательность функций в сильно сходящуюся последовательность операторов. Образ этого гомоморфизма (т. е. множество всех функций от оператора T) совпадает с множеством всех операторов, перестановочных с каждым оператором, перестановочным с T. Поскольку из существования функционального исчисления, в свою очередь, следует теорема о С. р., этот результат можно считать одной из форм спектральной теоремы. Теорема о С. р. обобщается и на неограниченные нормальные операторы (см. [2]).

Спектральная мера в случае С. р. унитарного оператора — частного случая нормального оператора — может быть задана на единичной окружности. С. р. унитарного оператора U иногда записывается в виде

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,dE(\theta),$$

где $E(\cdot)$ — спектральная функция, сосредоточенная на отрезке $[0, 2\pi]$. Таким образом, С. р. дает возможность представить унитарный оператор в виде $\exp iA$, где A — самосопряженный оператор. Этот результат обобщает теорема Стоуна: всякая сильно непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов представляется в виде

$$U(t)=\exp itA,$$

где A — самосопряженный (возможно, неограниченный) оператор.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2 — Спектральная теория, М., 1966; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ случайной функции — 1) разложение случайной функции (в частности, случайного процесса) в ряд или интеграл по той или иной специальной системе функций такое, что коэффициенты этого разложения представляют собой взаимно некоррелированные случайные величины. Широкий класс С. р. комплекснозначных случайных функций $X(t)$, $t\in T$, с нулевым средним значением (т. е. таких, что $\mathsf{E}X(t)=0$) может быть представлен в виде

$$X(t)=\int_\Lambda \varphi(t;\ \lambda)\,Z(d\lambda), \qquad (1)$$

где Λ — нек-рое множество с заданной системой «измеримых подмножеств» (т. е. измеримое пространство); $\varphi(t;\lambda)$, $t\in T$, $\lambda\in\Lambda$,— система комплекснозначных функций на T, зависящих от параметра $\lambda\in\Lambda$; $Z(d\lambda)$ — случайная мера на Λ с некоррелированными значениями (так что $\mathsf{E}Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}=0$ для любых двух непересекающихся измеримых подмножеств Δ_1 и Δ_2), а интеграл в правой части (1) можно или определить как предел в среднем квадратичном соответствующей последовательности интегральных сумм Коши ([1]), или же понимать как более общий «интеграл Лебега по мере $Z(d\lambda)$» (о к-ром см., напр., [2]). Согласно общей теореме Карунена о спектральном разложении, для существования С. р. (1) случайной функции $X(t)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая корреляционная функция $B(t, s)=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$ допускала представление в виде

$$B(t, s)=\int_\Lambda \varphi(t;\ \lambda)\,\overline{\varphi(s;\ \lambda)}\,F(d\lambda),$$

где $F(d\lambda)=\mathsf{E}|Z(d\lambda)|^2$ — неотрицательная мера на Λ.

Наиболее известный класс С. р. случайных функций — представления стационарных случайных процессов $X(t)$ в виде интеграла Фурье — Стилтьеса

$$X(t)=\int_\Lambda e^{it\lambda}dZ(\lambda), \qquad (2)$$

где $Z(\lambda)$ — случайная функция λ с некоррелированными приращениями, а Λ — ось $(-\infty, \infty)$ в случае процессов с непрерывным временем t или же интервал $[-\pi, \pi]$, если время t дискретно (принимает целочисленные значения). Существование такого спектрального разложения следует из общей теоремы Хинчина об интегральном представлении корреляционной функции $B(s)=\mathsf{E}X(t+s)\overline{X(t)}$ (см. *Стационарный случайный процесс*); оно показывает, что любой стационарный случайный процесс можно рассматривать как наложение некоррелированных друг с другом гармонич. колебаний различных частот со случайными фазами и амплитудами. С. р. аналогичного вида, но с заменой гармонич. колебаний n-мерными плоскими волнами имеет место и для однородных случайных полей, заданных на евклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ или же на решетке $\mathbb{Z}^n$ точек $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами. В случае обобщенного стационарного случайного процесса — линейного функционала $X(\varphi)$ на пространстве D финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющего условиям

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi)=\mathsf{E}X(\varphi),$$

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi_1)\overline{X(V_a\varphi_2)}=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$$

при всех действительных a, где $V_a\varphi(t)=\varphi(t+a)$ — С. р. Функционал $X(\varphi)$ имеет вид

$$X(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)\,dZ(\lambda), \qquad (3)$$

где

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\varphi(t)\,dt$$

— преобразование Фурье функции $\varphi(t)$. Формула (3) следует из того, что

$$B(\varphi_1, \varphi_2)=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$$

можно представить в виде

$$B(\varphi_1, \varphi_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}_1(\lambda)\,\overline{\tilde{\varphi}_2(\lambda)}\,dF(\lambda),$$

где функция $F(\lambda)=\mathsf{E}|Z(\lambda)-Z(-\infty)|^2$ — монотонно неубывающая спектральная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+\lambda^2)^{-m}\,dF(\lambda)<\infty$$

при нек-ром неотрицательном целом m (см. [3]). Если же в качестве пространства функций $\varphi(t)$ принять некрое пространство целых аналитич. функций, то можно прийти и к обобщенным стационарным случайным процессам $X(\varphi)$ с экспоненциально возрастающей спектральной функцией $F(\lambda)$ (см., напр., [4]).

С. р. специального вида имеют место и для однородных случайных полей на группах G и однородных пространствах S; этот факт в силу теоремы Карунена о С. р. следует из ряда имеющихся результатов об общем виде положительно определенных функций (или ядер — функций двух переменных) на множествах G и S. В ча-

стности, для однородного поля $X(g)$ на произвольной локально компактной коммутативной группе G С. р. поля $X(g)$ имеет вид (1), где роль функций $\varphi(t;\lambda)$ играют характеры $\chi^{(\lambda)}(g)$ группы G, а областью интегрирования Λ является соответствующая группа характеров $\hat{G}$ (см., напр., [5], [6]). С. р. более сложного вида при широких условиях имеют место и для однородных полей на некоммутативных топологич. группах (см. [5]). Наконец, в случае однородных полей на однородных пространствах $S=\{s\}$ С. р. поля $X(s)$ включает сферич. функции пространства S, а в выражение для корреляционной функции $B(s_1, s_2)=\mathsf{E}X(s_1)\overline{X(s_2)}$ входят соответствующие зональные сферич. функции (см. [5], [6]). В частности, общее однородное поле $X(\theta, \varphi)$ на сфере S_2 трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ допускает С. р. вида

$$X(\theta, \varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta, \varphi)\, Z_{l,m}, \qquad (4)$$

где

$$Y_{l,m}=e^{-im\varphi}P_l^m(\cos\theta)$$

— обычные сферич. функции, а случайные величины $Z_{l,m}$ таковы, что $\mathsf{E}Z_{l,m}\overline{Z}_{j,n}=\delta_{lj}\delta_{mn}f_l$, где δ_{lj} — символ Кронекера. Отвечающее формуле (4) выражение для корреляционной функции

$$\mathsf{E}X(\theta_1, \varphi_1)\overline{X(\theta_2, \varphi_2)}=B(\theta_{12}),$$

где θ_{12}— угловое расстояние между точками (θ_1, φ_1) и (θ_2, φ_2), имеет вид

$$B(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}[(2l+1)/2]\, f_l P_l(\cos\theta),$$

где P_l — многочлены Лежандра. Если же $X(r, \varphi)$, где (r, φ) — полярные координаты,— однородное и изотропное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$ (так что $\mathsf{E}X(r_1, \varphi_1)\overline{X(r_2, \varphi_2)}=B(r_{12})$, где r_{12}— евклидово расстояние между точками (r_1, φ_1) и (r_2, φ_2)), то С. р. поля $X(r, \varphi)$ записывается в виде

$$X(r, \varphi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi}\int_0^{\infty} J_k(\lambda r)\, dZ_k(\lambda), \qquad (5)$$

где $J_k(x)$ — функция Бесселя порядка k. Здесь $Z_k(\lambda)$ — случайные функции с некоррелированными приращениями такие, что

$$\mathsf{E}Z_k(\Delta_1)\overline{Z_m(\Delta_2)}=\delta_{km}F(\Delta_1\cap\Delta_2),$$

где

$$Z_k(\Delta)=\int_{\Delta} dZ_k(\lambda),$$

а $F(\Delta)$ — неотрицательная мера на полуоси $[0, \infty)$. С. р. (5) отвечает следующее выражение для корреляционной функции $B(r)$:

$$B(r)=\int_0^{\infty} J_0(\lambda r)\, dF(\lambda).$$

Дальнейшие примеры С. р. однородных полей см. в [5] — [7].

С. р. случайных функций существуют не только для стационарных случайных процессов и однородных случайных полей. Так, напр., если $X(t)$ — произвольный случайный процесс на интервале $a\leqslant t\leqslant b$ с непрерывной по обоим аргументам корреляционной функцией

$$B(t, s)=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)},$$

то в силу теоремы Мерсера теории интегральных уравнений и теоремы Карунена о С. р. процесс $X(t)$ будет допускать С. р. вида

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)\, Z_k/\sqrt{\lambda_k}, \qquad (6)$$

где $\varphi_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, и λ_k, $k=1, 2, \ldots$, — собственные функции и собственные значения интегрального оператора в функциональном пространстве с ядром $B(t, s)$, а $\mathsf{E}Z_k\overline{Z}_j=\delta_{kj}$. С. р. (6) случайного процесса $X(t)$, заданного на конечном интервале, представляет собой континуальный аналог разложения случайного вектора на его главные компоненты, часто используемого в многомерном статистич. анализе; оно было независимо получено целым рядом ученых (об этом см., напр., [5]) и чаще всего наз. разложением Карунена — Лоэва. Подобного рода С. р. широко используются также во многих приложениях, в частности в теории автоматич. управления, где разложение (6) (и нек-рые родственные ему разложения) часто наз. канонич. представлениями случайных процессов (см. [8]), и в геофизике, где обычно используется термин «метод эмпирических ортогональных функций», т. к. собственные функции $\varphi_k(t)$ здесь сами приближенно определяются по эмпирич. данным (см. [9]).

2) Под С. р. случайной функции $X(t)$, $t\in T$, иногда понимают также общее разложение вида (1) по некрой стандартной (достаточно простой) полной системе функций $\varphi(t;\lambda)$. Особенно часто такое С. р. рассматривается в применении к случайному процессу $X(t)$ с непрерывным временем и функциям $\varphi(t;\lambda)=e^{it\lambda}$, так что равенство (1) обращается в (2). Из (2) следует, что $B(t, s)=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$ допускает представление в виде

$$B(t, s)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda t-\mu s)}F(d\lambda\times d\mu), \qquad (7)$$

где $F(d\lambda\times d\mu)$ — комплекснозначная мера на плоскости (λ, μ), задаваемая соотношением

$$F(\Delta_1, \Delta_2)=\mathsf{E}Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)};$$

обратно, из представимости $B(t, s)$ в виде (7) следует и существование С. р. (2) (см., напр., [2]). Случайные процессы, допускающие С. р. (2), где $Z(\lambda)$ не обязательно имеет некоррелированные приращения, наз. гармонизуемыми случайными процессами; комплексная мера $F(d\lambda\times d\mu)$ в таком случае наз. спектральной мерой $X(t)$, а совокупность точек плоскости (λ, μ), не имеющих окрестности нулевой спектральной меры, наз. спектром процесса $X(t)$. Спектр стационарного процесса $X(t)$ сосредоточен на прямой $\lambda=\mu$. Гармонизуемыми при широких условиях будут периодически-коррелированные (иначе, периодически-нестационарные) случайные процессы $X(t)$, обладающие тем свойством, что

$$\mathsf{E}X(t+mT)=\mathsf{E}X(t),$$

$$\mathsf{E}X(t+mT)\overline{X(s+mT)}=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$$

при нек-ром $T>0$ и произвольном целом m; спектр таких процессов сосредоточен на совокупности прямых $\lambda=\mu+2\pi k/T$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ (см., напр., [10]).

Лит.: [1] Karhunen K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math.— Phys.», 1947, № 37, p. 3—79, [2] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291—310; [3] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Onoyama T., «Mem Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A», 1959, v. 13, p. 208—13; [5] Яглом А. М., в кн.: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда, Ленинград, 1961, Л., 1963, с. 250—73; [6] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [7] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [8] Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962; [9] Фортус М. И., «Метеорол. и гидрология», 1980, № 4, с. 113—19; [10] Рытов С. М., Случайные процессы, М., 1976 (Введение в статистическую радиофизику, 2 изд., ч. 1).

А. М. Яглом.

СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОЦЕНКА — функция от наблюденных значений $X(1), \ldots, X(N)$ стационарного случайного процесса с дискретным време-

нем, используемая в качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$. В качестве С. п. о. часто используются квадратичные формы

$$\sum_{s,\,t=1}^{N} b_{s,t}^{(N)}\, X(s)\, X(t),$$

где $b_{s,t}^{(N)}$ — нек-рые комплексные коэффициенты (зависящие от λ). Можно показать, что асимптотич. поведение при $N\to\infty$ первых двух моментов С. п. о. в целом не ухудшится, если рассмотреть лишь подкласс квадратичных форм таких, что $b_{s_1,t_1}^{(N)}=b_{s_2,t_2}^{(N)}$ при $s_1-t_1=s_2-t_2$; это позволяет ограничиться С. п. о. вида

$$\hat{f}_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-N+1}^{N-1} e^{it\lambda} b_N(t)\, B_N(t),$$

где

$$B_N(t)=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N-|t|} X(s)\, X(s+|t|)$$

есть выборочная оценка ковариационной функции стационарного процесса $X(t)$. Оценку $\hat{f}_N(\lambda)$ можно представить также в виде

$$\hat{f}_N(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_N(x)\, I_N(x+\lambda)\, dx,$$

где $I_N(x)$ — *периодограмма*, а $\Phi_N(x)$ — нек-рая непрерывная четная функция, определяемая своими коэффициентами Фурье

$$b_N(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_N(x)\, e^{itx}\, dx,\quad t=-N+1,\ \ldots,\ N-1.$$

Функцию $\Phi_N(x)$ наз. *спектральным окном*; обычно рассматривают спектральные окна вида

$$\Phi_N(x)=A_N\Phi(A_N x),$$

где $\Phi(x)$ — нек-рая непрерывная на $(-\infty,\ \infty)$ функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\, dx=1,$$

а $A_N\to\infty$ при $N\to\infty$, но $A_N N^{-1}\to 0$. Аналогично рассматривают коэффициенты $b_N(t)$ вида

$$b_N(t)=K\left(A_N^{-1}t\right)$$

и функцию $K(x)$, называемую ковариационным окном. При достаточно слабых ограничениях на гладкость спектральной плотности $f(\lambda)$ или на условия перемешивания случайного процесса $X(t)$ для широкого класса спектральных или ковариационных окон оценка $\hat{f}_N(\lambda)$ оказывается асимптотически несмещенной и состоятельной.

В случае многомерного случайного процесса для оценки элементов матрицы спектральных плотностей $f_{k,l}(\lambda)$ поступают аналогичным образом, используя соответствующие периодограммы $I_N^{(k,\,l)}(\lambda)$. Вместо С. п. о. в виде квадратичных форм от наблюдений часто также предполагают, что спектральная плотность имеет нек-рую заданную форму, зависящую от конечного числа параметров, и затем разыскивают зависящие от наблюдений оценки параметров, содержащихся в выражении для спектральной плотности (см. *Спектральная оценка максимальной энтропии*, *Спектральная оценка параметрическая*).

Лит.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976.

И. Г. Журбенко.

СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОЦЕНКА — функция от наблюденных значений $X(1),\ \ldots,\ X(N)$ стационарного случайного процесса с дискретным временем, используемая в качестве оценки спектральной функции $F(\lambda)$. В качестве С. ф. о. часто используется функция вида

$$F_N(\lambda)=\frac{2\pi}{N}\sum_{-\pi\leqslant\frac{2\pi k}{N}\leqslant\lambda} I_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right),$$

где $I_N(x)$ — *периодограмма*. При достаточно широких условиях гладкости $F(\lambda)$ или условиях перемешивания случайного процесса $X(t)$ эта оценка оказывается асимптотически несмещенной и состоятельной.

Приведенная оценка $F(\lambda)$ является частным случаем оценок

$$\frac{2\pi}{N}\sum_{-\pi\leqslant\frac{2\pi k}{N}\leqslant\pi} A\left(\frac{2\pi k}{N}\right) I_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

функционала

$$I(A)=\int_{-\pi}^{\pi} A(x)\, f(x)\, dx$$

от спектральной плотности $f(\lambda)$. В частности, к этому виду с функцией $A(x)$, зависящей от длины выборки N и концентрирующейся около точки $x=\lambda$, сводятся многие *спектральной плотности оценки*.

Лит.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

И. Г. Журбенко.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ — обратный предел

$$\check{H}_n(X;\ G)=\varprojlim H_n(\alpha;\ G)$$

групп гомологий с коэффициентами в абелевой группе G нервов открытых покрытий α топологич. пространства X (они наз. также гомологиями Чеха, или Александрова — Чеха). Для замкнутого множества $A\subset X$ группы $\check{H}_n(A;\ G)$ могут быть определены аналогичным образом с помощью подсистем $\alpha'\subset\alpha$ всех тех множеств из α, к-рые имеют непустое пересечение с A. Обратный предел групп пар $H_n(\alpha,\ \alpha';\ G)$ наз. группой С. г. $\check{H}_n(X,\ A;\ G)$ пары $(X,\ A)$.

Поскольку функтор обратного предела не сохраняет точность, гомологич. последовательность пары $(X,\ A)$ в общем случае не точна. Она полуточна в том смысле, что композиция любых двух отображений равна нулю. Для компактных X последовательность оказывается точной в случае, когда G — компактная группа или поле (в более общей ситуации — когда группа G алгебраически компактна). С. г. непрерывны в том смысле, что

$$\check{H}_n(\varprojlim X_\lambda;\ G)=\varprojlim \check{H}_n(X_\lambda,\ G).$$

Отсутствие точности — не единственный недостаток С. г. Группы $\check{H}_n$ оказываются неаддитивными в том смысле, что гомологии дискретного объединения $X=\bigcup_\lambda X_\lambda$ могут отличаться от прямой суммы $\sum_\lambda \check{H}_n(X_\lambda;\ G)$. От этого недостатка свободны спектральные гомологии $\check{H}_n^C(X;\ G)$ с компактными носителями, определяемые как прямой предел $\varinjlim \check{H}_n(C;\ G)$, взятый по всем компактным подмножествам $C\subset X$. Естественность функтора $\check{H}_n^C$ подтверждается также тем, что любые обычные гомологии (симплициальные, клеточные, сингулярные) — это гомологии с компактными носителями.

Несовпадение функторов $\check{H}_n$ и $\check{H}_n^C$ — один из примеров того, как гомологии реагируют на логич. нюансы в их исходном определении (наоборот, когомологии проявляют в этом отношении значительную устойчивость). Среди логически возможных вариантов определения гомологий в общих категориях топологич. пространств правильный был отобран не сразу, в связи

с чем ассоциированная с когомологиями Александрова — Чеха теория гомологий H^C_* стала распространяться лишь в 60-е гг. (хотя первые определения были даны в 40—50-х гг.). Теория H^C_* удовлетворяет всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам* (и является теорией с компактными носителями). Для компактных X имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^1 H_{n+1}(\alpha;\ G) \longrightarrow H_n(X,\ G) \longrightarrow \check{H}(X;\ G) \longrightarrow 0$$

($\varprojlim^1$ — производный функтор обратного предела). В общем случае имеется эпиморфизм $H^C_n(X; G) \to \check{H}^C_n(X; G)$, к-рый имеет нулевое ядро для любой алгебраически компактной группы G. Для любого гомологически локально связного (по отношению к H^C_*) локально компактного пространства функторы $\check{H}_n$, $\check{H}^C_n$ и H^C_n изоморфны.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [3] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981. *Е. Г. Скляренко.*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — исследование спектральных характеристик линейных операторов: геометрии спектра и его основных частей, спектральной кратности, асимптотики собственных значений и т. д.

Для операторов, действующих в конечномерных пространствах, задача определения спектра эквивалентна задаче локализации корней характеристич. уравнения $\det(A-\lambda I)=0$; в бесконечномерных пространствах дело обстоит значительно сложнее, хотя аппарат определителей строится и успешно используется в С. а. некрых бесконечномерных операторов. В ряде случаев С. а. оператора основывается на явной конструкции функционального исчисления (операторы умножения в функциональных пространствах, другие модельные операторы, а также операторы, подобные их сужениям или факторам). Широко применяются в С. а. различные теоремы об отображении спектра для функций одного или нескольких операторов — от простейших (спектр многочлена от оператора состоит из значений этого многочлена на спектре оператора, спектр суммы двух коммутирующих операторов содержится в алгебраич. сумме их спектров) до весьма тонких, описывающих спектры функций от некоммутирующих операторов, функций от оператора, имеющих разрывы в граничных точках его спектра, совместные спектры образов многозначных отображений, отображения аппроксимативных, точечных и дефектных спектров и т. д. Полезную информацию о спектре оператора можно извлечь из его топологич. характеристик (напр., спектр непрерывного оператора компактен, а спектр компактного — не более чем счетен, причем его ненулевые точки — изолированные собственные значения), поведения относительно выделенного в пространстве конуса (ведущие собственные значения у положительного оператора) или скалярного произведения (спектр самосопряженного оператора веществен, эрмитово положительного — неотрицателен, диссипативного — лежит в верхней полуплоскости, унитарного — на единичной окружности). Если скалярное произведение не является знакоопределенным, но его индекс индефинитности $\varkappa$ конечен, то спектр сохраняющего его оператора (такие операторы наз. J-унитарными) может иметь не более $2\varkappa$ точек вне единичной окружности; для J-самосопряженных и J-диссипативных операторов положение аналогично (см. [5]).

Спектральные характеристики могут обладать определенными свойствами устойчивости (непрерывности); эти свойства являются объектом теории возмущений спектра (раздел общей теории возмущений). Так, спектр является полунепрерывной сверху функцией оператора: любая окрестность спектра ограниченного оператора содержит спектры всех достаточно близких к нему операторов (случай неограниченных операторов требует небольшой модификации). Это позволяет проследить за изменением изолированных точек спектра при малых возмущениях и аналитически (в виде ряда по степеням параметра μ) выразить собственные значения оператора $A+\mu B$, лежащие в окрестности изолированного конечнократного собственного значения оператора A. В нек-рых случаях удается также оценить изменение числа собственных значений оператора в заданной области под действием возмущения, к-рое не предполагается малым по норме, но имеет фиксированный (конечный) ранг. В том же круге идей лежит теорема Вейля (H. Weyl, 1909) об инвариантности спектра сгущения (дополнение в спектре к множеству изолированных собственных значений конечной кратности) самосопряженного оператора при компактных возмущениях. Фактически им показано, что спектр сгущения самосопряженного оператора A совпадает с его существенным спектром

$$\sigma_l(A)=\{\lambda \in \mathbf{C}: A-\lambda I \text{ не фредгольмов}\},$$

а равенство $\sigma_l(A+K)=\sigma_l(A)$ справедливо для любого замкнутого A и компактного K. Из теоремы Вейля следует, что все самосопряженные расширения симметрического оператора с конечными (и равными) дефектными числами имеют одинаковые существенные спектры. Теорема Вейля переносится на случай относительно компактных возмущений (оператор K наз. компактным относительно A, если он переводит всякое ограниченное множество с ограниченным A-образом в компактное), откуда следует совпадение существенных спектров всех самосопряженных расширений симметричных многомерных дифференциальных операторов широкого класса. Теорема Вейля допускает обращение (Дж. Нейман, J. Neumann, 1935): если два самосопряженных оператора имеют одинаковые существенные спектры, то один из них унитарно эквивалентен возмущению другого компактным (даже принадлежащим классу Гильберта — Шмидта) оператором, имеющим произвольно малую норму. Найдены обобщения этого результата на случай нормальных, существенно нормальных операторов, а также на представления некоммутативных C^*-*алгебр*.

Теорема Вейля — Неймана показывает, что существенный спектр — единственная спектральная характеристика самосопряженного оператора, устойчивая относительно компактных возмущений, и что непрерывный и точечный спектры крайне неустойчивы. В то же время абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(A)$ (спектр сужения A на подпространство $H_{ac}(A)$ всех векторов $x \in H$, для к-рых функция $\lambda \to (E_A(\lambda)\,x,\ x)$ абсолютно непрерывна) также обладает нек-рой устойчивостью: он не меняется при ядерных возмущениях. Это один из основных результатов теории волновых операторов, тесно связанный с квантовомеханич. теорией рассеяния (см. [2]). Волновой оператор $W(A,\ B)$ для пары самосопряженных операторов A, B — это изометрическое линейное отображение

$$x \longrightarrow \lim_{t \to \infty} \exp(itB)\exp(-itA)\,x,$$

определенное на замкнутом подпространстве $\Sigma(A,\ B)$ всех векторов $x \in H$, для к-рых предел существует. Соотношения $W(A,\ B)\ A=B\,W(A,\ B)$ и $W(A,\ B)\Sigma(A,\ B)=\Sigma(B,\ A)$ показывают, что $W(A,\ B)$ осуществляет унитарную эквивалентность операторов A, B, если $\Sigma(A,\ B)=\Sigma(B,\ A)=H$. Условие ядерности оператора $B-A$ влечет включения $H_{ac}(A) \subset \Sigma(A,\ B)$, $H_{ac}(B) \subset \Sigma(B,\ A)$, а следовательно,— унитарную эквивалентность абсолютно непрерывных частей операторов A и B,

обеспечивающую тождественность спектральных характеристик.

Существует иной подход к задаче доказательства унитарной эквивалентности (в случае несамосопряженных операторов — подобия) возмущенного оператора невозмущенному. При этом подходе записывают условия подобия операторов A и $A+K$ в виде линейного операторного уравнения $AV-VA=VK$; ищут линейный оператор Γ, обратный слева к оператору умножения $X\to AX-XA$, т. е. $A\Gamma(X)-\Gamma(X)A=X$, для к-рого оператор $\Gamma_K: X\to\Gamma(XK)$ является сжатием в пространстве операторов. Если такой оператор Γ найти удается, то в качестве V можно взять оператор $(I+\Gamma_K)^{-1}I$, проверив предварительно его обратимость. Этим методом удается исследовать широкий класс нормальных операторов с дискретным и непрерывным спектром, квазинильпотентных операторов, операторов взвешенного сдвига и, что особенно важно для приложений, многомерных интегро-дифференциальных операторов.

С. а. операторов, порожденных аналитич. (дифференциальными, интегральными, разностными и т. д.) операциями в функциональных пространствах, предполагает описание спектра операторов в терминах параметров (коэффициентов) соответствующей операции; широкая применимость теории возмущений в таких задачах объясняется тем, что выделить главную часть и возмущение часто удается в тех же терминах (перераспределяя коэффициенты). Напр., пусть $A_q(G)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$, q — вещественный потенциал, т. е. числовая функция на G) — оператор Шрёдингера, определяемый в $L^2(G)$ дифференциальной операцией $l_q(u)=-\Delta u+qu$ и наиболее жесткими граничными условиями (минимальный оператор). В этом случае $A_q(G)$ симметричен. Естественно считать $-\Delta$ (точнее, $A_0(G)$) невозмущенным оператором, а умножение на q — возмущением; такое представление дает полезные следствия, когда потенциал в каком-то смысле мал. Так, если $q(M)\to 0$ при $G\ni M\to\infty$, то теорема Вейля обеспечивает совпадение существенных спектров операторов A_q и A_0 (совпадающих с существенным спектром их самосопряженных расширений); если область G «достаточно велика» и потенциал квадратично интегрируем, то $\sigma_l(A_q)\supset[0,\ \infty)$, а если к тому же величина

$$\sum_{|j|\leqslant n+1}\int_G(1+r^2)\,|\,\partial^j q\,|\,dV$$

достаточно мала, то A_q и A_0 унитарно эквивалентны. В других случаях в качестве невозмущенного оператора берется $A_{\tilde q}$, где потенциал $\tilde q$ «близок» к q, но имеет более простую структуру. Это позволяет доказать, напр., что в интервале $(-\infty, a)$ спектр самосопряженных расширений оператора A_q конечен, если $\varliminf q(M)\to a$ при $M\to\infty$ (в частности, A_q полуограничен и имеет дискретный спектр, если $q(M)\to\infty$ при $G\ni M\to\infty$).

В С. а. симметрических дифференциальных операторов (в особенности одномерных) распространен также подход, основанный не на теории возмущений спектра, а на специальной форме теоремы о спектральном разложении. Унитарное преобразование, осуществляющее спектральное представление дифференциального оператора, может быть реализовано (в простейшем случае оператора с циклическим вектором) интегральным оператором

$$Uf(\lambda)=\int_G u(x,\ \lambda)\,f(x)\,dx,$$

ядро к-рого $u(x,\lambda)$ при любом λ является решением дифференциального уравнения $l(y)=\lambda y$, где l — исходная дифференциальная операция. Это позволяет использовать для С. а. дифференциальных операторов качественную теорию дифференциальных уравнений и приводит не только к описанию геометрии спектра (здесь возможности данного подхода примерно соответствуют, а в многомерном случае даже уступают возможностям теории возмущений), но и к удобным аналитич. выражениям для спектральных характеристик, тонким результатам о сходимости спектральных разложений и т. д.

Функции $u(x,\lambda)$, по к-рым ведется спектральное разложение дифференциального оператора, не являются, в случае непрерывного спектра, его собственными функциями, поскольку они не принадлежат $L^2(G)$. Абстрактный вариант разложения по «обобщенным собственным функциям» строится в рамках теории оснащенных гильбертовых пространств (см. [4]). Оснащенное гильбертово пространство — это тройка $\Phi\subset H\subset\Phi'$, где H — гильбертово пространство, Φ — непрерывно вложенное в H топологическое векторное пространство, Φ' — сопряженное к Φ. Элемент $f\in\Phi'$ наз. обобщенным собственным вектором оператора A, действующего в H, если $A\Phi\subset\Phi$ и $f(Ax-\lambda x)=0$ для всех $x\in\Phi$ (λ — соответствующее собственное значение). Для каждого самосопряженного оператора A можно таким образом выбрать оснащение, чтобы система обобщенных собственных векторов $\{f_\lambda:\lambda\in\sigma(A)\}$ оператора A была полна в следующем смысле: для любого $x\in\Phi$

$$\|x\|=\int_{\sigma(A)}|\,f_\lambda(x)\,|^2\,d\rho(\lambda),$$

где ρ — нек-рая мера на $\sigma(A)$. Если оператор A имеет циклич. вектор x_0, то в качестве меры ρ можно брать $(E_A(\cdot)x,\ x)$, где E_A — спектральная мера A; при этом $f_\lambda=\frac{dP_\lambda x_0}{d\rho(-\infty,\lambda)}$ (предел берется в топологии пространства Φ').

Для операторов с точечным спектром первостепенную важность имеет вопрос об асимптотике собственных значений; в случае самосопряженного оператора несколько проще описывать асимптотич. поведение функции $N(\lambda)$, равной числу собственных значений, меньших λ, или, что то же, размерности спектрального подпространства, соответствующего интервалу $(-\infty,\lambda)$. Наиболее известный результат: для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ функция $N(\lambda)$ асимптотически равна $r_n(2\pi)^{-n}|\Omega|\lambda^{n/2}$, где $|\Omega|$ — объем области Ω, а r_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2 — Спектральная теория, М., 1966; ч. 3 — Спектральные операторы, М., 1974; [2] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [3] Глазман И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963; [4] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [5] Иохвидов И. С., Крейн М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1956, т. 5, с. 367—432; [6] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., Итоги науки и техники. Математич. анализ, т. 14, М., 1977, с. 5—58.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ стационарных случайных процессов, С. а. временных рядов, — 1) то же, что и *спектральное разложение* стационарных случайных процессов; 2) совокупность статистич. приемов, позволяющих оценить значение спектральной плотности стационарного случайного процесса по данным наблюдений за одной реализацией этого процесса (см. [1] — [4], а также *Статистические задачи* теории случайных процессов, *Периодограмма*, *Спектральной плотности оценка*, *Спектральная оценка максимальной энтропии*, *Спектральная оценка параметрическая*).

Лит.: [1] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1—2, М., 1971—72; [2] Modern spectrum analysis, N. Y., 1978; [3] Nonlinear methods of spectral analysis, B.— [a. o.], 1979; [4] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектроники», 1981, т. 69, № 11, с. 5—51.

А. М. Яглом.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — ограниченный линейный оператор A, отображающий банахово пространство X в себя и такой, что для σ-алгебры $\mathcal{B}$ борелевских множеств δ на плоскости существует *разложение единицы* $E(\delta)$ со свойствами: 1) для любого $\delta\in\mathcal{B}$ проектор $E(\delta)$ приводит A, т. е. $E(\delta)A=AE(\delta)$, и спектр $\sigma(A_\delta)$ лежит в $\bar{\delta}$, где A_δ — сужение оператора A на инвариантное подпространство $E(\delta)X$; 2) отображение $\delta\to E(\delta)$ есть гомоморфизм $\mathcal{B}=\{\delta\}$ в булеву алгебру $\{E(\delta)\}$; 3) все проекторы $E(\delta)$ ограничены, т. е. $\|E(\delta)\|\leqslant M$, $\delta\in\mathcal{B}$; 4) разложение единицы $E(\delta)$ счетно аддитивно в сильной топологии пространства X, т. е. для любого $x\in X$ и любой последовательности $\{\delta_n\}\subset\mathcal{B}$, состоящей из попарно непересекающихся множеств,

$$E\Big(\bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty}\delta_n\Big)x=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}E(\delta_n)x.$$

Понятие С. о. можно распространить на неограниченные замкнутые операторы. При этом в 1) надо дополнительно потребовать, чтобы выполнялось включение $E(\delta)D(A)\subset D(A)$, где $D(A)$ — область определения оператора A, и $E(\delta)X\subset D(A)$ для ограниченных δ.

С. о. являются все линейные операторы в конечномерном пространстве, самосопряженные и нормальные операторы в гильбертовом пространстве, напр. оператор

$$Ax(t)=tx+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ s)\,x(s)\,ds$$

в $L_p(-\infty,\ \infty)$, $1<p<\infty$, на

$$D(A)=\Big\{x(t)\ \Big|\ \int_{-\infty}^{\infty}|\,tx(t)\,|^2\,dt<\infty,$$

если ядро $K(t,\ s)$ есть преобразование Фурье борелевской меры μ на плоскости с полной вариацией $\operatorname{var}\mu<1/2\pi$ и такое, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ s)\,x(s)\,ds,\ \int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ s)\,x(t)\,dt$$

суть ограниченные линейные операторы в $L_p(-\infty,\ \infty)$.

С. о. обладают рядом важных свойств, напр.:

$$\lambda\in\delta(A)\Leftrightarrow\exists\,\{x_n\}\subset X,\ \|x_n\|=1,\ (A-\lambda I)\,x_n\longrightarrow 0;$$

в случае сепарабельного X точечный и остаточный спектры A не более чем счетны и др.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 3— Спектральные операторы, пер. с англ., М., 1974; [2] Данфорд Н., «Математика», 1960, т. 4, в. 1, с. 53—100.

В. И. Соболев.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС элемента банаховой алгебры — радиус ρ наименьшего круга на плоскости, содержащего спектр этого элемента. С. р. элемента a связан с нормами его степеней формулой

$$\rho(a)=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}=\inf\|a^n\|^{1/n},$$

из к-рой следует, в частности, что $\rho(a)\leqslant\|a\|$. С. р. ограниченного оператора в банаховом пространстве — это его С. р. как элемента банаховой алгебры всех операторов. В гильбертовом пространстве С. р. оператора равен точной нижней грани норм подобных ему операторов (см. [2]):

$$\rho(A)=\inf_X\|XAX^{-1}\|.$$

Если оператор нормален, то $\rho(A)=\|A\|$.

С. р.— полунепрерывная сверху (но, вообще говоря, не непрерывная) функция элемента банаховой алгебры. Доказана [3] субгармоничность С. р. (это означает, что если $z\to h(z)$ — голоморфное отображение нек-рой области $D\subset\mathbb{C}$ в банахову алгебру $\mathfrak{A}$, то $z\to\rho(h(z))$ — субгармонич. функция).

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Халмош П., Гильбертово пространство в задачах, пер. с англ., М., 1970; [3] Vesentini E., «Boll. Un. Mat. Ital.», 1968, v. 1, p. 427—29; [4] Ptak V., «Bull. London Math. Soc.», 1970, v. 2, p. 327—34.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СЕМИИНВАРИАНТ — одна из характеристик стационарного случайного процесса. Пусть $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, — действительный стационарный случайный процесс, для к-рого $\mathsf{E}|X(t)|^n\leqslant C<\infty$. Семиинварианты этого процесса

$$S^{(n)}(t_1\ldots t_n)=$$

$$=\frac{i^{-n}\,\partial^n}{\partial u_1\ldots\partial u_n}\ln\mathsf{E}\,e^{i(u_1X(t_1)+\ldots+u_nX(t_n))}\Big|_{u_1=\ldots u_n=0}$$

связаны с моментами

$$M^{(n)}(t_1\ldots t_n)=\mathsf{E}\{X(t_1)\ldots X(t_n)\}$$

соотношениями

$$S^{(n)}(I)=\sum\nolimits_{\bigcup_{p=1}^{q}I_p=I}(-1)^{q-1}(q-1)!\prod\nolimits_{p=1}^{q}M^{(p)}(I_p),$$

$$M^{(n)}(I)=\sum\nolimits_{\bigcup_{p=1}^{q}I_p=I}\prod\nolimits_{p=1}^{q}S^{(p)}(I_p),$$

где

$$I=(t_1\ldots t_n),\ I_p=(t_{i_1}\ldots t_{i_p})\subseteq I$$

и суммирование ведется по всем разбиениям множества I на непересекающиеся подмножества I_p. Говорят, что $X(t)\in\Phi^{(n)}$, если для всех $1\leqslant k\leqslant n$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ существует мера $M^{(k)}(\Delta)$ ограниченной вариации такая, что для всех $t_1\ldots t_k$

$$M^{(k)}(t_1\ldots t_k)=\int_{\mathbb{R}^k}e^{i(t_1\lambda_1+\ldots+t_k\lambda_k)}\,M^{(k)}(d\lambda_1\ldots d\lambda_k)=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^k}e^{i(t,\,\lambda)}\,M^{(k)}(d\lambda).$$

Меру $F^{(n)}$, определенную на системе борелевских множеств, наз. спектральным семиинвариантом, если для всех $t_1\ldots t_n$

$$S^{(n)}(t_1\ldots t_n)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(t,\,\lambda)}F^{(n)}(d\lambda).$$

Мера $F^{(n)}$ существует и имеет ограниченную вариацию, если $X(t)\in\Phi^{(n)}$. В случае стационарного процесса $X(t)$ семиинварианты $S^{(n)}(t_1\ldots t_n)$ инвариантны относительно сдвигов:

$$S^{(n)}(t_1+\tau,\ \ldots,\ t_n+\tau)=S^{(n)}(t_1\ldots t_n),$$

а спектральные меры $F^{(n)}$ и $M^{(n)}$ сосредоточены на многообразии $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=0$. Если мера $F^{(n)}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на этом многообразии, то существует спектральная плотность n-го порядка $f_n(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-1})$, определяемая равенствами

$$S^{(n)}(t_1\ldots t_n)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i(\lambda_1(t_2-t_1)+\ldots+\lambda_{n-1}(t_n-t_1))}\times$$

$$\times f_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})\,d\lambda,$$

верными при всех $t_1\ldots t_n$. В случае дискретного времени под $\mathbb{R}^{(k)}$ во всех приведенных выше формулах надо понимать k-мерный куб $-\pi\leqslant\lambda_1\leqslant\pi$, $1\leqslant i\leqslant k$.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Леонов В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964.

И. Г. Журбенко.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ — восстановление инвариантных подпространств семейства линейных операторов по содержащимся в них собственным или корневым подпространствам этого семейства. Точнее, пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативное семейство операторов в топологическом векторном пространстве X, $\sigma_p(\mathfrak{A})$ — его точечный спектр, т. е. совокупность числовых функ-

ций $\lambda=\lambda(A)$ на $\mathfrak{A}$, для к-рых собственные подпространства

$$N_{\mathfrak{A}}(\lambda)=\bigcap_{A\in\mathfrak{A}}\operatorname{Ker}(A-\lambda(A)I)$$

отличны от нулевого,

$$K_{\mathfrak{A}}(\lambda)=\bigcap_{A\in\mathfrak{A}}\bigcup_{n\in N}\operatorname{Ker}(A-\lambda(A)I)^n—$$

корневые подпространства, соответствующие точкам $\lambda\in\sigma_p(\mathfrak{A})$. Подпространство $L\subset X$, инвариантное относительно $\mathfrak{A}$, допускает С. с., если L совпадает с замыканием содержащихся в нем корневых подпространств. Если все $\mathfrak{A}$-инвариантные подпространства допускают С. с., то говорят, что само семейство $\mathfrak{A}$ допускает С. с.

Примером семейства, допускающего С. с., является всякая компактная коммутативная группа операторов в банаховом пространстве и, более общо, всякая группа с относительно компактными траекториями. Если $\dim X<\infty$, то всякое одноэлементное семейство допускает С. с. ввиду существования жорданова разложения. В общем случае, для того чтобы оператор допускал С. с., необходимо, по крайней мере, потребовать, чтобы все пространство X допускало С. с. относительно A, т. е. чтобы A имел полную систему корневых подпространств. Условие полноты, однако, не обеспечивает возможности С. с. даже для нормальных операторов в гильбертовом пространстве; для того чтобы нормальный оператор A допускал С. с., необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_p(A)$ не содержал носителя меры, ортогональной многочленам. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда для любой области $G\subset\mathbb{C}$ найдется функция f, аналитическая в G, для к-рой

$$\sup_{z\in G}|f(z)|<\sup_{z\in G\cap\sigma_p(A)}|f(z)|.$$

В частности, полные унитарные и полные самосопряженные операторы допускают С. с. Допускают С. с. и полные операторы, «близкие» к унитарным или самосопряженным (диссипативные операторы с ядерной мнимой компонентой, операторы со спектром на окружности и нормальным ростом резольвенты при приближении к этой окружности).

Полнота системы корневых подпространств не обеспечивает С. с. инвариантных подпространств и при дополнительном условии компактности оператора: сужение полного компактного оператора на инвариантное подпространство не обязано иметь собственных векторов и, более того, может совпадать с любым наперед заданным компактным оператором.

В круг задач С. с. инвариантных подпространств входит, кроме выяснения возможности аппроксимации этих элементов линейными комбинациями корневых векторов, также построение и оценка скорости сходимости аппроксимирующей последовательности. В случае операторов со счетным спектром аппроксимирующая последовательность обычно строится усреднением последовательности частичных сумм формального ряда Фурье $x\sim\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)}\varepsilon_\lambda x$, где ε_λ — проектор Рисса:

$$\varepsilon_\lambda x=(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_\lambda}(z-A)^{-1}\,dz,$$

Γ_λ — контур, определяющий точку $\lambda\in\sigma_p(A)$ от остального спектра.

Если пространство X состоит из функций на локально компактной абелевой группе, а $\mathfrak{A}$ совпадает с семейством всех операторов сдвига, то собственные относительно $\mathfrak{A}$ подпространства — это одномерные подпространства, порожденные характерами группы. Таким образом, теория С. с. инвариантных подпространств включает классич. задачи гармонич. синтеза на локально компактной абелевой группе (см. *Гармонический анализ абстрактный*), состоящие в нахождении условий, при к-рых инвариантные относительно сдвигов подпространства в нек-ром топологическом векторном пространстве функций на группе порождаются содержащимися в них характерами. В частности, возможность С. с. на компактных группах или, более общо, в пространствах почти периодических функций на группах является следствием сформулированного выше результата о С. с. для групп операторов с относительно компактными траекториями. Далее, проблематика С. с. тесно связана и с задачами синтеза идеалов в регулярных коммутативных банаховых алгебрах: замкнутый идеал является пересечением максимальных («допускает синтез») тогда и только тогда, когда его аннулятор в сопряженном пространстве допускает С. с. относительно семейства операторов, сопряженных к операторам умножения на элементы алгебры.

Приведенное определение С. с. можно расширить таким образом, чтобы оно охватывало и семейства операторов без обширного точечного спектра (и даже некоммутативные). Для этого его заменяют требованием взаимной однозначности соответствия между инвариантными подпространствами и спектральными характеристиками сужений данного семейства операторов на эти подпространства. В этом смысле говорят о С. с. для модулей над регулярными коммутативными банаховыми алгебрами, для представлений локально компактной абелевой группы.

Лит.: [1] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1—2, М., 1975; [2] Никольский Н. К., в кн.: Итоги науки и техники. Математич. анализ, т. 12, М., 1974, с. 199—412; [3] Benedetto J., Spectral synthesis, N. Y., 1975. *В. С. Шульман.*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ТИП меры, тип Хеллингера, — содержащий эту меру класс эквивалентности по отношению к взаимной абсолютной непрерывности во множестве всех неотрицательных мер на данной σ-алгебре. Множество С. т. с отношением порядка, индуцированным отношением абсолютной непрерывности мер, является полной дистрибутивной структурой, в к-рой всякое счетное подмножество ограничено.

Теория С. т. используется для построения системы унитарных инвариантов нормальных операторов. Пусть A — произвольный нормальный оператор в пространстве H, $E_A(\cdot)$ — соответствующая спектральная мера на плоскости; спектральным типом $\sigma_A(x)$ вектора $x\in H$ наз. спектральный тип меры $(E_A(\cdot)x,\ x)$. Все С. т. вида $\sigma_A(x)$ наз. подчиненными оператору A. Если H сепарабельно, то среди С. т., подчиненных A, есть максимальный; в частности, все циклические нормальные операторы имеют максимальный С. т. Оказывается, что циклический нормальный оператор определяется своим максимальным С. т. с точностью до унитарной эквивалентности. В общем случае система унитарных инвариантов включает кратности однородных компонент максимального С. т.

Лит.: [1] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [2] Dixmier J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, 2 éd., P., 1969. *В. С. Шульман.*

СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ ТОЧКИ x топологического пространства X — точка $y\in X$, для к-рой выполняется включение $y\in\overline{\{x\}}$ (что эквивалентно включению $\overline{\{y\}}\subset\overline{\{x\}}$). Точка x наз. общей, если любая точка пространства X является ее специализацией, т. е. $\overline{\{x\}}=X$. Другой крайний случай — замкнутая точка — точка, у к-рой имеется единственная специализация, совпадающая с ней самой.

Для аффинной схемы $\operatorname{Spec}(A)$ кольца A точка y является С. т. x, если для соответствующих простых идеалов из A справедливо включение $p_x\subset p_y$. Когда A — кольцо без делителей нуля, точка $\{0\}\in\operatorname{Spec}A$ является общей. Можно представлять себе, что отноше-

ние специализации распределяет точки по уровням: выше всех находятся замкнутые точки, на следующем уровне — точки, специализации к-рых замкнуты, на i-м уровне — точки, специализации к-рых принадлежат уровням с номерами $\leqslant i-1$. Напр., для Spec $(\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n])$ имеется $n+1$ уровень: замкнутые точки, общие точки кривых, общие точки поверхностей, ..., общая точка n-мерного аффинного пространства.

Лит.: [1] Манин Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии, М., 1970; [2] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, t. 1, P., 1960. *В. В. Шокуров.*

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА степени n над кольцом R — подгруппа $SL(n, R)$ полной линейной группы $GL(n, R)$, являющаяся ядром гомоморфизма (т. н. определителя) $\det_n$. Строение группы $SL(n, R)$ зависит от кольца R, степени n и типа определителя, заданного на $GL(n, R)$. Существуют три основных типа определителя, относительно к-рого рассматриваются группы $SL(n, R)$: обычный определитель в случае, когда R — коммутативное кольцо, некоммутативный определитель Дьёдонне, если R — тело (см. [1]), и гомоморфизм приведенной нормы — для конечномерных над своим центром тел R (см. [2]).

С группой $SL(n, R)$ обычно связывают следующие группы: группу $E(n, R)$, порожденную элементарными матрицами e_{ij}^{λ} (см. *Алгебраическая K-теория*), а также для каждого двустороннего идеала q кольца R конгруэнц-подгруппу $SL(n, R, q)$ и группу $E(n, R, q)$ — нормальный делитель $E(n, R)$, порожденный матрицами e_{ij}^{λ} для $\lambda \in q$. Пусть $A \in E(n, R, q)$, $A \to \left\|\begin{matrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$, — вложение $E(n, R, q)$ в $E(n+1, R, q)$. Тогда переход к прямому пределу приводит к группе $E(R, q)$. Аналогично определяется группа $SL(R, q)$. Для $q=R$ вместо $E(R, R)$ и $SL(R, R)$ пишут соответственно $E(R)$ и $SL(R)$; последняя группа наз. стабильной специальной линейной группой кольца R. Нормальное строение $SL(R)$, тесно связанное со строением групп $SL(n, R)$, таково. Группа H является нормальным делителем $SL(R)$ тогда и только тогда, когда для нек-рого (причем единственного) двустороннего идеала q кольца R имеют место включения

$$E(R, q) \subset H \subset SL(R, q).$$

Таким образом, абелевы группы $SK_1(R, q) = SL(R, q)/E(R, q)$ классифицируют нормальные делители $SL(R)$. Группа $SK_1(R) = SK_1(R, R)$ наз. приведенной группой Уайтхеда кольца R. Удовлетворительное описание нормального строения группы $SL(n, R)$ в случае произвольного кольца R связано с условием стабильности ранга идеала q (*st. r. q*). Именно, если $n \geqslant st.r.q + 1$, то имеет место изоморфизм

$$SL(n, R, q)/E(n, R, q) \simeq SK_1(R, q).$$

Кроме того, если выполнено условие $n \geqslant st.r.R+1$, $n \geqslant 3$, то для всякого нормального делителя H группы $SL(n, R)$ при подходящем q имеют место включения

$$E(n, R, q) \subset H \subset SL'(n, R, q),$$

где $SL'(n, R, q) = GL'(n, R, q) \cap SL(n, R)$, $CL'(n, R, q)$ — прообраз центра группы $GL(n, R/q)$ в $GL(n, R)$. Для специальных колец имеются окончательные результаты (см., напр., [2], [4]).

В случае некоммутативного определителя Дьёдонне результаты имеют исчерпывающий характер. Группы $SL(n, R)$ и $E(n, R)$ совпадают. $SL(n, R)$ — коммутант группы $GL(n, R)$, за исключением случая $SL(2, F_2)$ (F_q — поле из q элементов). Центр Z_n группы $SL(n, R)$ состоит из скалярных матриц $\mathrm{diag}(\alpha, \ldots, \alpha)$, где α — элемент центра R и $\alpha^n \in [R^*, R^*]$, где $[R^*, R^*]$ — коммутант мультипликативной группы R^* тела R. Факторгруппа $SL(n, R)/Z_n$ проста, за исключением случая $n=2$, $R=F_2, F_3$. В случае $n=2$ $SL(2, F_2) = SL(2, F_2)/Z_2$ и группа $SL(2, F_2)$ изоморфна симметрич. группе S_3 степени 3, а группа $SL(2, F_3)/Z_3$ изоморфна знакопеременной группе A_4 степени 4.

Если $\det_n$ — гомоморфизм приведенной нормы, то всегда

$$SL(n, R)/E(n, R) \simeq SK_1(R)$$

и

$$SK_1(R) \simeq SL(1, R)/[R^*, R^*],$$

причем для полей R группа $SK_1(R)$ тривиальна. Долгое время существовала гипотеза, что $SK_1(R) = \{0\}$ для произвольного тела R. Однако в 1975 показано, что это не так (см. [5]). Группы $SK_1(R)$ играют важную роль в алгебраич. геометрии (см. [6], [7]). Имеются также нек-рые обобщения гомоморфизма приведенной нормы, что стимулировало ряд новых исследований по С. л. г.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [3] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974; [4] Суслин А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 2, с. 235—52; [5] Платонов В. П., «Докл. АН СССР», 1975, т. 222, № 6, с. 1299—1302; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 2, с. 227—61; [7] его же, в сб.: «Proc. Intern. Congr. Math.», 1980, v. 1, p. 311—23. *В. И. Янчевский.*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ — в широком смысле совокупность отдельных классов функций, возникающих при решении как теоретических, так и прикладных задач в самых различных разделах математики.

В узком смысле под С. ф. подразумеваются С. ф. математич. физики, к-рые появляются при решении дифференциальных уравнений с частными производными методом разделения переменных.

С. ф. могут быть определены с помощью степенных рядов, производящих функций, бесконечных произведений, последовательного дифференцирования, интегральных представлений, дифференциальных, разностных, интегральных и функциональных уравнений, тригонометрич. рядов, рядов по ортогональным функциям.

К наиболее важным классам С. ф. относятся *гамма-функция* и *бета-функция*, *гипергеометрическая функция* и *вырожденная гипергеометрическая функция*, *Бесселя функции*, *Лежандра функции*, *параболического цилиндра функции*, *интегральный синус*, *интегральный косинус*, *неполная гамма-функция*, *интеграл вероятности*, различные классы *ортогональных многочленов* одного и многих переменных, *эллиптическая функция* и *эллиптический интеграл*, *Ламе функции* и *Матьё функции*, *дзета-функция Римана*, *автоморфная функция*, нек-рые С. ф. дискретного аргумента.

Теория С. ф. связана с представлением групп, методами интегральных представлений, опирающихся на обобщение формулы Родрига для классич. ортогональных многочленов и методами теории вероятностей.

Для С. ф. имеются таблицы значений, а также таблицы интегралов и рядов.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1973—74; [2] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, пер. с англ., М., 1979; [3] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977; [4] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963; [5] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 1—2, М., 1963; [6] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [7] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949; [8] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952; [9] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [10] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, М., 1978, [11] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [12] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967; [13] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произ-

ведений, 5 изд., М., 1971; [14] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., Интегралы и ряды. Элементарные функции, М., 1981; [15] их же, Интегралы и ряды Специальные функции, М., 1983. *Ю.А.Брычков, А.П.Прудников.*

СПЕЦИАЛЬНЫЙ АВТОМОРФИЗМ, построенный по автоморфизму S *пространства с мерой* (X, ν) и функции f (заданной на X и принимающей положительные целочисленные значения),— автоморфизм T нек-рого нового пространства с мерой (M, μ), строящийся следующим образом. Точки M суть пары (x, n), где $x \in X$ и n целое, $0 \leqslant n < f(x)$; при этом M снабжается очевидной мерой μ: если $A \subset X$ и $f(x) > n$ при всех $x \in A$, то $\mu(A \times n) = \nu(A)$. Если $\mu(M) = \int_X f d\nu < \infty$, то эту меру обычно еще нормируют. Преобразование T увеличивает вторую координату точки (x, n) на единицу, если $n+1 < f(x)$, т. е. если при этом точка не выходит из M; в противном случае $T(x, n) = (Sx, 0)$. Преобразование T оказывается автоморфизмом пространства с мерой (M, μ).

Описанная конструкция часто применяется в *эргодической теории* при построении различных примеров. С другой стороны, роль С. а. ясна из следующего. Отождествляя точку $x \in X$ с $(x, 0)$, можно считать, что $X \subset M$. Тогда $f(x)$ есть время, за к-рое точка, находившаяся вначале в X и двигающаяся под действием каскада $\{T^n\}$, возвращается снова в X, а S есть *производный автоморфизм* T_X. Таким образом, с помощью С. а. как бы восстанавливают траектории динамич. системы во всем фазовом пространстве, наблюдая только прохождения движущейся точки через множество X.

Д. В. Аносов.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ПОТОК, построенный по автоморфизму S *пространства с мерой* (X, ν) и измеримой функции f, заданной на X и принимающей положительные значения,— *измеримый поток* в нек-ром новом пространстве с мерой (M, μ), строящийся следующим образом. Точки M суть пары (x, s), где $x \in X$ и $0 \leqslant s < f(x)$; мера μ — ограничение на множестве M, рассматриваемом как подмножество в $X \times [0, \infty)$ — прямого произведения меры ν на X и меры Лебега на $[0, \infty)$. Если $\mu(M) = \int_X f d\nu < \infty$, то эту меру обычно еще нормируют. Движение же происходит таким образом, что вторая координата точки (x, s) увеличивается с единичной скоростью, пока не достигает значения $f(x)$; а этот момент времени точка перескакивает в положение $(Sx, 0)$.

В *эргодической теории* С. п. играет роль, аналогичную роли сечений и *последования отображений* при исследовании гладких динамич. систем: X играет роль сечения, а S — отображения последования. Но в топологич. теории построить сечение в виде многообразия удается, вообще говоря, только локально. В эргодической же теории построение глобального сечения возможно при очень широких условиях, ибо здесь нет ограничений, связанных с топологией. (Если даже исходный поток является гладким, все равно допускается, чтобы секущая поверхность была разрывной.) Поэтому при очень широких условиях измеримый поток метрически изоморфен нек-рому С. п., даже с нек-рыми дополнительными условиями на f (см. [1]). Родственным понятием является *специальный автоморфизм*.

Лит.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980. *Д. В. Аносов.*

СПИН — одна из величин, характеризующая внутренние степени свободы квантовой частицы (или квантового поля). Нерелятивистская частица имеет спин S ($S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$), если ее волновая функция $\psi(x)$ принимает значения из нек-рого линейного пространства L, в к-ром действует неприводимое (однозначное или двузначное) представление $g \to Tg$ веса S группы вращений SO_3 трехмерного пространства (см. [1], [2]) так, что при переходе от одной ортогональной системы координат в $\mathbb{R}$ к другой при помощи матрицы $g \in SO_3$ значения волновой функции преобразуются матрицей Tg. В случае релятивистской частицы, волновая функция к-рой преобразуется с помощью какого-нибудь представления $g \to Tg$ группы Лоренца, ее С. наз. максимальный из весов неприводимых представлений группы вращений SO_3, на к-рые раскладывается представление $g \to Tg$.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [2] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958.

Р. А. Минлос.

СПИНОР — элемент пространства *спинорного представления*. Напр., если Q — невырожденная квадратичная форма в n-мерном пространстве V над полем k, имеющая максимальный индекс Витта $m = [n/2]$ (последнее условие всегда выполнено, если поле k алгебраически замкнуто), то в качестве пространства С., отвечающего форме Q, можно рассматривать внешнюю алгебру над максимальными (размерности m) вполне изотропными подпространствами в V.

С. были рассмотрены впервые в 1913 Э. Картаном (É. Cartan) в его исследованиях по теории представлений непрерывных групп и вновь открыты в 1929 Б. Л. Ван дер Варденом (B. L. van der Waerden) в исследованиях по квантовой механике [так, было обнаружено, что явление спина электрона и других элементарных частиц описывается физич. величинами, не принадлежащими к известным ранее типам величин (тензорам, псевдотензорам и т. д.), напр., они определяются лишь с точностью до знака, и при повороте системы координат на угол 2π вокруг нек-рой оси все компоненты этих величин меняют знак].

В настоящее время спинорное исчисление нашло широкое применение во многих отраслях математики и позволило решить ряд трудных задач алгебраической и дифференциальной топологии (напр., задача о числе ненулевых векторных полей на k-мерной сфере, задача об индексе эллиптического оператора, K-теория).

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1979; [2] Желнорович В. А., Теория спиноров и ее применение в физике и механике, М., 1982; [3] Картан Э., Теория спиноров, пер. с франц., М., 1947; [4] Каруби М., K-теория. Введение, пер. с англ., М., 1981. *М. И. Войцеховский.*

СПИНОРНАЯ ГРУППА невырожденной квадратичной формы Q на n-мерном ($n \geqslant 3$) векторном пространстве V над полем k — связная линейная алгебраич. группа, являющаяся универсальной накрывающей неприводимой компоненты единицы $O_n^+(Q)$ ортогональной группы $O_n(Q)$ формы Q. Если $\mathrm{char}\, k \neq 2$, то группа $O_n^+(Q)$ совпадает со специальной ортогональной группой $SO_n(Q)$. С. г. строится следующим образом. Пусть $C = C(Q)$ — *Клиффорда алгебра* пары (V, Q), C^+ (соответственно C^-) — подпространство в C, порожденное произведениями четного (соответственно нечетного) числа элементов из V, β — канонич. антиавтоморфизм алгебры C, определяемый формулой

$$\beta(v_1 v_2 \ldots v_k) = v_k \ldots v_2 v_1.$$

Вложение $V \subset C$ позволяет определить группу Клиффорда

$$G = \{s \in C \mid s \text{ обратим в } C \text{ и } sVs^{-1} = V\}$$

и четную (или специальную) группу Клиффорда

$$G^+ = G \cap C^+.$$

С. г. $\mathrm{Spin}_n = \mathrm{Spin}_n(Q)$ определяется равенством

$$\mathrm{Spin}_n = \{s \in G^+ \mid s\beta(s) = 1\}.$$

С. г. Spin_n — простая (при $n \neq 4$) связная односвязная линейная алгебраич. группа типа B_m при $n = 2m+1$

и типа D_m при $n=2m\geqslant 8$; при $n=6$ это A_3, а при $n=4$ это $A_1\times A_1$. Имеют место изоморфизмы

$$\mathrm{Spin}_3\cong \mathrm{SL}_2,\ \mathrm{Spin}_n\cong \mathrm{SL}_2\times \mathrm{SL}_2,$$

$$\mathrm{Spin}_5\cong \mathrm{Sp}_4,\ \mathrm{Spin}_6\cong \mathrm{SL}_4.$$

Линейное представление θ С. г. Spin_n в пространстве V, определяемое равенством

$$\theta(s)\cdot v=svs^{-1},\ s\in \mathrm{Spin}_n,\ v\in V,$$

наз. ее **векторным представлением**. При этом

$$\theta(\mathrm{Spin}_n(Q))=O_n^+(Q)\ \text{и}\ \mathrm{Ker}\,\theta=\{\pm 1\}.$$

Группа Spin_n допускает также точное линейное представление (см. *Спинорное представление*).

Если $k=\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, а квадратичная форма Q положительно (или отрицательно) определена, то группа $\mathrm{Spin}_n^{\mathbb{R}}$ вещественных точек алгебраич. группы Spin_n также наз. С. г. Это связная односвязная компактная группа Ли, являющаяся двулистной накрывающей специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Имеют место изоморфизмы

$$\mathrm{Spin}_3^{\mathbb{R}}\cong \mathrm{SU}_2,\ \mathrm{Spin}_4^{\mathbb{R}}\cong \mathrm{SU}_2\times \mathrm{SU}_2,$$

$$\mathrm{Spin}_5^{\mathbb{R}}\cong \mathrm{Sp}_4(2)\ \text{(см. } \textit{Симплектическая группа}),$$

$$\mathrm{Spin}_6^{\mathbb{R}}\cong \mathrm{SU}_4.$$

Лит.: [1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Картан Э., Теория спиноров, пер. с франц., М., 1947; [4] Постников М. М., Группы и алгебры Ли, М., 1982; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948. *В. Л. Попов.*

СПИНОРНАЯ СТРУКТУРА на n-мерном многообразии M, расслоение спин-реперов, — главное расслоение π: $\tilde{P}\to M$ над M со структурной группой $\mathrm{Spin}(n)$ (см. *Спинорная группа*), накрывающее нек-рое главное расслоение π: $P\to M$ реперов со структурной группой $\mathrm{SO}(n)$. Последнее условие означает, что задан тождественный по базе сюръективный гомоморфизм $\varkappa$ главных расслоений $\tilde{P}\to P$, согласованный с естественным гомоморфизмом ρ: $\mathrm{Spin}(n)\to \mathrm{SO}(n)$. Говорят, что С. с. $(\tilde{\pi},\varkappa)$ подчинена римановой метрике g на M, определяемой расслоением π. С точки зрения теории G-структур С. с. есть обобщенная G-структура со структурной группой $G=\mathrm{Spin}(n)$, рассматриваемой вместе с неточным представлением ρ: $\mathrm{Spin}(n)\to \mathrm{SO}(n)$.

Аналогичным образом определяются С. с., подчиненная псевдоримановой метрике, и С. с. на комплексном многообразии, подчиненная комплексной метрике. Необходимые и достаточные условия существования С. с. на M состоят в ориентируемости многообразия M и обращении в нуль класса Штифеля — Уитни $W_2(M)$. При выполнении этих условий число неизоморфных С. с. на M, подчиненных данной римановой метрике, совпадает с порядком группы $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ (см. [6]).

Пусть C — комплексификация *Клиффорда алгебры* пространства $\mathbb{R}^n$ относительно квадратичной формы $q=-\sum_{i=1}^n x_i^2$. Алгебра C обладает неприводимым представлением в пространстве S над $\mathbb{C}$ размерности $2^{[n/2]}$, к-рое определяет представление группы $\mathrm{Spin}(n)\subset C$ в пространстве S. Всякая С. с. $\tilde{\pi}$ на M задает ассоциированное векторное расслоение $\pi_S: S(M)\to M$ со слоем S, называемое **расслоением спиноров**. Риманова связность на M определяет каноническим образом связность в расслоении π_S. В пространстве $\Gamma(S)$ гладких сечений расслоения π_S (**спинорных полей**) действует линейный дифференциальный оператор D порядка 1 — **оператор Дирака**, к-рый локально определяется формулой

$$Du=\sum_{i=1}^n s_i\cdot \nabla_{s_i}u,$$

где ∇_{s_i} — ковариантные производные по направлениям ортонормированных векторных полей s_i, а умножение элементов из S на векторы из $\mathbb{R}^n$ соответствует определенной выше структуре C-модуля на S.

Спинорные поля, аннулируемые оператором D, иногда наз. **гармоническими**. Если M компактно, то $\dim\ker D<\infty$, причем эта размерность не меняется при конформной деформации метрики [4]. Если при этом риманова метрика на M имеет положительную скалярную кривизну, то $\ker D=0$ (см. [4], [5]).

С. с. в пространстве-времени (M,g) (т. е. в четырехмерном лоренцевом многообразии) наз. С. с., подчиненная лоренцевой метрике g. Существование С. с. в некомпактном пространстве-времени M эквивалентно абсолютной параллелизуемости многообразия M (см. [3]). Пространство спиноров S как модуль над спинорной группой $\mathrm{Spin}(1,3)\approx \mathrm{SL}(2,G)$ разлагается в прямую сумму двух комплексных двумерных комплексно-сопряженных $\mathrm{SL}(2,G)$-модулей $\mathbb{C}^2$ и $\dot{\mathbb{C}}^2$. Этому разложению соответствует разложение $S(M)=\mathbb{C}^2(M)\oplus\dot{\mathbb{C}}^2(M)$ расслоения спиноров, причем тензорное произведение $\mathbb{C}^2(M)\otimes\dot{\mathbb{C}}^2(M)$ отождествляется с комплексификацией касательного расслоения TM. Спинорные поля в пространстве-времени, являющиеся собственными функциями оператора Дирака, описывают свободные поля частиц со спином $1/2$, напр. электронов.

Лит.: [1] Казанова Г., Векторная алгебра, пер. с франц., М., 1979; [2] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [3] Geroch R., «J. Math. Phys.», 1968, v. 9, p. 1739—44; [4] Hitchin N., «Adv. Math.», 1974, v. 14, p. 1—55; [5] Lichnerowicz A., «Bull. Soc. math. France», 1964, t. 92, p. 11—100; [6] Milnor J., «Enseign. math.», 1963, t. 9, p. 198—203; [7] Твисторы и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1983. *Д. В. Алексеевский.*

СПИНОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — простейшее точное линейное представление *спинорной группы* $\mathrm{Spin}_n(Q)$ или определяющее его линейное представление объемлющей четной алгебры Клиффорда $C^+=C^+(Q)$. Если основное поле K алгебраически замкнуто, то алгебра C^+ изоморфна полной матричной алгебре $M_{2^m}(K)$ (при $n=2m+1$) или алгебре $M_{2^{m-1}}(K)\oplus M_{2^{m-1}}(K)$ (при $n=2m$). Тем самым определено линейное представление ρ алгебры C^+ в пространстве размерности 2^m над K, к-рое наз. **спинорным**. Ограничение $\rho|\mathrm{Spin}_n(Q)$ наз. С. п. группы $\mathrm{Spin}_n(Q)$. С. п. при нечетном n неприводимо, а при четном n распадается в прямую сумму двух неэквивалентных неприводимых представлений ρ' и ρ'', к-рые наз. **полуспинорными**. Элементы пространства С. п. наз. **спинорами**, а полуспинорных — **полуспинорами**. С. п. спинорной группы Spin_n самоконтрагредиентно при любом $n\geqslant 3$; полуспинорные представления ρ' и ρ'' спинорной группы Spin_{2m} самоконтрагредиентны при четном m и контрагредиентны друг другу при нечетном m. С. п. группы Spin_n точно при любом $n\geqslant 3$, полуспинорные представления группы Spin_{2m} точны при нечетном m и имеют ядро, состоящее из двух элементов, при четном m.

Если квадратичная форма Q задана в пространстве V над нек-рым подполем $k\subset K$, то С. п. не всегда определено над k. Однако, если индекс Витта квадратичной формы Q максимален, то есть равен $[n/2]$ (в частности, если поле k алгебраически замкнуто), то спинорное и полуспинорные представления определены над k. В этом случае указанные представления могут быть описаны следующим образом (см. [1]). Пусть L и M — не-

пересекающиеся определенные над k максимальные вполне изотропные (относительно симметрической билинейной формы в V, ассоциированной с квадратичной формой Q) подпространства в V, C_L — подалгебра в алгебре Клиффорда $C=C(Q)$, порожденная подпространством $L\subset V$, и $e_M\in C$ — произведение m векторов, составляющих определенный над k базис пространства M. Если $n=2m$ четно, то С. п. реализуется в простом левом идеале Ce_M и действует там с помощью левых сдвигов: $\rho(s)x=sx$ ($s\in C^+$, $x\in Ce_M$). Далее соответствие $x\mapsto xe_M$ определяет изоморфизм векторных пространств $C_L\to Ce_M$, что позволяет реализовать С. п. в пространстве C_L, естественно изоморфном внешней алгебре над пространством L. При этом полуспинорные представления ρ' и ρ'' реализуются в инвариантных 2^{m-1}-мерных подпространствах $C_L\cap C^+$ и $C_L\cap C^-$.

Если n нечетно, то пространство V можно включить в $(n+1)$-мерное векторное пространство $V_1=V\oplus k\varepsilon$ над k и определить в V_1 квадратичную форму Q_1, положив $Q_1(v+\lambda\varepsilon)=Q(v)-\lambda^2$ при всех $v\in V$ и $\lambda\in k$. При этом Q_1 — определенная над k невырожденная квадратичная форма максимального индекса Витта на четномерном векторном пространстве V_1. С. п. алгебры $C^+(Q)$ (группы $\mathrm{Spin}_n(Q)$) получается путем ограничения любого из полуспинорных представлений алгебры $C^+(Q_1)$ (группы $\mathrm{Spin}_{n+1}(Q_1)$) на подалгебру $C^+(Q)$ (соответственно подгруппу $\mathrm{Spin}_n(Q)$).

В случае, когда $3\leqslant n\leqslant 14$, а k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, решена задача классификации спиноров (см. [4], [8], [9]), к-рая состоит в 1) описании всех орбит группы $\rho(\mathrm{Spin}_n)$ в пространстве спиноров, т. е. указании в каждой орбите нек-рого единственного представителя, 2) вычислении стабилизаторов группы Spin_n в каждом из этих представителей, 3) описании алгебры инвариантов линейной группы $\rho(\mathrm{Spin}_n)$.

Существование спинорных и полуспинорных представлений алгебр Ли $\mathfrak{so}_n$ групп Spin_n было открыто Э. Картаном (É. Cartan) в 1913, когда он классифицировал все неприводимые конечномерные представления простых алгебр Ли [6]. Впоследствии, в 1935 Р. Брауэр (R. Brauer) и Г. Вейль (H. Weyl) описали спинорные и полуспинорные представления в терминах алгебр Клиффорда [5]. П. Дирак (P. Dirac, [3]) обнаружил, что при помощи спиноров в квантовой механике описывается вращение электрона.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с нем., М., 1947; [3] Дирак П., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Попов В. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1978, т. 37, с. 173—217; [5] Brauer R., Weyl H., «Amer. J. Math.», 1935, v. 57, № 2, p. 425—49; [6] Cartan E., Œuvres complètes, v. 1, pt 1, P., 1952, p. 355—98; [7] Chevalley C., The algebraic theory of spinors, N. Y., 1954; [8] Gatti V., Viniberghi E., «Advances in Math.», 1978, v. 30, № 2, p. 137—55; [9] Igusa J.-i., «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, № 4, p. 997—1028.

В. Л. Попов.

СПИРАЛИ — плоские кривые, к-рые обычно обходят вокруг одной (или нескольких точек), приближаясь или удаляясь от нее.

Среди С. выделяют алгебраич. С. и псевдоспирали.

Алгебраические спирали — спирали, уравнения к-рых в полярных координатах являются алгебраическими относительно переменных ρ и φ. К алгебраическим С. относятся: *гиперболическая спираль*, *архимедова спираль*, *Галилея спираль*, *Ферма спираль*, *параболическая спираль*, *жезл*.

Псевдоспирали — спирали, натуральные уравнения к-рых могут быть записаны в виде

$$r=as^m,$$

где r — радиус кривизны, s — длина дуги. При $m=1$ псевдоспираль наз. *логарифмической спиралью*, при $m=-1$ — *Корню спиралью*, при $m=1/2$ является *эвольвентой* окружности.

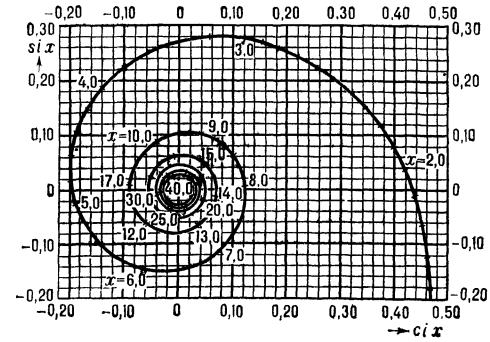
Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

SICI-СПИРАЛЬ — плоская кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах (x, y) имеет вид

$$x=\mathrm{ci}(t),\quad y=\mathrm{si}(t),$$

где ci — интегральный косинус, si — интегральный синус, t — действительный параметр (рис.). Дли-



на дуги от точки $t=0$ до точки t_0 равна $\ln t_0$, а кривизна $\varkappa=t_0$.

Лит.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968.

Д. Д. Соколов.

СПИРМЕНА КОЭФФИЦИЕНТ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ — мера зависимости двух случайных величин (признаков) X и Y, основанная на ранжировании независимых результатов наблюдений $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Если ранги значений X расположены в естественном порядке $i=1, \ldots, n$, а R_i — ранг Y, соответствующий той паре (X, Y), для к-рой ранг X равен i, то С. к. р. к. определяется формулой

$$r_S=\frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\left(R_i-\frac{n+1}{2}\right)$$

или, что равносильно,

$$r_S=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)},$$

где d_i — разность между рангами X_i и Y_i. Значение r_S меняется от -1 до $+1$, причем $r_S=+1$, когда последовательности рангов полностью совпадают, т. е. $i=R_i$, $i=1, \ldots, n$, и $r_S=-1$, когда последовательности рангов полностью противоположны, т. е. $i=(n+1)-R_i$, $i=1, \ldots, n$. С. к. р. к., как и любая другая ранговая статистика, применяется для проверки гипотезы независимости двух признаков. Если признаки независимы, то $\mathrm{E}r_S=0$, $\mathrm{D}r_S=\frac{1}{n-1}$. Таким образом, по величине отклонения r_S от нуля можно сделать вывод о зависимости или независимости признаков. Для построения соответствующего критерия вычисляется распределение r_S для независимых признаков X и Y. При $4\leqslant n\leqslant 10$ используют таблицы точного распределения (см. [2], [4]), а при $n>10$ можно воспользоваться, напр., тем, что случайная величина $\sqrt{n-1}\,r_S$ при $n\to\infty$ распределена асимптотически нормально с параметрами $(0, 1)$. В последнем случае гипотеза независимости отвергается, если $|r_S|>u_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{n-1}$, где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ есть корень уравнения $\Phi(u)=1-\frac{\alpha}{2}$ ($\Phi(u)$ — функция стандартного нормального распределения).

В предположении, что X и Y имеют совместное нормальное распределение с обычным коэффициентом корреляции ρ, при достаточно больших n

$$\mathsf{E}r_s \sim \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{\rho}{2},$$

и поэтому величину $2\sin\frac{\pi}{6}r_s$ можно использовать в качестве оценки для ρ.

С. к. р. к. был назван по имени психолога Ч. Спирмена (Ch. Spearman, 1904), к-рый использовал его в исследованиях по психологии вместо обычного коэффициента корреляции. Критерии, основанные на С. к. р. к и на *Кендалла коэффициенте ранговой корреляции*, асимптотически эквивалентны (при $n=2$ соответствующие ранговые статистики совпадают).

Лит.: [1] Spearman C., «Amer. J. Psychol.», 1904, v. 15, p. 72—101; [2] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [3 изд.], М., 1983. *А. В. Прохоров.*

СПЛАЙН — функция $s_m(\Delta_n; x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, совпадающая на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, образованных сеткой Δ_n: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ с нек-рыми алгебраическими многочленами степени не выше m, и имеющая на $[a, b]$ непрерывную $(m-1)$-ю производную. Для С. справедливо представление

$$s_m(\Delta_n; x) = P_{m-1}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-x_k)_+^m,$$

где c_k — действительные числа, $P_{m-1}(x)$ — многочлен степени не выше $(m-1)$ и $(x-t)_+^m=[\max(0, x-t)]$. Точки $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ наз. узлами С. Если С. $s_m(\Delta_n; x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную $(m-k)$-ю производную $(k\geqslant 1)$, а $(m-k+1)$-я производная в узлах С. разрывна, то говорят, что он имеет дефект k. Наряду с введенными выше С. (полиномиальными сплайнами) рассматриваются более общие С. (L-сплайны), к-рые «склеиваются» из решений линейного однородного дифференциального уравнения $Ly=0$ и С. (L_g-сплайны) с разной гладкостью в различных узлах, а также С. многих переменных. С. и их обобщения часто появляются как экстремальные функции при решении экстремальных задач: наилучшие квадратурные формулы, наилучшее численное дифференцирование и др. С. применяются для приближения функций (см. *Сплайн-аппроксимация*, *Сплайн-интерполяция*), построения приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. С помощью С. строятся ортонормированные системы, обладающие хорошими свойствами сходимости.

Лит.: [1] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976. *Ю. Н. Субботин.*

СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ—приближенное представление функции или приближенное восстановление функции из заданного класса по неполной информации (напр., по значениям на сетке) с помощью *сплайнов*.

Как и в классич. теории приближения функций, изучаются линейные методы С.-а., включая *сплайн-интерполяцию*, наилучшие методы, а также аппроксимации классами нелинейных сплайнов, напр. сплайнами с нефиксированными узлами.

Наилучшие приближения сплайнами. Изучаются вопросы существования, единственности, характеристич. свойства наилучшего сплайна (н. с.) (см. *Наилучшего приближения элемент*), а также порядки, асимптотика и точные верхние грани уклонений сплайнов от заданного класса функций. Сплайны с фиксированными узлами не образуют *Чебышева систему*, поэтому в $C[a, b]$ нет единственности н. с. и характеристич. свойства н. с. сложнее, чем характеристич. свойства *Наилучшего приближения многочлена* (см. [8]). Однако в $L[a, b]$ для подкласса непрерывных функций н. с., если они склеиваются из гладких функций, образующих систему Чебышева на $[a, b]$, обладают свойствами единственности [2]. Сплайны с фиксированной гладкостью, но с нефиксированными узлами (предполагается, что число узлов не превосходит заданного числа) не образуют замкнутого множества, поэтому здесь может не существовать н. с. Порядок приближения может быть охарактеризован следующим результатом [6]:

$$\left\|f^{(i)}(x)-S^{(i)}_{m,\Delta_n}(x)\right\|_{L_p[a,b]} \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\Delta_n\|^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,\omega_{m-i}\left(f^{(i+1)}, \|\Delta_n\|\right)_q, \qquad (1)$$

$$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,$$

где $S_{m,\Delta_n}(x)$ — полиномиальный сплайн степени m с узлами в точках сетки

$$\Delta_n: a=x_0^{(n)}\leqslant x_1^{(n)}<\ldots<x_n^{(n)}=b,$$

$$\|\Delta_n\|=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}-x_i),$$

$\omega_k(f, \delta)_q$ — модуль гладкости порядка k в $L_q[a, b]$ и функция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную $(l-1)$-ю производную и l-ю из L_q $(1\leqslant l\leqslant m)$, $i=0, 1, \ldots, l-1$. При $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$ в (1) можно i заменить на $i-1$ и убрать множитель $\|\Delta_n\|^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$. Более слабые аналоги неравенства (1) получены для многомерных сплайнов. Напр., если $f\in W_2^k(\Omega)$ ($W_2^k(\Omega)$ — пространство Соболева) и S_h^k — совокупность сплайнов (степени не выше k по каждой переменной) с равномерными узлами и шагом h и область Ω удовлетворяет строгому условию конуса (см. *Вложения теоремы*), то

$$\inf_{S\in S_h^k}\|f-S\|_{W_2^j(\Omega)}\leqslant c\cdot h^{k-j}\|f\|_{W_2^k(\Omega)}, \qquad 0\leqslant j\leqslant k.$$

Для равномерной сетки ($\|\Delta_n\|=1/n$) и класса W_q^{m+1} порядок правой части в (1) при $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ равен $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-m-1+i}$. Если рассматривать приближение сплайнами степени m гладкости $m-1$ с нефиксированными узлами, число к-рых не превосходит n, то за счет выбора узлов можно добиться [7], чтобы порядок аппроксимации был равен n^{-m-1+i}. Для наилучшего равномерного приближения нек-рых классов периодических функций полиномиальными сплайнами с равномерными узлами имеется ряд окончательных результатов. Напр., для класса $\tilde{W}^rH_\omega$, где $\omega(\delta)$ — выпуклый модуль непрерывности, подсчитана верхняя грань уклонения от сплайнов степени r [4]. Она совпадает с соответствующим *поперечником* этого класса. Изучаются также наилучшие приближения сплайнами при дополнительных ограничениях на его старшую производную [13]. В связи с изучением наилучших квадратурных формул естественно возникает задача наилучшего приближения специальной функции $(b-t)^r$ (см. *Моносплайн*).

Линейные методы приближения сплайнами начали изучать раньше наилучших приближений. При этом преимущественно изучались приближения *интерполяционными сплайнами* (и. с.) (см. [1], [3], [5]). И. с. часто дают тот же порядок приближения, что и наилучшие; это является одним из преимуществ перед интерполированием многочленами. Так, если функция $f(x)$ имеет непрерывную r-ю производную на $(-\infty, \infty)$, то для приближения полиноми-

альными и. с. $S_n(x, h)$ степени $n \geqslant r$ с равномерными узлами интерполяции $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и узлами сплайна справедлива оценка [6].

$$\| f^{(i)}(x) - S_n^{(i)}(x, h) \|_{C(-\infty, \infty)} \leqslant$$
$$\leqslant c \cdot \omega_{r+1-i}(f^{(i)}, h), \quad i = 0, 1, \ldots, r.$$

При изучении и. с. с произвольными узлами в качестве параметра приближения выбирается максимальное расстояние между узлами интерполяции; обычно узлы интерполяции и узлы сплайна тесно связаны между собой. В приложениях наиболее широко используются полиномиальные и. с. $S_3(x)$ 3-й степени — к у б и ч е с к и е с п л а й н ы. Это связано с тем, что построение таких сплайнов сводится в большинстве случаев к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, имеющей доминирующую главную диагональ. Решение таких систем легко реализуется на ЭВМ. Кроме того, если функция $f(x)$ имеет непрерывную k-ю, $0 \leqslant k \leqslant 3$, производную на $[a, b]$, то имеют место оценки

$$\| f^{(i)}(x) - S_3^{(i)}(x) \|_{C[a, b]} \leqslant$$
$$\leqslant c \| \Delta_n \|^{k-i} \omega(f^{(k)}, \| \Delta_n \|), \quad 0 \leqslant i \leqslant k,$$

где $\{x_i^{(n)}\}$ — узлы интерполяции. При $k = 1, 2$ константа $c > 0$ не зависит от f и от сеток Δ_n. При $k = 0$ и $k = 3$ на последовательность сеток Δ_n налагаются дополнительные ограничения. Аналог этого результата имеет место также для многомерных кубических сплайнов, а также для сплайнов большей степени.

И. с. нечетной степени обладает рядом экстремальных свойств. Напр., среди всех функций, имеющих абсолютно непрерывную $(m-1)$-ю производную на $[a, b]$ и m-ю производную из $L_2[a, b]$ и принимающих в точках $\{x_i\}$, $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$, заданные значения $\{y_i\}$, полиномиальный сплайн $S_{2m-1}(x)$ с узлами $\{x_i\}$, принимающий в точках $\{x_i\}$ значения $\{y_i\}$, имеющий непрерывную $(2m-2)$-ю производную на $[a, b]$ и совпадающий на $[a, x_0)$ и $(x_n, b]$ с многочленами степени не выше $m-1$, имеет наименьшую норму m-й производной в $L_2[a, b]$. Это свойство послужило основой для многочисленных обобщений сплайнов. Для нек-рых классов функций верхняя грань уклонений от и. с. совпадает с верхней гранью уклонений для н. с., напр. для класса $\widetilde{W}^r H_\omega$ при $\omega(\delta) = \delta$.

Сплайны играют важную роль в задаче сглаживания [3], [5] сеточной функции, заданной с погрешностью. С помощью сплайнов строятся базисы [5] и ортонормированные базисы [9], *Лебега константы* к-рых ограничены.

Методы С.-а. тесно связаны с численным решением уравнений в частных производных м е т о д о м к о н е ч н ы х э л е м е н т о в, в основе к-рого лежит *Ритца метод* при специальном выборе базисных функций. В методе конечных элементов в качестве базисных функций выбираются кусочно полиномиальные функции, т. е. *сплайны*. Пусть, напр., Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^2$, к-рую можно разложить на конечное число правильных треугольных подобластей T_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. Для фиксированного i многочлен

$$P_i(p_{ij}) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 x_2^2$$

определяется из условий

$$P_i(p_{ij}) = f(p_{ij}), \quad P_i(q_{ij}) = f(q_{ij}), \quad j = 1, 2, 3,$$

где функция $f(p)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ и p_{ij} — вершины треугольника T_i, а q_{ij} — середины его сторон. Пусть $S(p) = P_i(p)$ при $p \in T_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Если $f \in W_2^3(\Omega)$, то

$$\| f - S \|_{W_2^j(\Omega)} \leqslant c h^{3-j} \| f \|_{W_2^3(\Omega)}, \quad j = 0, 1,$$

где h — длина стороны треугольника T_i и c — абсолютная постоянная.

Лит.: [1] А л б е р г Дж., Н и л ь с о н Э., У о л ш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [2] Г а л к и н П. В., «Матем. заметки», 1974, т. 15, в. 1, с. 3—14; [3] З а в ь я л о в Ю. С., К в а с о в Б. И., М и р о ш н и ч е н к о В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980; [4] К о р н е й ч у к Н. П., «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 3, с. 525—29; [5] С т е ч к и н С. Б., С у б б о т и н Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [6] С у б б о т и н Ю. Н., «Матем. заметки», 1974, т. 16, № 5, с. 843—54; [7] С у б б о т и н Ю. Н., Ч е р н ы х Н. И., там же, 1970, т. 7, № 1, с. 31—48; [8] S c h u m a k e r L. L., «J. Math. and Mech.», 1968, t. 18, p. 369—77; [9] Z i e s e l s k y Z., «Studia math.», 1972, t. 41, s. 211—24.

Ю. Н. Субботин.

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ — интерполирование посредством *сплайнов*, т. е. построение *интерполяционного сплайна* (и. с.), принимающего в заданных точках $\{x_i\}$ заданные значения $\{f(x_i)\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Обычно и. с. удовлетворяют дополнительным условиям в концевых точках. Так, для кубического сплайна $S_3(\Delta_n, x)$, Δ_n: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, к-рый склеен на $[a, b]$ из кубических многочленов и имеет непрерывную 2-ю производную, требуют, чтобы $S_3(\Delta_n, x_i) = f(x_i)$, и, кроме того, задают по одному условию в концевых точках, напр. $S_3'(\Delta_n, a) = y_0'$ и $S_3'(\Delta_n, b) = y_n'$ или $S_3''(\Delta_n, a) = y_0''$ и $S_3''(\Delta_n, b) = y_n''$. Если $f(x_i)$ — значения $(b-a)$-периодической функции, то требуют, чтобы сплайн был также $(b-a)$-периодическим. Для полиномиальных сплайнов степени $2k+1$ число дополнительных условий в каждой из точек a и b увеличивается до k. Для и. с. степени $2k$ обычно узлы сплайна (точки разрыва $2k$-й производной) выбираются посредине между точками $\{x_i\}$ и задается еще по k условий в точках a и b.

С.-и. имеет нек-рые преимущества по сравнению с интерполированием многочленами; напр., существуют такие последовательности сеток Δ_{n_k}: $a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_{n_k}^{(k)} = b$ и и. с., для к-рых интерполяционный процесс сходится для любой непрерывной функции, если

$$\| \Delta_{n_k} \| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n_k - 1} (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) \longrightarrow 0.$$

Многие процессы С.-и. дают тот же порядок приближения, что и *наилучшие приближения*. Более того, при С.-и. нек-рых классов дифференцируемых функций погрешность не превосходит *поперечника* соответствующего класса. С.-и. дает решение нек-рых вариационных задач. Напр., и. с. при достаточно общих дополнительных условиях в точках a и b удовлетворяет соотношению

$$\int_a^b [f^{(m)}(t) - S_{2m-1}^{(m)}(\Delta_n, t)]^2 \, dt = \int_a^b [f^{(m)}(t)]^2 \, dt -$$
$$- \int_a^b [S_{2m-1}^{(m)}(t)]^2 \, dt. \qquad (1)$$

Из этого соотношения следует существование и единственность и. с. нечетной степени, а также простейшие результаты о сходимости:

$$\left.\begin{aligned} &\| f^{(i)}(t) - S_{2m-1}^{(i)}(\Delta_n, t) \|_{L_2[a, b]} \leqslant \\ &\leqslant c_{i, m} \| \Delta_n \|^{m-i} \| f^{(m)}(t) \|_{L_2[a, b]}, \\ &\| f^{(i)}(t) - S_{2m-1}^{(i)}(\Delta_n, t) \|_{C[a, b]} \leqslant \\ &\leqslant c_{i, m} \| \Delta_n \|^{m - \frac{1}{2} - i} \| f^{(m)}(t) \|_{L_2[a, b]}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$i = 0, 1, \ldots, m-1$, где константа $c_{i, m}$ зависит только от i и m и $\|\Delta_n\| = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)$. Для нек-рых классов дифференцируемых функций последовательность и. с. сходится к интерполируемой функции на любой последовательности сеток Δ_{n_k}, для к-рой $\|\Delta_{n_k}\| \to 0$, напр., это имеет место в случае (2).

Наряду с полиномиальными и. с. в С.-и. используются сплайны более общего вида (L-сплайны, L_q-сплайны). Для многих из них также справедливы аналоги равенства (1) и неравенств (2). Для сплайнов с дефектом, большим единицы, обычно рассматривается интерполирование с кратными узлами.

См. также *Сплайн-аппроксимация.*

Лит. см. при ст. *Сплайн.* *Ю. Н. Субботин*

СПЛЕТАЮЩИЙ ОПЕРАТОР — непрерывный линейный оператор $T: E_1 \to E_2$ такой, что $T\pi_1(x)=\pi_2(x)T$, где π_1 и π_2 — отображения множества X в топологические векторные пространства E_1 и E_2, а $x \in X$. Понятие «С. о.» особенно плодотворно в случае, если X — группа или алгебра, а π_1, π_2 — представления этой группы или алгебры. Совокупность С. о. образует пространство $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$, являющееся подпространством пространства всех непрерывных линейных отображений E_1 в E_2. Если $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)=(0)$, $\mathrm{Hom}(\pi_2, \pi_1)=(0)$, то представления π_1 и π_2 наз. дизъюнктными представлениями. Если пространство $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ содержит оператор, определяющий изоморфизм пространств E_1 и E_2, то представления π_1 и π_2 эквивалентны. Если E_1, E_2 — локально выпуклые пространства, E_1^*, E_2^* — их сопряженные и π_1^*, π_2^* — представления, являющиеся сопряженными представлениями к π_1 и π_2 соответственно, то для любого $T \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ оператор T^* содержится в $\mathrm{Hom}(\pi_2^*, \pi_1^*)$. Если π_1 и π_2 конечномерны или унитарны и представление π_1 неприводимо, то представление π_2 тогда и только тогда допускает подпредставление, эквивалентное π_1, когда $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2) \neq (0)$. См. также *Сплетения число.*

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976. *А. И. Штерн.*

СПЛЕТЕНИЕ — 1) С. групп A и B строится следующим образом. Пусть A^B — множество всех функций, определенных на группе B со значениями в A; они образуют относительно покомпонентного умножения группу, к-рая является полным прямым произведением групп, изоморфных группе A в количестве, равном количеству элементов группы B. Группа B на A^B действует автоморфизмами по правилу: если $b \in B$, $\varphi \in A^B$, то $\varphi^b(x)=\varphi(xb^{-1})$ для $x \in B$. Относительно этого действия можно составить полупрямое произведение W групп B и A^B, т. е. множество всех пар (b, φ), где $b \in B$, $\varphi \in A^B$, с операцией умножения

$$(b, \varphi)(c, \psi)=(bc, \varphi^c\psi).$$

Построенная группа W наз. декартовым (или полным) сплетением групп A и B и обозначается A Wr B (или $A \bar{\imath} B$). Если в этой конструкции вместо A^B взять меньшую группу $A^{(B)}$, состоящую из всех функций с конечным носителем, т. е. функций, принимающих неединичные значения лишь в конечном множестве точек, то получится подгруппа группы W, наз. сплетением (прямым сплетением, дискретным сплетением) групп A и B; она обозначается через A wr B (или $A \imath B$). Оба С. широко используются для построения различных примеров групп.

Лит.: [1] Неймaн Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969; [2] Krasner M., Kaloujnine L., «Acta Sci. Math. Szeged», 1950, v. 13, p. 208—30, 1951, v. 14, p. 39—66, p. 69—82. *А. Л. Шмелькин.*

2) С. полугрупп, веночное произведение, узловое произведение,— конструкция, сопоставляющая двум полугруппам третью следующим образом: W есть С. A и B, если W определена на прямом произведении $F(B, A)\times B$, где $F(B, A)$ — полугруппа всех отображений из B в A относительно поточечного умножения, и операция на W задана формулой: $(f, b)(g, c)=(f \cdot {}^b g, bc)$, где отображение ${}^b g$ задано условием ${}^b g(y)=g(yb)$. С. A и B обозначается A wr B. Определенное выше С. наз. стандартным; другие определения и обобщения см. [1], [2], [4] — [7].

С. A и B содержит в качестве подполугруппы прямое произведение $A \times B$. Если A содержит единицу, то любое идеальное расширение A при помощи полугруппы B вкладывается в A wr B (см. [3]).

Вопрос о том, когда те или иные свойства полугрупп A и B наследуются A wr B, исследован главным образом для различных типов простоты (см. *Простая полугруппа*). Напр., если A и B — идеально простые полугруппы и B — полугруппа с правым сокращением, то A wr B — идеально простая полугруппа; если A и B — *вполне простые полугруппы* и A — простая слева, то A wr B вполне простая полугруппа [3]; если A и B — полугруппы с вполне простыми ядрами (см. *Ядро полугруппы*), то A wr B содержит вполне простое ядро [4]; более того, в последнем случае ядро сплетения равно квадрату сплетения ядер [7]. Если одна из полугрупп A, B регулярна, а вторая проста слева, то A wr B регулярно [6]. Пусть $|A|>1$; для того чтобы A wr B было *инверсной полугруппой (правой группой)*, необходимо и достаточно, чтобы A была инверсной полугруппой (правой группой), а B — группой [6].

С помощью С. получено компактное доказательство теоремы Эванса о вложимости всякой счетной полугруппы S в полугруппу с двумя образующими [1]; при таком вложении, если S — конечнопорожденная и периодическая, то S может быть вложена в периодическую полугруппу с двумя образующими.

С. и его обобщения играют важную роль в алгебраической теории автоматов. Напр., с использованием С. доказана теорема о разложении всякого конечного полугруппового автомата в каскадное соединение триггеров и простых групповых автоматов ([2], см. также [5]) — т. н. теорема Крона — Роудза.

Лит.: [1] Neumann B. H., «J. London Math. Soc.», 1960, v. 35, pt 2, № 138, p. 184—92; [2] Krohn K., Rhodes J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 116, p. 450—64; [3] Hunter R. P., «Bull. Soc. Math. Belgique», 1966, t. 18, fasc. 1, p. 3—16; [4] McKnight J. D. jr., Sadowski E., «Semigroup Forum», 1972, v. 4, p. 232—36; [5] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; [6] Кошелев Ю. Г., «Semigroup Forum», 1975, v. 11, № 1, p. 1—13; [7] Nakajima S., «Proc. First. Symp. Semigr.», Matsue, 1977, p. 84—88. *Э. А. Голубов, Л. Н. Шеврин.*

СПЛЕТЕНИЯ ЧИСЛО — размерность $c(\pi_1, \pi_2)$ пространства $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ *сплетающих операторов* для отображений π_1 и π_2 множества X в топологические векторные пространства E_1 и E_2. Понятие «С. ч.» особенно плодотворно в случае, если X — группа или алгебра, а π_1, π_2 — ее представления. Вообще говоря, даже для конечномерных представлений $c(\pi_1, \pi_2) \neq c(\pi_2, \pi_1)$, но для конечномерных представлений π_1, π_2, π_3 справедливы равенства

$$c(\pi_1 \oplus \pi_2, \pi_3)=c(\pi_1, \pi_3)+c(\pi_2, \pi_3);$$

$$c(\pi_1, \pi_2 \oplus \pi_3)=c(\pi_1, \pi_2)+c(\pi_1, \pi_3),$$

а если X — группа, то и равенство

$$c(\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3)=c(\pi_1, \pi_2^* \otimes \pi_3).$$

Если π_1 и π_2 неприводимы, то $c(\pi_1, \pi_2)$ равно 1 или 0 в зависимости от того, эквивалентны или нет представления π_1 и π_2. Для непрерывных конечномерных представлений компактной группы С. ч. может быть выражено через характеры этих представлений.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976. *А. И. Штерн.*

СПОРАДИЧЕСКАЯ ПРОСТАЯ ГРУППА — *простая конечная группа*, не входящая ни в одну из известных бесконечных серий простых конечных групп. Открытые (к 1984) 26 С. п. г. перечислены в таблице.

Обозначение	Название	Порядок
M_{11}	Группы Матье	$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot11$
M_{12}		$2^6\cdot3^3\cdot5\cdot11$
M_{22}		$2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$
M_{23}		$2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot23$
M_{24}		$2^{10}\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot23$
J_1	Группа Янко	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot19$
J_2, HJ	Группа Холла—Янко	$2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$
J_3, HJM	Группа Хигмана—Янко—Маккея	$2^7\cdot3^5\cdot5\cdot17\cdot19$
J_4	Группа Янко	$2^{21}\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot11^3\cdot23\cdot29\cdot31\times$ $\times37\cdot43$
Co_1,.1	Группы Конвея	$2^{21}\cdot3^9\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot23$
Co_2,.2		$2^{18}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7\cdot11\cdot23$
Co_3,.3		$2^{10}\cdot3^7\cdot5^3\cdot7\cdot11\cdot23$
F_{22}, M (22)	Группы Фишера	$2^{17}\cdot3^9\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$
F_{23}, M (23)		$2^{18}\cdot3^{13}\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot23$
F'_{24}, M (24)′		$2^{21}\cdot3^{16}\cdot5^2\cdot7^3\cdot11\cdot13\cdot17\cdot23\cdot29$
HS	Группа Хигмана—Симса	$2^9\cdot3^2\cdot5^3\cdot7\cdot11$
He, HHM	Группа Хельда—Хигмана—Маккея	$2^{10}\cdot3^3\cdot5^2\cdot7^3\cdot17$
Suz	Группа Судзуки	$2^{13}\cdot3^7\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$
M^c	Группа Маклафлина	$2^7\cdot3^6\cdot5^3\cdot7\cdot11$
Ly	Группа Лайонса	$2^8\cdot3^7\cdot5^6\cdot7\cdot11\cdot31\cdot37\cdot67$
Ru	Группа Рудвалиса	$2^{14}\cdot3^3\cdot5^3\cdot7\cdot13\cdot29$
O'N, O'NS	Группа О'Нэна—Симса	$2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7^3\cdot11\cdot19\cdot31$
F_1, M	Большой монстр, группа Фишера—Грайса	$2^{46}\cdot3^{20}\cdot5^9\cdot7^6\cdot11^2\cdot13^3\cdot17\times$ $\times19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot41\cdot47\cdot59\cdot71$
F_2, B	Малый монстр, группа Фишера	$2^{41}\cdot3^{13}\cdot5^6\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\times$ $\times23\cdot31\cdot47$
F_3, E, T	Группа Томпсона	$2^{15}\cdot3^{10}\cdot5^3\cdot7^2\cdot13\cdot19\cdot31$
F_5, D	Группа Харады	$2^{14}\cdot3^6\cdot5^6\cdot7\cdot11\cdot19$

Лит.: [1] Сыскин С. А., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, № 5, с. 181—212; [2] Ашбахер М., там же, 1981, т. 36, № 2, с. 141—72.
В. Д. Мазуров.

СПРЯМЛЕНИЯ ТОЧКА, распрямления точка,— точка кривой, в к-рой кривизна обращается в нуль. В С. т. уклонение кривой от касательной не ниже 3-го порядка. Если при переходе через С. т. кривая пересекает касательную в С. т., то С. т. является *перегиба точкой.*
А. Б. Иванов.

СПРЯМЛЯЕМАЯ КРИВАЯ — кривая, имеющая конечную длину. Пусть Γ — непрерывная параметрич. кривая в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, т. е. $\Gamma=\{x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ x_3=x_3(t)\}$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, где $x_k(t)$, $k=1, 2, 3$ — непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции, $\Pi=\{\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta\}$ — произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ и $A_j(x_1(t_j), x_2(t_j), x_3(t_j))$ — порожденная им последовательность точек на кривой Γ. И пусть Γ_Π — ломаная, вписанная в кривую Γ и имеющая вершины в точках $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Длина этой ломаной

$$s(\Gamma_\Pi)=\sum_{j=1}^{n}|A_{j-1}A_j|,$$

где

$$|A_{j-1}A_j|=\sqrt{\sum_{k=1}^{3}(x_k(t_j)-x_k(t_{j-1}))^2}.$$

Величина

$$s(\Gamma)=\sup_{\Pi} s(\Gamma_\Pi)$$

наз. длиной кривой Γ. Длина $s(\Gamma)$ не зависит от способа параметризации кривой Γ. Если $s(\Gamma)<+\infty$, то кривая Γ наз. спрямляемой кривой. С. к. Γ имеет касательную почти во всех своих точках $A(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, т. е. почти при всех значениях параметра $t\in[\alpha, \beta]$. Изучение С. к. было начато Л. Шеффером [1] и продолжено К. Жорданом [2], к-рый доказал, что кривая Γ спрямляема тогда и только тогда, когда все три функции $x_k(t)$, $k=1, 2, 3$, являются *ограниченной вариации функциями* на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Лит.: [1] Scheeffer L., «Acta math.», 1885, t. 5, p. 49—82; [2] Jordan C., Cours d'analyse de l'École polytechnique, 3 éd., t. 1, P., 1909.
Б. И. Голубов.

СПРЯМЛЯЮЩАЯ ПЛОСКОСТЬ — одна из плоскостей *Френе трехгранника*, проходящая через заданную точку A кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ и содержащая касательную $\boldsymbol{t}$ и бинормаль $\boldsymbol{b}$ к кривой, проведенные в заданной точке кривой. Уравнение С. п.:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}'\,[\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'']=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} X-x(A) & Y-y(A) & Z-z(A) \\ x'(A) & y'(A) & z'(A) \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}=0,$$

где $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(x(t),\ y(t),\ z(t))$ — уравнение кривой.
Л. А. Сидоров.

СПУСКА МЕТОД — метод решения задачи минимизации

$$f(x^*)=\min_x f(x),$$

где f — нек-рая функция переменной $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Итерационная последовательность $\{x^k\}$ С. м. вычисляется по формуле

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k g^k,$$

где g^k — вектор, указывающий нек-рое направление убывания функции f в точке x^k, а α_k — итерационный параметр, величина к-рого указывает длину шага в направлении g^k. Если функция f дифференцируема и x^k не является ее точкой экстремума, то вектор g^k должен удовлетворять неравенству

$$(f'(x^k),\ g^k)<0, \qquad (*)$$

где $f'(x^k)$ — градиент функции f в точке x^k.

Если f — достаточно гладкая функция (напр., дважды непрерывно дифференцируемая) и последовательность векторов $\{g^k\}$ удовлетворяет неравенству (*), то существует такая последовательность $\{\alpha_k\}$, что

$$f(x^0)>f(x^1)>\ldots>f(x^k)>\ldots$$

При определенных ограничениях (см. [3]) на функцию f и способ выбора параметров $\{\alpha_k\}$ и векторов g_k последовательность $\{x^k\}$ сходится к решению x^* исходной задачи.

К С. м. относятся градиентные методы, в к-рых векторы $\{g^*\}$ каким-либо образом выражаются через векторы $\{f'(x^k)\}$. Одним из наиболее распространенных является случай, когда

$$g^k=-B(x^k)f'(x^k),$$

где $B(x)$ — симметрическая матрица, удовлетворяющая для любых векторов x и y неравенству

$$m(x,\ x)\leqslant(B(y)x,\ x)\leqslant M(x,\ x)$$

с нек-рыми константами $M\geqslant m>0$. При дополнительных предположениях (см. [3]) относительно f и специальном выборе $\{\alpha_x\}$ градиентный метод обеспечивает сходимость последовательности $\{x^k\}$ к решению $\{x^*\}$ исходной задачи со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $g<1$. Частным случаем градиентных методов является *наискорейшего спуска метод*, в к-ром матрица $B(x)$ выбирается единичной.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, 2 изд.,

М., 1977; [2] Зойтендейк Г., Методы возможных направлений, пер. с англ., М., 1963; [3] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [4] Поляк Б. Т., «Ж. вычисл. математики и матем. физики», 1963, т. 3, № 4, с. 643—54. *Ю. А. Кузнецов.*

СРАВНЕНИЕ — соотношение между целыми числами a и b вида $a=b+mk$, означающее, что их разность $a-b$ делится на заданное целое положительное число m, наз. модулем сравнения; при этом a наз. *вычетом* целого числа b по модулю m. Для выражения сравнимости чисел a и b по модулю m употребляется символ

$$a \equiv b \pmod m.$$

Если разность $a-b$ не делится на m, то a и b наз. несравнимыми по модулю m и для выражения несравнимости a и b употребляется символ

$$a \not\equiv b \pmod m.$$

Наличие С. $a\equiv b \pmod m$ эквивалентно тому, что a и b имеют одинаковые остатки при делении на m.

Отношение сравнимости по фиксированному модулю m является отношением эквивалентности: оно рефлексивно, т. к. $a\equiv a \pmod m$, симметрично, т. к. из $a\equiv b \pmod m$ следует $b\equiv a \pmod m$, и транзитивно, т. к. из $a\equiv b \pmod m$ и $b\equiv c \pmod m$ следует, что $a\equiv c \pmod m$. Тем самым отношение «$\equiv \pmod m$» разбивает множество всех целых чисел на непересекающиеся классы эквивалентности A, B, C, . . . Два целых числа лежат в одном и том же классе тогда и только тогда, когда они сравнимы по модулю m. Эти классы наз. классами вычетов по модулю m. Каждое целое число сравнимо по модулю m лишь с одним из чисел 0, 1, . . ., $m-1$; числа 0, 1, . . ., $m-1$ лежат в различных классах, поэтому имеется в точности m классов вычетов, а числа 0, 1, . . ., $m-1$ образуют множество представителей этих классов. Любое множество из m целых чисел, взятых по одному из каждого класса вычетов, наз. полной системой вычетов по модулю m.

С. с одним и тем же модулем можно складывать, вычитать и перемножать подобно обычным равенствам, т. е. из

$$a \equiv b \pmod m \text{ и } c \equiv d \pmod m$$

следует, что

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m \text{ и } ac \equiv bd \pmod m.$$

Обе части С. можно умножить на одно и то же целое число, обе части С. можно разделить на их общий делитель, если последний взаимно прост с модулем С. Если же общий делитель числа, на к-рое делятся обе части С., и модуля С. m есть d, то после деления на d получается С. по модулю m/d.

Операции сложения, вычитания и умножения С. индуцируют подобные же операции над классами вычетов. Так, если a и b произвольные элементы из классов вычетов A и B соответственно, то $a+b$ всегда лежит в одном и том же классе вычетов, наз. суммой $A+B$ классов A и B. Аналогично определяется разность $A-B$ и произведение $A\cdot B$ двух классов вычетов A и B. Классы вычетов по модулю m образуют по сложению абелеву группу порядка m. Нулевым элементом этой группы является класс, состоящий из всех целых чисел, кратных числу m; обратным к классу A является класс A, состоящий из всех элементов класса A, взятых со знаком минус. Более того, классы вычетов по модулю m образуют кольцо относительно определенных выше операций сложения, вычитания и умножения.

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — многочлен от n переменных с целыми коэффициентами. Выражение вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod m \qquad (*)$$

наз. *алгебраическим сравнением*. Решением сравнения (*) наз. всякий набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ целых значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такой, что число $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ сравнимо с нулем по модулю m. Если a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, лежат соответственно в классах вычетов X_i по модулю m, то любой другой набор a_i', $1\leqslant i\leqslant n$, где $a_i'\in X_i$, также будет решением С. Поэтому принято наз. решением С. (*) также сам набор классов вычетов, представителями к-рых являются $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е. решение алгебраического уравнения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ в кольце классов вычетов по модулю m. При таком соглашении С. (*) будет иметь столько решений, сколько наборов классов вычетов полной системы по модулю m удовлетворяют уравнению $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$. Аналогично определяется число решений С. более общего вида, а также систем С.

С. 1-й степени

$$ax \equiv b \pmod m,$$

если a взаимно просто с m (что обозначается $(a, m)=1$), имеет единственное решение. Классы вычетов по модулю m, элементы к-рых взаимно просты с m, образуют абелеву группу по умножению. Единицей этой группы является класс E, содержащий число 1, и обратным к классу A является класс A^{-1}, содержащий решение x С.

$$ax \equiv 1 \pmod m, \text{ где } a\in A.$$

Классы вычетов по модулю m, элементы к-рых взаимно просты с m, наз. приведенными классами, а любая система чисел, взятых по одному из каждого приведенного класса, наз. приведенной системой вычетов. Приведенная система вычетов состоит из $\varphi(m)$ элементов, где $\varphi(m)$ — *Эйлера функция*, указывающая количество чисел в множестве 1, 2, . . ., m, взаимно простых с m.

Строение мультипликативной группы приведенных классов вычетов по модулю m в значительной степени выясняют теоремы Эйлера и Ферма, показывающие, что порядок любого ее элемента делит величину $\varphi(m)$.

Теорема Эйлера. Если a и m взаимно просты, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

(см. *Эйлера теорема*).

Частный случай этой теоремы для простого модуля — теорема Ферма: если p — простое число и a не делится на p, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

(см. *Ферма малая теорема*).

Важным понятием для изучения мультипликативной группы приведенных классов вычетов является понятие *первообразного корня* по модулю m. При $(a, m)=1$ существуют положительные целые γ с условием $a^\gamma \equiv 1 \pmod m$, напр. $\gamma=\varphi(m)$. Наименьшее из них наз. показателем, к-рому принадлежит число a по модулю m.

Числа, принадлежащие показателю $\varphi(m)$ (если такие существуют), наз. первообразными корнями по модулю m. Если g — первообразный корень по модулю m и γ пробегает полную систему вычетов по модулю $\varphi(m)$, то g^γ пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Таким образом, если $(a, m)=1$, то при нек-ром γ из множества 0, 1, . . ., $\varphi(m)-1$ имеет место С. $a\equiv g^\gamma \pmod m$. Такое γ наз. индексом числа a по модулю m при основании g и обозначается символом $\operatorname{ind} a$ или, более точно, $\operatorname{ind}_g a$. Свойства индекса во многом аналогичны свойствам логарифма. Первообразные корни существуют только для модулей $m>1$ вида 2, 4, p^α, $2p^\alpha$, где $p\geqslant 3$ — простое число и $\alpha\geqslant 1$ — целое. В этих случаях мультипликативная группа приведенных клас-

сов вычетов по модулю m имеет наиболее простую структуру, являясь циклической группой порядка $\varphi(m)$. В остальных случаях группы приведенных классов вычетов устроены значительно сложнее.

Многие задачи теории чисел сводятся к вопросу о разрешимости или неразрешимости того или иного типа С. Ввиду этого теория С., впервые систематически изложенная К. Гауссом (см. [5]) и поставленная им в основу классической теории чисел, до сих пор является одним из основных средств при решении теоретико-числовых задач. В этой связи фундаментальное значение для теории чисел имеет исследование вопроса о числе решений алгебраич. С. Простейшим типом алгебраич. С. являются С. 1-й степени с одним неизвестным $ax\equiv b\pmod m$. Полный ответ на вопрос о числе решений С. 1-й степени дает следующая теорема. Пусть $(a, m)=d$. Сравнение $ax\equiv b\pmod m$ неразрешимо, если b не делится на d. При b, кратном d, С. имеет ровно d решений.

Вопрос о разрешимости системы линейных С.

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}x_j \equiv b_i \pmod p,\ i=1, 2, \ldots, t,$$

по простому модулю $p>2$ полностью решается в общей теории линейных уравнений над произвольными полями. Случай составного модуля можно свести к случаю простого модуля.

Следующим по сложности изучения видом алгебраич. С. с одним неизвестным является *двучленное сравнение*

$$x^n \equiv a \pmod m \text{ при } (a, m)=1.$$

Если С. $x^n\equiv a\pmod m$ имеет решения, то a наз. вычетом степени n по модулю m. В противном случае a наз. невычетом степени n по модулю m. В частности, при $n=2$ вычеты или невычеты называются квадратичными, при $n=3$ — кубическими, а при $n=4$ — биквадратичными.

Вопрос о числе решений С.

$$f(x) \equiv 0 \pmod m$$

по составному модулю $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$ сводится к вопросу о числе решений С.

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

для каждого $i=1, 2, \ldots, s$. Имеет место следующая теорема: если $m_1, \ldots, m_r$ — попарно взаимно простые целые положительные числа, то число N решений С. $f(x)\equiv 0\pmod{m_1\ldots m_r}$ выражается через величины N_i, $i=1, 2, \ldots, r$, равные числу решений соответствующих С. $f(x)\equiv 0\pmod{m_i}$ по формуле $N=\prod_{i=1}^{r} N_i$. В свою очередь, вопрос о числе решений С.

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha},\ \alpha > 1,$$

в основном сводится к вопросу о числе решений С. $f(x)\equiv 0\pmod p$ по простому модулю p. Основой для такого сведения служит следующая теорема: всякое решение $x\equiv x_1\pmod p$ сравнения $f(x)\equiv 0\pmod p$ единственным образом продолжается до решения $x\equiv x_\alpha\pmod{p^\alpha}$ сравнения $f(x)\equiv 0\pmod{p^\alpha}$, если только формальная производная $f'(x_1)\not\equiv 0\pmod p$, т. е. найдется единственное решение x_α С. $f(x)\equiv 0\pmod{p^\alpha}$ такое, что $x_\alpha\equiv x_1\pmod p$.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае алгебраич. С. от нескольких переменных, т. е. в невырожденных случаях вопрос о числе решений С. $F(x_1, \ldots, x_n)\equiv 0\pmod m$ по составному модулю m редуцируется к вопросу о числе решений такого же С. по простому модулю.

Верхнюю границу для числа решений С. $f(x)\equiv 0\pmod p$, где $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $a_0\not\equiv 0\pmod p$, дает теорема Лагранжа: число решений С. $f(x)\equiv 0\pmod p$ не превосходит степени многочлена $f(x)$. Изучение вопроса о точном числе решений С. $f(x)\equiv 0\pmod p$ в общем случае встречает значительные трудности, и в этом направлении к настоящему времени (1984) получены лишь немногие результаты.

Утверждение теоремы Лагранжа перестает быть верным для составного модуля. Указанное специфическое свойство простых чисел объясняется тем, что классы вычетов по простому модулю p образуют поле (см. *Сравнение по простому модулю*). Другое специфическое свойство простых чисел, объясняемое тем же фактом, выражает *Вильсона теорема*.

При изучении квадратичных С.

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

по простому модулю p и для их приложений вводятся *Лежандра символ* и *Якоби символ*.

Алгебраич. С. по простому модулю с двумя неизвестными (и вообще с любым числом неизвестных)

$$F(x, y) \equiv 0 \pmod p$$

можно трактовать как уравнения над простым конечным полем из p элементов. Поэтому для их изучения наряду с методами теории чисел применяются методы теории алгебраич. функций и алгебраич. геометрии. Именно этими методами была впервые получена асимптотика вида

$$N_p = p + O(\sqrt{p})$$

для числа N_p решений широкого класса С. $F(x, y)\equiv 0\pmod p$. Такая же асимптотика была впоследствии выведена методами теории чисел без выхода за рамки теории С. (см. [6]).

Об алгебраич. С. от многих неизвестных известно сравнительно мало. В качестве общего результата можно привести следующее (теорема Шевалле). Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами, степень к-рого меньше n. Тогда число решений С.

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p$$

делится на простое число p. Сильный результат в этом круге вопросов получен П. Делинем [9] (см. также [10]).

Большое значение имеет также исследование вопроса о числе решений С. на неполной системе вычетов. Систематич. решение этого вопроса было начато работами И. М. Виноградова (см. [4]). В качестве примера задач такого типа может служить задача о распределении квадратичных вычетов и невычетов во множестве $1, 2, \ldots, p-1$, связанная с изучением решений С. $y^2\equiv x\pmod p$ (см. *Виноградова гипотезы*, *Распределение степенных вычетов и невычетов*).

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937; [3] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [4] Виноградов И. М., Избр. труды, М., 1952; [5] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с нем., М., 1959; [6] Степанов С. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 237—46; [7] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [8] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1974; [9] Deligne P., «Publ. Math. IHES», 1973, v. 43, p. 273—307; [10] Katz N. M., «Proc. Simp. Pure Math.», 1976, v. 28, p. 275—305. *С. А. Степанов.*

СРАВНЕНИЕ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ — сравнение вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod m, \qquad (1)$$

где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен от $n\geqslant 2$ переменных с целыми рациональными коэффициентами, не все из

к-рых делятся на m. Разрешимость такого сравнения для составного модуля $m=p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, \dots, p_s$ — различные простые числа, равносильна разрешимости сравнений

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha} i} \qquad (2)$$

для всех $i=1, \dots, s$. При этом число N решений сравнения (1) равно произведению $N_1 \dots N_s$, где N_i — число решений сравнения (2). Таким образом, при изучении сравнений вида (1) достаточно ограничиться модулями, являющимися степенями простых чисел.

Для разрешимости сравнения

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha}}, \ \alpha > 1, \qquad (3)$$

необходимо, чтобы было разрешимо сравнение

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p} \qquad (4)$$

по простому модулю p. В невырожденных случаях разрешимость сравнения (4) является также и достаточным условием для разрешимости сравнения (3). Точнее, справедливо следующее утверждение: каждое решение $x_i \equiv x_i^{(1)} \pmod{p}$ сравнения (4) такое, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, хотя бы для одного $i=1, 2, \dots, n$ порождает $p^{(\alpha-1)(n-1)}$ решений $x_i \equiv x_i^{(\alpha)} \pmod{p^{\alpha}}$ сравнения (3), причем $x_i^{(\alpha)} \equiv x_i^{(1)} \pmod{p}$ при $i=1, 2, \dots, n$.

Итак, в невырожденном случае вопрос о числе решений сравнения (1) по составному модулю m сводится к вопросу о числе решений сравнений вида (4) по простым модулям p, делящим m. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — абсолютно неприводимый многочлен с целыми рациональными коэффициентами, то для числа N_p решений сравнения (4) имеет место оценка

$$|N_p - p^{n-1}| \leqslant C(f)\, p^{n-1-1/2},$$

где константа $C(f)$ зависит только от многочлена f и не зависит от p. Из этой оценки, в частности, следует, что сравнение (4) разрешимо для всех простых p, больших нек-рой эффективно вычислимой константы $C_0(f)$, зависящей от данного многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$ (см. также *Сравнение по простому модулю*). Более сильный результат в этом вопросе получен П. Делинем [3].

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич П. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [3] Deligne P., «Publ. Math. IHÉS», 1973, v. 43, p. 273—307. *С. А. Степанов.*

СРАВНЕНИЕ ПО ДВОЙНОМУ МОДУЛЮ $(p, f(x))$ — соотношение между целочисленными многочленами $a(x)$ и $b(x)$ вида

$$a(x) - b(x) = f(x)\, g(x) + ph(x),$$

где p — простое число, а $f(x)=x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\dots+\alpha_n$, $g(x)$ и $h(x)$ — многочлены с целыми рациональными коэффициентами. Иными словами, многочлены $a(x)$ и $b(x)$ с целыми рациональными коэффициентами наз. сравнимыми по двойному модулю $(p, f(x))$, если их разность $a(x)-b(x)$ делится на $f(x)$ по модулю p. Для обозначения сравнимости $a(x)$ и $b(x)$ по двойному модулю $(p, f(x))$ используется символ

$$a(x) \equiv b(x) \pmod{p, f(x)},$$

введенный, как и само понятие «С. по д. м.», Р. Дедекиндом (R. Dedekind).

Сравнимость по двойному модулю является отношением эквивалентности на множестве всех целочисленных многочленов и, следовательно, разбивает это множество на непересекающиеся классы — классы вычетов по двойному модулю $(p, f(x))$. Поскольку каждый многочлен $a(x)$ сравним по двойному модулю $(p, f(x))$ с одним и только одним многочленом вида

$$\beta_1 x^{n-1} + \beta_2 x^{n-2} + \dots + \beta_n,$$

где $\beta_1, \dots, \beta_n$ пробегают независимо друг от друга полную систему вычетов по модулю p, то имеется в точности p^n классов вычетов по двойному модулю.

С. по д. м. можно складывать, вычитать и перемножать, подобно обычным сравнениям. Эти операции индуцируют аналогичные операции на классах вычетов по двойному модулю, превращая множество классов вычетов в коммутативное кольцо.

Кольцо классов вычетов по двойному модулю $(p, f(x))$ является факторкольцом кольца многочленов $K_p[x]$ с коэффициентами из простого конечного поля K_p по идеалу $(\bar{f}(x))$, порожденному многочленом $\bar{f}(x)$, полученному из $f(x)$ редукцией по модулю p. В частности, если $f(x)$ неприводим по модулю p, то $(\bar{f}(x))$ — максимальный идеал в $K_p[x]$ и $K_p[x]/(\bar{f}(x))$ — поле, состоящее из p^n элементов (расширение степени n простого поля K_p).

Если $f(x)$ неприводим по модулю p, то для сравнений по двойному модулю имеет место аналог *Ферма малой теоремы*:

$$a(x)^{p^n} \equiv a(x) \pmod{p, f(x)},$$

а также *Лагранжа теоремы*: сравнение

$$z^m + a_1(x)\, z^{m-1} + \dots + a_m(x) \equiv 0 \pmod{p, f(x)},$$

коэффициенты к-рого целочисленные многочлены, имеет не более m несравнимых по модулю $(p, f(x))$ решений. Из этих теорем можно получить, что

$$x^{p^n} - x \equiv \Pi_{d/n} \Phi_d(x) \pmod{p},$$

где $\Phi_d(x)$ — произведение всевозможных различных нормированных (т. е. со старшим коэффициентом 1) неприводимых по модулю p многочленов степени d. Если через (n) обозначить число различных нормированных неприводимых по модулю p многочленов степени n, то

$$(n) = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \mu(d)\, p^{\frac{n}{d}},$$

$\mu(d)$ — функция Мёбиуса и, в частности, $(n)>0$ для любого натурального n. Следовательно, для любого целого $n>0$ существует конечное поле K_q, состоящее из p^n элементов и являющееся расширением степени n поля вычетов K_p по простому модулю p.

Лит.: [1] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М—Л., 1937. *С. А. Степанов.*

СРАВНЕНИЕ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ — сравнение, в к-ром модуль является простым числом. Отличительной чертой теории С. по п. м. является то, что классы вычетов по модулю p образуют конечное поле из p элементов. Поэтому С. по п. м. можно трактовать как уравнения над простыми конечными полями и применять для их изучения, наряду с методами теории чисел, алгебро-геометрические методы.

Одним из основных вопросов теории сравнений от одного переменного x, имеющим важное значение в теории алгебраич. чисел, теории кодирования и других разделах математики, является вопрос об изучении законов разложения

$$f(x) \equiv f_1(x) \dots f_r(x) \pmod{p}$$

по простому модулю p произвольных целочисленных многочленов $f(x)$ на неприводимые сомножители.

Основным вопросом теории С. по п. м. p от $n \geqslant 2$ переменных является вопрос о числе решений *алгебраических сравнений*

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p},$$

когда $x_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ независимо друг от друга пробегают или все множество классов вычетов по модулю p (задачи на полную систему вычетов), или же нек-рую его собственную часть (задачи на неполную систему вычетов).

Первые результаты в исследовании вопроса о числе решений квадратичных и биквадратичных сравнений с двумя переменными были получены К. Гауссом [1] и Ж. Лагранжем [2]. Э. Артином [3] была установлена связь задачи о числе решений гиперэллиптич. сравнений $y^2\equiv f(x)\pmod p$ на полной системе вычетов по простому модулю p с гипотезой Римана для введенных им ζ-функций полей алгебраич. функций с конечным полем констант. В частности, им была высказана гипотеза, что для числа N_p решений сравнения $y^2\equiv f(x)\pmod p$, где многочлен $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ не является квадратом другого многочлена по модулю p, справедлива оценка

$$|N_p-p|\leqslant 2\left[\frac{n-1}{2}\right]p^{1/2}$$

(здесь $[x]$ — целая часть числа x).

Гипотеза Артина впервые была доказана Х. Хассе [6] для случая эллиптич. сравнений

$$y^2\equiv x^3+ax+b\pmod p.$$

Позже А. Вейль [8] распространил метод Хассе на общий случай и получил для числа N_q решений уравнения $f(x,\ y)=0$ в элементах поля F_q, состоящего из $q=p^r$ элементов, где $f(x,\ y)$ — абсолютно неприводимый многочлен с коэффициентами из F_q, оценку

$$|N_q-q|\leqslant c(f)\,q^{1/2}.$$

Метод Хассе — Вейля сложен и требует привлечения современного аппарата абстрактной алгебраич. геометрии. В работе [7] найден простой и чисто арифметич. метод доказательства результатов Хассе — Вейля.

Менее изучены С. по п. м. от n переменных. В качестве общего результата здесь можно указать следующую теорему. Пусть $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ абсолютно неприводимый многочлен с целыми рациональными коэффициентами. Тогда для числа N_p решений сравнения

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n)\equiv 0\pmod p,\quad n\geqslant 2,$$

имеет место оценка

$$|N_p-p^{n-1}|\leqslant c(f)\,p^{n-1-1/2},$$

где константа $c(f)$ не зависит от p. Более сильная оценка получена П. Делинем [9].

О С. по п. м. на неполной системе вычетов см. *Виноградова гипотезы*, *Двучленное сравнение*, *Распределение степенных вычетов и невычетов*.

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с нем., М., 1959; [2] Lagrange J. L., Oeuvres, t. 3, P., 1869, p. 189—201; [3] Artin E., «Math. Zeitschrift», 1924, Bd 19, S. 207—46; [4] Виноградов И. М., Избр. труды, М., 1952; [5] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [6] Hasse H., «Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ.», 1934, Bd 10, S. 325—47; [7] Степанов С. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 237—46; [8] Weil A., Sur les courbes algébriques et les variétés..., P., 1948; [9] Deligne P., «Publ. Math. IHES», 1973, v. 43, p. 273—307. *С. А. Степанов.*

СРАВНЕНИЕ ТОПОЛОГИЙ — отношение порядка в множестве всех топологий в одном и том же множестве. Топология $\mathscr{T}_1$ мажорирует топологию $\mathscr{T}_2$ (или $\mathscr{T}_1$ не слабее $\mathscr{T}_2$), если тождественное отображение $X_1\to X_2$, где X_i — множество X, наделенное топологией $\mathscr{T}_i$, $i=1,\ 2$, непрерывно. Если, кроме того, $\mathscr{T}_1\neq\mathscr{T}_2$, то $\mathscr{T}_1$ сильнее $\mathscr{T}_2$ (а $\mathscr{T}_2$ слабее $\mathscr{T}_1$).

Следующие предложения равносильны.

1) $\mathscr{T}_1$ мажорирует $\mathscr{T}_2$.

2) Каково бы ни было $x\in X$, всякая окрестность x в топологии $\mathscr{T}_2$ есть окрестность x в топологии $\mathscr{T}_1$.

3) Для любого $A\subset X$ замыкание A в топологии $\mathscr{T}_2$ индуцирует замыкание A в топологии $\mathscr{T}_1$.

4) Всякое множество из X, замкнутое в $\mathscr{T}_2$, замкнуто и в $\mathscr{T}_1$.

5) Всякое множество, открытое в $\mathscr{T}_2$, открыто и в $\mathscr{T}_1$.

В упорядоченном множестве топологий на X дискретная топология самая сильная, а топология, единственными замкнутыми множествами к-рой являются Ф и X, самая слабая. Говоря образно, чем топология сильнее, тем больше в X открытых множеств, замкнутых множеств, окрестностей; замыкание (соответственно, внутренность) множества тем меньше (соответственно, больше), чем топология сильнее, и тем меньше всюду плотных множеств.

М. И. Войцеховский.

СРАВНЕНИЯ ПРИЗНАК — 1) С. п. сходимости ряда с неотрицательными членами (см. *Ряд*).

2) С. п. сходимости несобственного интеграла от знакопостоянных функций (см. *Несобственный интеграл*).

СРАВНЕНИЯ ТЕОРЕМА в теории дифференциальных уравнений — теорема, утверждающая наличие определенного свойства решений дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) в предположении, что нек-рым свойством обладает вспомогательное уравнение или неравенство (система дифференциальных уравнений или неравенств).

Примеры С. т. 1) Теорема Штурма: любое нетривиальное решение уравнения

$$\ddot{y}+p(t)\,y=0,\quad p(\cdot)\in C[t_0,\ t_1],$$

обращается в нуль на отрезке $[t_0,\ t_1]$ не более m раз $(m\geqslant 1)$, если этим свойством обладает уравнение

$$\ddot{z}+q(t)\,z=0,\quad q(\cdot)\in C[t_0,\ t_1]$$

и $q(t)\geqslant p(t)$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ (см. [1]).

2) Дифференциальное неравенство: решение задачи

$$\dot{x}_i=f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\quad x_i(t_0)=x_i^0,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

покомпонентно неотрицательно при $t\geqslant t_0$, если этим свойством обладает решение задачи

$$\dot{y}_i=g_i(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\quad y_i(t_0)=y_i^0,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

и выполнены неравенства

$$f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\geqslant g_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),$$
$$x_i^0\geqslant y_i^0,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$
$$\partial f_i/\partial x_j\geqslant 0,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\quad i\neq j\ \text{(см. [2])}.$$

Другие примеры С. т., в том числе теорема Чаплыгина, см. в ст. *Дифференциальное неравенство*. О С. т. для дифференциальных уравнений с частными производными см., напр., [3].

Богатым источником для получения С. т. служит принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова (см. [4]—[7]). Идея принципа сравнения состоит в следующем. Пусть заданы система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t,\ x),\quad x=(x_1,\ \ldots,\ x_n) \tag{1}$$

и вектор-функции

$$V(t,\ x)=(V_1(t,\ x),\ \ldots,\ V_m(t,\ x)),$$
$$W(t,\ v)=(W_1(t,\ v),\ \ldots,\ W_m(t,\ v)),$$

где $v=(v_1,\ \ldots,\ v_m)$. Для любого решения $x(t)$ системы (1) функция $v_j(t)=V_j(t,\ x(t))$, $j=1,\ \ldots,\ m$, удовлетворяет равенству

$$\dot{v}_j(t)=\frac{\partial V_j(t,\ x(t))}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t,\ x(t))}{\partial x_k}\,f_k(t,\ x(t)).$$

Поэтому если выполнены неравенства

$$\frac{\partial V_j(t,\ x)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t,\ x)}{\partial x_k}f_k(t,\ x)\leqslant$$
$$\leqslant W_j(t,\ V(t,\ x)),\quad j=1,\ \ldots,\ m, \qquad (2)$$

то на основе свойств системы дифференц. неравенств

$$\dot{v}_j\leqslant W_j(t,\ v_1,\ \ldots,\ v_m),\ j=1,\ \ldots,\ m, \qquad (3)$$

можно судить о поведении функций $V_j(t,\ x(t))$, являющихся решениями системы (3). В свою очередь, знание поведения функций $V_j(t,\ x)$ на каждом решении $x(t)$ системы (1) позволяет выносить суждения о свойствах решений системы (1).

Напр., пусть вектор-функции $V(t,\ x)$, $W(t,\ v)$ удовлетворяют неравенствам (2) и для любых $t_1\geqslant t_0$, $\gamma>0$, существует число $M>0$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{m}|V_j(t,\ x)|\geqslant M$$

при всех $t\in[t_0,\ t_1]$, $\|x\|\geqslant\gamma$. Пусть, далее, каждое решение системы неравенств (3) определено на $[t_0,\ \infty)$. Тогда каждое решение системы (1) также определено на $[t_0,\ \infty)$.

Большое число содержательных утверждений получено на основе принципа сравнения в теории устойчивости движения [см. [4] — [6]]. Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова с успехом применяется для *дифференциального уравнения абстрактного, дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, дифференциального включения*. В частности, для дифференциального включения $\dot{x}\in F(t,\ x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, где $F(t,x)$ — множество в $\mathbb{R}^n$, зависящее от $(t,\ x)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$, роль неравенств (2) играют неравенства

$$\frac{\partial V_j(t,\ x)}{\partial t}+\sup_{y\in F(t,\ x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t,\ x)}{\partial x_k}y_k\leqslant$$
$$\leqslant W_j(t,\ V(t,\ x)).$$

Большое число теорем сравнения приведено в [8].

Лит.: [1] Sturm C., «J. math. pures et appl.», 1836, t. 1, p. 106—86; [2] Ważewski T., «Ann. Soc. polon. math.», 1950, t. 23, p. 112—66; [3] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [4] Bellman R., «J. Soc. industr. and appl. math. Ser. A Control.», 1962, v. 1, № 1, p. 32—34; [5] Матросов В. М., «Дифференц. уравнения», 1968, т. 4, № 8, с. 1374—86, № 10, с. 1739—52, 1969, т. 5, № 7, с. 1171—85, № 12, с. 2129—43; [6] Мартынюк А. А., Устойчивость движения сложных систем, К., 1975; [7] Мартынюк А. А., Гутовски Р., Интегральные неравенства и устойчивость движения, К., 1979; [8] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976. *Е. Л. Тонков.*

СРАВНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ в алгебраической геометрии — теоремы о связях между гомотопическими инвариантами схем конечного типа над полем $\mathbb{C}$ в классической и этальной топологиях.

Пусть X — схема конечного типа над $\mathbb{C}$, а F — конструктивный периодический пучок абелевых групп на $X_{\text{étale}}$. Тогда F индуцирует пучок на X в классической топологии и существуют канонич. изоморфизмы

$$H^q(X_{\text{étale}},\ F)\cong H^q(X_{\text{class}},\ F).$$

С другой стороны, конечное топологич. накрытие гладкой схемы X конечного типа над $\mathbb{C}$ имеет единственную алгебраич. структуру (теорема существования Римана). Поэтому [1] этальная фундаментальная группа $X_{\text{étale}}$ является проконечным пополнением обычной группы классов гомотопически эквивалентных петель:

$$\pi_1(X_{\text{étale}})=\widehat{\pi_1(X_{\text{class}})}.$$

Если, кроме того, X_{class} односвязна, то $X_{\text{ét}}=\hat{X}_{\text{cl}}$, где X_{cl} и $X_{\text{ét}}$ — классический и этальный гомотопические типы схемы X соответственно (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Artin M., в сб.: Тр. международного конгресса математиков. Москва, 1966, М., 1968, с. 44—56; [2] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975. *С. Г. Танкеев.*

СРАВНЕНИЯ ФУНКЦИЯ — функция, применяемая при исследовании характера роста модуля *целой функции* $a(z)$ при $z\to\infty$; при этом обычно сравнивают поведение $|a(z)|$ с поведением нек-рой в том или ином смысле «хорошей» целой функции $A(z)$. В связи с этим естественным образом возникает задача об описании достаточно обширного множества целых функций $\mathfrak{A}=\{A(z)\}$, элементы к-рого успешно выполняли бы роль «эталонов сравнения».

Целая функция $A(z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kz^k$ наз. функцией сравнения или $A(z)\in\mathfrak{A}$, если: 1) $A_k>0$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ldots$), 2) $\frac{A_{k+1}}{A_k}\searrow 0$ при $k\to\infty$. Целая функция $a(z)$ наз. A-сравнимой, если существует такая постоянная τ, $\tau>0$, что

$$a(z)=O(A(\tau|z|))\ \text{при}\ z\to\infty. \qquad (1)$$

Нижняя грань σ чисел $\{\tau\}$, для к-рых выполняется соотношение (1), наз. A-типом A-сравнимой целой функции $a(z)$. Имеет место теорема об A-типе: если целая функция $a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ сравнима с $A(z)$, $A(z)\in\mathfrak{A}$, то ее A-тип σ вычисляется по формуле

$$\sigma=\lim_{k\to\infty}\sup\left|\frac{a_k}{A_k}\right|^{1/k}. \qquad (2)$$

Выделенный класс $\mathfrak{A}$ С. ф. в известном смысле полностью решает поставленную задачу, ибо какова бы ни была целая функция $a(z)$, отличная от полинома, существует С. ф. $A(z)$, $A(z)\in\mathfrak{A}$, такая, что $a(z)$ сравнима с $A(z)$ и ее A-тип равен 1.

Если целая функция $a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ сравнима с $A(z)$, $A(z)\in\mathfrak{A}$, и ее A-тип равен σ, то функция

$$\gamma_A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k/A_k}{t^{k+1}}$$

аналитическая, согласно (2), при $|t|>\sigma$, наз. A-ассоциированной с $a(z)$. В этом случае для $a(z)$ имеет место обобщенное представление Бореля:

$$a(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\sigma+\varepsilon}A(zt)\gamma_A(t)\,dt\quad(\forall\varepsilon,\ \varepsilon>0). \qquad (3)$$

Если в качестве С. ф. в (3) фигурирует $A(z)\equiv e^z$, то (3) является классическим интегральным представлением Бореля целых функций экспоненциального типа σ.

Если же в (3) имеет место $A(z)\equiv E_\rho(z)$, где $E_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/\Gamma(1+k/\rho)$ ($\rho>0$) есть функция Миттаг-Леффлера, то (3) — интегральное представление для любой целой функции $a(z)$ порядка ρ типа $\sigma^{1/\rho}$ ($\sigma^{1/\rho}$ — тип $a(z)$ в классич. смысле).

Для нек-рых частных случаев $A(z)$ построено преобразование, обратное (3) (см., напр., [1], где имеется библиография, относящаяся к С. ф.). С. ф. и A-представление Бореля (3) находят применение в различных вопросах анализа (см., напр., [2], [3]). Если $[A;\infty)$ — класс целых функций, сравнимых с данной С. ф. $A(z)$, то, какова бы ни была последовательность С. ф. $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, всегда существует целая функция $a(z)$ такая, что $a(z)\notin\bigcup_{n=0}^{\infty}[A_n;\infty)$.

Лит.: [1] Boas R. P., Buck R. C., Polynomial expansions of analytic functions, B.— [u. a.], 1958; [2] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [3] Казьмин Ю.А., «Матем. сб.», 1973, т. 90, № 4, с. 521—43. *Ю. А. Казьмин.*

СРЕДНЕЕ с в е с о м $q=(q_1, \ldots, q_n)$, $q_i>0$, $\sum q_i=1$, совокупности действительных чисел $a=(a_1, \ldots, a_n)$ — величина

$$\mathfrak{M}_\varphi(a, q)=\varphi^{-1}\left(\sum_i q_i\varphi(a_i)\right),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная строго монотонная функция на $\mathbb{R}$. При $\varphi(x)=x^r$ получается

$$\mathfrak{M}_r(a, q)=\left(\sum_i q_i a_i^r\right)^{1/r}$$

и, в частности, при $r=1$, $q_i=\frac{1}{n}$, $i=1, \ldots, n$, $\mathfrak{M}_r\left(a, \frac{1}{n}\right)=\mathfrak{A}(a)$ будет с р е д н и м а р и ф м е т и ч е с к и м чисел $a_1, \ldots, a_n$, а при $r=-1$ — с р е д н и м г а р м о н и ч е с к и м. Отдельно вводятся понятия с р е д н е г о г е о м е т р и ч е с к о г о $\mathfrak{G}(a)=\left(\prod_i a_i\right)^{1/n}$ и в з в е ш е н н о г о с р е д н е г о г е о м е т р и ч е с к о г о $\mathfrak{G}(a, p)=\left(\prod_i a_i^{p_i}\right)^{1/\sum_i p_i}$.

Одним из основных результатов теории С. является неравенство $\mathfrak{G}(a)<\mathfrak{A}(a)$, кроме случая, когда все a_i равны между собой. Другие результаты:

1) $\mathfrak{M}_\varphi(ka, p)=k\mathfrak{M}_\varphi(a, p)$, $k>0$;

2) $\mathfrak{M}_\psi(a, p)=\mathfrak{M}_\varphi(a, p) \Leftrightarrow \psi=\alpha\varphi+\beta$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$;

3) $\mathfrak{M}_\psi(a, p)\leqslant\mathfrak{M}_\varphi(a, p) \Leftrightarrow \varphi\circ\psi^{-1}$ — выпуклая функция, в частности $\mathfrak{M}_r(a, p)\leqslant\mathfrak{M}_s(a, p)$, если $r<s$.

Понятие «С.» может быть распространено на бесконечные последовательности в предположении, что соответствующие ряды и произведения сходятся, и на функции. Таково, напр., С.

$$\mathfrak{M}_\varphi(f, p)=\varphi^{-1}\left(\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\,dx\right)\Big/\int_a^b p(x)dx$$

при условии, что $f(x)\geqslant 0$ в соответствующем промежутке почти всюду и $p(x)>0$. При этом

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx\leqslant\mathfrak{M}_\varphi(f, p)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Х а р д и Г., Л и т т л ь в у д Д., П о л и а Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948. *В. И. Соболев.*

СРЕДНЕЕ ДВИЖЕНИЕ аргумента $\arg f(t)$ комплекснозначной равномерной почти периодической функции $f(t)$ — явление, состоящее в существовании (при нек-рых условиях, см. ниже) предела

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\arg f(t)=c;$$

С. д. наз. также сам этот предел. Если $|f(t)|\neq 0$ при всех t, то подразумевается, что выбрана непрерывная ветвь $\arg f(t)$. Для аналитических почти периодических функций можно сохранить понятие о С. д. даже при наличии нулей у f. Именно, вводят «правый» и «левый» аргументы, претерпевающие в k-кратном нуле f скачок на $\pm k\pi$, и соответственно говорят о правом и левом С. д., а если они совпадают, то просто о С. д.

Вопрос о С. д. возник в связи с тем, что в небесной механике долгота перигелия планеты выражается (в нек-ром приближении) как аргумент нек-рого тригонометрич. полинома

$$f=\sum_{j=1}^n a_j\exp(i\omega_j t).$$

Ж. Лагранж, рассмотрев два простых случая, когда одно из $|a_j|$ больше, чем сумма остальных коэффициентов, и когда $n=2$, отметил, что в прочих случаях вопрос представляется сложным. Изучением этого вопроса занялись лишь в 20 в. (об истории см. [1] — [3]). Окончательный результат — у тригонометрич. полинома всегда существует С. д.— был высказан Б Иессеном в 1938 (доказательство см. в [1]). (С точки зрения теории динамических систем, речь идет об осреднении нек-рой функции на торе вдоль траекторий потока, определяемого сдвигами на элементы однопараметрической подгруппы. Однако эта функция имеет особенности, что препятствует автоматич. применению соответствующей общей теоремы.) Еще раньше Х. Бор (H. Bohr) доказал существование С. д. для любой равномерной почти периодической функции, для к-рой $\inf|f(t)|>0$ (см. [4]). В этом случае разность $\arg f(t)-ct$ является равномерной почти периодической функцией и, в частности, ограничена. Было исследовано С. д. аналитических почти периодических функций в общем случае (см. [1], [4]). В этом случае С. д. существует не всегда, а если существует, то разность $\arg f(t)-ct$ не обязана быть ограниченной. Все же она может обладать нек-рыми обобщенными свойствами почти периодичности; в частности, это так для тригонометрич. полиномов [5]. Исключая аналитич. случай, имеются лишь отдельные результаты о С. д. для f, у к-рых $|f(t)|\neq 0$, $\inf|f(t)|=0$ (см. [6], [7]).

Лит.: [1] J e s s e n B., T o r n h a v e H., «Acta math.», 1945, v. 77, p. 137—279; [2] И е с с е н Б., в кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 г., М., 1961, с. 151—64; [3] В е й л ь Г., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 213—19; [4] Л е в и т а н Б. М., Почти периодические функции, М., 1953; [5] D o s s R., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, № 2, p. 389—96; [6] Л е в и т а н Б. М., «Матем. заметки», 1967, т. 1, № 1, с. 35—44; [7] Г о р и н Е. А., «Матем. сб.», 1970, т. 82, № 2, с. 260—72. *Д. В. Аносов.*

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ф у н к ц и и — приближение функции $f(t)$ функцией $\varphi(t)$ в случае, когда мера погрешности $\mu(f; \varphi)$ определяется формулой

$$\mu_\sigma(f; \varphi)=\int_a^b[f(t)-\varphi(t)]^2\,d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая на $[a, b]$ функция, отличная от постоянной.

Пусть

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t), \ldots \qquad (*)$$

— ортонормированная на $[a, b]$ относительно распределения $d\sigma(t)$ система функций. В случае С. п. функции $f(t)$ линейными комбинациями $\sum_{k=1}^n\lambda_k u_k(t)$ минимальную погрешность при каждом $n=1, 2, \ldots$ дают суммы

$$\sum_{k=1}^n c_k(f)\,u_k(t),$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по системе (*), так что наилучший метод приближения является линейным.

Лит.: [1] Г о н ч а р о в В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] С е г е Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962. *Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.*

СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования рядов и последовательностей. Ряд

$$\sum_{k=0}^\infty u_k$$

с у м м и р у е м м е т о д о м с р е д н и х а р и ф м е т и ч е с к и х к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}=s,$$

где $s_n=\sum_{k=0}^n u_k$. В этом случае говорят также, что последовательность $\{s_n\}$ суммируема методом средних арифметических к пределу s. С. а. м. с. наз. также *Чезаро методом суммирования* первого порядка. С. а. м. с. является вполне регулярным (см. *Регулярные методы*

суммирования) и транслятивным (см. *Транслятивность метода суммирования*).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *И. И. Волков.*

СРЕДНЯЯ КРИВИЗНА поверхности Φ^2 в евклидовом трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ — полусумма *главных кривизн* k_1 и k_2, вычисленных в точке A этой поверхности:

$$H(A)=\frac{1}{2}(k_1+k_2).$$

Для гиперповерхности Φ^n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ эта формула обобщается следующим образом:

$$H(A)=\frac{1}{n}(k_1+k_2+\ldots+k_n),$$

где k_i, $i=1, 2, \ldots, n$,— главные кривизны гиперповерхности, вычисленные в точке $A\in\Phi^n$.

С. к. поверхности в $\mathbb{R}^3$ может быть выражена через коэффициенты первой и второй квадратичных форм этой поверхности:

$$H(A)=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2},$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы, L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы, вычисленные в точке $A\in\Phi^2$. В частном случае задания поверхности уравнением $z=f(x, y)$ С. к. вычисляется по формуле:

$$H(A)=\frac{\left(1+f'^2_y\right)f''_{xx}-2f'_xf'_yf''_{xy}+\left(1+f'^2_x\right)f''_{yy}}{\left(1+f'^2_x+f'^2_y\right)^{3/2}},$$

к-рая обобщается для гиперповерхности Φ^n в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданной уравнением $x_{n+1}=f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$H(A)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(1+p^2-f'^2_{x_i}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}}{(1+p^2)^{3/2}},$$

где

$$p^2=|\operatorname{grad} f|^2=f'^2_{x_1}+f'^2_{x_2}+\ldots+f'^2_{x_n}.$$

Л. А. Сидоров.

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Третья сторона треугольника при этом наз. основанием треугольника. С. л. треугольника параллельна основанию и равна половине его длины. Во всяком треугольнике С. л. отсекает от него треугольник, ему подобный.

С. л. трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. С. л. трапеции параллельна ее основаниям и равна полусумме их длин. *БСЭ-3.*

СТАБИЛИЗАТОР элемента a множества M — подгруппа G_a группы подстановок G, действующей на M, состоящая из всех подстановок, оставляющих на месте элемент a: $G_a=\{g\mid g\in G,\ ag=a\}$. С. элемента a наз. также группой изотропии элемента a или стационарной подгруппой этого элемента. Если $b\in M$, $f\in G$ и $af=b$, то $G_b=f^{-1}G_af$. Если рассматривается действие группы G на себе самой посредством сопряжений, С. элемента a будет *централизатором* этого элемента в G; если группа действует посредством сопряжений на множестве своих подгрупп, то С. подгруппы H будет *нормализатором* этой подгруппы. *Н. Н. Вильямс.*

СТАБИЛЬНАЯ ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ГРУППА, k-я стабильная гомотопическая группа $\pi_k^s(X)$ топологич. пространства X,— индуктивный предел последовательности

$$\pi_k(X)\xrightarrow{E}\pi_{k+1}(EX)\xrightarrow{E}\pi_{k+2}(E^2X)\xrightarrow{E}\ldots, \qquad (*)$$

где EY — *надстройка* над топологич. пространством Y. Гомоморфизм надстройки $E:\pi_m(Y)\to\pi_{m+1}(EY)$ относит классу сфероида $f: S^m\to Y$ класс сфероида $Ef: ES^m=S^{m+1}\to EY$, где Ef получается факторизацией из отображения $f\times\mathrm{id}\,(0, 1]$. Последовательность $(*)$ стабилизируется в $(k+3)$-м члене (см. [2]) так, что $\pi_k^s(X)=\pi_{k+2}(E^{k+2}X)$.

Для вычисления С. г. г. используют *спектральную последовательность* Адамса (см. [1]). До настоящего времени (1984) С. г. г. ни одного нестягиваемого пространства полностью не известно. Частичные вычисления имеются для *сфер гомотопических групп*, бесконечномерного вещественного проективного пространства и нек-рых других пространств.

Лит.: [1] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969; [2] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974. *Д. Б. Фукс.*

СТАБИЛЬНОСТИ ТЕОРЕМЫ в алгебраической K-теории — утверждения о неизменности групп $K_i(R)$ или их подгрупп при нек-рых специальных расширениях основного кольца R (см. *Алгебраическая K-теория*).

Наиболее известны следующие теоремы стабильности. Пусть R — регулярное кольцо и $R[t_1, \ldots, t_n]$ — кольцо многочленов от переменных $t_1, \ldots, t_n$ над R. Теорема стабильности для групп Уайтхеда при переходе от R к $R[t_1, \ldots, t_n]$ утверждает [1], что естественный гомоморфизм вложения R в $R[t_1, \ldots, t_n]$ индуцирует изоморфизм между $K_1(R)$ и $K_1(R[t_1, \ldots, t_n])$.

В случае конечномерного над своим центром $Z(R)$ тела R определен гомоморфизм приведенной нормы $\mathrm{Nrd}_R: R^*\to Z(R)^*$ мультипликативной группы R^* тела R в мультипликативную группу $Z(R)^*$ его центра. Ядро этого гомоморфизма, обычно обозначаемое $SL(1, R)$, определяет приведенную группу Уайтхеда $SK_1(R)$ тела R:

$$SK_1(R)\simeq SL(1, R)/[R^*, R^*]$$

(см. *Специальная линейная группа*), являющуюся подгруппой в $K_1(R)$. Если $Z(R)(t_1, \ldots, t_n)$ — поле рациональных функций от $t_1, \ldots, t_n$ над $Z(R)$, то алгебра

$$R(t_1, \ldots, t_n)=R\otimes_{Z(R)}Z(R)(t_1, \ldots, t_n)$$

является телом и естественное вложение $\varphi_{t_1, \ldots, t_n}$ тела R в $R(t_1, \ldots, t_n)$ индуцирует гомоморфизм

$$\psi'_{t_1, \ldots, t_n}: SK_1(R)\longrightarrow SK_1(R(t_1, \ldots, t_n)).$$

Теорема стабильности для приведенных групп Уайтхеда утверждает, что гомоморфизм $\psi'_{t_1, \ldots, t_n}$ биективен ([2], см. также [3]). Аналогичное утверждение имеет место и в унитарной алгебраич. K-теории (см. [4]).

С. т. наз. также теоремы о стабилизации для K_i-функторов при переходе от стабильных объектов $K_i(R)$ к нестабильным (см. [5]).

Лит.: [1] Bass H., Heller A., Swan R., «Publ. Math. IHES», 1964, № 22, p. 61—79; [2] Платонов В. П., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 198—207; [3] Платонов В. П., Янчевский В. И., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 5, с. 1064—68; [4] Янчевский В. И., «Матем. сб.», 1979, т. 110, № 4, с. 579—96; [5] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973. *В. И. Янчевский.*

СТАБИЛЬНЫЕ И НЕСТАБИЛЬНЫЕ ТЕОРИИ — раздел *моделей теории*, изучающий стабильность *элементарных теорий*. Пусть T — полная теория первого порядка сигнатуры Ω, A — модель теории T и $X\subseteq|A|$. Сигнатура $\langle\Omega, X\rangle$ получается из Ω добавлением символов c_a выделенных элементов для всех $a\in X$. Система $\langle A, X\rangle$ имеет сигнатуру $\langle\Omega, X\rangle$ и является обогащением модели A, в к-ром c_a интерпретируется как a для всех $a\in X$. Теория $T(A, X)$ представляет собой совокупность истинных в $\langle A, X\rangle$

формул сигнатуры $\langle\Omega, X\rangle$. Множество максимальных, совместных с $T(A, X)$, множеств формул сигнатуры $\langle\Omega, X\rangle$, не содержащих свободных переменных, отличных от нек-рого фиксированного v_0, обозначается через $S(A, X)$. Теория T наз. стабильной в мощности λ, если для любой модели A теории T и любого $X\subseteq|A|$, мощность к-рого не превосходит λ, мощность $S(A, X)$ также не превосходит λ. Теория наз. стабильной, если она стабильна хотя бы в одной бесконечной мощности.

Пусть $|T|$ обозначает мощность множества формул сигнатуры Ω. Если теория T стабильна, то она стабильна во всех мощностях, удовлетворяющих равенству $\lambda=\lambda^{|T|}$. Если теория T стабильна, то существуют модель A теории T и бесконечное множество $Y\subseteq|A|$ такие, что для любой формулы $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ сигнатуры Ω и для любых двух последовательностей $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ различных элементов множества Y истинность $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ в A эквивалентна истинности $\varphi(b_1, \ldots, b_n)$ в A; при этом множество Y наз. множеством неразличимых в T элементов. Оказывается, что характеристич. свойством нестабильных теорий является существование множества, имеющего в определенном смысле противоположные свойства. А именно, нестабильность теории T эквивалентна существованию формулы $\varphi(v_1, \ldots, v_n; u_1, \ldots, u_n)$ сигнатуры Ω, модели A теории T и последовательности $\langle a_1^0, \ldots, a_n^0\rangle, \ldots, \langle a_1^k, \ldots, a_n^k\rangle, \ldots$ наборов элементов A таких, что истинность $\varphi(a_1^i, \ldots, a_n^i; a_1^j, \ldots, a_n^j)$ в A равносильна неравенству $i<j$. Поэтому нестабильны полные расширения теории линейно упорядоченных множеств, имеющие бесконечные модели, а также теория любой бесконечной *булевой алгебры*. В частности, нестабильна теория натуральных чисел со сложением и теория поля действительных чисел. Если теория T нестабильна, то число типов изоморфизма моделей T в каждой несчетной мощности $\lambda>|T|$ равно 2^λ. Поэтому теория T, категоричная в несчетной мощности $\lambda>|T|$, стабильна. Существуют, однако, стабильные теории, не категоричные ни в какой бесконечной мощности. Такова теория T_1, сигнатура к-рой состоит из одноместного предиката и счетного множества выделенных элементов. Аксиомы этой теории утверждают, что предикат истинен на выделенных элементах и делит каждую модель T_1 на два бесконечных множества, а также что выделенные элементы не равны между собой.

Теории конечной или счетной сигнатуры, стабильные в счетной мощности, наз. также тотально трансцендентными. Всякая тотально трансцендентная теория стабильна во всех бесконечных мощностях. Всякая категоричная в несчетной мощности теория конечной или счетной сигнатуры является тотально трансцендентной. Упомянутая выше теория T_1 тотально трансцендентна. Тотально трансцендентные теории можно характеризовать и в других терминах. Пусть T — полная теория конечной или счетной сигнатуры Ω, A — бесконечная модель теории T. Формуле $\varphi(v_0)$ сигнатуры $\langle\Omega, |A|\rangle$ припишем ранг -1, если она ложна на всех элементах модели $\langle A, |A|\rangle$, и ранг α (α — ординал), если ей не приписан никакой ранг, меньший α, но для каждого элементарного расширения B системы A и для каждой формулы $\psi(v_0)$ сигнатуры $\langle\Omega, |B|\rangle$ одной из формул $\psi(v_0)\,\&\,\varphi(v_0)$ или $\neg\psi(v_0)\,\&\,\varphi(v_0)$ приписан ранг, меньший α. Теория T тогда и только тогда является тотально трансцендентной, когда для каждой модели A теории T каждой формуле φ сигнатуры $\langle\Omega, |A|\rangle$ приписан нек-рый ранг.

Лит.: [1] Shelah S., «Ann. of math. logic», 1971, v. 3, № 3, p. 271—362; [2] его же, Classification theory and the number of non-isomorphic models, Amst.—[a. o.], 1978.

Е. А. Палютин, М. А. Тайцлин.

СТАБИЛЬНЫЙ РАНГ кольца R — наименьшее число d такое, что любой d-порожденный проективный модуль над R свободен. Кольцо R здесь предполагается ассоциативно-коммутативным. Для некоммутативных колец аналогичным образом определяемые левый и правый С. р. могут и не совпадать между собой.

О. А. Иванова.

СТАНДАРТИЗАЦИИ И УНИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, в к-рых требуется определить оптимальные ряды изделий и их составных частей.

Оптимальный ряд изделий — это такой набор различных типов изделий, взятых из исходного ряда, к-рый позволяет удовлетворить все заданные виды спроса в требуемом объеме с минимальными суммарными затратами на разработку, производство и эксплуатацию всех изделий. Оптимальный ряд изделий существует, поскольку с ростом числа типов изделий затраты на их разработку монотонно возрастают, а серийные и эксплуатационные затраты — убывают.

Терминологич. различие между задачами стандартизации и задачами унификации является в определенной степени условным. Существуют различные взгляды на вопрос о разграничении задач стандартизации и унификации. Напр., к задачам стандартизации относят задачи выбора оптимальных рядов относительно простых деталей и изделий, производимых массовыми сериями, тогда как к задачам унификации относят задачи выбора оптимальных рядов сложных дорогостоящих изделий и их составных частей. Другой подход к разграничению задач стандартизации и унификации основан на учете степени детальности, с к-рой исследуется структура изделий, входящих в исходный ряд. Если изделия различного типа, входящие в исходный ряд, полностью отличаются друг от друга и не имеют одинаковых, т. е. унифицированных составных частей, то говорят об одноуровневой задаче стандартизации, или просто о задаче стандартизации. Если изделия ряда рассматриваются с учетом их структуры и того, что изделия различного типа могут иметь унифицированные составные части, то говорят о двухуровневой задаче стандартизации. При дальнейшем рассмотрении структуры составных частей изделий можно получить n-уровневую задачу стандартизации. Задачи унификации — это n-уровневые задачи стандартизации с числом уровней $n>1$. Если предположить, что при определении оптимальных рядов сложных изделий, как правило, должны одновременно определяться оптимальные ряды их наиболее важных составных частей, то два описанных подхода к разграничению задач стандартизации и унификации совпадут.

Наиболее простым количественным методом, предназначенным для решения задач стандартизации при установлении рациональных параметров и размеров машин и оборудования, является использование системы предпочтительных чисел, основанной на применении геометрич. прогрессий. Установленные ряды предпочтительных чисел $R5$, $R10$, $R20$, $R40$ представляют собой ряды геометрич. прогрессий со знаменателями соответственно

$$\sqrt[5]{10}\approx 1{,}6,\quad \sqrt[10]{10}\approx 1{,}25,$$
$$\sqrt[20]{10}\approx 1{,}12,\quad \sqrt[40]{10}\approx 1{,}06.$$

Если для рассматриваемого класса изделий обоснована оптимальность одного из этих рядов и выбрано минимальное значение главного параметра a_0, то можно получить значения главного параметра всех остальных изделий ряда, округляя в случае необходимости величины a_0q^n, $n=1, 2, \ldots$, где q — знаменатель выбранного ряда.

Подход, основанный на системе предпочтительных чисел, дает весьма приближенное решение задач стандартизации. К тому же область применимости этого подхода ограничена узким классом сравнительно простых, одномерных задач стандартизации, в к-рых изделия ряда характеризуются одним главным параметром. В большинстве случаев, особенно если рассматриваются сложные и дорогостоящие изделия, к-рые невозможно охарактеризовать одним главным параметром, оптимальное решение задач стандартизации и унификации следует определять с привлечением более строгих математич. методов.

Математич. модели, разрабатываемые для решения задач стандартизации и унификации, сводятся в общем случае к достаточно сложным многоэкстремальным задачам нелинейного программирования, решение к-рых требует привлечения современных вычислительных методов и ЭВМ с высоким быстродействием и большой памятью.

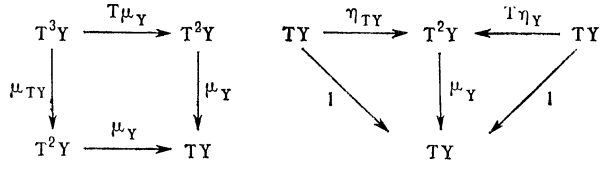
Для специально выделенных классов задач стандартизации и унификации, в к-рых удается существенно использовать их специфику, возможно построение более простых эффективных методов решения.

Лит.: [1] Коктев А. А., Основы стандартизации в машиностроении, 4 изд., М., 1973; [2] Чуев Ю. В., Спехова Г. П., Технические задачи исследования операций, М., 1971; [3] Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т., Экстремальные задачи стандартизации, Новосиб., 1978; [4] Вапнярский И. Б., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1978, т. 18, № 2, с. 484—87.

И. Б. Вапнярский.

СТАНДАРТНАЯ КОНСТРУКЦИЯ — понятие гомологич. алгебры. Другие названия — тройка, монада, функтор-алгебра.

Пусть $\mathfrak{S}$ — нек-рая категория. Стандартной конструкцией наз. функтор $T:\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}$, для к-рого заданы такие функторные морфизмы $\eta:1\to T$ и $\mu:T^2\to T$, что коммутативны диаграммы:



Основная область применения С. к. в топологии — построение различных классифицирующих пространств и их алгебраич. аналогов — т. н. бар-конструкций.

Лит.: [1] Бордман Дж., Фогт Р., Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. [Дополнение], пер. с англ., М., 1977.

Ю. Б. Рудяк.

СТАНДАРТНАЯ ПРОГРАММА, подпрограмма,— программа, представляющая собой описание вычислительного алгоритма решения задачи на одном из алгоритмич. языков (языков программирования) в рамках специальных требований операционной системы и системы программирования, допускающих ее использование (в содержательном смысле) в качестве конструктивного элемента процесса решения более общей задачи на ЭВМ. Обычно понятие С. п. относят к области применения математич. методов в численных расчетах на ЭВМ (вычислительная математика, математич. статистика и др.), хотя оно применимо и к другим сферам использования вычислительной техники. Совокупности С. п., как правило, оформляются в виде библиотек С. п., а также могут служить основой функционального наполнения пакетов прикладных программ. Библиотеки С. п. представляют собой определенным образом организованную совокупность загрузочных, объектных или исходных модулей, хранящихся во внешней памяти ЭВМ, к к-рой может обращаться операционная система. При составлении С. п. могут учитываться дополнительные требования: модульный принцип, дисциплина программирования, самодокументированность, фильтрация входных данных и диагностика ошибок, обеспечение качества и др. Помимо штатных программных средств *математического обеспечения* могут использоваться инструментальные системы автоматизации конструирования библиотек С. п. для классов ЭВМ (системы верификации, преобразования и генерации программ, форматирования, тестирования, документально-справочные, автоматизации комментирования и др.). Для библиотек С. п. актуальны вопросы разработки проблемно-ориентированных языков, что наряду с вопросами разработки архитектуры и средств управления базами данных, а также средств управления решением задач делает проблематику создания библиотек С. п. близкой к проблематике создания пакетов прикладных программ. Математич. обеспечение современных ЭВМ включает обширные библиотеки С. п., составляющие основу специального метода *автоматизации программирования* (метод библиотечных программ).

Лит.: [1] Воеводин В. В., Арушанян О. Б., в сб.: Численный анализ на ФОРТРАНе, М., 1979, с. 73—83; [2] Карпов В. Я., Корягин Д. А., Самарский А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1978, т. 18, № 2, с. 458—67.

О. Б. Арушанян.

СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ — то же, что *квадратичное отклонение*.

СТАНДАРТНЫЙ СИМПЛЕКС — 1) С. с.— симплекс Δ^n размерности n в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с вершинами в точках $e_i=(0,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,\ 0)$, $i=0,\ \ldots,\ n$ (единица стоит на i-м месте), т. е.

$$\Delta^n=\{(t_0,\ \ldots,\ t_{n+1})\mid 0\leqslant t_i\leqslant 1\Sigma t_i=1\}\subset\mathbb{R}^{n+1}.$$

Для любого топологич. пространства X непрерывные отображения $\sigma:\Delta^n\to X$ представляют собой сингулярные симплексы пространства X (см. *Сингулярные гомологии*).

2) С. с.— *симплициальная схема* Δ^n, вершинами к-рой являются точки l_i, а симплексами — произвольные непустые подмножества вершин. Геометрич. реализация этой симплициальной схемы совпадает с С. с. в смысле п. 1).

3) С. с.— *симплициальное множество* Δ^n, получающееся применением функтора O^+ к симплициальной схеме п. 2) и представляющее собой контравариантный функтор на категории Δ (см. *Симплициальный объект*), для к-рого

$$\Delta^n([m])=\Delta([m],\ [n]),\qquad \Delta^n(\lambda)(\mu)=\mu\lambda.$$

Таким образом, m-мерными симплексами симплициального множества Δ^n являются неубывающие последовательности $(a_0,\ \ldots,\ a_m)$ чисел из $[n]$, а операторы граней d_i и вырождения s_i этого симплициального множества определяются формулами

$$d_i(a_0,\ \ldots,\ a_m)=(a_0,\ \ldots,\ a_{i-1},\ \hat{a}_i,\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_m),$$
$$s_i(a_0,\ \ldots,\ a_m)=(a_0,\ \ldots,\ a_i,\ a_i,\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_m),$$

где знак $\wedge$ означает, что символ, стоящий под ним, опускается. Симплициальное множество Δ^1 наз. также симплициальным отрезком. Симплекс $\iota_n=(0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ (единственный невырожденный n-мерный симплекс из Δ^n) наз. фундаментальным симплексом симплициального множества Δ^n. Наименьшее симплициальное подмножество симплициального множества Δ^{n+1}, содержащее все симплексы вида $d_i\iota_{n+1}$ с $i\neq k$, обозначается Δ^n_k и наз. k-м стандартным фунтиком.

Для любого симплициального множества K и произвольного его n-мерного симплекса σ существует единственное симплициальное отображение $\chi_\sigma:\Delta^n\to K$, для к-рого $\chi(\iota_n)=\sigma$. Это отображение наз. характеристическим для K.

4) С. с.— фундаментальный симплекс ι_n симплициального множества п. 3), к-рый в этом случае обозначается Δ_n. *С. Н. Малыгин, М. М. Постников.*

СТАТИКА — раздел механики, в к-ром изучается равновесие материальных тел, находящихся под действием сил, и условия эквивалентности систем сил. Равновесие изучается по отношению к системе отсчета, в к-рой определены все силы, действующие на материальные тела (напр., равновесие по отношению к Земле). Как и в *динамике*, в С. вводятся модели реальных тел, дающие возможность сводить задачи о равновесии к более простым. Такими моделями являются материальная точка, упруго деформируемое тело, абсолютно твердое тело, континуум, идеальная жидкость, вязкая жидкость и т. п. В зависимости от свойств материальных тел С. разделяется на С. твердого тела, С. упруго деформируемого тела, С. жидкости и газа. По своим методам исследования С. делится на геометрическую и аналитическую.

Геометрическая С. изучает геометрич. свойства систем сил (векторов сил), действующих на изучаемую систему материальных точек, построение эквивалентных систем сил, приведение их к простейшему виду и установление условий равновесия систем сил, а также тел, находящихся под действием сил. Важнейшей в геометрич. С. является С. абсолютно твердого тела.

В основе аналитической С. лежит понятие работы сил, действующих на систему материальных точек, на произвольном возможном перемещении системы. Основной принцип аналитич. С.— *возможных перемещений принцип.*

Начало развития С. относится к глубокой древности и связано с именем греч. механика и математика Архимеда. Основные законы равновесия геометрич. С. установлены нидерл. механиком С. Стевином (S. Stevin) и франц. механиком и геометром Л. Пуансо (L. Poinsot). Первая общая формулировка принципа возможных перемещений принадлежит И. Бернулли (J. Bernoulli). Ж. Лагранж (J. Lagrange) дал первое доказательство принципа возможных перемещений и получил следствия о равновесии системы.

Лит.: [1] Пуансо Л., Начало статики, пер. с франц., М.—П., 1920; [2] Бернулли И., Избранные сочинения по механике, пер. с франц., М.— Л., 1937; [3] Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, пер. с франц., М.— Л., 1950; [4] Остроградский М. В., Общие соображения относительно моментов сил, в кн.: Остроградский М. В. Избранные труды, М., 1958; [5] Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.—Л., 1952; [6] Чаплыгин С. А., Курсы лекций по теоретической механике, в кн.: Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 4, М.—Л., 1949; [7] Аппель П., Теоретическая механика, т. 1, пер. с франц., М., 1960. *Е. Н. Березкин.*

СТАТИСТИКА — термин, употребляемый в математич. статистике для названия функций от результатов наблюдений.

Пусть случайная величина X принимает значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathsf{P}^X)$. Тогда любое $\mathscr{B}$-измеримое отображение $T(\cdot)$ пространства $\mathfrak{X}$ в некрое измеримое пространство $(\mathfrak{Y}, \mathscr{A})$ наз. статистикой, при этом распределение вероятностей статистики T определяется формулой

$$\mathsf{P}^T\{B\}=\mathsf{P}\{T(X)\in B\}=\mathsf{P}\{X\in T^{-1}(B)\}=$$
$$=\mathsf{P}^X\{T^{-1}(B)\}\ (\forall B\in\mathscr{A}).$$

Примеры. 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$— независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие дисперсию. Тогда С.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{и} \quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$$

суть *несмещенные оценки* для математич. ожидания $\mathsf{E}X_1$ и дисперсии $\mathsf{D}X_1$ соответственно.

2. Члены *вариационного ряда*

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\ldots\leqslant X_{(n)},$$

построенного по наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$ суть *порядковые статистики.*

3. Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ образуют *стационарный случайный процесс*, спектральная плотность к-рого есть $f(\cdot)$. В этом случае С.

$$I_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{k=1}^n X_k e^{-ik\lambda}\right|^2, \quad \lambda\in[-\pi;\ \pi],$$

называемая *периодограммой*, при определенных условиях регулярности на $f(\cdot)$ является асимптотически несмещенной оценкой для $f(\cdot)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}I_n(\lambda)=f(\lambda), \quad \lambda\in[-\pi;\ \pi].$$

В теории оценивания и проверки статистич. гипотез важную роль играет понятие *достаточной статистики*, к-рая позволяет производить редукцию данных без потери информации об изучаемом параметрич. семействе распределений.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964. *М. С. Никулин.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА — определенное предположение о свойствах распределения вероятностей, лежащего в основе наблюдаемых случайных явлений. Результаты наблюдений представляются обычно в виде реализации нек-рой совокупности случайных величин, конечной или бесконечной. При этом совместное распределение этих случайных величин известно не полностью, и С. г. предполагает принадлежность его к нек-рому определенному классу распределений. В такой ситуации ставится задача *статистических гипотез проверки.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИГРА — *антагонистическая игра*, в к-рой игрок I интерпретируется как природа, игрок II — как статистик, стратегия игрока I — как случайный процесс, стратегия игрока II — как решающее правило (решающая функция), а функция выигрыша игрока I — как функция потерь («риск») статистика. Смешанной стратегией игрока I будет тогда вероятностная мера на множестве случайных процессов, смешанной стратегией игрока II — рандомизированное решающее правило, а функция выигрыша игрока I определяется как математич. ожидание функции потерь статистика. С. и. возникли из задач математич. статистики (напр., задачи оценки параметров, испытания гипотез и т. п.), в к-рых принимается минимаксный критерий (см. *Минимакса принцип*). Систематич. описание задач математич. статистики (в т. ч. задач последовательного анализа) как С. и. впервые было проделано А. Вальдом (A. Wald), показавшим справедливость теоремы о минимаксе для широкого класса С. и. (см. [1]). Эта теорема дает метод решения задач математич. статистики, т. к. в ряде случаев нахождение максимина удобнее и легче, чем нахождение минимакса, что, в свою очередь, облегчает нахождение оптимального рандомизированного правила.

Лит.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967; [2] Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., М., 1958. *А. Н. Ляпунов.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА — функция от случайных величин, применяемая для оценки неизвестных параметров распределения вероятностей. См. *Оценка статистическая.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА — функция, используемая в равновесной статистич. физике, равная нормировочной константе в выражении для плотности (или матрицы плотности — в случае квантовой системы) в каноническом гиббсовском ансамбле.

1) В случае классич. системы плотность распределения Гиббса $p(\omega)$, $\omega\in\Omega$ (Ω — фазовое пространство

системы) относительно естественной меры $d\omega$ на Ω задается формулой

$$p(\omega)=(\Xi)^{-1}\exp\{-\beta[H_0(\omega)+\mu_1 H_1(\omega)+\mu_k H_k(\omega)]\},$$

где $H_0(\omega)$ — функция Гамильтона (энергия) системы, а $H_i(\omega)$, $i=1, \ldots, k$,— нек-рый набор величин, сохраняющийся при движении системы, задаваемой гамильтонианом $H_0(\omega)$; $\beta>0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$— действительные параметры. Нормировочный множитель

$$\Xi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k)=$$

$$=\int_\Omega \exp\left\{-\beta\left[H_0(\omega)+\sum\nolimits_{i=1}^{k}\mu_i H_i(\omega)\right]\right\}d\omega$$

и наз. С. с. (иногда статистическим интегралом или интегралом состояний).

2) В случае квантовой системы каноническое гиббсовское состояние задается матрицей плотности

$$\rho=(\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(\hat{H}_0+\mu_1\hat{H}_1+\ldots+\mu_k\hat{H}_k)\},$$

где $\hat{H}_0$— гамильтониан (оператор энергии) системы, а $\hat{H}_i$, $i=1, \ldots, k$,— нек-рые коммутирующие между собой операторы, соответствующие сохраняющимся во времени величинам; $\beta>0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$— действительные параметры. Нормировочный множитель (наз. статистич. суммой) равен

$$\Xi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k)=\mathrm{Sp}\exp\left\{-\beta_0\left(\hat{H}_0+\sum\nolimits_{i=1}^{k}\mu_i\hat{H}_i\right)\right\}.$$

Аналогично определяются С. с. для других гиббсовских ансамблей (микроканонического и малого канонического), а также в случае гиббсовских ансамблей, определенных для различных упрощенных модификаций реальных физич. систем (решетчатые системы, конфигурационные системы и т. д.).

В типичном случае, когда система заключена в ограниченной области $\Lambda\subset\mathbb{R}^3$ и энергия $H_0(\omega)$ (или $\hat{H}_0$), а также другие величины $H_i(\omega)$, $i=1, \ldots, k$ (соответственно операторы $\hat{H}_i$, $i=1, \ldots, k$), входящие в определение гиббсовского ансамбля, инвариантны относительно сдвигов в $\mathbb{R}^3$ и почти аддитивны, т. е. (в случае классич. системы)

$$H_i(\omega_1, \omega_2)\approx H_i(\omega_1)+H_i(\omega_2), \quad i=0, 1, \ldots, k,$$

где ω_1 и ω_2 — две конфигурации частиц, достаточно далеко отстоящие друг от друга (точную формулировку этого условия, а также его квантовый аналог см., напр., в [2]), в термодинамическом предельном переходе $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^3$ статистич. сумма Ξ имеет следующую асимптотику:

$$\Xi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k)=\exp\{|\Lambda|\chi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k)+o(|\Lambda|)\},$$

где $|\Lambda|$ — объем области Λ, а функция $\chi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ — т. н. термодинамический потенциал — является важной термодинамич. характеристикой системы: с ее помощью выражаются многие другие термодинамич. характеристики (удельная энергия, плотность, удельная энтропия и т. д.).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964 (Теоретическая физика, т. 5); [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1970; [3] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1—2, М., 1978.

Р. А. Минлос.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — другое название эргодической *Неймана теоремы* и ее обобщений.

Д. В. Аносов.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ теории случайных процессов — раздел математич. статистики, посвященный статистич. выводам на основе наблюдений, представимых в виде случайного процесса. В самой общей постановке наблюдаются значения случайной функции $x(t)$ для $t\in T$ и на основании этих наблюдений надлежит сделать статистич. выводы о нек-рых характеристиках случайного процесса $x(t)$. При столь широком определении сюда формально включается и вся классич. статистика независимых наблюдений. На самом деле под статистикой случайных процессов понимают только статистику зависимых наблюдений, исключая, напр., статистич. анализ большого числа независимых реализаций случайного процесса. При этом основания статистич. теории, основные постановки задач (*статистическое оценивание, статистических гипотез проверка*), основные понятия (достаточность, несмещенность, состоятельность и т. д.) — те же, что и в классич. теории. Однако при решении конкретных задач возникают поро́и значительные трудности и явления нового порядка. Частично эти трудности связаны с наличием зависимости, более сложной структуры наблюдаемого процесса, частично, в случае наблюдений с непрерывным временем, с необходимостью рассматривать распределения в бесконечномерных пространствах.

На самом деле при решении С. з. теории случайных процессов существенно используется структура наблюдаемого процесса и в соответствии с классификацией случайных процессов рассматривают С. з. гауссовских, марковских, стационарных, ветвящихся, диффузионных и т. д. процессов. При этом наиболее далеко продвинута статистич. теория стационарных процессов (анализ временных рядов).

Необходимость статистич. анализа случайных процессов возникла в 19 в.: анализ метеорологич., экономич. рядов, исследование циклич. процессов (колебания цен, солнечные пятна). В настоящее время круг задач, связанных со статистич. анализом случайных процессов, чрезвычайно широк. Достаточно упомянуть статистич. анализ случайных шумов, вибраций, турбулентных явлений, морского волнения, кардиограмм, энцефалограмм и т. д. Теоретич. аспекты проблемы выделения сигнала на фоне шума в значительной степени являются С. з. теории случайных процессов.

В дальнейшем предполагается, что наблюдается отрезок $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, случайного процесса $x(t)$, причем параметр t пробегает либо весь отрезок $[0, T]$, либо целые числа этого отрезка. Обычно в С. з. о распределении P^T случайного процесса $\{x(t), 0\leqslant t\leqslant T\}$ известно лишь, что оно принадлежит нек-рому семейству $\{P^T\}$ распределений. Это семейство всегда можно записать в параметрич. форме.

Пример 1. Наблюдаемый процесс $x(t)$ представляет собой либо сумму неслучайной функции $s(t)$ («сигнал») и случайной функции $\xi(t)$ («шум»), либо одну случайную функцию $\xi(t)$. Надлежит проверить гипотезу $H_0: x(t)=s(t)+\xi(t)$ против альтернативы $H_1: x(t)=\xi(t)$ (задача обнаружения сигнала в шуме). Это — пример задачи проверки статистич. гипотез.

Пример 2. Наблюдаемый процесс $x(t)=s(t)+\xi(t)$, где $s(t)$ — неизвестная наблюдателю неслучайная функция (сигнал), а $\xi(t)$ — случайный процесс (шум). Надлежит оценить функцию s или ее значение $s(t_0)$ в заданной точке t_0. Сходным образом можно предположить, что $x(t)=s(t;\theta)+\xi(t)$, где s — известная функция, зависящая от неизвестного параметра θ, к-рый и нужно оценить по наблюдению $x(t)$ (задачи выделения сигнала на фоне шума). Это — примеры задач оценивания.

Отношение правдоподобия для случайных процессов. В С. з. отношение правдоподобия и функция правдоподобия играют большую роль (см. *Неймана — Пирсона лемма*, *Статистических гипотез проверка*, *Статистическое оценивание*). Отношением правдоподобия двух распределений P_u^T и P_v^T наз. плотность

$$p(x(\cdot); u, v)=p(x(\cdot))=\frac{dP_u^T}{dP_v^T}(x(\cdot)).$$

Функцией правдоподобия наз. функцию

$$L(\theta)=\frac{dP_\theta^T}{d\mu}(x(\cdot)),$$

где μ есть σ-конечная мера, относительно к-рой абсолютно непрерывны все меры P_θ^T. В дискретном случае, когда t пробегает целые точки отрезка $[0, T]$ и $T<\infty$, отношение правдоподобия, напр., всегда существует, если распределения P_u и P_v имеют положительные плотности распределения, совпадая с отношением этих плотностей.

Если t пробегает весь отрезок $[0, T]$, то возможны случаи, когда меры P_u^T и P_v^T не абсолютно непрерывны относительно друг друга; более того, встречаются ситуации, когда меры P_u^T и P_v^T взаимно сингулярны, т. е. для нек-рого множества A в пространстве реализаций $x(t)$

$$P_u^T\{x\in A\}=0,\quad P_v^T\{x\in A\}=1.$$

В этом случае $p(x; u, v)$ не существует. Сингулярность мер P_θ^T приводит к важным и в какой-то степени парадоксальным статистич. следствиям, позволяя делать безошибочные выводы о параметре θ. Пусть, напр., $\Theta=\{0, 1\}$; сингулярность мер P_0^T, P_1^T означает, что с помощью критерия: «принять H_0, если $x\notin A$, отвергнуть H_0, если $x\in A$», гипотезы $H_0: \theta=0$ и $H_1: \theta=1$ разделяются безошибочно. Наличие таких совершенных критериев часто указывает, что С. з. поставлена не совсем удачно и из нее исключены какие-то существенные случайные возмущения.

Пример 3. Пусть $x(t)=\theta+\xi(t)$, где $\xi(t)$ — стационарный эргодич. процесс с нулевым средним, θ — действительный параметр. Пусть реализации $\xi(t)$ с вероятностью 1 аналитичны в полосе, содержащей действительную ось. По эргодич. теореме

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt=\theta$$

и все меры P_θ^∞ взаимно сингулярны. Так как аналитич. функция $x(t)$ полностью определяется своими значениями в окрестности нуля, параметр θ оценивается безошибочно по наблюдениям $\{x(t), 0\leqslant t\leqslant T\}$ для любого $T>0$.

Вычисление отношения правдоподобия в тех случаях, когда оно существует,— трудная задача. Вычисления часто основаны на предельном соотношении

$$p(x(\cdot); u, v)=\lim_{n\to\infty}\frac{p_u(x(t_1), \ldots, x(t_n))}{p_v(x(t_1), \ldots, x(t_n))},$$

где p_u, p_v — плотности распределения вектора $(x(t_1), \ldots, x(t_n))$, а $\{t_1, t_2, \ldots\}$ — плотное в $[0, T]$ множество. Исследование правой части последнего равенства полезно и при доказательстве сингулярности P_u, P_v.

Пример 4. Пусть либо наблюдение $x(t)=w(t)$, где $w(t)$ — винеровский процесс (гипотеза H_0), либо $x(t)=m(t)+w(t)$, m — неслучайная функция (гипотеза H_1). Меры P_0, P_1 взаимно абсолютно непрерывны, если $m'\in L_2(0, T)$, и взаимно сингулярны, если $m'\notin L_2(0, T)$. Отношение правдоподобия

$$\frac{dP_1^T}{dP_0^T}(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T[m'(t)]^2\,dt+\int_0^T m'(t)\,dx(t)\right\}.$$

Пример 5. Пусть $x(t)=\theta+\xi(t)$, где θ — действительный параметр, а $\xi(t)$ — стационарный марковский гауссовский процесс с нулевым средним и известной корреляционной функцией $r(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$. Меры P_θ^T взаимно абсолютно непрерывны с функцией правдоподобия

$$\frac{dP_\theta^T}{dP_\theta^0}(x)=\exp\left\{\frac{1}{2}\theta x(0)+\frac{1}{2}\theta x(T)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\theta\alpha\int_0^T x(t)\,dt-\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{4}\theta^2\alpha T\right\}.$$

В частности, $x(0)+x(T)+\alpha\int_0^T x(t)\,dt$ — достаточная статистика для семейства P_θ^T.

Линейные задачи статистики случайных процессов. Пусть наблюдается функция

$$x(t)=\sum_1^k\theta_j\varphi_j(t)+\xi(t),\qquad(*)$$

где $\xi(t)$ — случайный процесс с нулевым средним и известной корреляционной функцией $r(t, s)$, φ_j — известные неслучайные функции, $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ — неизвестный параметр (θ_j — коэффициенты регрессии), параметрич. множество Θ — подпространство R^k. Линейные оценки для θ_j суть оценки вида $\sum c_j x(t_j)$ или их пределы в среднем квадратичном. Задача отыскания оптимальных в среднем квадратичном несмещенных линейных оценок сводится к решению линейных алгебраических или линейных интегральных уравнений, определяемых r. Именно, такая оптимальная оценка $\hat\theta$ определяется уравнениями $\mathsf{E}_\theta(\hat\theta_j\xi)=0$ для любой величины ξ вида $\xi=\sum b_j x(t_j)$, $\sum b_j\varphi_l(t_j)=0$. В ряде случаев оценки θ, полученные по методу наименьших квадратов асимптотически, при $T\to\infty$, не хуже оптимальных линейных оценок. Оценки метода наименьших квадратов вычисляются проще и не зависят от r.

Пример 6. В условиях примера 5, $k=1$, $\varphi_1(t)\equiv 1$. Оптимальная несмещенная линейная оценка имеет вид

$$\hat\theta=\frac{1}{2+\alpha T}\left(x(0)+x(T)+\alpha\int_0^T x(t)\,dt\right).$$

Оценка

$$\theta^*=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

имеет асимптотически ту же дисперсию.

Статистические задачи гауссовских процессов. Пусть процесс $\{x(t), 0\leqslant t\leqslant T, P_\theta^T\}$ — гауссовский при всех $\theta\in\Theta$. Для гауссовских процессов имеет место альтернатива: любые две меры P_u^T, P_v^T либо взаимно абсолютно непрерывны, либо сингулярны. Так как гауссовское распределение P_θ^T полностью определяется средним значением $m_\theta(t)=\mathsf{E}_\theta x(t)$ и корреляционной функцией $r_\theta(s, t)=\mathsf{E}_\theta x(s)x(t)$, отношение правдоподобия dP_u^T/dP_v^T выражается через m_u, m_v, r_u, r_v сложным образом. Относительно прост тот случай, когда $r_u=r_v=r$, r — непрерывная функция. Именно, пусть $\Theta=\{0, 1\}$, $r_0=r_1=r$; λ_i и $\varphi_i(t)$ — собственные значения и соответствующие им нормированные в $L_2(0, T)$ собственные функции интегрального уравнения

$$\lambda\varphi(s)=\int_0^T r(s, t)\varphi(t)\,dt;$$

средние $m_0(t)$, $m_1(t)$ — непрерывные функции, и пусть

$$m_{ij}=\int_0^T m_i(t)\varphi_i(t)\,dt.$$

Меры P_0, P_1 абсолютно непрерывны в том и только в том случае, если

$$\sum_{j=1}^\infty(m_{0j}-m_{1j})^2\lambda_j^{-1}<\infty.$$

При этом

$$\frac{dP_1^T}{dP_0^T}(x)=\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{m_{1j}-m_{0j}}{\lambda_j}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int_0^T x(t)\,\varphi_j(t)\,dt-\frac{m_{1j}-m_{0j}}{2}\right)\right\}.$$

Последнее равенство можно использовать для построения критерия для проверки гипотезы $H_0: m=m_0$ против альтернативы $H_1: m=m_1$ в предположении, что функция r известна наблюдателю.

Статистические задачи стационарных процессов. Пусть наблюдение $x(t)$ — стационарный процесс со средним m и корреляционной функцией $r(t)$; $f(\lambda)$ и $F(\lambda)$ — его спектральная плотность и спектральная функция. Основные задачи статистики стационарных процессов относятся к проверке гипотез или оцениванию, касающихся тех или иных характеристик m, r, f, F. В случае эргодич. процесса $x(t)$ состоятельными оценками (при $T\to\infty$) для m и $r(t)$ служат соответственно

$$m^*=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt,$$
$$r^*(t)=\frac{1}{T}\int_0^{T-t} x(t+s)\,x(s)\,ds.$$

Задачу оценки m при известном r часто рассматривают в рамках линейных задач. К этому последнему кругу задач относятся и более общие задачи оценки коэффициентов регрессии по наблюдениям вида (*) со стационарным $\xi(t)$.

Пусть $x(t)$ имеет нулевое среднее и спектральную плотность $f(\lambda;\theta)$, зависящую от конечномерного параметра $\theta\in\Theta$. Если процесс $x(t)$ — гауссовский, можно указать формулы для отношения правдоподобия dP_θ/dP_{θ^0} (если последнее существует), к-рые в ряде случаев позволяют найти оценки максимального правдоподобия или «хорошие» (при больших T) приближения к ним. В достаточно широких предположениях эти оценки асимптотически нормальны $\left(\theta,\frac{c(\theta)}{\sqrt{T}}\right)$ и асимптотически эффективны.

Пример 7. Пусть $x(t)$ — стационарный гауссовский процесс с непрерывным временем и рациональной спектральной плотностью $f(\lambda)=\left|\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right|^2$, P, Q — многочлены. Меры P_0^T, P_1^T, отвечающие рациональным спектральным плотностям f_0, f_1, абсолютно непрерывны в том и только в том случае, если

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f_0(\lambda)}{f_1(\lambda)}=1.$$

Параметром θ здесь служит совокупность всех коэффициентов многочленов P, Q.

Пример 8. Важный класс стационарных гауссовских процессов образуют процессы авторегрессии $x(t)$:

$$x^{(n)}(t)+\theta_n x^{(n-1)}(t)+\ldots+\theta_1 x(t)=\varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t)$ — гауссовский белый шум единичной интенсивности, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ — неизвестный параметр. В этом случае спектральная плотность

$$f(\lambda;\theta)=(2\pi)^{-1}|P(i\lambda)|^{-2},$$

где

$$P(z)=\theta_1+\theta_2 z+\ldots+\theta_n z^{n-1}+z^n.$$

Функция правдоподобия

$$\frac{dP_\theta^T}{dP_{\theta^0}^T}=\sqrt{\frac{K(\theta)}{K(\theta)^0}}\exp\left\{\frac{\theta_n-0_n}{T}-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[\lambda_j(\theta)-\lambda_j(\theta^0)]\times$$
$$\left.\times\int_0^T[x^{(j)}(t)]^2\,dt-\frac{1}{2}(\lambda(\theta)-\lambda(\theta^0))\right\}.$$

Здесь $\lambda_j(\theta)$, $\lambda(\theta)$ суть квадратичные формы от θ, зависящие от значений $x^{(j)}(t)$, $j=1,2,\ldots,(n-1)$, в точках $t=0$, T; $K(\theta)$ — определитель корреляционной матрицы вектора $(x(0),x^{(1)}(0),\ldots,x^{(n-1)}(0))$.

Оценки максимального правдоподобия для параметра авторегрессии θ асимптотически нормальны и асимптотически эффективны. Теми же свойствами обладает и решение θ_T^* приближенного уравнения правдоподобия

$$\frac{1}{2T}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial\lambda_j(\theta)}{\partial\theta_i}\int_0^T[x^{(j)}(t)]^2\,dt=\begin{cases}0, & 1\leqslant i<n,\\ \frac{1}{2}, & i=n.\end{cases}$$

Важную роль при статистич. исследовании спектра стационарного процесса играет *периодограмма* $I_T(\lambda)$. Эта статистика определяется как

$$I_T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=0}^T e^{-it\lambda}x(t)\right| \text{ (время дискретно)},$$
$$I_T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T e^{-it\lambda}x(t)\,dt\right|^2 \text{ (время непрерывно)}.$$

Периодограмма широко используется для построения различного рода оценок для $f(\lambda)$, $F(\lambda)$ и критериев для проверки гипотез об этих характеристиках. В широких предположениях статистики $\int I_T(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda$ являются состоятельными оценками для $\int f(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda$. В частности, $\int_\alpha^\beta I_T(\lambda)d\lambda$ служат оценкой для $F(\beta)-F(\alpha)$. Если последовательность $\varphi_T(\lambda;\lambda_0)$ сходится подходящим образом к δ функции $\delta(\lambda-\lambda_0)$, то интегралы $\int\varphi_T(\lambda;\lambda_0)I_T(\lambda)d\lambda$ будут состоятельными оценками для $f(\lambda_0)$. Часто в качестве функций $\varphi_T(\lambda;\lambda_0)$ выбирают функции вида $a_T\psi(a_T(\lambda-\lambda_0))$, $a_T\to\infty$. Если $x(t)$ — процесс с дискретным временем, эти оценки можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-T+1}^{T-1}e^{-it\lambda}r^*(t)\,c_T(t),$$

где эмпирическая корреляционная функция

$$r^*(t)=\frac{1}{T}\sum_{u=0}^{T-t}x(u+t)\,x(u),$$

а неслучайные коэффициенты $c_T(t)$ определяются выбором ψ, a_T. Последний выбор, в свою очередь, зависит от априорных сведений о $f(\lambda)$. Аналогичное представление имеет место и для процессов с непрерывным временем.

Иногда к задачам статистич. анализа стационарных процессов относят и задачи экстраполяции, интерполяции и фильтрации стационарных процессов.

Статистические задачи марковских процессов. Пусть наблюдения X_0, X_1, $\ldots$, X_T связаны в однородную цепь Маркова. При достаточно широких предположениях функция правдоподобия

$$\frac{dP_\theta^T}{d\mu^T}=p_0(X_0;\theta)\,p(X_1\mid X_0;\theta)\ldots p(X_T\mid X_{T-1},\theta),$$

где p_0, p — начальная и переходная плотности распределения. Это выражение сходно с функцией правдоподобия для последовательности независимых наблюдений и при соблюдении условий регулярности (гладкость по $\theta\in\Theta\subset R^k$) можно построить теорию оценивания и проверки гипотез, аналогичную соответствующей теории для независимых наблюдений.

Более сложная ситуация возникает, если $x(t)$ — марковский процесс с непрерывным временем. Пусть $x(t)$ — однородный марковский процесс с конечным числом состояний N и дифференцируемыми вероятностями перехода $P_{ij}(t)$. Матрица вероятностей перехода определяется матрицей $Q=\|q_{ij}\|$, $q_{ij}=P'_{ij}(0)$, $q_i=-q_{ii}$. Пусть в начальный момент $x(0)=i_0$ независимо от Q. Выбирая какую-нибудь матрицу $Q_0=\|q^0_{ij}\|$, находят

$$\frac{dP^T_Q}{dP^T_{Q_0}}(x)=\exp\left\{\left(q^0_{i_n}-q_{i_n}\right)T\right\}\cdot\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{q_{i_\nu i_{\nu+1}}}{q^0_{i_\nu i_{\nu+1}}}\times$$

$$\times\exp\left\{t_\nu\left(q_{i_n}-q_{i_\nu}-q^0_{i_\nu}+q^0_{i_n}\right)\right\}.$$

Здесь статистики $n(x)$, $t_\nu(x)$, $j_\nu(x)$ определяются следующим образом: n — это число скачков $x(t)$ на интервале $[0, T)$, τ_ν — момент ν-го скачка, $t_\nu=\tau_{\nu+1}-\tau_\nu$, $z_\nu=x(\tau_\nu)$. Из указанного выражения выводятся оценки максимального правдоподобия для параметров q_{ij}: $q^*_{ij}=\frac{m_{ij}}{\mu_i}$, где m_{ij} — число переходов из i в j на отрезке $[0, T)$, а μ_i — время, проведенное процессом $x(t)$ в состоянии i.

Пример 9. Пусть $x(t)$ — *рождения и гибели процесс* с постоянными интенсивностями размножения λ и гибели μ. Это значит, что $q_{i,i+1}=i\lambda$, $q_{i,i-1}=i\mu$, $q_{ii}=-1-i(\lambda+\mu)$, $q_{ij}=0$, если $|i-j|>1$. В этом примере число состояний бесконечно. Пусть $x(0)\equiv1$. Отношение правдоподобия

$$\frac{dP^T_{\lambda\mu}}{dP^T_{\lambda_0,\,\mu_0}}(x)=$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^B\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^D\exp\left\{-(\lambda+\mu-\lambda_0-\mu_0)\int_0^T x(s)\,ds\right\}.$$

Здесь B — общее число рождений (скачков размера $+1$), D — смертей (скачков размера -1). Оценки максимума правдоподобия для λ и μ:

$$\lambda^*_T=\frac{1}{B}\int_0^T x(s)\,ds,\quad \mu^*_T=\frac{1}{D}\int_0^T x(s)\,ds.$$

Пусть $x(t)$ — диффузионный процесс с коэффициентом сноса a и коэффициентом диффузии b, так что $x(t)$ удовлетворяет следующему *стохастическому дифференциальному уравнению*

$$dx(t)=a(t,\,x(t))\,dt+b(t,\,x(t))\,dw(t),\ x(0)=x_0,$$

где w — винеровский процесс. Тогда при определенных ограничениях

$$\frac{dP^T_{a,b}}{dP^T_{a_0b}}(x)=\exp\left\{-\int_0^T(b(t,\,x(t))^{-1}(a(t,\,x(t))-\right.$$

$$\left.-a_0(t,\,x(t))\,dx(t)+\frac{1}{2}\int_0^T(b(t,\,x(t))^{-1}(a(t,\,x(t)-\right.$$

$$\left.-a_0(t,\,x(t))^2\,dt\right\}$$

(здесь a_0 — фиксированный коэффициент).

Пример 10. Пусть

$$dx(t)=a(t,\,x(t);\,\theta)\,dt+dw,$$

a — известная функция, θ — неизвестный действительный параметр. Если обозначить через μ меру Винера, то функция правдоподобия

$$\frac{dP^T_\theta}{d\mu}=\exp\left\{\int_0^T a(t,\,x(t);\,\theta)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^T a^2(t,\,x(t);\,\theta)\,dt,\right.$$

и при условиях регулярности выполняется неравенство Крамера — Рао: для оценки τ со смещением $\Delta(\theta)=\mathsf{E}_\theta\tau-\theta$

$$\mathsf{E}_\theta|\tau-\theta|^2\geqslant\frac{\left(1+\frac{d\Delta}{d\theta}\right)^2}{\mathsf{E}_\theta\int_0^T\left[\frac{\partial}{\partial\theta}a(t,\,x(t);\,\theta)\right]^2dt}+\Delta^2(\theta).$$

Если зависимость от θ линейная, оценки максимального правдоподобия

$$\theta^*_T=\int_0^T a(t,\,x(t))\,dt\left(\int_0^T a^2(t,\,x(t))\,dt\right)^{-1}.$$

Лит.: [1] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [2] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [3] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956; [4] Grenander U., Abstract inference, N. Y., 1981; [5] Розанов Ю. А., Гауссовские бесконечномерные распределения, М., 1968 (Тр. матем. ин-та им. Стеклова, т. 108); [6] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [7] Бриллинджер Д., Временные ряды, пер. с англ., М., 1980; [8] Billingsley P., Statistical inference for Markov processes, Chi., 1961; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [10] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [11] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976. *И. А. Ибрагимов.*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ — раздел математич. статистики и теории случайных процессов, посвященный исследованию и решению *статистических задач* случайных процессов. *И. А. Ибрагимов.*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ — принятое в статистич. физике название фазового пространства (пространства состояний) какой-нибудь физич. системы вместе с нек-рым способом усреднения физич. величин (т. н. наблюдаемых x), связанных с этой системой. В случае классич. системы с фазовым пространством Ω наблюдаемые — действительные функции, определенные на Ω, а их усреднение происходит с помощью интегрирования по нек-рой вероятностной мере μ на пространстве Ω. В случае квантовой системы, описываемой векторами гильбертова пространства $\mathcal{H}$, наблюдаемые задаются самосопряженными операторами, действующими в $\mathcal{H}$, и усреднение вводится с помощью нек-рого положительного и нормированного функционала ρ, определенного на алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ операторов, действующих в $\mathcal{H}$ (такие функционалы на $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ наз. состояниями). Обычно состояние задается в виде

$$\rho(A)=\mathrm{Sp}\,\hat\rho(A),\quad A\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}),\qquad(1)$$

где $\hat\rho$ — положительный оператор в $\mathcal{H}$ такой, что $\mathrm{Sp}\hat\rho=1$ (оператор $\hat\rho$ наз. матрицей плотности состояния ρ).

Если задана эволюция физич. системы во времени (динамика системы), т. е. (в классич. случае) — группа $\Gamma_t:\Omega\to\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, взаимно однозначных преобразований фазового пространства в себя, порождаемая гамильтоновыми уравнениями движения с некрой функцией Гамильтона $H(\omega)$, $\omega\in\Omega$ (энергия системы), или (в квантовом случае) — группа унитарных преобразований $U_t:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, $t\in\mathbb{R}$, гильбертова пространства в себя, порождаемая оператором Гамильтона $\hat H$ (оператором энергии системы), то естественно определяется эволюция во времени любого С. а., определенного для этой системы

$$\left.\begin{aligned}&\mu_t(C)=\mu\left(\Gamma_t^{-1}C\right),\quad C\subset\Omega\ \text{(классич. случай)},\\&\rho_t(A)=\rho\left(U_tAU_t^{-1}\right)\qquad\text{(квантовый случай)}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Для описания стационарного поведения системы рассматриваются равновесные ансамбли, т. е. меры или состояния, неизменные относительно эволюции (2). Хотя равновесных С. а., вообще говоря, много, в статистич. физике рассматривают только специальные — т. н. канонические ансамбли Гиббса (распределения).

Классические ансамбли Гиббса. Пусть, кроме гамильтониана $H=H_0(\omega)$, имеется некрый функционально независимый вместе с H_0 набор $H_1(\omega), \ldots, H_k(\omega)$, $k=0, 1, \ldots$, функций на Ω, инвариантных относительно динамики Γ_t (в случае систем, состоящих из конечного, но произвольного числа частиц одного или нескольких видов, $H_i(\omega)$ равно, напр., числу частиц какого-нибудь вида в конфигурации $\omega\in\Omega$; в случае системы магнитных диполей $H_i(\omega)$ равно какой-нибудь составляющей их суммарного магнитного момента и т. д.). Большим каноним. ансамблем Гиббса наз. мера

$$d\mu_{\beta,\nu_1,\ldots,\nu_k} = (\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(H_0+\nu_1H_1+\ldots+\nu_kH_k)\}\,d\omega, \quad (3)$$

где $d\omega$ — мера, порождаемая симплектич. структурой на Ω, $\beta>0$ и $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — действительные параметры, а Ξ — нормировочный множитель, наз. большой статистической суммой:

$$\Xi=\int_\Omega \exp\{-\beta(H_0+\nu_1H_1+\ldots+\nu_kH_k\}\,d\omega. \quad (4)$$

Мера $\mu_{h_0,h_1,\ldots,h_k}$, сосредоточенная на множестве $\{\omega \mid H_i(\omega)=h_i,\ i=0,1,\ldots,k\}$, $h_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\ldots,k$, и совпадающая с условным распределением на этом множестве, порожденным мерой (3), наз. микроканоним. ансамблем Гиббса. Рассматриваются также и «промежуточные» ансамбли — т. н. малые каноним. ансамбли Гиббса, получающиеся аналогичным образом из ансамбля (3) фиксированием значений всех или части функций $H_i(\omega)$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Квантовые ансамбли Гиббса. Пусть $\hat H_1, \ldots, \hat H_k$ (k — произвольно) — попарно коммутирующие операторы, коммутирующие с оператором $\hat H=\hat H_0$ («сохраняющиеся величины»). Состояние на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, задаваемое матрицей плотности

$$\hat\rho_{\beta,\nu_1,\ldots,\nu_k}=(\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(\hat H_0+\nu_1\hat H_1+\ldots+\nu_k\hat H_k)\},$$

где

$$\Xi=\mathrm{Sp}\,(\exp\{-\beta(\hat H_0+\nu_1\hat H_1+\nu_k\hat H_k)\}-$$

— большая статистич. сумма, а $\beta>0$, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — параметры, наз. большим каноним. ансамблем Гиббса. Пусть $P^{h_i}_{\hat H_i}$, $i=0, 1, \ldots, k$, — проекторы в $\mathscr{H}$ на собственное подпространство оператора $\hat H_i$ с собственным значением h_i. Микроканоним. ансамблем Гиббса наз. состояние с матрицей плотности

$$\hat\rho_{h_0,h_1,\ldots,h_k}=(Q)^{-1}P^{h_0}_{\hat H_0}P^{h_1}_{\hat H_1}\ldots P^{h_k}_{\hat H_k},$$

где $Q=\dim(Im\,\hat\rho_{h_0,h_1,\ldots,h_k})$. Аналогично вводятся и малые каноним. ансамбли Гиббса, напр. С. а. с матрицей плотности

$$\hat\rho_{\beta,h_1,\ldots,h_k}=(Z)^{-1}\exp\{-\beta\hat H_0\}\prod_{i=1}^k P^{h_i}_{\hat H_i},$$

где Z — нормирующий множитель (малая статистич. сумма).

Иногда рассматриваются нек-рые модельные модификации описанных С. а. (напр., ансамбли Гиббса в конфигурационных или решетчатых системах), а также т. н. предельные ансамбли Гиббса, т. е. распределения вероятностей (или состояния) на фазовом пространстве бесконечной системы (напр., системы с бесконечным числом частиц, движущихся во всем пространстве). Эти С. а. возникают с помощью термодинамич. предельного перехода из описанных выше ансамблей для конечных систем (см. [3]).

Существует гипотеза — т. н. принцип предельной эквивалентности ансамблей — о том, что при выполнении нек-рых естественных условий (грубо говоря, в отсутствии фазового перехода) предельные гиббсовские С. а., получающиеся с помощью разных допредельных гиббсовских ансамблей (большого канонического, малого канонического, микроканонического), совпадают при определенном соответствии между задающими эти ансамбли параметрами. Эта гипотеза подтверждена (см. [3]) для нек-рых частных ситуаций.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964 (Теоретическая физика, т. 5); [2] Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 1, с. 133—90; [3] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1970; [4] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977.

Р. А. Минлос.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА — раздел математич. статистики, методы к-рого используются в промышленности для определения фактически достигнутого уровня качества, тенденций его изменений и выработки обоснованных воздействий на технологич. процесс. Качество массовой промышленной продукции характеризуется совокупностью свойств, представимых в виде набора чисел или функций. Требуемый уровень качества определяется государственными стандартами (ГОСТ), в к-рых даны правила оценки фактич. уровня показателей качества. Использование ГОСТа необходимо, т. к. принимаемые по результатам контроля решения связаны с реальными затратами и затрагивают интересы производственных коллективов. Методы С. к. к. играют важную роль в общей системе мероприятий по управлению качеством массовой промышленной продукции. Это обусловлено в первую очередь тем, что изменчивость числовых характеристик основных показателей качества изделий носит случайный характер. Стремление сделать контроль более объективным, не имеющим систематич. ошибок, приводит к необходимости использования методов рандомизации, что также обусловливает необходимость использования вероятностных и статистич. методов.

Математич. методы, используемые в С. к. к., разнообразны. Наиболее часто используются методы С. к. к. непрерывного потока массовой продукции в процессе ее изготовления с целью выявления нежелательных отклонений и необходимости соответствующих подналадок оборудования.

Пусть $\{O_t\}$ — последовательность изделий. $t=1, 2, \ldots$. В результате контроля изделию O_t сопоставляется число ε_t. При контроле по альтернативному признаку $\varepsilon_t=0$, если изделие O_t — годное, и $\varepsilon_t=1$, если изделие O_t — дефектное. Дефектные изделия исключаются. Текущий контроль по планам Доджа $\Pi(f, i)$ описывается следующей системой правил. Контроль начинается сплошной проверкой изделий последовательности $\{O_t\}$, к-рая проводится до тех пор, пока не встретится серия из i годных изделий. Далее, каждое последующее изделие отбирается на контроль случайно с вероятностью f, $0<f<1$. При первом обнаружении дефектного изделия вновь переходят к сплошному контролю до обнаружения серии из i годных изделий. Затем вновь переходят к выборочному контролю с ве-

роятностью отбора f и т. д. Пусть, напр., ε_t является последовательностью Бернулли, $\mathsf{P}\{\varepsilon_t=1\}=q$. Тогда средняя доля контролируемых изделий по плану $\Pi(f, i)$ равна

$$f(q)=f[f+(1-f)(1-q)^i]^{-1}.$$

При выборе подходящих значений f, i используется значение уровня предельного среднего выходного качества

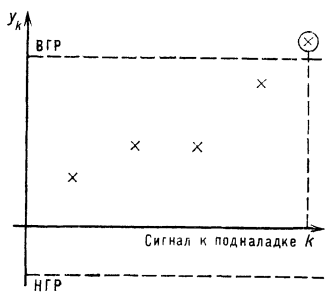
$$L^*=\max_{0\leqslant q\leqslant 1} L(q),$$

где

$$L(q)=\frac{q[1-f(q)]}{1-qf(q)}$$

условная вероятность того, что изделие окажется дефектным, при условии, что оно не было проконтролировано (см. [1], [2]).

В тех случаях, когда контроль последовательности изделий $\{O_t\}$ ведется по количественному признаку, значения результатов контроля ε_t рассматриваются как случайный процесс. В основных ГОСТах исходят из допущения, что в отсутствии разладок значения $\{\varepsilon_t\}$ образуют последовательность взаимно независимых нормально распределенных случайных величин. Проверка исходных допущений о типе закона распределения ε_t является необходимым предварительным условием эффективного использования контроля по количественному признаку. Наличие разладок приводит либо к появлению тренда — систематич. увеличения (уменьшения) средних значений ε_t, либо к увеличению дисперсии ε_t и т. п. С целью выявления подобных нарушений (разладок) самое широкое применение находят методы С. к. к., использующие контрольные карты (к. к.). На к. к. (см. рис.) по оси абсцисс откладывается номер k контролируемой выборки $O_{t_k+1}, \ldots, O_{t_k+n}$, по оси ординат откладывается значение величины y_k, определяемой значениями $\varepsilon_{t_k+1}=x_1, \ldots, \varepsilon_{t_k+n}=x_n$. Обычно n невелико, $n=3\div 5$. В качестве показателей y_k часто используются: среднее значение $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, медиана, оценка дисперсии $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2$, размах и т. д. На к. к. предварительно наносятся две линии: верхняя граница регулирования (ВГР) и нижняя граница регулирования (НГР). Если значение y_k окажется выше или ниже этих границ, то требуется произвести воздействие на технологич. процесс с целью восстановления его стабильности.



К. к. были предложены У. Шухартом [3]. В настоящее время (1984) используются разнообразные варианты к. к. (см. [4], [5]). Наличие различных типов к. к. обусловлено тем, что они не одинаково эффективны для выявления различных разладок. Так, для выявления скачкообразных изменений средних значений ε_t более эффективными по сравнению с к. к., показанными на рис., могут оказаться так называемые к. к. накопленных сумм. Точный расчет различных характеристик к. к., напр. среднего времени запаздывания в выявлении определенного типа разладок, является трудной задачей, требующей большого объема вычислений, что, как правило, возможно лишь с использованием ЭВМ.

В тех случаях, когда контролируемая продукция разбита на совокупности — партии, широкое применение находят методы статистического приемочного контроля.

Лит.: [1] Dodge H. F., «Ann. Math. Statistics», 1943, v. 14, p. 264—79; [2] Бесляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [3] Shewhart W. A., Economic control of quality of manufactured product, N. Y., 1931; [4] Шиндовский Э., Шюрц О., Статистические методы управления качеством, пер. с нем., М., 1976; [5] Джонсон Н., Лион Ф., Статистика и планирование эксперимента в технике и науке, т. 1 — Методы обработки данных, пер. с англ., 2 изд., М., 1980. *Ю. К. Беляев.*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ — решающее правило, по к-рому на основе результатов наблюдений принимается решение в задаче *статистических гипотез проверки*.

Пусть по реализации $x=(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$, принимающего значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}_n, \mathscr{B}_n, P_\theta^n)$, $\theta\in\Theta$, надлежит проверить гипотезу $H_0: \theta\in\Theta_0\subset\Theta$ против альтернативы $H_1: \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$. Далее, пусть $\varphi_n(\cdot)$ — произвольная $\mathscr{B}_n$-измеримая функция, отображающая пространство реализаций $\mathfrak{X}_n$ в отрезок $[0; 1]$. В таком случае правило, согласно к-рому гипотеза H_0 отвергается с вероятностью $\varphi_n(X)$, а альтернатива H_1 отклоняется с вероятностью $1-\varphi_n(X)$, наз. статистич. критерием для проверки гипотезы H_0 против H_1; $\varphi_n(\cdot)$ является критич. функцией С. к. Функция $\beta(\theta)=\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)$, $\theta\in\Theta$, наз. функцией мощности С. к.

В результате применения С. к. можно либо принять правильное решение, либо совершить одну из двух ошибок: отклонить гипотезу H_0 и, значит, принять гипотезу H_1, когда на самом деле H_0 справедлива (ошибка 1-го рода), или же принять H_0, когда на самом деле справедлива гипотеза H_1 (ошибка 2-го рода). Одной из основных задач классич. теории статистич. проверки гипотез является построение такого С. к., к-рый при заданной верхней границе $\alpha=\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)$, $0<\alpha<1$, для вероятностей ошибок 1-го рода минимизировал бы вероятности ошибок 2-го рода. Число α принято называть *значимости уровнем* С. к.

Для приложений наибольший интерес представляют нерандомизированные С. к., т. е. такие, критич. функция $\varphi_n(\cdot)$ к-рых есть характеристич. функция нек-рого $\mathscr{B}_n$-измеримого множества K из пространства реализаций $\mathfrak{X}$:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in K,\\ 0, & \text{если } x\in\overline{K}=\mathfrak{X}_n\setminus K.\end{cases}$$

Таким образом, нерандомизированный С. к. отклоняет гипотезу H_0, если происходит событие $\{X\in K\}$; если же происходит событие $\{X\in\overline{K}\}$, то гипотеза H_0 принимается. Множество K наз. критическим множеством С. к.

Как правило, нерандомизированный С. к. бывает основан на нек-рой статистике $T_n=T_n(X)$, называемой статистикой критерия, при этом критич. множество K такого критерия обычно задается с помощью соотношений вида $K=\{x: T_n(x)<t_1\}$, $K=\{x: T_n(x)>t_2\}$, $K=\{x: T_n(x)<t_1\}\cup\{x: T_n(x)>t_2\}$. Постоянные t_1, t_2, называемые критическими значениями статистики критерия T_n, определяются из условия $\alpha=\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)$, при этом в первых двух случаях принято говорить об односторонних С. к., а в третьем случае — о двустороннем критерии. Структура статистики критерия T_n отражает в себе специфику конкурирующих гипотез H_0 и H_1. В случае, когда семейство $\{P_\theta^n, \theta\in\Theta\}$ обладает достаточной статистикой $\Psi=\Psi(X)$, естественно, что ста-

тистику критерия следует искать в классе необходимых статистик, так как

$$\beta_n(\theta)=\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)=\mathsf{E}_\theta T_n(X)$$

при всех $\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$, где $T_n(X)=\mathsf{E}\{\varphi_n(X)|\Psi\}$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, 2 изд., пер. с англ., М., 1975; [4] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [5] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *М. С. Никулин.*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИЕМОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ — совокупность методов статистич. контроля качества массовой промышленной продукции с целью выявления ее соответствия заданным требованиям. С. п. к. ведется на основе государственных стандартов (ГОСТ), содержащих таблицы планов контроля и правила выбора планов из этих таблиц. Предусматривается возможность ведения контроля на разных уровнях жесткости. При выборе плана контроля и уровня жесткости учитывают объем контролируемой партии (число входящих в нее изделий), результаты контроля предыдущих партий и др. факторы. С. п. к — действенное средство поддержания требуемого уровня качества продукции.

Наиболее часто используются две разновидности С. п. к. — контроль по альтернативному признаку и контроль по количественному признаку. При контроле по *альтернативному признаку* изделия классифицируются на годные и дефектные. При контроле по *количественному признаку* измеряются параметры изделий, принимающие вещественные значения.

При отборе изделий на контроль используются различные методы. Широко используется случайный выбор без возвращения (см. *Выборочный метод*), при к-ром все выборки одинакового объема имеют равные вероятности. Если контроль носит разрушающий характер (испытания на разрыв), то сплошной контроль невозможен. При С. п. к., как правило, проверяется лишь часть изделий, составляющих выборку, поэтому возможны ошибочные решения. В теории С. п. к. разрабатываются методы расчета вероятностных показателей планов контроля и статистич. методы оценки эффективности С. п. к. на основе накапливаемой информации о ходе контроля.

Часто С. п. к. проводят с использованием *одноступенчатых планов*. Пусть $\mathfrak{P}$ — контролируемая партия из N изделий. Одноступенчатый план характеризуется заданием объема n выборки и приемочным числом c. Если число дефектных изделий в выборке окажется равным d и $d\leqslant c$, то $\mathfrak{P}$ принимается. Если же $d>c$, то $\mathfrak{P}$ бракуется. В зависимости от вида изделий решение о браковке может либо означать сплошную проверку всех изделий из $\mathfrak{P}$, не попавших в выборку, либо снижение сортности и т. п. В стандартах допускается использование двухступенчатых, многоступенчатых и последовательных планов. *Двухступенчатый план* характеризуется заданием объемов n_1 и n_2 первой и второй выборок, приемочных чисел c_1, c_2, браковочных чисел r_1, r_2 ($r_1>c_1$, $r_2=c_2+1$). Если число дефектных изделий в первой выборке $d_1\leqslant c_1$, то $\mathfrak{P}$ принимается. Если $d_1\geqslant r_1$, то $\mathfrak{P}$ бракуется. В том случае, когда $c_1<d_1<r_1$, берется вторая выборка. Если d_2 — число дефектных изделий во второй выборке и $d_1+d_2\leqslant c_2$, то $\mathfrak{P}$ принимается. Если $d_1+d_2\geqslant r_2$, то $\mathfrak{P}$ бракуется.

Важной числовой характеристикой планов С. п. к. при контроле по альтернативному признаку является оперативная характеристика $P(D)$, равная вероятности принять партию по результатам контроля изделий, составляющих выборку. Для одноступенчатого плана

$$P(D)=\sum_{d=0}^{c}h_{N,D}^{n,d},$$

где

$$h_{N,D}^{n,d}=\binom{n}{d}\binom{N-n}{D-d}\Big/\binom{N}{D}-$$

вероятность обнаружить d дефектных изделий в случайной выборке без возвращения объема n, когда $\mathfrak{P}$ содержит D дефектных изделий. Распределение с вероятностями $P_d=h_{N,D}^{n,d}$, $d=0,\ \ldots,\ n$, наз. гипергеометрическим. Расчет числовых показателей планов контроля часто проводится на основе аппроксимации гипергеометрического распределения биномиальным или пуассоновским распределениями. Для двухступенчатых и последовательных планов существенным показателем является среднее число контролируемых изделий $m(D)$.

Таблицы планов контроля в стандартах содержат параметры планов, обладающих (по крайней мере приближенно) различными свойствами оптимальности. Пусть $q=D/N$ — доля дефектных изделий, q_H — средняя доля дефектных изделий при стационарном процессе производства. Поиск оптимальных планов контроля можно проводить среди планов, имеющих одинаковые средние расходы при $q=q_H$. Средние расходы равны стоимости контроля изделий, составляющих выборку, и ущерба от напрасной забраковки годных изделий. Иногда целесообразно в сумму расходов включать ущерб от принятия дефектных изделий. В стандарте [1] содержатся таблицы одноступенчатых планов, обеспечивающих при заданном среднем уровне расходов на контроль и заданном q_H приближенно наилучшую защиту потребителю от принятия партий, содержащих D дефектных изделий, в широком интервале значений $D>Nq_H$. Это означает, что оперативные характеристики таких планов для широкого интервала значений D близки к нижней огибающей оперативных характеристик всех одноступенчатых планов, имеющих при $q=q_H$ одинаковые средние расходы на проведение контроля. Составление таблиц планов, включаемых в стандарты, требует больших затрат машинного времени ЭВМ.

По результатам С. п. к. многих партий продукции можно построить т. н. последующие оценки различных величин, отражающих эффективность используемого стандарта на С. п. к. Напр., можно найти несмещенные оценки для суммарного числа дефектных изделий, содержавшихся в предъявленных на контроль партиях. При контроле с использованием одноступенчатых планов можно построить статистич. оценки суммарного числа дефектных изделий, принятых потребителем. Смещения этих оценок быстро убывают с ростом объема выборок. Идея использования последующих оценок в С. п. к. была предложена А. Н. Колмогоровым [2]. Известны различные обобщения методов С. п. к. по альтернативному признаку (см. [3], [4]), в нек-рых приложениях целесообразно рассматривать С. п. к., при к-ром возможна ошибочная классификация дефектных изделий как годных и годных изделий как дефектных [5]. В С. п. к. широко используются бейесовские методы [6].

Стандарты на С. п. к. по количественному признаку основаны на допущении, что измеряемые при контроле характеристики изделий в выборке являются взаимно независимыми одинаково распределенными случайными величинами, функции распределения к-рых принадлежат нек-рому параметрич. семейству. Наиболее часто используются стандарты, в к-рых таким семейством являются нормальные (гауссовские) распределения. На практике выполнение указанных допущений требует тщательной проверки и должно предшествовать решению об использовании стандарта С. п. к. по количественному признаку.

Только обоснованное использование С. п. к. по количественному признаку может дать более эффективные результаты по сравнению со С. п. к. по альтернативному признаку.

Лит.: [1] ГОСТ 24660—81; [2] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303—26; [3] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [4] Лумельский Я. П., Статистические оценки результатов контроля качества, М., 1979; [5] Беляев Ю. К., «Докл. АН СССР», 1976, т. 231, № 3, с. 521—24; [6] Hald A., Statistical theory of sampling inspection by attributes, L.— [a. o.], 1981. *Ю. К. Беляев.*

СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПРОВЕРКА — один из основных разделов математич. статистики, в к-ром развиваются идеи и методы статистич. проверки соответствия между экспериментальными данными и гипотезами об их вероятностной природе.

Пусть наблюдается случайный вектор $X=(X_1, \ldots, X_n)$, принимающий значения $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}_n, \mathscr{B}_n)$, и пусть известно, что распределение вероятностей этого случайного вектора X принадлежит заданному множеству вероятностных распределений $H=\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$, где Θ — нек-рое параметрич. множество. Множество H наз. множеством допустимых гипотез, а любое его непустое подмножество H_i — статистич. гипотезой или просто гипотезой. Если H_i содержит ровно один элемент, то такая гипотеза наз. простой, в противном случае — сложной. Далее, пусть в H выделены две т. н. конкурирующие между собой гипотезы

$$H_0=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta_0\subset\Theta\}$$

и

$$H_1=H\setminus H_0=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0\},$$

одну из к-рых, напр. H_0, наз. основной, а другую — альтернативной гипотезой или просто альтернативой к H_0. В терминах гипотез H_0 и H_1 удобно формулировать основную задачу теории С. г. п. в рамках модели Неймана — Пирсона (см. [1], [2]). Именно, найти оптимальный способ, пользуясь к-рым можно было бы на основе наблюденной реализации случайного вектора X проверить, справедлива ли гипотеза H_0 : $\theta\in\Theta_0$, согласно к-рой распределение вероятностей вектора X принадлежит множеству $H_0=\{P_\theta, \theta\in\Theta_0\}$, или же справедлива альтернативная гипотеза H_1 : $\theta\in\Theta_1$, согласно к-рой распределение вероятностей наблюдаемого вектора X принадлежит множеству

$$H_1=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0\}.$$

Пример 1. Пусть наблюдается случайный вектор $X=(X_1, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого $X_1, \ldots, X_n$ суть независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же нормальному закону $N_1(\theta, 1)$, математич. ожидание к-рого $\theta=\mathsf{E}X_i$ неизвестно ($|\theta|<\infty$), а дисперсия равна 1, т. е. для любого действительного числа x

$$\mathsf{P}\{X_i<x\mid\theta\}=\Phi(x-\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}(t-\theta)^2}dt,$$

$$i=1, 2, \ldots, n.$$

В этих условиях можно, напр., рассмотреть задачу проверки гипотезы H_0 : $\theta=\theta_0$ против альтернативы H_1 : $\theta\neq\theta_0$, где θ_0 — нек-рое заданное число. В данном примере гипотеза H_0 является простой, а конкурирующая с ней гипотеза H_1 — сложной.

Формально, конкурирующие гипотезы H_0 и H_1 являются равноправными в задаче различения гипотез и вопрос о том, какое из двух непересекающихся и взаимно дополняющих множеств из H назвать основной гипотезой, не является существенным и не влияет на построение самой теории С. г. п. Однако, как правило, на выборе основной гипотезы сказывается отношение экспериментатора к самой задаче, в результате чего основной гипотезой чаще наз. то множество H_0 из множества всех допустимых гипотез H, к-рое, по мнению экспериментатора, по природе изучаемого явления либо из каких-либо физич. соображений, должно лучше согласовываться с ожидаемыми экспериментальными данными. Именно поэтому гипотезу H_0 часто наз. проверяемой гипотезой. В теоретич. плане различие между гипотезами H_0 и H_1 часто сказывается в том, что, как правило, множество H_0 оказывается более просто устроенным, чем H_1, что отражает желание экспериментатора иметь дело с более простой моделью.

В теории С. г. п. суждение о справедливости H_0 или H_1 делается на основании наблюденной реализации случайного вектора X; при этом решающее правило, с помощью к-рого принимается решение «справедлива гипотеза H_i» ($i=0,1$), наз. *статистическим критерием*. Структура любого статистич. критерия полностью определяется его т. н. критич. функцией $\varphi_n(\cdot)$: $\mathfrak{X}_n\to[0; 1]$. Согласно статистич. критерию, имеющему критич. функцию $\varphi_n(\cdot)$, проверяемая гипотеза H_0 отвергается с вероятностью $\varphi_n(X)$ в пользу альтернативы H_1, а гипотеза H_1 отвергается с вероятностью $1-\varphi_n(X)$ в пользу H_0. С практич. точки зрения наибольший интерес представляют т. н. нерандомизированные критерии, критич. функции к-рых принимают лишь два значения: 0 и 1. Какой бы критерий не применялся для различения гипотез H_0 и H_1, в результате его применения можно либо принять правильное решение, либо прийти к ошибочному. В теории С. г. п. ошибочные выводы принято классифицировать следующим образом.

Если критерий бракует проверяемую гипотезу H_0, когда она в действительности верна, то говорят, что совершена ошибка 1-го рода. Напротив, если статистич. критерий не отклоняет проверяемую гипотезу H_0 (и, значит, согласно этому критерию, гипотеза H_0 принимается), когда она на самом деле неверна, то говорят, что совершена ошибка 2-го рода. Задачу проверки гипотезы H_0 против H_1 желательно провести таким образом, чтобы минимизировать вероятности этих ошибок. К сожалению, управлять обеими вероятностями ошибок одновременно при фиксированной размерности n вектора наблюдений X невозможно: уменьшение одной из них ведет, как правило, к увеличению другой. Численно вероятности этих ошибок выражаются в терминах т. н. функции мощности $\beta_n(\cdot)$ статистич. критерия, определенной на множестве $\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$ по следующему правилу:

$$\beta_n(\theta)=\mathsf{E}_\theta\ \varphi_n(X)=\int_{\mathfrak{X}}\varphi_n(x)\,dP_\theta(x),\ \theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1.$$

Из определения функции мощности $\beta_n(\cdot)$ следует, что если случайный вектор X подчиняется закону P_θ, $\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$, то статистич. критерий, основанный на критич. функции $\varphi_n(\cdot)$, будет отклонять проверяемую гипотезу H_0 с вероятностью $\beta_n(X)$. Таким образом, сужение функции мощности $\beta_n(\cdot)$ с Θ на Θ_0 будет показывать вероятности ошибок 1-го рода, т. е. вероятности напрасного отклонения H_0. Напротив, сужение функции мощности $\beta_n(\cdot)$ с Θ на Θ_1, называемое мощностью статистич. критерия, показывает другое важное качество статистич. критерия: вероятности отклонения проверяемой гипотезы H_0, когда в действительности справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Иногда мощностью статистич. критерия наз. число

$$\beta=\inf_{\theta\in\Theta_1}\beta_n(\theta)=\inf_{\theta\in\Theta_1}\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X).$$

Дополнение же мощности до 1, т. е. функция $1-\beta_n(\cdot)$, заданная на множестве Θ_1, позволяет вычислять вероятности ошибок 2-го рода.

В рамках классич. модели С. г. п. Неймана — Пирсона задачу проверки H_0 против H_1 начинают с выбора верхней границы $\alpha\,(0<\alpha<1)$ для вероятности напрасного отклонения проверяемой гипотезы H_0, т. е. для вероятности ошибки 1-го рода, и уже при заданной границ α стараются построить такой критерий, к-рый имел бы наибольшую мощность. Исходя из особой роли, к-рую играет гипотеза H_0 для экспериментатора, число α, наз. *уровнем значимости* критерия, выбирают достаточно малым, напр. равным 0,01; 0,05; 0,1 и т. п. Выбор уровня значимости α означает, что множество всех статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1, сужается до множества критериев, удовлетворяющих условию:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)=\sup_{\theta\in\Theta_0}\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)=\alpha. \qquad (1)$$

(Иногда вместо условия (1) требуют, чтобы $\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)\leqslant\alpha$, что никак не отражается на построении общей теории С. г. п.) Статистич. критерий, удовлетворяющий условию (1), наз. критерием уровня α. Таким образом, в классич. постановке задача проверки H_0 против H_1 сводится к построению такого статистич. критерия уровня α, функция мощности к-рого удовлетворяла бы условию

$$\beta_n^*(\theta)\geqslant\beta_n(\theta)\ \text{при всех}\ \theta\in\Theta_1, \qquad (2)$$

где $\beta_n(\cdot)$ — функция мощности произвольного критерия уровня α. В случае, когда гипотезы H_0 и H_1 являются простыми, эффективное решение этой вариационной задачи дает *отношения правдоподобия критерий*. Если же гипотеза H_1 является сложной, то статистич. критерий, удовлетворяющий условию (2), удается построить редко. Но если такой критерий существует, то именно этот критерий признается наилучшим для проверки H_0 против H_1 и его наз. *равномерно наиболее мощным критерием* уровня α в задаче различения статистич. гипотез H_0 и H_1. В силу того что равномерно наиболее мощные критерии существуют редко, приходится сужать класс статистич. критериев с помощью нек-рых дополнительных требований, таких, как несмещенность, подобие, полнота и др., и уже в более узком классе строить наилучший критерий в смысле (2). Напр., требование несмещенности критерия означает, что его функция мощности должна удовлетворять соотношению

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)\leqslant\inf_{\theta\in\Theta_1}\beta_n(\theta).$$

Пример 2. В условиях примера 1 при любом фиксированном уровне значимости α существует нерандомизированный равномерно наиболее мощный несмещенный критерий уровня α для проверки H_0 против альтернативы H_1 — отношения правдоподобия критерий. Критич. функция этого наилучшего критерия определяется следующим образом:

$$\varphi_n(X)=\begin{cases}1, & \text{если } |X.-\theta_0|>\frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\\ 0, & \text{если } |X.-\theta_0|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\end{cases}$$

где

$$X.=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n).$$

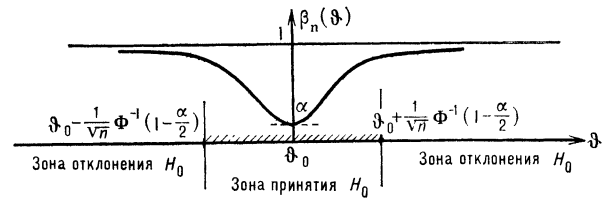
В силу того что статистика $X.$, называемая статистикой критерия, подчиняется нормальному закону $N_1(\theta,\,1/n)$ с параметрами $\mathsf{E}X.=\theta$ и $\mathsf{D}X.=\frac{1}{n}$, т. е. для любого действительного числа x

$$\mathsf{P}\{X.<x\mid\theta\}=\Phi\left[\sqrt{n}\,(x-\theta)\right],$$

функция мощности $\beta_n(\cdot)$ наилучшего критерия для проверки H_0 против H_1 выражается формулой

$$\beta_n(\theta)=\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)=\mathsf{P}\left\{|X.-\theta_0|>\frac{1}{n}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Big|\,\theta\right\}=\Phi\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{n}\,(\theta_0-\theta)\right]+\Phi\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sqrt{n}\,(\theta_0-\theta)\right],$$

причем $\beta_n(\theta)\geqslant\beta_n(\theta_0)=\alpha$. Рисунок дает графич. представление о поведении функции мощности $\beta_n(\cdot)$.



Наименьшее значение, равное уровню значимости α, функция $\beta_n(\cdot)$ достигает в точке $\theta=\theta_0$, и, по мере удаления θ от θ_0, ее значения растут, приближаясь тем ближе к 1, чем больше величина $|\theta-\theta_0|$.

Теория С. г. п. позволяет с единой точки зрения трактовать различные задачи, выдвигаемые практикой: построение интервальных оценок для неизвестных параметров, оценка расхождения между средними значениями вероятностных законов, проверка гипотез о независимости наблюдений, задачи статистич. контроля качества и др. Так, напр., в примере 2 зона принятия гипотезы H_0 представляет собой наилучший доверительный интервал с коэффициентом доверия $1-\alpha$ для неизвестного математич. ожидания θ.

Наряду с классич. подходом Неймана — Пирсона к решению задачи различения гипотез существуют и другие: бейесовский подход, минимаксный подход, метод последовательного различения Вальда и др. Кроме того, в теории С. г. п. рассматриваются приближенные методы, основанные на изучении асимптотич. поведения последовательности $\{\beta_n(\cdot)\}$ функций мощности статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1, когда размерность n вектора наблюдений $X=(X_1,\ldots,X_n)$ неограниченно растет. В такой ситуации обычно требуют, чтобы построенная последовательность критериев была состоятельной, т. е. чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n(\theta)=1\ \text{для любого}\ \theta\in\Theta_1,$$

что означает, что с ростом n гипотезы H_0 и H_1 можно будет различать с любой степенью достоверности. В примере 2 построена состоятельная последовательность критериев (если $n\to\infty$).

В любом случае, каким бы статистич. критерием не пользоваться в задаче различения гипотез H_0 и H_1, принятие гипотезы $H_0\,(H_1)$ означает не то, что эта гипотеза $H_0\,(H_1)$ в действительности истинна, а лишь факт отсутствия противоречий результатов наблюдений с принимаемой гипотезой на данном этапе исследований. Именно в силу этого согласия опыта и теории у экспериментатора нет оснований не верить в истинность $H_0\,(H_1)$ до тех пор, пока не появятся новые наблюдения, к-рые могут заставить изменить его отношение к принятой ранее гипотезе, а может даже и ко всей модели вообще.

Лит.: [1] Neyman J., Pearson E. S., «Biometrika», 1928, v. 20 A, p. 175—240; p. 263—94; [2] их же, «Phil. Trans Roy. Soc.», ser. A, 1933, v. 231, p. 289—337; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, 2 изд., пер. с англ., М., 1975; [5] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971.

М. С. Никулин

СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ МЕТОД — метод численного расчета, при к-ром искомые неизвестные интерпретируют как характеристики соответствующего случайного явления (с. я.) Ф; это с. я. численно моделируется, после чего искомые величины оцениваются из имитаций наблюдений Ф. Как правило, для неизвестной z отыскивают представление в виде математич. ожидания $z=\mathsf{E}Z(\omega)$ какой-либо случайной величины $Z(\omega)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, описывающем с. я. Ф, и имитируют независимые наблюдения Ф (см. *Независимость*). Тогда на основании *больших чисел закона*

$$z \approx \zeta_n = N^{-1}[Z(\omega^{(1)})+\ldots+Z(\omega^{(N)})].$$

При $\mathsf{E}|Z(\omega)|^2<\infty$ случайная погрешность этой формулы может быть грубо оценена по вероятности с помощью *Чебышева неравенства* или, асимптотически, на основании *центральной предельной теоремы*

$$\mathsf{P}\{|z-\zeta_n|<a\sigma(Z)N^{-1/2}\} \approx \operatorname{erf}(a),$$
$$\sigma^2=\mathsf{E}|Z(\omega)|^2-|\mathsf{E}Z(\omega)|^2. \qquad (1)$$

Математич. ожидание $\mathsf{E}|Z(\omega)|^2$ также может быть оценено «из экспериментов», что позволяет дать апостериорную доверительную оценку точности расчета (см. *Доверительное оценивание*). Имитацию с. я. обычно разыгрывают по последовательности независимых случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$. Для этого используют какое-либо естественное измеримое отображение f на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ единичного счетномерного гиперкуба

$$H=\bigtimes_{k=1}^{\infty}\{x_k: 0\leqslant x_k\leqslant 1\}$$

с лебеговым объемом $dV=\prod_k dx_k$ на нем; $\Omega=f(H)$, $P=Vf^{-1}$, где функция f сильно зависит в основном только от координат с малыми номерами. Таким образом, формально задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_H Z(f(x))\,dV$$

по простейшей квадратурной формуле с равными весами и случайными абсциссами $x^{(n)}$. Как следует из (1), объем вычислительной работы, необходимой для достижения заданной точности ε расчета z, определяется, при фиксированном уровне доверия $\operatorname{erf}(a)$, произведением $N\tau=\varepsilon^{-2}a^2\sigma^2(Z)\tau(Z)$, где τ — математич. ожидание объема вычислительной работы по построению одной реализации $Z(\omega)$. Оно быстро растет с уменьшением ε; поэтому большое значение имеет удачный выбор модели с достаточно малым $\sigma^2\tau$. В частности, в первоначальной интегральной записи может оказаться выгоднее заранее аналитически проинтегрировать по части переменных x_i, сделать замену других переменных, разбить куб интегрирования на области, выделить главную часть интеграла, использовать группы зависимых узлов x^n, задающих точную квадратурную формулу для какого-либо класса функций и т. п. Выбор наиболее выгодной «модели» можно проводить, грубо оценивая величины σ^2 и τ в небольших предварительных численных экспериментах. При проведении серии расчетов заметного повышения точности удается добиться также надлежащей статистич. обработкой «наблюдений» и выбором соответствующего плана «экспериментов».

Большой класс моделей, используемых в С. и. м., связан со схемой случайных блужданий. В простейшем случае B — квадратная матрица порядка m, $b_{ij}=r_{ij}\cdot p_{ij}$, где $|r_{ij}|<1$, $p_{ij}\geqslant 0, 1\leqslant i,j\leqslant m$; $p_{i1}+\ldots+p_{im}<1$, $i=1, \ldots, m$. Организуем марковское случайное блуждание $w=\{\theta(0), \theta(1), \ldots, \theta(\nu)\}$ по m состояниям $\theta_1, \ldots, \theta_m$, с вероятностями перехода p_{ij} из θ_i в θ_j, до перехода на случайном $(\nu+1)$-м шаге в дополнительное поглощающее состояние θ_0, с вероятностью поглощения $p_{i0}=1-(p_{i1}+\ldots+p_{im})$, $p_{00}=1$. В предположении, что блуждающая частица изменяет свой вес по правилу $\rho_k=\rho_{k-1}r_{ij}$, если k-й случайный переход был из θ_i в θ_j; $\rho_0=1$, решение уравнения $(\mathbb{1}-B)y=g$ с помощью ряда Неймана можно покоординатно проинтерпретировать как

$$y_e=g_e+(Bg)_e+(B^2g)_e+\ldots=$$
$$=\mathsf{E}[g(\theta(0))+\rho_1 g(\theta(1))+\ldots+\rho_\nu g(\theta(\nu))], \qquad (2)$$

где $\theta(0)=\theta_e$, $g(\theta_s)=g_s$, $s=1, \ldots, m$. Каждая «траектория» $\omega^{(k)}$ моделируется по своей последовательности случайных чисел $x_n^{(k)}$; переход в θ_j совершается на n-м шаге из $\theta(n-1)=\theta_i$ при $p_{i0}+\ldots+p_{i,j-1}\leqslant x_n^{(k)}\leqslant p_{i0}+\ldots+p_{ij}$. Объем работы по построению траектории и расчету функционала от нее пропорционален ее «длине» ν; в этой схеме $\mathsf{E}\nu<\infty$.

При моделировании случайных блужданий с непрерывным временем движение приходится дискретизировать. Пусть требуется подсчитать долю b излучения, выходящего из шара радиуса R, в центре к-рого помещен источник. Частицы излучения движутся прямолинейно; на пути ds с вероятностью ads частица взаимодействует со средой, в результате с вероятностью $1-q$ она поглощается, а с вероятностью q — сферически симметрично рассеивается. Ответ задачи выписывается через решение интегро-дифференциального уравнения переноса, отвечающего приведенному стохастич. дифференциальному описанию движения. Вместо того чтобы разбить приближенный путь частицы на шаги Δs и проверять на каждом шаге, не произошло ли взаимодействие, можно, напр., по показательному закону с плотностью $p(s)=a\exp(-as)$, $s\geqslant 0$, разыграть с помощью единственного случайного числа длину n-го случайного пробега s_n и найти очередную точку взаимодействия $\boldsymbol{r}_n$. Далее, можно не разыгрывать тип взаимодействия со средой, а учитывать поглощение весовым множителем по правилу $\rho_n=q\rho_{n-1}$. Затем разыгрываются полярный и азимутальный углы (θ, φ) нового направления движения; $\cos\theta$ распределен равновероятно на отрезке $[-1,1]$, а φ — на полуинтервале $[0, 2\pi)$. Они определяют орт $\boldsymbol{e}_n$ нового направления движения. Моделирование проводится до вылета из шара, т. е. до первого события $s_n\geqslant l_n$, где l_n — длина пути до границы шара, $|\boldsymbol{r}_n+l_n\boldsymbol{e}_n|=R$. Тогда средний вес вылетевших «частиц» дает оценку b. Полученное интегральное выражение для искомой величины (вытекающее также из интегрального уравнения переноса) можно преобразовать к интегралу по тем траекториям ω, к-рые шар не покидают. Пробег s_n при этом надо разыгрывать по условному закону с плотностью $a[1-\exp(-al_n)]^{-1}\exp(-as)$; новый вес определяется правилом $\rho_{n+1}=q\rho_n[1-\exp(-al_n)]$, и на каждой траектории подсчитывается функционал $\beta=\sum\rho_n\exp(-al_n)$. Тогда $b=\mathsf{E}\beta$, где $\beta(\omega(x))$ — непрерывная функция внутри H. В этой модели траектории бесконечны, но вклад их звеньев с большими номерами мал; поэтому можно кончать их моделирование, как только $\rho_n\leqslant\delta$, внося в подсчет b небольшую систематич. ошибку. Описанная схема дает неплохие результаты при $aR\sim 1$. Однако при больших R ее использование может привести к ложным заключениям. При $aR\gg 1$ выход из шара является редким событием и в основном осуществляется траекториями, все звенья к-рых «в среднем» длинны. Если N недостаточно велико, то весьма вероятно, что такие атипичные траектории с относительно большим значением β попадаться не будут и можно прийти к заниженным (но не нулевым) оценкам как искомого среднего b, так и дисперсии $\mathsf{D}\beta$, т. е. апостериорной меры ошибки. Повысить точность здесь

можно, если воспользоваться экспоненциальным преобразованием, моделируя траектории по показательному закону с завышенным средним пробегом и компенсируя это дополнительным экспоненциальным множителем в весе.

Как следует из формулы (2), решая С. и. м. систему линейных уравнений, можно найти приближенно выделенное неизвестное, не вычисляя остальных. Это важное свойство оправдывает использование С. и. м., несмотря на его медленную сходимость, напр. при решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений 2-го порядка, когда требуется узнать решение лишь в одной выделенной точке. В частности, для уравнения Лапласа решение записывается в виде интеграла по винеровской траектории, т. е. траектории броуновского движения. Решение нек-рых краевых задач для метагармонического (в т. ч.— бигармонического) уравнения удается записать в виде интегралов по траектории броуновской частицы с матричным весом. Моделирование самих броуновских траекторий, испытывающих бесконечно много столкновений за любой интервал времени, удается проводить при этом крупными участками с помощью разработанных специфич. приемов.

Для решения С. и. м. нелинейных уравнений используются более сложные модели потоков многих частиц, стохастически взаимодействующих со средой и между собой, в т. ч. каскадов размножающихся частиц.

К недостаткам метода, кроме медленной сходимости, следует отнести недостаточную надежность апостериорной оценки (1) вероятной относительной погрешности. Она может быть занижена как из-за «некачественности» (т. е. коррелированности) использованных случайных чисел, так и из-за «нетипичности» (т. е. малой вероятности) исходов ω, дающих основной вклад в интеграл.

Другое название С. и. м.— *Монте-Карло метод* — в большей степени относится к теории модификаций С. и. м.

Лит. см. при ст. *Монте-Карло метод*. *Н. Н. Ченцов.*

СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИЯ — общая теория проведения статистич. наблюдений, их обработки и использования. При более широком толковании термина С. р. т. — теория выбора оптимального недетерминированного поведения в условиях неопределенности.

Предметом математич. статистики являются обратные задачи теории вероятностей. Имеется нек-рое случайное явление Ф, описываемое качественно измеримым пространством $(\Omega, \mathcal{A})$ всех мыслимых его исходов ω и количественно — распределением P вероятностей исходов. Статистику описание Ф известно только качественно, а относительно P у него до опытов имеется лишь неполная информация типа $P \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — известное ему семейство вероятностных законов. Проведя одно или несколько наблюдений Ф и обработав полученный материал, статистик должен сделать выводы о законе P и выбрать наиболее выгодное поведение (в частности, он может решить, что собранного материала недостаточно и что надо продолжить серию наблюдений, прежде чем делать окончательные выводы). В классич. задачах математич. статистики число наблюдений (объем выборки) фиксировалось и отыскивались оптимальные оценки неизвестного закона P. Современная общая концепция статистич. решения принадлежит А. Вальду (A. Wald, см. [2]). Принимают, что каждый эксперимент имеет стоимость, за к-рую надо уплачивать, а за ошибочное решение статистик также несет потери — с него взыскивается соответствующий ошибке «штраф». Поэтому, с точки зрения статистика, решающее правило (р. п.) Π оптимально тогда, когда оно минимизирует риск $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P, \Pi)$ — математич. ожидание суммы всех его убытков. Этот подход был положен А. Вальдом [1] в основу статистич. *последовательного анализа* и привел к созданию в *статистическом приемочном контроле* процедур, использующих, при той же точности выводов, в среднем почти вдвое меньше наблюдений, чем классич. р. п. В описанной постановке любая задача статистич. решения может рассматриваться как игра двух игроков в смысле Дж. Неймана (J. Neumann, см. [3]), в к-рой одним из игроков является статистик, а другим — природа. Впрочем, еще в 1820 П. Лаплас (P. Laplace) уподобил получение статистич. оценки азартной игре, в к-рой статистик терпит поражение, если его оценки плохи.

Величина риска $\mathfrak{R}(P, \Pi)$ зависит как от р. п. Π, так и от вероятностного закона P, по к-рому распределены исходы наблюдаемого явления. Так как это «истинное» значение P неизвестно, то приходится минимизировать по Π всю функцию риска $\mathfrak{R}(P, \Pi)$ как функцию от $P \in \mathcal{P}$ при заданном Π. Говорят, что р. п. Π_1 равномерно лучше правила Π_2, если $\mathfrak{R}(P, \Pi_1) \leqslant \mathfrak{R}(P, \Pi_2)$ при всех $P \in \mathcal{P}$ и $\mathfrak{R}(P, \Pi_1) < \mathfrak{R}(P, \Pi_2)$, хотя бы при одном $P \in \mathcal{P}$. Р. п. Π наз. допустимым, если не существует равномерно лучших р. п. Нек-рый класс C р. п. наз. полным (существенно полным), если для любого р. п. $\Pi \notin C$ найдется равномерно лучшее (не худшее) р. п. $\Pi^* \in C$. Наиболее важен минимальный полный класс р. п., к-рый совпадает (если только существует) с множеством всех допустимых р. п. Если минимальный полный класс содержит ровно одно р. п., то оно и будет оптимальным. В общем случае функции риска, отвечающие допустимым р. п., приходится дополнительно сравнивать по значению какого-либо функционала, напр. максимума риска. Оптимальное в последнем смысле р. п. Π_0

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi_0) = \inf_{\Pi} \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi) = \mathfrak{R}^*$$

наз. минимаксным. Возможно сравнение по бейесовскому риску

$$\mathfrak{R}_\mu(\Pi) = \int_{\mathcal{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi)\, \mu\{dP(\cdot)\}$$

— усреднению риска по нек-рой априорной вероятностной мере μ на семействе $\mathcal{P}$. Такой выбор функционала является естественным, в частности, когда проводятся многократные серии экспериментов, в каждой серии наблюдается свой случайный объект с известным распределением μ попасть в эксперимент (см. *Бейесовский подход*). Оптимальное в этом смысле р. п. Π,

$$\mathfrak{R}_\mu(\Pi_0) = \inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\mu(\Pi),$$

наз. бейесовским относительно *априорного распределения* (а. р.) μ. Наконец, а. р. ν наз. наименее благоприятным (для данной задачи), если

$$\inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\nu(\Pi) = \sup_{\mu} \inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\mu(\Pi) = \mathfrak{R}_0.$$

При весьма общих предположениях доказано, что: 1) для любого а. р. μ существует бейесовское р. п.; 2) совокупность всех бейесовских р. п. и их пределов образует полный класс; 3) минимаксные р. п. существуют и являются бейесовскими относительно наименее благоприятного а. р., и $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}_0$ (см. [4]). Конкретный вид оптимальных решающих правил существенно зависит от типа статистич. задачи. Однако в классич. задачах статистич. оценки при больших объемах выборки оптимальное р. п. слабо зависит от избранного способа сравнения функций риска.

Р. п. в задачах С. р. т. могут быть детерминированными и рандомизированными. Первые задаются функ-

циями, напр. измеримым отображением пространства Ω^n всех выборок $(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})$ объема n в измеримое пространство (и. п.) $(\Delta, \mathscr{B})$ решений δ. Вторые задаются марковскими переходными распределениями вероятностей вида $\Pi(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)}; d\delta)$ из $(\Omega^n, \mathscr{A}^n)$ в $(\Delta, \mathscr{B})$, описывающими вероятностный закон, по к-рому надо дополнительно независимо «разыграть» принимаемое значение δ (см. *Статистических испытаний метод*). Допущение рандомизированных процедур делает множество р. п. задачи выпуклым, что сильно облегчает теоретич. анализ. Более того, существуют задачи, в к-рых оптимальное р. п. является рандомизированным. Тем не менее на практике статистики стремятся по возможности их избегать, т. к. использование таблиц или иного датчика случайных чисел для «розыгрыша» выводов усложняет работу.

Статистич. р. п. есть, по определению, переходное распределение вероятностей из нек-рого и. п. $(\Omega, \mathscr{A})$ исходов эксперимента в и. п. $(\Delta, \mathscr{B})$ выводов. Обратно, каждое переходное распределение вероятностей $\Pi(\omega; d\delta)$ можно истолковать как р. п. в любой статистич. задаче решения с и. п. $(\Omega, \mathscr{A})$ исходов и и. п. $(\Delta, \mathscr{B})$ выводов (а также как канал связи без памяти, с входным алфавитом Ω и выходным алфавитом Δ). Статистич. р. п. Π образуют алгебраич. категорию с объектами Car $(\Omega, \mathscr{A})$ — совокупностями всех распределений вероятностей на всевозможных и. п. $(\Omega, \mathscr{A})$, и морфизмами — переходными вероятностями Π. Инварианты и эквиварианты этой категории определяют многие естественные понятия и закономерности математич. статистики (см. [5]). Напр., на объектах категории существует единственная, с точностью до множителя, инвариантная риманова метрика. Она задается *информационной матрицей* Фишера. Морфизмы категории порождают отношения эквивалентности и порядка для параметризованных семейств распределений вероятностей и для статистич. задач решения, что позволяет дать естественное определение *достаточной статистики*. Несимметричное информационное уклонение Кульбака $I(Q:P)$, характеризующее непохожесть распределения вероятностей Q на P (см. *Информационное расстояние*), является монотонным инвариантом в категории:

$$I(Q_1:P_1) \geqslant (Q_2:P_2)$$

при $(Q_1, P_1) \geqslant (Q_2, P_2)$, т. е. когда $Q_2 = Q\Pi$ и $P_2 = P_1\Pi$ при нек-ром Π. Если в задаче статистич. оценки по выборке фиксированного объема N требуется оценить сам закон распределения P исходов наблюдений, принадлежащий априори к гладкому семейству $\mathscr{P}$, то, при выборе $2I(Q:P)$ за инвариантную функцию потерь при ответе Q, минимаксный риск

$$\mathfrak{R}^* = N^{-1} \dim \mathscr{P} + o(N^{-1}).$$

Логика квантовых событий не является аристотелевой; поэтому случайные явления микромира не подчиняются законам классич. теории вероятностей. Разработанный для их описания формализм принимает существование некоммутирующих случайных величин и содержит классич. теорию как вырожденную коммутативную схему. При соответствующей интерпретации многие задачи теории квантово-механич. измерений становятся некоммутативными аналогами задач С. р. т. (см. [6]).

Лит.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Вальд А., Основные идеи общей теории статистических решений, пер. с англ. (приложение к [1]); [3] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [4] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [5] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [6] Холево А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980.

Н. Н. Ченцов.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ — метод прикладной и вычислительной математики, состоящий в реализации на ЭВМ специально разрабатываемых стохастич. моделей изучаемых явлений или объектов. Расширение области применения С. м. связано с быстрым развитием техники и особенно многопроцессорных вычислительных систем, к-рые позволяют одновременно моделировать много независимых статистич. экспериментов. С другой стороны, классические вычислительные методы во многих случаях неудовлетворительны для исследования все усложняющихся математич. моделей исследуемых явлений. Это также повышает роль С. м., эффективность к-рого слабо зависит от размерности и геометрич. деталей задачи. К положительным свойствам этого метода следует отнести также простоту и естественность алгоритмов и возможность построения модификаций с учетом информации о решении (см. *Монте-Карло метод*).

Задачи, к-рые решаются методом С. м., можно условно разделить на два класса. К первому можно отнести задачи со стохастич. природой, когда используется прямое моделирование естественной вероятностной модели. Ко второму классу относятся детерминированные задачи; здесь искусственно строится вероятностный процесс, с помощью к-рого дается формальное решение задачи. Затем этот процесс моделируется на ЭВМ и строится численное решение в виде статистич. оценок. Имеется и промежуточный (между двумя приведенными) класс задач. Эти задачи, к-рые описываются детерминистич. уравнениями, но в к-рых случайны либо коэффициенты, либо граничные условия, или правая часть. Здесь особенно эффективной оказывается иногда «двойная рандомизация» (см. [1]), состоящая в том, что для данной реализации случайных параметров строится лишь небольшое число траекторий процесса, решающего уравнение.

Ниже рассмотрены области применения С. м.

Решение задач теории переноса излучения можно осуществить путем моделирования траекторий частиц: нейтронов, фотонов, гамма-квантов, электронов и т. д. Хорошо разработаны алгоритмы С. м. для решения задач атмосферной оптики (см. [2]) и нейтронной физики (см. [3]). С. м. полезно также для исследования диффузии примеси (см. [4]), особенно в стохастич. полях скоростей (см. [5]).

С. м. применяется для решения ряда задач статистич. физики (см. [7]) путем усреднения «по времени» нек-рой модели со стохастич. кинетикой (часто искусственной). С помощью С. м. получены новые результаты в теории фазовых переходов, твердых тел с неупорядоченностью (в частности, магнетиков), поверхностных явлений и т. д. (см. [7]). Для решения сложных задач теории разреженных газов эффективны модификации метода прямого С. м., связанного с расщеплением нелинейного кинетич. уравнения Больцмана (см. [6]). Это уравнение можно связать также с нек-рым ветвящимся марковским процессом (см. [1]).

С. м. можно использовать для решения краевых задач математич. физики на основе специальных вероятностных моделей (см. [5]). С. м. полезно для решения стохастич. задач: дифракции волн на случайных поверхностях, теории упругости со случайными нагрузками и т. д.

С. м. широко применяется для решения задач теории массового обслуживания и других сложных стохастич. систем (см., напр., [1], [8]).

Лит.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Марчук Г. И. и др., Метод Монте-Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [3] Франк-Каменецкий А. Д., Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте-Карло, М., 1978; [4] Галкин Л. М., Решение диффузионных задач методом Монте-Карло, М., 1975; [5] Елепов Б. С. и др., Решение краевых задач методом Монте-Карло, Новосиб., 1980; [6] Белоцерковский О. М., Ерофеев А. И., Яницкий В. Е., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1980,

т. 20, № 5, с. 1174—1204; [7] Биндер К. и др., Методы Монте-Карло в статистической физике, пер. с англ., М., 1982; [8] Бусленко Н. П. и др., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), М., 1962. *Г. А. Михайлов.*

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ — один из основных разделов математич. статистики, посвященный оцениванию по случайным наблюдениям тех или иных характеристик их распределения.

Пример 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины (наблюдения) с общим распределением $\mathcal{P}$ на прямой, неизвестным наблюдателю. Эмпирическое (выборочное) распределение $\mathcal{P}_n^*$, приписывающее нагрузку $\frac{1}{n}$ каждой случайной точке X_i, является оценкой для $\mathcal{P}$. Эмпирич. моменты

$$a_\nu = \int x^\nu d\mathcal{P}_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

служат оценками для моментов $\alpha_\nu = \int x^\nu d\mathcal{P}$. В частности,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

— оценка средней,

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

— оценка дисперсии.

Основные понятия. В общей теории оценивания наблюдение X есть *случайный элемент* со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, неизвестное распределение к-рого принадлежит заданному семейству распределений P. Семейство распределений всегда можно параметризовать и записать в виде $\{\mathcal{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$. Здесь форма зависимости от параметра и множество Θ предполагаются известными. Задача оценивания по наблюдению X неизвестного параметра θ или значения $g(\theta)$ функции g в точке θ заключается в том, чтобы построить функцию $\theta^*(X)$ от наблюдений, достаточно хорошо аппроксимирующую θ ($g(\theta)$).

Сравнение оценок производится следующим образом. Пусть на множестве $\Theta \times \Theta$ ($g(\Theta) \times g(\Theta)$) задана неотрицательная функция потерь $w(y_1; y_2)$, смысл к-рой состоит в том, что употребление оценки θ^* при фактическом значении параметра θ приводит к потерям $w(\theta^*; \theta)$. Средние потери, функцию риска $R_w(\theta^*; \theta) = \mathsf{E}_\theta w(\theta^*; \theta)$ принимают за меру качества статистики θ^* как оценки θ при функции потерь w. Тем самым на множество оценок вводится отношение частичного упорядочения: оценка T_1 предпочтительнее оценки T_2, если $R_w(T_1; \theta) \leqslant R_w(T_2; \theta)$. В частности, оценка T параметра θ наз. недопустимой (по отношению к функции потерь w), если найдется оценка T' такая, что $R_w(T'; \theta) \leqslant R_w(T; \theta)$ для всех $\theta \in \Theta$, причем для какого-нибудь θ имеет место знак строгого неравенства. При таком способе сравнения качества оценивания многие оценки оказываются несравнимыми, кроме того, выбор функции потерь в значительной степени произволен.

Иногда удается найти оценки, оптимальные внутри нек-рого более узкого класса оценок. Важный класс образуют *несмещенные оценки*. Если исходный эксперимент инвариантен относительно нек-рой группы преобразований, естественно ограничиться оценками, не нарушающими симметрию задачи (см. *Эквивариантная оценка*).

Оценки можно сравнивать по их поведению в «худших» точках: оценка T_0 параметра θ наз. минимаксной (см. *Минимаксная оценка*) по отношению к функции потерь w, если

$$\sup_\theta R_w(T_0; \theta) = \inf_T \sup_\theta R_w(T; \theta)$$

и нижняя грань берется по всем оценкам $T = T(X)$.

В бейесовской постановке задачи оценивания считается, что неизвестный параметр θ представляет значения случайной величины с априорным распределением Q на Θ. В этом случае наилучшая по отношению к функции потерь w оценка T_0 определяется соотношением

$$r_w(T_0) = \mathsf{E}_w(T_0; \theta) = \int_\Theta \mathsf{E}_\theta w(T_0; \theta)\, Q(d\theta) = \inf_T \int_\Theta \mathsf{E}_\theta w(T; \theta)\, Q(d\theta)$$

и нижняя грань берется по всем оценкам $T = T(X)$.

Различают параметрич. задачи оценивания, когда Θ есть подмножество конечномерного евклидова пространства, и непараметрические. В параметрич. случае обычно рассматривают функции потерь вида $l(|\theta_1 - \theta_2|)$, l — неотрицательная неубывающая функция на $\mathbb{R}^+$. Особую роль играет наиболее часто употребляемая квадратическая функция потерь $|\theta_1 - \theta_2|^2$.

Если $T = T(X)$ — *достаточная статистика* для семейства $\{\mathcal{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$, то часто можно ограничиться оценками $\theta^* = h(T)$. Так, если $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $w(\theta_1; \theta_2) = l(|\theta_1 - \theta_2|)$, l — выпуклая функция, и θ^* — какая-нибудь оценка для θ, найдется оценка $h(T)$, к-рая не хуже θ^*; если θ^* — несмещенная, $h(T)$ можно выбрать несмещенной (теорема Блэкуэлла). Если T — полная достаточная статистика для семейства $\{\mathcal{P}_\theta\}$, θ^* — несмещенная оценка для $g(\theta)$, найдется несмещенная оценка вида $h(T)$ с минимальной в классе несмещенных оценок дисперсией (теорема Лемана — Шеффе).

Как правило, в параметрич. задачах оценивания предполагается, что элементы семейства $\{\mathcal{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ абсолютно непрерывны по отношению к нек-рой σ-конечной мере μ и существует плотность $\frac{d\mathcal{P}_\theta}{d\mu} = p(x; \theta)$. Если $p(x; \theta)$ достаточно гладкая функция θ и существует информационная матрица Фишера

$$I(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial p}{\partial \theta}(x, \theta) \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}(x, \theta)\right)^T \frac{\mu(dx)}{p(x; \theta)}$$

задача оценивания наз. регулярной. Для регулярных задач точность оценивания ограничивается снизу неравенством Крамера — Рао: если $\Theta \subset \mathbb{R}^1$, то для любой оценки T

$$\mathsf{E}_\theta |T - \theta|^2 \geqslant \frac{\left(1 + \frac{db}{d\theta}(\theta)\right)^2}{I(\theta)} + b^2(\theta), \quad b(\theta) = \mathsf{E}_\theta T - \theta.$$

Примеры задач оценивания. 2. Наиболее распространенная постановка, когда наблюдается выборка объема n: $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные величины, принимающие значения в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ с общей плотностью распределения $f(x, \theta)$ относительно меры ν, $\theta \in \Theta$. В регулярных задачах, если $I(\theta)$ — информация Фишера на одно наблюдение, то информация Фишера всей выборки $I_n(\theta) = nI(\theta)$. Неравенство Крамера — Рао принимает вид

$$\mathsf{E}_\theta |T - \theta|^2 \geqslant \frac{\left(1 + \frac{db}{d\theta}\right)^2}{nI(\theta)} + b^2(\theta), \quad T = T(X_1, \ldots, X_n).$$

2.1. Пусть X_j — нормальные случайные величины с плотностью распределения

$$(2\pi)^{-1/2} \exp\{-2^{-1}\sigma^{-2}(x - a)^2\}.$$

Неизвестный параметр $\theta = (a, \sigma^2)$; оценками для a и σ^2 могут служить $\overline{X}$ и s^2. При этом $(\overline{X}, s^2)$ — достаточная статистика. Оценка $\overline{X}$ — несмещенная, s^2 — сме-

щенная. Если σ^2 известна, $\overline{X}$ — несмещенная оценка минимальной дисперсии, $\overline{X}$ — минимаксная оценка по отношению к квадратичной функции потерь.

2.2. Пусть X_j — нормальные величины в $\mathbb{R}^k$ с плотностью

$$(2\pi)^{-k/2} \exp\{-2^{-1} | x-\theta |^2\}, \ \theta \in \mathbb{R}^k.$$

Статистика $\overline{X}$ — несмещенная оценка θ, если $k \leqslant 2$ она допустима по отношению к квадратичной функции потерь, если $k>2$ — недопустима.

2.3. Пусть X_j — случайные величины в $\mathbb{R}^1$ с неизвестной плотностью распределения f, принадлежащей заданному семейству F плотностей. Для достаточно широкого класса F это непараметрическая задача. Задача оценки значения плотности $f(x_0)$ в точке x_0 — это задача оценки функционала $g(f)=f(x_0)$.

3. Линейная регрессионная модель. Наблюдаются величины

$$X_i = \sum_{\alpha=1}^{p} a_{\alpha i}\theta_\alpha + \xi_i.$$

ξ_i — случайные возмущения, $i=\overline{1, n}$, матрица $\|a_{\alpha i}\|$ известна, оценке подлежит параметр $(\theta_1, \ldots, \theta_p)$.

4. Наблюдается отрезок гауссовского стационарного процесса $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с рациональной спектральной плотностью $|\sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j|^2 \cdot |\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j|^{-2}$; оценке подлежат неизвестные параметры $\{a_j\}$, $\{b_j\}$.

Способы построения оценок. Наиболее распространенный *максимального правдоподобия метод* рекомендует в качестве оценки θ максимального правдоподобия оценку $\hat{\theta}(X)$, определяемую как точка максимума случайной функции $p(X; \theta)$. Если $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, оценки максимального правдоподобия содержатся среди корней уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta; X) = 0.$$

Наименьших квадратов метод в применении к задаче примера 3 рекомендует в качестве оценки точку минимума функции

$$m(\theta) = \sum_1^n (X_1 - \sum_\alpha a_{\alpha i}\theta_\alpha)^2.$$

Еще один способ построения состоит в том, что в качестве оценки для θ выбирается бейесовская по отношению к нек-рой функции потерь w и нек-рому априорному распределению Q оценка T, хотя исходная постановка не является бейесовской. Напр., если $\Theta = \mathbb{R}^1$ можно оценить θ посредством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta p(X; \theta)\, d\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(X; \theta)\, d\theta\right)^{-1}.$$

Это бейесовская оценка по отношению к квадратической функции потерь и равномерному априорному распределению.

Моментов метод заключается в следующем. Пусть $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ и пусть имеется k «хороших» оценок $a_1(X), \ldots, a_k(X)$ для $\alpha_1(\theta), \ldots, \alpha_k(\theta)$. Оценки метода моментов суть решения системы $\alpha_i(\theta)=a_i$. Часто в качестве a_i выбирают эмпирич. моменты (см. пример 1).

Если наблюдается выборка $X_1, \ldots, X_n$, то (см. пример 1) в качестве оценки для $g(\mathcal{P})$ можно выбрать $g(\mathcal{P}_n^*)$. Если функция $g(\mathcal{P}_n^*)$ не определена (напр., $g(\mathcal{P}) = \frac{d\mathcal{P}}{d\lambda}(x)$, λ — мера Лебега), выбирают подходящие модификации $g_n(\mathcal{P}_n^*)$. Напр., для оценки плотности употребляется *гистограмма* или оценки вида

$$\int \varphi_n(x-y)\, d\mathcal{P}_n^*(y).$$

Асимптотическое поведение оценок. Пусть для определенности рассматривается задача примера 2, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Можно ожидать, что при $n \to \infty$ «хорошие» оценки должны неограниченно сближаться с оцениваемой характеристикой. Последовательность оценок $\theta_n^*(X_1, \ldots, X_n)$ наз. состоятельной последовательностью оценок θ, если $\theta_n^* \to \theta$ по P_θ — вероятности для всех θ. Перечисленные выше способы построения оценок в широких предположениях приводят к *состоятельным оценкам*. Оценки примера 1 состоятельны. Для регулярных задач оценивания оценки максимального правдоподобия и бейесовские асимптотически нормальны со средним θ и корреляционной матрицей $(nI(\theta))^{-1}$. В этих же условиях эти оценки асимптотически локально минимаксны по отношению к широкому классу функций потерь и их можно рассматривать как асимптотически оптимальные (см. *Асимптотически эффективная оценка*).

Интервальное оценивание. Случайное подмножество $E=E(X)$ множества Θ наз. доверительным множеством для оценки θ с доверительным коэффициентом γ, если $P_\theta\{E \supset \theta\} = \gamma\ (\geqslant \gamma)$. Обычно существует много доверительных областей с заданным γ и проблема заключается в том, чтобы выбрать ту, к-рая обладает нек-рыми оптимальными свойствами (напр., интервал минимальной длины, если $\Theta \subset \mathbb{R}^1$). Пусть в условиях примера 2.1 $\sigma=1$, тогда интервал

$$\left[\overline{X} - \frac{\lambda}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right],$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_\lambda^\infty \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

является доверительным интервалом с доверительным коэффициентом γ (см. *Интервальная оценка*).

Лит.: [1] Fisher R., «Phil. Trans. Roy. Soc.» (A), 1922, t. 222, s. 309—68; [2] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР», сер. Матем., 1942, т. 6, № 1; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [5] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [6] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [7] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [8] Grenander U., Abstract inference, N. Y., 1981. *И. А. Ибрагимов.*

СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — совокупность общих проблем математич. физики, возникших из стремления четко осмыслить основные концепции и факты статистич. механики. Эти проблемы можно условно разделить на следующие группы:

1) обоснование основных принципов статистич. механики,

2) равновесные ансамбли в термодинамич. пределе, вывод термодинамич. соотношений,

3) фазовые переходы,

4) эволюция ансамблей, проблема релаксации, исследование кинетич. и гидродинамич. уравнений,

5) основные состояния, элементарные возбуждения (в случае квантовых систем).

Статистич. механика изучает системы, состоящие из большого числа (микроскопических) частиц, заключенных внутри большой (сравнительно с характерными размерами частиц) области V пространства $\mathbb{R}^3$. Статистич. механика — в зависимости от способа описания системы — разделяется на классическую и квантовую.

Описание классич. системы, заключенной в области V, включает указание пространства X возможных состояний каждой отдельной частицы (одночастичное пространство), а также совокупности $\Omega_V \bigcup_{N \geqslant 0} X^N$ допустимых конфигураций $\omega = \{x_1, \ldots, x_N\}$; $x \in X^N$;

$i=1, \ldots, N$; $N=1, 2, \ldots$, конечного числа частиц внутри V, задание энергии $H=H_V(\omega)$ для каждой конфигурации $\omega\in\Omega_V$ и закона эволюции системы во времени (наз. иначе д и н а м и к о й), т. е. полугруппы (чаще всего группы) преобразований U_t^V, $t\geqslant 0$, пространства Ω_V в себя, сохраняющих энергию H_V:

$$H_V(U_t^V\omega)=H_V(\omega)$$

для любой $\omega\in\Omega_V$ и любого t. Во многих случаях пространство Ω_V бывает естественно наделено симплектич. структурой, и преобразования U_t^V строятся с помощью решений т. н. гамильтоновых уравнений движения, порождаемых функцией Гамильтона $H=H_V$ (см. [1]). Кроме того, обычно в пространстве X существует нек-рая естественная мера dx такая, что мера $d^Vx=\oplus_N d^Nx$ в Ω_V ($d^Nx=dx\times\ldots\times dx$ — мера в X^N) инвариантна относительно эволюции U_t^V. Однако для макроскопич. систем, состоящих из большого числа частиц, столь детальное описание их состояний и динамики этих состояний (т. е. описание траекторий каждой отдельной частицы) оказывается малообозримым, да и бесполезным с точки зрения изучения макроскопич. свойств всей системы. Эти свойства определяются лишь нек-рыми средними характеристиками конфигурации ω, а также ее эволюции $\omega(t)$, $t>0$ во времени: напр., долей $\rho_1(S;\ t)$, $S\subset X$ частиц в конфигурации $\omega(t)$, состояния к-рых принадлежат заданному множеству S одночастичного пространства X, или долей $\rho_2(S_1,\ S_2;\ t_1,\ t_2)$ частиц, состояния к-рых в момент времени t_1 принадлежат множеству $S_1\subset X$, а в момент t_2 — множеству $S_2\subset X$ и т. д.

Эти соображения привели к следующей радикальной идее: состояние макроскопич. системы следует задавать каким-либо вероятностным распределением P на фазовом пространстве Ω_V, причем эволюция p_t, $t>0$, этого распределения во времени порождается исходной эволюцией самой системы:

$$p_t(A)=\mathsf{P}\{(U_t^V)^{-1}A\},\ A\subset\Omega_V, \qquad (1)$$

где $(U_t^V)^{-1}A$ — полный прообраз множеств $A\subset\Omega_V$ при отображении U_t^V. Это соглашение дополняется следующим постулатом: для всякого «хорошего» распределения вероятностей P на фазовом пространстве Ω_V и подходящей физич. величины f (т. е. действительной функции на Ω_V) принимаемые ею значения с вероятностью, близкой к единице (вычисленной с помощью распределения P), близки к ее среднему значению $\langle f\rangle_{\mathsf{P}}$. Одна из проблем, относящаяся к обоснованию статистич. механики, состоит в том, чтобы придать этому утверждению точную форму. Один из возможных результатов такого рода: пусть распределение P на Ω_V обладает свойством быстрого убывания зависимости (т. е. порождаемые им распределения вероятностей конфигураций для двух далеко отстоящих друг от друга подсистем почти независимы), а физич. величина сумматорна, т. е.

$$f(\omega)=\sum\varphi(\omega|_S)\,S\subset(1,\ldots,N],\ |S|=n, \qquad (2)$$

где $n\leqslant\infty$ произвольно, $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ — нек-рая симметрическая «хорошо локализованная» функция на пространстве X^n (т. е. φ быстро стремится к нулю при взаимном удалении точек $x_1,\ldots,x_n$ друг от друга), а $\omega|_S=\{x_i,\ i\in S\}$, если конфигурация $\omega=\{x_i,\ i=1,\ldots,N\}$. В этом случае $\langle f\rangle_{\mathsf{P}}\sim|V|$, а флуктуации $\Delta f=f-\langle f\rangle_{\mathsf{P}}\sim|V|^{1/2}$ (с вероятностью, близкой к единице при больших $|V|$), причем распределение величины $\Delta f/|V|^{1/2}$ близко к нормальному (по-прежнему при $|V|\to\infty$, см. [2]).

Распределение вероятностей P на фазовом пространстве наз. р а в н о в е с н ы м, если оно инвариантно относительно динамики U_t^V. Пусть, кроме энергии $H_V=H_V^0$, существует еще несколько т. н. интегралов движения $H_V^1,\ \ldots,\ H_V^k$, т. е. функций на Ω_V, инвариантных относительно динамики U_t^V (напр., число частиц в системе, суммарный импульс частиц, суммарный спин и т. д.). Всякое распределение на Ω_V вида

$$d\mathsf{P}=f(H_V^0,\ H_V^1,\ \ldots,\ H_V^k)\,d^Vx,$$

где d^Vx — инвариантная мера на Ω_V, а $f>0$ — нек-рая функция (возможно и обобщенная), является равновесным распределением. Равновесное распределение, задаваемое плотностью вида

$$f(\xi^0,\ \ldots,\ \xi^k)=Q^{-1}\prod_{i=0}^k\delta(\xi^i-\overline{\xi}^i),\ \overline{\xi}^i\in\mathbb{R},\quad i=0,\ \ldots,\ k \qquad (3)$$

(Q^{-1} — нормировочный множитель), наз. м и к р о к а н о н и ч е с к и м р а с п р е д е л е н и е м (или м и к р о к а н о н и ч е с к и м а н с а м б л е м), сосредоточенным на поверхности

$$S_{\overline{\xi}^0,\ \ldots,\ \overline{\xi}^k}=\{\omega\in\Omega_V: H^i(\omega)=\overline{\xi}^i,\ i=0,\ \ldots,\ k\} \qquad (4)$$

постоянства первых интегралов.

В статистич. механике постулируется, что микроканонич. распределение (3) является равновесным распределением (т. е. вычисляемые с его помощью средние значения физич. величин с большой точностью совпадают с экспериментально измеряемыми значениями). Долгое время полагали, что для обоснования этого постулата нужно доказать известную эргодич. гипотезу: в случае когда $H_V^0,\ H_V^1,\ \ldots,\ H_V^k$ — полный набор (гладких) интегралов движения, единственным (гладким) равновесным распределением на любой поверхности $S_{\overline{\xi}^0,\ \ldots,\ \overline{\xi}^k}$ является микроканонич. распределение. Попытки доказательства этой гипотезы породили современную эргодич. теорию (см. [3], [4]). Ныне, однако, стало ясным, что эргодичность конечных систем является излишне жестким предположением: для обоснования постулата о микроканонич. распределении достаточно установить эргодичность системы в термодинамич. пределе $V\nearrow\mathbb{R}^3$. Кроме микроканонич. распределения часто рассматривают г и б б с о в с к о е р а в н о в е с н о е р а с п р е д е л е н и е (наз. иначе б о л ь ш и м к а н о н и ч. а н с а м б л е м), определяемое плотностью

$$f=Z^{-1}\exp\{-\beta(H_V^0+\mu_1H_V^1+\ldots+\mu_kH_V^k)\}, \qquad (5)$$

где Z^{-1} — нормирующий множитель, $\beta>0$, $\mu_1,\ \ldots,\ \mu_k$ — произвольные действительные параметры (параметр $\beta=1/KT$, где T — абсолютная температура, k — абсолютная константа, наз. п о с т о я н н о й Б о л ь ц м а н а). Рассматривают иногда и промежуточные распределения (м а л ы е к а н о н и ч. а н с а м б л и) с плотностью вида

$$f=\tilde{Z}^{-1}\exp\{-\beta(H_V^0+\mu_{i_1}H_V^{i_1}+\ldots+\mu_{i_s}H_V^{i_s})\}\times\prod_{p=1}^{k-s}\delta(H_{j_p}-\overline{\xi}_{j_p}), \qquad (6)$$

где $i_1,\ \ldots,\ i_s$ и $j_1,\ \ldots,\ j_p$ — два дополняющих друг друга подмножества индексов $(1, 2, \ldots, k)$. Гиббсовское распределение (5), а также распределение (6) во многом удобнее микроканонич. распределения (3), а их использование оправдывается следующей гипотезой — т. н. п р и н ц и п о м э к в и в а л е н т н о с т и а н с а м б л е й: для «подходящей» физич. величины на Ω_V (напр., для сумматорной величины вида (2)) при значениях параметров $\beta,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_k$, при к-рых существует только одна равновесная фаза, среднее $\langle f\rangle_{\beta,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_k}$, вычисленное по гиббсовскому

распределению (5) при больших V, близко к среднему $\langle f\rangle_{\bar\xi^0,\dots,\bar\xi^k}$, вычисленному по микроканонич. ансамблю на поверхности $S_{\bar\xi^0,\dots,\bar\xi^k}$, где $\langle\bar\xi^i\rangle=\langle H_V^i\rangle=\beta,\mu_1,\dots,\mu_k$. Доказательство этой эквивалентности также составляет одну из общих математич. проблем статистич. механики и термодинамики (см. [5], [6], [7]).

Принятый в статистич. механике способ описания систем оправдан при достаточно большом объеме области V, иначе говоря, статистич. механика изучает асимптотич. свойства систем в предельном переходе $V\nearrow\mathbb{R}^3$ (т. е. рассматривается нек-рая последовательность систем из одних и тех же частиц, заключенных соответственно в объемах $V_1\subset V_2\subset\dots$, причем $U_nV_n=\mathbb{R}^3$). Этот предельный переход наз. обычно термодинамич. предельным переходом. Одна из первых задач, связанных с термодинамич. пределом, состоит в том, чтобы, исходя из равновесных ансамблей, определить т. н. термодинамич. потенциалы и соотношения термодинамики. Оказывается, все термодинамич. потенциалы могут быть найдены из асимптотики при $V\nearrow\mathbb{R}^3$ нормировочных множителей Q^{-1}, Z^{-1}, $\tilde Z^{-1}$ и т. д. в ансамблях (3), (5), (6), так, напр., термодинамич. потенциал Гиббса равен

$$p(\beta,\mu_1,\dots,\mu_k)=\lim_{V\nearrow\mathbb{R}^3}\frac{\ln Z}{|V|}, \qquad (7)$$

где Z^{-1} — нормирующий множитель в гиббсовском ансамбле (5). Аналогично вводятся и др. термодинамич. функции, а также устанавливаются связывающие их соотношения. Большинство возникающих здесь математич. задач (существование предела, свойства термодинамич. потенциалов и т. д.) исследовано довольно полно, хотя и имеется ряд нерешенных вопросов (см., напр., [7]).

С конца 60-х гг. 20 в. в математич. статистич. механике утвердился следующий общий подход: вместо изучения асимптотич. свойств конечных систем в термодинамическом предельном переходе следует рассматривать определенным образом построенные идеализированные бесконечные системы, характеристики к-рых совпадают с исследуемой асимптотикой (неявно такая точка зрения встречалась и в более ранних работах). Рассмотрение бесконечных систем придает наглядный смысл несколько формальной процедуре термодинамического предельного перехода и позволяет вообще обойтись без нее. Фазовое пространство Ω_∞ бесконечной системы состоит из бесконечных конфигураций частиц $\omega=\{x_1,x_2,\dots\}$, $x_i\in X^V$, $i=1,2,\dots$, располагающихся во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, а их динамика $U_t^\infty\colon\Omega_\infty\to\Omega_\infty$, $t\in\mathbb{R}$, строится как предел динамик U_t^V конечных систем при $V\nearrow\mathbb{R}^3$. Макроскопич. состояния бесконечной системы задаются по-прежнему вероятностными распределениями на пространстве Ω_∞, к-рые эволюционируют в соответствии с динамикой U_t^∞ в Ω_∞ (см. (1)). На пространстве Ω_∞ можно ввести предельные гиббсовские распределения $p^\infty_{\beta,\mu_1,\dots,\mu_k}$, к-рые строятся определенным образом с помощью гиббсовских распределений (5) $p^V_{\beta,\mu_1,\dots,\mu_k}$ в конечных системах (см. [5], [9]). Хотя введение бесконечных систем является общепринятым и плодотворным приемом, оно приводит к сложным и во многом нерешенным (1984) еще математич. задачам. Сложным, напр., оказывается построение динамики U_t^∞, построение предельных гиббсовских распределений, исследование их свойств и т. д.

Одна из главных проблем статистич. механики состоит в изучении т. н. фазовых переходов, т. е. резкого изменения состояния макроскопич. системы, находящейся в состоянии равновесия, при небольшом изменении описывающих это равновесие параметров — температуры, плотности частиц, давления и т. д. При современном математич. подходе в терминах предельных гиббсовских распределений задачу о фазовых переходах можно описать следующим образом: при нек-рых значениях параметров β, μ_1, $\dots$, μ_k можно построить, вообще говоря, несколько гиббсовских распределений на Ω_∞, инвариантных относительно действия группы T^3 сдвигов в пространстве $\mathbb{R}^3$ (или нек-рой ее подгруппы $G\subset T^3$ такой, что факторгруппа T^3/G компактна), и эргодичных относительно этой группы (т. н. чистые фазы). Точка $(\beta,\mu_1,\dots,\mu_k)$ пространства параметров наз. регулярной, если существует достаточно малая ее окрестность, внутри к-рой структура множества чистых фаз, а также основные их качественные свойства (напр., характер убывания корреляций) остаются неизменными. При этом предполагается, что все числовые характеристики этих распределений (корреляционные функции, семиинварианты и т. д.) в окрестности регулярных точек зависят от параметров $\beta,\mu_1,\dots,\mu_k$ аналитически. Все остальные (не регулярные) точки в пространстве параметров $\beta,\mu_1,\dots,\mu_k$ и являются точками фазового перехода. Таким образом, в точках фазового перехода происходит резкое изменение либо в структуре гиббсовских распределений (скажем, исчезает или возникает новая фаза) или в их свойствах (напр., убывание корреляций из экспоненциального становится степенным). При этом считается, что какие-нибудь из характеристик распределения как функции параметров $\beta,\mu_1,\dots,\mu_k$ имеют в точке фазового перехода особенность. Описать для каждой конкретной системы структуру фаз, их свойства, определить точки фазового перехода, характер особенностей в этих точках и т. д.— этот круг вопросов и составляет проблему фазовых переходов. Хотя существует большой класс модельных систем, для к-рых (при малых значениях температуры) разработаны нек-рые общие методы решения этой задачи (см. [9]), теория фазовых переходов еще далека от окончательного завершения. Особенно сложным является изучение т. н. критич. точек (в к-рых, грубо говоря, происходит слияние разных фаз; см. [10]), поскольку в этих точках гиббсовское распределение имеет очень медленное убывание корреляций.

Большой круг проблем статистич. механики связан с изучением эволюций распределений на фазовом пространстве, в частности с проблемой релаксации, т. е. приближения к равновесию. Считается, что по прошествии большого времени всякое распределение на фазовом пространстве приближается к равновесному (гиббсовскому) распределению. Несмотря на то, что выработано много общих представлений о механизме этого процесса, а также исследован ряд упрощенных его моделей, законченной теории пока (1984) не существует. Основные представления о процессе релаксации (во многом еще гипотетичные) сводятся к тому, что этот процесс проходит три стадии. На первой из них (за время столкновений нескольких частиц) распределение p_t приходит к такому режиму эволюции, к-рый целиком определяется изменением первой корреляционной функции (т. е. распределением в одночастичном пространстве X). Затем, во второй — кинетич. стадии, протекающей за промежуток времени порядка продолжительности «свободного пробега» частицы, изменение первой корреляционной функции переходит в такой режим эволюции, при к-ром все зависит лишь от средних значений плотности частиц, их скорости, плотности, энергии и т. д. Наконец, наступает последняя (гидродинамическая) стадия, во

время к-рой (сравнимое с макроскопич. временем) эти средние значения плотности, скорости и т. д. приближаются к равновесным значениям (см. [11], [12]). Обоснование этой картины в целом или в отдельных ее частях представляет сложную математич. проблему, и до ее полного решения сейчас (1984) еще далеко. Основным средством исследования являются различные системы т. н. кинетич. уравнений — как точных, т. е. непосредственно вытекающих из определения уравнения Лиувилля (иерархич. цепочка ББГКИ — Боголюбова, Борна, Грина, Кирквуда, Ивона), так и приближенных (уравнения Больцмана, Чепмена — Энскога, Власова — Ландау, гидродинамич. уравнения и т. д.). Сами эти уравнения и их соотношение с истинной картиной эволюции также являются предметом пристального математич. изучения.

Квантовая статистич. механика основана на тех же принципах, что и классическая. Квантовое описание системы частиц, находящихся внутри области V, включает указание гильбертова пространства $\mathscr{H}_V$— пространства состояний системы и самосопряженного оператора H_V, действующего в $\mathscr{H}_V$— оператора энергии системы. При этом динамика системы задается группой $U_t^V=\exp\{iH_V\}$, $t\in\mathbb{R}$, унитарных операторов, действующих в $\mathscr{H}_V$, причем динамика $\{U_t^V,\ t\in\mathbb{R}\}$ порождает группу автоморфизмов в W_t^V алгебры $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{H}_V$ (наблюдаемых):

$$W_t^V A=U_t^V A\,(U_t^V)^{-1}.$$

Переход к статистич. описанию в квантовом случае состоит в задании нек-рого «среднего» $<A>$ на алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$, т. е. линейного положительного функционала $\rho(A)=<A>$ на этой алгебре, наз. обычно состоянием. Всякое состояние на $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ может быть записано в виде

$$\rho(A)=\mathrm{Sp}\,A\tilde{\rho},$$

где ρ — положительный ядерный оператор из $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$, причем $\mathrm{Sp}\tilde{\rho}=1$. Оператор $\tilde{\rho}$ обычно наз. матрицей плотности состояний ρ. Эволюция состояния ρ во времени задается эволюцией W_t^V самой алгебры: $\rho_+(A)=\rho((W_t^V)^{-1}A)$. Состояния, инвариантные относительно этой эволюции, по-прежнему наз. равновесными. Для системы, в к-рой кроме энергии $H_V=H_V^0$ имеется еще несколько попарно коммутирующих интегралов движения $H_V^1,\ \ldots,\ H_V^k$, равновесное состояние с матрицей плотности

$$\tilde{\rho}=Z^{-1}\exp\{-\beta(H_V^0+\mu_1H_V^1+\ldots+\mu_kH_V^k)\}$$

наз. гиббсовским состоянием ($\beta>0$, $\mu_1,\ \ldots,\ \mu_k$ — параметры, Z^{-1} — нормирующий множитель). Аналогично классич. случаю при переходе к термодинамич. пределу $V\nearrow\mathbb{R}^3$ вводится бесконечная квантовая система (см. [5]). Для описания этой системы рассматривают C^*-*алгебру* $\mathfrak{A}_\infty=\overline{\bigcup_{V\subset\mathbb{R}^3}\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)}$ (черта означает замыкание в равномерной топологии) — т. н. алгебру квазилокальных наблюдаемых, а эволюция W_t^∞ в $\mathfrak{A}_\infty$ задается как предел эволюций W_t^V в конечных алгебрах $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$. На алгебре $\mathfrak{A}_\infty$ можно ввести предельные гиббсовские состояния подобно тому, как это делается для классич. систем (см. [5]). При этом задача о фазовых переходах в квантовых системах в терминах предельных гиббсовских состояний формулируется аналогично классич. случаю.

Наконец, в квантовой статистич. механике также существует весь круг кинетич. проблем, хотя, конечно, механизмы процесса релаксации в квантовой механике сложнее классических и изучены еще меньше.

Существует специфическая для квантового случая задача о т. н. основном состоянии системы (соответствующему нулевой температуре) и о возбуждениях этого основного состояния, имеющих конечную энергию. С этой проблемой связано изучение ряда интересных явлений (сверхтекучесть, сверхпроводимость), происходящих при очень низких температурах [13]. Проблема построения и изучения квантовых полей может быть исследована с помощью развитых в статистич. механике методов теории гиббсовских полей (см. [14], [15]).

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [2] Нахапетян Б. С., в кн.: Многокомпонентные случайные системы, М., 1978, с. 276—88; [3] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [4] Крылов Н. С., Работы по обоснованию статистической физики, М.—Л., 1950; [5] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [6] Халфина А. М., «Матем. сб.», 1969, т. 80, № 1, с. 3—51; [7] Минлос Р. А., Хаитов А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1975, т. 32, с. 147—86; [8] Ланфорд III О. Э., в кн.: Гиббсовские состояния в статистической физике, пер. с англ., М., 1978, с. 159—218; [9] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов. Строгие результаты, М., 1980; [10] Стенли Г., Фазовые переходы и критические явления, пер. с англ., М., 1973; [11] Либов Р., Введение в теорию кинетических уравнений, пер. с англ., М., 1974; [12] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, т. 1—2, пер. с англ., М., 1978; [13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964; [14] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [15] Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. Сб. статей, пер. с англ., М., 1978.

Р. А. Минлос.

СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при применении математич. аппарата в статистич. физике. С. ф. м. з. в основном связаны с двумя направлениями статистич. теории: с равновесной статистич. механикой, основные математич. проблемы к-рой связаны с разработкой методов расчета средних по равновесному *Гиббса распределению* (см. *Статистической механики математические задачи*) и с неравновесной статистич. физикой, основные трудности к-рой составляют проблемы получения эволюционных уравнений для функций распределения, характеризующих систему на разных этапах ее эволюции, с последующим их решением (см., напр., *Кинетическое уравнение*, *Броуновского движения процесс*).

В задачу методов равновесной статистич. механики входит расчет средних следующих типов (в случае использования канонич. распределения Гиббса):

$$Z=\mathrm{Sp}\,e^{-H/\theta};\quad \langle A\rangle=\frac{1}{Z}\mathrm{Sp}\,Ae^{-H/A};$$

$$\langle BA\,(t)\rangle=-\frac{1}{Z}\mathrm{Sp}\,BA\,(t)\,e^{-H/A}$$

и т. д., где H — гамильтониан системы, $\theta=kT$ — температура, $A\,(t)$ — оператор в гейзенберговском временно́м представлении, Z — статистич. сумма, связанная со свободной энергией системы соотношением $F=-\theta\ln Z$ (в случае использования большого канонич. распределения вместо оператора H фигурирует оператор $H-\mu N$, где μ — химич. потенциал, N — число частиц, вместо Z — большая статистич. сумма, вместо F — термодинамич. потенциал $\Omega=F-\mu N$, и т. д.).

Расчет безвременных средних Z и $<A>$ решает проблемы равновесной теории (все равновесные характеристики, такие, как внутренняя энергия, теплоемкость, уравнения состояния, статич. восприимчивости и т. д., определяются методами термодинамики, исходя из свободной энергии F), а также теории флуктуаций; расчет величин типа $<BA\,(t)>$ позволяет исследовать целый ряд динамических (зависящих от частоты) восприимчивостей системы, коэффициентов

переноса и т. д., а также исследовать особенности простейших возбуждений системы (в общем случае при $\theta \neq 0$), их энергию, затухание и т. д.

Указанные средние рассчитываются до конца только в исключительных случаях: для идеальных систем и для нек-рых специальных моделей. Эти расчеты в дальнейших исследованиях могут служить нулевым приближением. Наиболее часто рассматриваемыми моделями неидеальных статистич. систем являются системы с прямым взаимодействием частиц друг с другом (взаимодействием конечного радиуса, кулоновским взаимодействием и др.), с взаимодействием частиц с полем типа фотонного (в твердом теле описывающего тепловое движение кристаллич. решетки), дискретные системы типа Изинга и гейзенберговского магнетика с взаимодействием узлов конечного радиуса действия, а также сочетания взаимодействий подобных типов. В представлении вторичного квантования гамильтониан $H = H_0 + H_1$ в этих случаях выражается через квадратичные комбинации операторов рождения и уничтожения (в части H_0 без взаимодействия), четвертную форму (если H_1 включает прямое взаимодействие частиц), тройную форму типа используемой в квантовой электродинамике (электронфотонное взаимодействие в H_1) и т. д.

Приближенные методы расчета указанных средних в большинстве случаев основываются на добавлении поправок к результатам, полученным для случая $H = H_0$ (если нулевое приближение в физич. отношении действительно является таковым), имеющих вид явного или модифицированного разложения по степеням параметра, определяющего интенсивность взаимодействия, включенного в гамильтониан H_1. При сопоставлении рассматриваемой формальной модели с реальными системами в целом ряде случаев, имеющих прикладной интерес, параметр взаимодействия, по к-рому производится «разложение», не оказывается малым. Такие трудности существуют в проблеме электронного газа в металлах, в теории неидеального бозе-газа, в теории жидкостей, при рассмотрении ситуаций в области фазовых переходов или вблизи критич. точек и т. д.

Если отвлечься от этих проблем постановочного характера и считать, что малый параметр для каких-то частных случаев все же имеется, то при развитии теории возмущений по нему появляются специфические для многотельных систем трудности, формально проявляющиеся в появлении расходимостей в членах, учитывающих многочастичные корреляции. Их появление связано с тем, что простой ряд по целым степеням используемого «малого» параметра, начиная с нек-рой степени, уже не отражает действительной зависимости исследуемой характеристики системы от этого параметра. Эти трудности, как чисто математические, в принципе преодолимы. Для выявления этих «неаналитически» зависящих от малого параметра поправок разработаны методы, в основе своей связанные с учетом определенных классов наиболее существенных для каждого конкретного случая формального ряда теории возмущений по параметру взаимодействия.

В задачах статистич. механики классич. систем с прямым взаимодействием частиц исследование в большинстве случаев строится на основе развития метода Боголюбова [1] (см. *Боголюбова цепочка уравнений*) или метода Майера [2]. В первом случае, связанном с исследованием цепочки интегро-дифференциальных уравнений для одно-, двух- и т. д. частичных функций распределения, основой аппроксимационной процедуры является обрыв этой цепочки. При этом входящая в интегральную часть последнего из рассматриваемых уравнений цепочки функция распределения более высокого ранга выражается с помощью какой-либо комбинации функций распределения низшего порядка. Процедура такого расцепления исходит из анализа физич. особенностей системы и характерного для данной ситуации малого параметра. Так, в системах с короткодействующими силами взаимодействия — это куб отношения радиуса взаимодействия к среднему расстоянию между частицами (основа т. н. вириального разложения, или разложения по обратным степеням удельного объема $v = V/N$); в системах с кулоновским взаимодействием такой параметр связан с отношением средней энергии кулоновского взаимодействия частиц к средней их кинетич. энергии и т. д. После расцепления цепочки математич. проблема сводится к решению системы нелинейных в своей интегральной части уравнений (или одного нелинейного интегрального уравнения) относительно функций распределения, подчиненных условиям нормировки и ослабления корреляций (распадение многочастичных функций при «раздвигании» пространственных их аргументов на произведение функций более низкой частичности), играющих роль своеобразных граничных условий.

Метод Майера (см. [2]) для систем с короткодействующим потенциалом взаимодействия

$$\Phi_{ij} = \Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|),$$

включающим бесконечное отталкивание на малых расстояниях, исходит из представления классич. интеграла состояний Z в виде

$$\frac{Z}{Z_{\text{ид}}} = \frac{1}{V^N} \int_{(V)} d\boldsymbol{r}_1 \ \dots \ d\boldsymbol{r}_N \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (1 + f_{ij}),$$

где функция Майера $f_{ij} = \exp(-\Phi_{ij}/\theta) - 1$, и получения для удельной свободной энергии

$$F/N = -\theta \ln Z^{1/N}$$

и других характеристик системы вириальных разложений с коэффициентами, выражающимися через интегралы от произведений все возрастающего числа функций f_{ij}, связанных попарно одним из двух своих аргументов $\boldsymbol{r}_j$ или $\boldsymbol{r}_i$ (для реальных моделей потенциала Φ_{ij} эти интегралы вычисляются с помощью численных методов). Математич. проблемы, возникающие в связи с использованием вириального разложения,— это проблемы разработки методов суммирования этих рядов (хотя бы частичного) с целью подойти к области фазового перехода газ — жидкость или критич. области, а также общие проблемы сходимости самого разложения и т. д.

В задачах статистич. механики неидеальных квантовых систем, связанной с представлением операторов динамич. величин через квантовые операторы рождения или уничтожения, эффективными оказались методы, развитые первоначально в квантовой теории поля. Наиболее распространенными являются бестемпературная многовременная техника функций Грина причинного типа, безвременная температурная техника и метод двухвременных температурных функций Грина. В первых двух подходах (см. [3]) формальный ряд теории возмущений по интенсивности взаимодействия частиц друг с другом или каким-либо полем в известном смысле аналогичен соответствующим разложениям в квантовой теории поля (в чисто температурной технике роль «времени» играет мнимая обратная температура). Поэтому значительное развитие в этих формализмах получили диаграммные представления ряда теории возмущений, сводящиеся к рассмотрению вместо исходных частиц, и взаимодействия — квазичастиц с перенормированной энергией и конечным затуханием, перенормированного эффективного взаимодействия (вершинных частей) и т. д. Система интегральных уравнений для функции Грина квазичастиц и

вершинных частей или эффективного взаимодействия составляется, как правило, с таким расчетом, чтобы ее решение было бы эквивалентно учету бесконечной последовательности членов формального ряда теории возмущений, отобранных по определенному принципу (напр., для данной конкретной системы наиболее сильных в каждом из порядков теории возмущений).

В двухвременном температурном формализме (см. [1], [4]) аналогичные задачи связаны с исследованием боголюбовского типа цепочки зацепляющихся уравнений для функций Грина возрастающей «частичности» и составлением замкнутой системы интегральных уравнений (как правило нелинейных), являющейся следствием реализации процедуры расцепления. Математич. проблемы, связанные с исследованием этих уравнений, ограничиваются в основном отысканием определенных асимптотик их решений, гарантированных в смысле приближения, или классом суммированных диаграмм, или способом расцепления.

Такими методами исследуются такие системы, как электронный газ с кулоновским взаимодействием (учет только наиболее сильных вкладов в каждом порядке по теории возмущений эквивалентен учету экранировки исходного взаимодействия), системы низкой плотности с короткодействующими силами взаимодействия (первый этап суммирования или эквивалентной ему операции приводит к замене исходного взаимодействия на эффективное, определяемое в результате решения уравнения, аналогичного квантовомеханическому уравнению для t-матрицы рассеяния), электронфотонная система, гейзенберговская магнитная система и т. д.

Ряд задач статистич. механики допускает асимптотически точное (в предельном статистическом смысле $N \to \infty$, $N/V=\text{const}$) рассмотрение: это — системы с факторизующимся четверным взаимодействием, обобщающим модельную сверхпроводящую систему типа Бардина — Купера — Шриффера и др. Эта методика (см. [5]) связана с построением аппроксимирующего гамильтониана, допускающего точное решение, с последующим доказательством асимптотич. близости результатов, полученных с его помощью, к тем, к-рые соответствуют исходной системе.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 1, К., 1969; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей, пер. с англ., М., 1961; [4] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962; [5] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, М., 1965; [6] Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В., Метод функций Грина в статистической механике, М., 1961; [7] Зубарев Д. Н., «Успехи физич. наук», 1960, т. 71, № 1, с. 71—116; [8] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974.

И. А. Квасников.

СТАЦИОНАРНАЯ ПОДГРУППА — то же, что *изотропии группа*.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей однородной *Маркова цепи*, не зависящее от времени. Пусть $\xi(t)$ — однородная цепь Маркова со множеством состояний S и переходными вероятностями $p_{ij}(t)=\mathsf{P}\{\xi(t)=j \mid \xi(0)=i\}$. С. р.— такой набор чисел $\{\pi_j,\ j\in S\}$, что

$$\pi_j \geqslant 0, \quad \sum_{j\in S}\pi_j = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}(t)=\pi_j,\ j\in S,\ t>0. \tag{2}$$

Равенства (2) означают, что С. р. инвариантно во времени: если $\mathsf{P}\{\xi(0)=i\}=\pi_i$, $i\in S$, то $\mathsf{P}\{\xi(t)=i\}=\pi_i$ при любых $i\in S$, $t>0$; более того, при любых $t, t_1, \ldots, t_k>0$, $i_1, \ldots, i_k\in S$

$$\mathsf{P}\{\xi(t_1+t)=i_1, \ldots, \xi(t_k+t)=i_k\} = \mathsf{P}\{\xi(t_1)=i_1, \ldots, \xi(t_k)=i_k\}.$$

Если $i\in S$ — такое состояние цепи Маркова $\xi(t)$, что существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j(i)\geqslant 0,\ j\in S,\ \sum_{j\in S}\pi_j(i)=1,$$

то набор чисел $\{\pi_j(i), j\in S\}$ удовлетворяет (2) и является С. р. цепи $\xi(t)$ (см. также *Переходные вероятности*).

Система линейных уравнений (2) относительно $\{\pi_j\}$ при дополнительных условиях (1) имеет единственное решение, если число положительных классов состояний цепи Маркова $\xi(t)$ равно 1; если цепь имеет k положительных классов состояний, то множество ее С. р. является выпуклой оболочкой k стационарных распределений, каждое из к-рых сосредоточено на одном положительном классе (см. *Маркова цепи положительный класс состояний*).

Любое неотрицательное решение системы (2) наз. стационарной мерой; стационарная мера может существовать и в случае, когда система (1), (2) несовместна. Напр., случайное блуждание на $\{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\xi(0)=0,\ \xi(t)=\xi(t-1)+\eta(t),\ t=1, 2, \ldots,$$

где $\eta(1), \eta(2), \ldots$— независимые случайные величины такие, что

$$\mathsf{P}\{\eta(i)=1\}=p,\ \mathsf{P}\{\eta(i)=-1\}=1-p,\ 0<p<1,\quad i=1, 2, \ldots,$$

не имеет стационарного распределения, но имеет стационарную меру

$$\pi_j=\left(\frac{p}{1-p}\right)^j,\ j=0, \pm 1, \ldots.$$

Одна из возможных вероятностных интерпретаций стационарной меры $\{\pi_j\}$ цепи Маркова $\xi(t)$ со множеством состояний S такова. Пусть имеется счетное множество независимых реализаций цепи $\xi(t)$ и $\eta_t(i)$ — число реализаций, для к-рых $\xi(t)=i$. Если случайные величины $\eta_0(i)$, $i\in S$, независимы и подчиняются распределению Пуассона со средними π_i, $i\in S$, соответственно, то при любом $t>0$ случайные величины $\eta_t(i)$, $i\in S$, независимы и имеют те же распределения, что и $\eta_0(i)$, $i\in S$.

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Карлин С., Основы теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1971.

А. М. Зубков.

СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ МЕТОД — метод вычисления асимптотики интегралов от быстро осциллирующих функций:

$$F(\lambda)=\int_\Omega f(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx, \tag{*}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $\lambda>0$, $\lambda\to+\infty$ — большой параметр, Ω — ограниченная область, функция $S(x)$ (фаза) действительная, функция $f(x)$ комплексная, и $f, S\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, т. е. f финитна, и фаза $S(x)$ не имеет стационарных точек (т. е. точек, в к-рых $S'(x)=0$) на носителе $\operatorname{supp} f$, то $F(\lambda)=O(\lambda^{-\infty})$, $\lambda\to+\infty$. Поэтому основной вклад в асимптотику интеграла (*) при $\lambda\to+\infty$ вносят точки стационарной фазы и граница $\partial\Omega$. Вкладом от изолированной стационарной точки x^0 и от границы наз. соответственно интегралы

$$V_{x^0}(\lambda)=\int_\Omega f(x)\,\varphi_0(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx,$$

$$V_{\partial\Omega}(\lambda)=\int_\Omega f(x)\,\varphi_{\partial\Omega}(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx,$$

где $\varphi_0\in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_0\equiv 1$ вблизи точки x^0 и $\operatorname{supp}\varphi_0$ не содержит других стационарных точек, $\varphi_{\partial\Omega}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$\varphi_{\partial\Omega}\equiv 1$ в нек-рой окрестности границы. При $n=1$, $\Omega=(a,\ b)$ имеем:

1. $V_a(\lambda)=\frac{i}{\lambda S'(a)}\,e^{i\lambda S(a)}[f(a)+O(\lambda^{-1})]$,

если $S'(a)\neq 0$;

2. $V_{x^0}(\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\,|\,S''(x^0)\,|}}\;e^{i\left(\lambda S(x^0)+\frac{\pi}{4}\delta_0\right)}\times[f(x^0)+O(\lambda^{-1})]$, $\delta_0=\operatorname{sgn}S''(x^0)$,

если x^0 — внутренняя точка отрезка Ω и $S'(x^0)=0$, $S''(x^0)\neq 0$.

Полностью исследован случай, когда $n=1$, фаза S имеет конечное число стационарных точек, все они конечной кратности, и функция f имеет нули конечной кратности в этих точках и на концах отрезка Ω. Получены асимптотич. разложения. Исследован случай, когда функции f, S имеют степенные особенности: напр., $f=x^\alpha f_1(x)$, $S=x^\beta S_1(x)$, где f_1, S_1 — гладкие при $x=0$ функции, $\alpha>-1$, $\beta>0$.

Пусть $n\geqslant 2$, $x^0\in\Omega$ — **невырожденная стационарная точка** (т. е. $\Delta_S(x^0)=\det S''(x^0)\neq 0$). Тогда вклад от точки x^0 равен

$$V_{x^0}(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}|\,\Delta_S(x^0)\,|^{-1/2}\exp\left[i\left(\lambda S(x^0)+\frac{\pi}{4}\delta_S(x^0)\right)\right][f(x^0)+O(\lambda^{-1})],$$

где $\delta_S(x^0)$ — сигнатура матрицы $S''(x^0)$. Имеется также асимптотич. ряд для $V_{x^0}(\lambda)$ (формулы для вклада $V_{\partial\Omega}(\lambda)$ в случае гладкой границы см. [5]).

Если $x^0\in\Omega$ — стационарная точка конечной кратности, то (см. [6])

$$V_{x^0}(\lambda)\sim\exp[i\lambda S(x^0)]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{N}a_{kl}\lambda^{-r_k}(\ln\lambda)^l\right),$$

где r_k — рациональные числа, $\frac{n}{2}\leqslant r_0<r_1<\ldots<r_k\to+\infty$. Исследованы вырожденные стационарные точки (см. [3], [4]).

Исследован случай, когда фаза $S=S(x,\ \alpha)$ зависит от действительного параметра α и при малых $|\alpha|$ имеет две близкие невырожденные стационарные точки. В этом случае асимптотика интеграла $F(\lambda,\ \alpha)$ выражается через функции Эйри (см. [5]). Имеется **операторный вариант** С. ф. м.: $\lambda=A$, где A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной группы $\{e^{itA}\}$ ограниченных на оси $-\infty<t<\infty$ операторов, действующих в банаховом пространстве B, и $f(x)$, $S(x)$ — гладкие функции со значениями в B [9]. Если функции аналитические, то С. ф. м. есть частный случай *перевала метода*.

Лит.: [1] Thomson W., «Philos. Mag.», 1887, v. 23, p. 252—55; [2] Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; [3] Риекстыньш Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1—2, Рига, 1974—77; [4] Olver F. W. J., Asymptotics and special functions, N. Y.—L., 1974; [5] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977; [6] Atiyah M. F., «Comm. Pure and Appl. Math.», 1970, v. 23, № 2, p. 145—50; [7] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 5, с. 1—44; [8] Варченко А. Н., «Функциональный анализ», 1976, т. 10, № 3, с. 13—38; [9] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976.

М. В. Федорюк.

СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС, **однородный во времени случайный процесс**,— случайный процесс $X(t)$, статистич. характеристики к-рого не меняются с течением времени t, т. е. инвариантны относительно временны́х сдвигов: $t\to t+a$, $X(t)\to X(t+a)$ при любом фиксированном значении a (действительном или целочисленном в зависимости от того, идет ли речь о случайном процессе с непрерывным или дискретным временем). Понятие С. с. п. широко используется в приложениях теории вероятностей к различным разделам естествознания и техники, т. к. такие процессы с хорошей точностью описывают многие реальные явления, сопровождающиеся неупорядоченными флуктуациями. Так, напр., пульсации силы тока или напряжения в электрич. цепи (электрич. «шум») можно рассматривать как С. с. п., если цепь находится в стационарном режиме; пульсации скорости или давления в точке турбулентного течения представляют собой С. с. п., если течение является установившимся и т. д.

В математич. теории С. с. п. важную роль играют моменты распределений вероятностей значений процесса $X(t)$, причем особенно важны моменты первых двух порядков — среднее значение С. с. п. $\mathsf{E}X(t)=m$ и его корреляционная функция $\mathsf{E}X(t+\tau)X(t)=B(\tau)$. Во многих исследованиях по теории С. с. п. изучаются только те их свойства, к-рые полностью определяются одними лишь характеристиками m и $B(\tau)$ (т. н. **корреляционная теория** или теория второго порядка С. с. п.). В связи с этим случайные процессы $X(t)$, для к-рых $\mathsf{E}X(t)$ и $\mathsf{E}X(t+\tau)X(t)$ не зависят от значения t, часто выделяют в особый класс и наз. **стационарными случайными процессами в широком смысле**. Более частные случайные процессы, все характеристики к-рых не меняются со временем (так что функция распределения $F_{t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ n-мерной случайной величины $\{X(t_1),\ X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n)\}$ здесь при любом n зависит только от $n-1$ разностей $t_2-t_1,\ \ldots,\ t_n-t_1$), наз. **стационарными случайными процессами в узком смысле**. В соответствии с этим теория С. с. п. делится на теорию С. с. п. в узком смысле и теорию С. с. п. в широком смысле, использующие разный математич. аппарат.

Теория С. с. п. в узком смысле может излагаться вне рамок теории вероятностей как теория однопараметрич. групп, сохраняющих меру преобразований измеримого пространства с мерой на нем; она близко соприкасается с общей теорией динамич. систем и эргодич. теорией. Важнейшей общей теоремой теории С. с. п. в узком смысле является **эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина**, согласно к-рой для любого С. с. п. в узком смысле $X(t)$, имеющего математич. ожидание (т. е. такого, что $\mathsf{E}\,|X(t)|<\infty$), с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{T-S\to\infty}\int_S^T X(t)\,dt=\hat{X} \tag{1}$$

или

$$\lim_{T-S\to\infty}\sum_{t=S+1}^{T}X(t)=\hat{X} \tag{1a}$$

(формула (1) относится к С. с. п. с непрерывным временем, а (1а) — к процессам с дискретным временем). В силу относящегося уже к теории С. с. п. в широком смысле результата Е. Е. Слуцкого [1], утверждающего, что предел (1) или (1а) существует в смысле предела в среднем квадратичном и совпадает с $\mathsf{E}X(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{T\to\infty}T^{-1}\int_0^T b(\tau)\,d\tau=0 \tag{2}$$

или соответственно

$$\lim_{T\to\infty}T^{-1}\sum_{\tau=0}^{T-1}b(\tau)=0, \tag{2a}$$

где

$$b(\tau)=B(\tau)-m^2=\mathsf{E}\,[X(t+\tau)-m]\,[X(t)-m],$$

при условии (2) или (2а) (т. е., в частности, всегда, когда $b(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$) предел (1) или (1а) будет совпадать с $\mathsf{E}X(t)$. Теорема Биркгофа — Хинчина

может быть приложена и к всевозможным С. с. п. в узком смысле вида

$$Y_\Phi(s)=\Phi[X(t+s)],$$

где $\Phi[X(t)]$ — произвольный функционал от С. с. п. $X(t)$, являющийся случайной величиной, имеющей математич. ожидание; если для всех таких С. с. п. $Y_\Phi(s)$ соответствующий предел $\hat{Y}_\Phi$ совпадает с $\mathsf{E}\,Y_\Phi$, то С. с. п. $X(t)$ наз. метрически транзитивным. Для гауссовских С. с. п. $X(t)$, условие стационарности к-рых в узком смысле совпадает с условием стационарности в широком смысле, метрич. транзитивность будет иметь место тогда и только тогда, когда спектральная функция $F(\lambda)$ процесса $X(t)$ является непрерывной функцией λ (см., напр., [2], [3]). В общем случае нет простых необходимых и достаточных условий метрич. транзитивности С. с. п. $X(t)$.

Кроме указанного выше результата, касающегося метрич. транзитивности, имеется также множество других результатов, относящихся к гауссовским С. с. п.; в частности, для таких процессов подробно изучен вопрос о локальных свойствах реализаций (т. е. отдельных наблюденных значений) С. с. п. $X(t)$, о статистич. свойствах последовательности нулей или максимумов реализации С. с. п. $X(t)$ и точек пересечения ею заданного уровня (см., напр., [3]). Типичным примером результатов, касающихся пересечений уровня, является утверждение о том, что при широких условиях регулярности совокупность точек пересечения высокого уровня $x=u$ гауссовским С. с. п. $X(t)$ в нек-ром специальном масштабе времени (зависящем от u и быстро стремящемся к бесконечности при $u\to\infty$) сходится при $u\to\infty$ к пуассоновскому потоку событий единичной интенсивности (см [3]).

При рассмотрении С. с. п. в широком смысле вводят в рассмотрение гильбертово пространство H_X всевозможных линейных комбинаций значений процесса $X(t)$ и пределов в среднем квадратичном последовательностей таких линейных комбинаций, скалярное произведение в к-ром задается формулой $(Y_1, Y_2)=\mathsf{E}\,Y_1\bar{Y}_2$. В таком случае преобразование $X(t)\to X(t+a)$, где a — фиксированное число, будет порождать линейный унитарный оператор U_a, отображающий пространство H_X на себя; при этом семейство операторов U_a очевидно удовлетворяет условию $U_aU_b=U_{a+b}$, а значения $X(t)=U_tX(0)$ представляют собой совокупность точек (кривую, если время t непрерывно, и счетную последовательность точек, если время дискретно), переводимую в себя всеми операторами U_a. Соответственно этому теория С. с. п. в широком смысле может быть переформулирована в терминах функционального анализа как изучение совокупностей точек $X(t)=U_tX(0)$ гильбертова пространства H_X, где U_t— семейство линейных унитарных операторов таких, что $U_aU_b=U_{a+b}$.

Центральное место в теории С. с. п. в широком смысле занимают спектральные рассмотрения, опирающиеся на разложение случайного процесса $X(t)$ и его корреляционной функции $B(\tau)$ в интеграл Фурье — Стилтьеса. В силу теоремы Хинчина [4] (являющейся простым следствием аналитич. теоремы Бохнера об общем виде положительно определенной функции) корреляционная функция $B(\tau)$ С. с. п. с непрерывным временем всегда может быть представлена в виде

$$B(\tau)=\int_\Lambda e^{i\tau\lambda}\,dF(\lambda), \tag{3}$$

где $F(\lambda)$ — ограниченная монотонно неубывающая функция λ, а $\Lambda=(-\infty,\ \infty)$; теорема Герглотца об общем виде положительно определенных последовательностей аналогичным образом показывает, что такое же представление, но только с $\Lambda=[-\pi,\ \pi]$, имеет место и для корреляционной функции С. с. п. с дискретным временем. Если корреляционная функция $B(\tau)$ достаточно быстро убывает при $|\tau|\to\infty$ (как это чаще всего и бывает в приложениях при условии, что под $X(t)$ понимается разность $X(t)-m$, т. е. считается, что $\mathsf{E}X(t)=0$), то интеграл в правой части (3) обращается в обыкновенный интеграл Фурье

$$B(\tau)=\int_\Lambda e^{i\tau\lambda}f(\lambda)\,d\lambda, \tag{4}$$

где $f(\lambda)=F'(\lambda)$ — неотрицательная функция. Функция $F(\lambda)$ наз. спектральной функцией С. с. п. $X(t)$, а функция $f(\lambda)$ (в случаях, когда имеет место равенство (4)) — его спектральной плотностью. Исходя из формулы Хинчина (3) (или из задания С. с. п. $X(t)$ в виде совокупности точек $X(t)=U_tX(0)$ гильбертова пространства H_X и теоремы Стоуна о спектральном представлении однопараметрич. групп унитарных операторов в гильбертовом пространстве), можно также показать, что сам процесс $X(t)$ допускает спектральное разложение вида

$$X(t)=\int_\Lambda e^{it\lambda}\,dZ(\lambda), \tag{5}$$

где $Z(\lambda)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями (т. е. такая, что $\mathsf{E}\,dZ(\lambda_1)\overline{dZ(\lambda_2)}=0$ при $\lambda_1\neq\lambda_2$), удовлетворяющая условию $\mathsf{E}\,|dZ(\lambda)|^2=dF(\lambda)$, а интеграл справа понимается как предел в среднем квадратичном соответствующей последовательности интегральных сумм. Разложение (5) дает основание рассматривать любой С. с. п. в широком смысле $X(t)$ как суперпозицию совокупности некоррелированных друг с другом гармонич. колебаний различных частот со случайными амплитудами и фазами; при этом спектральная функция $F(\lambda)$ и спектральная плотность $f(\lambda)$ определяют распределение средней энергии (или, точнее, мощности) входящих в состав $X(t)$ гармонич. колебаний по спектру частот λ (в связи с чем в прикладных исследованиях функция $f(\lambda)$ часто наз. также энергетическим спектром, или спектром мощности, С с. п. $X(t)$).

Спектральное разложение корреляционной функции $B(\tau)$, задаваемое формулой (3), показывает, что отображение $X(t)\to e^{it\lambda}$, переводящее элементы $X(t)$ гильбертова пространства H_X в элементы $e^{it\lambda}$ гильбертова пространства $L^2(dF)$ комплекснозначных функций на множестве Λ с интегрируемым по $dF(\lambda)$ квадратом модуля, является изометрич. отображением H на $L^2(dF)$. Это отображение может быть далее продолжено до изометрического линейного отображения, M всего пространства H_X в пространство $L^2(dF)$, что позволяет переформулировать многие задачи теории С. с. п. в широком смысле в виде задач теории функций.

Значительная часть теории С. с. п. в широком смысле посвящена методам решения линейных аппроксимационных задач для таких процессов, т. е. методам нахождения линейной комбинации каких-то «известных» значений $X(t)$, к-рая лучше всего (в смысле минимума среднеквадратичной ошибки) приближает нек-рое «неизвестное» значение того же процесса или какую-то «неизвестную» случайную величину Y. В частности, задача об оптимальной линейной экстраполяции С. с. п. $X(t)$ состоит в отыскании наилучшего приближения $X^*(s)$ к значению $X(s)$, $s>0$, линейно зависящего от «прошлых значений» $X(t)$ с $t\leqslant 0$; задача об оптимальной линейной интерполяции — в отыскании наилучшего приближения к $X(s)$. линейно зависящего от значений $X(t)$, где t пробегает все значения, не принадлежащие выделенному интервалу оси вре-

мени (к к-рому принадлежит s); задача об оптимальной линейной фильтрации может быть сформулирована как задача отыскания наилучшего приближения Y^* к нек-рой случайной величине Y (обычно являющейся значением при каком-то $t=s$ корреляционно связанного с $X(t)$ С. с. п. $Y(t)$, причем чаще всего $Y(t)$ здесь играет роль «сигнала», а $X(t)=Y(t)+N(t)$ — известная из наблюдений сумма «сигнала» и искажающего его «шума» $N(t)$), линейно зависящего от значений $X(t)$ при $t\leqslant 0$ (см. *Случайных процессов прогнозирование*, *Случайных процессов фильтрация*).

Геометрически все эти задачи сводятся к задаче опускания перпендикуляра из нек-рой точки гильбертова пространства H_X (или его расширения) на заданное подпространство этого пространства. Опираясь на такую геометрич. интерполяцию и на изоморфизм пространств H_X и $L^2(dF)$, А. Н. Колмогоров вывел общие формулы, позволяющие по спектральной функции $F(\lambda)$ С. с. п. $X(t)$ с дискретным временем t определить средний квадрат ошибки оптимальной линейной экстраполяции или интерполяции, отвечающей случаю, когда значение $X(t)$ неизвестно только при $t=s$ (см. [2], [5] — [6]). В применении к задаче экстраполяции аналогичные же результаты для С. с. п. $X(t)$ с непрерывным временем были позже получены М. Г. Крейном и К. Каруненом (K. Karhunen). Н. Винер [8] показал, что нахождение наилучшего приближения $X^*(s)$ или $Y^*=Y^*(s)$ в случае задач об оптимальной линейной экстраполяции и фильтрации может быть сведено к решению нек-рого интегрального уравнения типа Винера — Хопфа или (в случае дискретного t) — дискретного аналога такого уравнения, что позволяет применить здесь метод факторизации (см. *Винера — Хопфа уравнение*, *Винера — Хопфа метод*). Что касается задач об оптимальной линейной экстраполяции или фильтрации С. с. п. $X(t)$ с непрерывным временем в случае, когда известны не все его прошлые значения при $t\leqslant 0$, но лишь значения на конечном интервале — $T\leqslant t\leqslant 0$, а также задачи оптимальной линейной интерполяции такого $X(t)$, то они могут быть сведены к нек-рым задачам о восстановлении дифференциального уравнения специального вида («обобщенного уравнения струны») по его спектру (см. [9], [10]).

Указанные выше подходы к решению задач об оптимальной линейной экстраполяции, интерполяции и фильтрации только в нек-рых исключительных случаях позволяют получить достаточно простые явные формулы для искомого наилучшего приближения $X^*(s)$ или Y^*, могущие с успехом применяться на практике. Важный случай, когда такие явные формулы существуют,— это случай С. с. п. $X(t)$ с рациональной относительно $e^{i\lambda}$ (если t дискретно) или относительно λ (если t непрерывно) спектральной плотностью $f(\lambda)$, специально изученный (в применении к задачам экстраполяции и фильтрации по значениям при $t\leqslant 0$) Н. Винером [8]. Позже было показано, что для таких С. с. п. с рациональной спектральной плотностью находится явное решение и задач о линейной интерполяции, экстраполяции и фильтрации по данным на конечном интервале — $T\leqslant t\leqslant 0$ (см., напр., [2], [11]). Простота процессов с рациональной спектральной плотностью может быть объяснена тем обстоятельством, что такие С. с. п. (и практически только они) представляют собой одномерную компоненту многомерного стационарного марковского процесса (см. [12]).

Понятие С. с. п. допускает целый ряд обобщений. Одним из них является понятие о б о б щ е н н о г о с т а ц и о н а р н о г о с л у ч а й н о г о п р о ц е с с а — такого *случайного процесса обобщенного* $X(\varphi)$ (т. е. случайного линейного функционала, заданного на пространстве D финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$), что или распределение вероятностей случайного вектора $\{X(V_a\varphi_1), X(V_a\varphi_2), \ldots, X(V_a\varphi_n)\}$, где $V_a\varphi(t)=\varphi(t+a)$, при любом целом положительном n, действительном a и функциях φ_1, φ_2, . . ., φ_n из D совпадает с распределением вероятностей вектора $\{X(\varphi_1), X(\varphi_2), \ldots, X(\varphi_n)\}$ (обобщенный С. с. п. в узком смысле), или же

$$\mathsf{E}X(\varphi)=\mathsf{E}X(V_a\varphi),$$

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi_1)\overline{X(V_a\varphi_2)}=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)},$$

при всех a (обобщенный С. с. п. в узком смысле). Обобщенный С. с. п. в широком смысле $X(\varphi)$ и его к о р р е л я ц и о н н ы й ф у н к ц и о н а л $B(\varphi_1, \varphi_2)=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$ допускают родственное (3) и (5) спектральное разложение (см. *Спектральное разложение* с л у ч а й н о й ф у н к ц и и). Другими часто используемыми обобщениями понятия С. с. п. являются понятия случайного процесса со стационарными приращениями нек-рого порядка и *случайного поля однородного*.

Лит.: [1] С л у ц к и й Е. Е., Избр. труды, М., 1960, с. 252—68; [2] Р о з а н о в Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [4] Х и н ч и н А. Я., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 42—51; [5] К о л м о г о р о в А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, № 1, с. 3—14; [6] Д у б Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [7] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [8] W i e n e r N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., 1949; [9] К р е й н М. Г., «Докл. АН СССР», 1954, т. 94, № 1, с. 13—16; [10] D y m H., M c K e a n H. P., Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem, N. Y.—[a. o.], 1976; [11] Я г л о м А. М., «Труды Моск. матем. об-ва», 1955, т. 4, с. 333—74; [12] D o o b J. L., «Ann. Math. Stat.», 1944, v. 15, p. 229—82.

А. М. Яглом.

СТЕКЛОВА ПРОБЛЕМЫ в т е о р и и о р т о г о н а л ь н ы х м н о г о ч л е н о в — задачи, в которых асимптотич. свойства ортогональных многочленов рассматриваются в зависимости от свойств и, в частности, от особенностей весовой функции и контура ортогональности.

При изучении многочленов $\{P_n(x)\}$, ортонормированных на сегменте $[-1, 1]$ с весом

$$h(x)=\frac{h_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1, 1), \tag{1}$$

возникает вопрос об условиях ограниченности последовательности $\{P_n(x)\}$ в отдельной точке либо на нек-ром множестве $A\subset[-1, 1]$, либо на всем сегменте ортогональности. Этот вопрос важен потому, что при ограниченности последовательности $\{P_n(x)\}$ на ряды Фурье по ортогональным многочленам переносятся нек-рые свойства тригонометрич. рядов Фурье.

В. А. Стеклов [1] высказал предположение, что для выполнения неравенства

$$|P_n(x)|\leqslant C_1, \ x\in A\subset[-1, 1], \tag{2}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$h_0(x)\geqslant C_2>0, \ x\in A\subset[-1, 1]. \tag{3}$$

Значение функции $h_0(t)$ в точке x, где рассматриваются неравенства (2) и (3), должно быть связано со значениями этой функции в точках, близких к x, и задача заключается в том, чтобы вывести (2) из (3) при минимальных ограничениях на функцию $h_0(t)$ в окрестности точки x (первая задача Стеклова). Имеются (см. [2], [5]) различные локальные и глобальные условия, при к-рых из (3) следует (2). В частности, если в (1) функция $h_0(x)$ положительна, непрерывна и удовлетворяет нек-рым дополнительным условиям, то для многочленов $\{P_n(x)\}$ имеет место асимптотич. формула, из к-рой следует неравенство (2) при $A=[-1, 1]$.

Кроме того, Стеклов [1] рассмотрел случаи алгебраич. нулей весовой функции и установил ряд результатов, послуживших началом двух направлений исследований. Одно из них характеризуется т. н. глобальными, или равномерными, оценками роста ортонормированных многочленов, к-рые получаются при довольно общих условиях на весовую функцию (вторая задача Стеклова). Напр. (см. [2], с. 177), если неравенство (3) выполняется на всем сегменте $[-1, 1]$, то существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$, что имеет место неравенство

$$|P_n(x)|\leqslant \varepsilon_n\sqrt{n},\quad x\in[-1, 1].$$

Третья задача Стеклова состоит в исследовании асимптотич. свойств ортогональных многочленов при гладких особенностях весовой функции. К этому направлению можно отнести асимптотич. свойства *Якоби многочленов*, весовая функция к-рых имеет особенности на концах сегмента ортогональности, с чем связано различие асимптотич. свойств многочленов Якоби внутри интервала $(-1, 1)$ и на его концах. Отличие результатов последнего направления от глобальных оценок ортогональных многочленов состоит в том, что в этом случае весовая функция может обращаться в отдельных точках в нуль или бесконечность определенного порядка и удовлетворяет нек-рым условиям гладкости. При этом асимптотич. формулы и оценки для ортогональных многочленов устанавливаются отдельно в особых точках весовой функции (нули, полюса, концы сегмента ортогональности) и на остальной части сегмента ортогональности.

Формулировки и особенно доказательства по всем вышеперечисленным вопросам наиболее естественны в случае многочленов, ортогональных на окружности, ибо в этом случае можно применять многие результаты о приближении периодич. функций тригонометрич. полиномами.

Лит.: [1] Стеклов В. А., «Изв. Российской Акад. наук», 1921, т. 15, с. 267—80, с. 281—302, с. 303—26; [2] Гронимус Я. Л., Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., 1958; [3] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [4] Суетин П. К., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 2, с. 41—88; [5] его же, в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 15, М., 1977, с. 5—82. *П. К. Суетин.*

СТЕКЛОВА ФУНКЦИЯ для интегрируемой на любом конечном отрезке $[a, b]$ функции $f(t)$ — функция

$$f_h(t)=\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f(u)\,du=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(t+v)\,dv. \quad (*)$$

Функции вида (*), а также повторные функции

$$f_{h,r}(t)=\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f_{h,r-1}(u)\,du,\ r=2, 3, \ldots;$$

$$f_{h,1}(t)=f_h(t),$$

впервые были введены В. А. Стекловым в 1907 (см. [1]) при решении проблемы разложения заданной функции в ряд по собственным функциям. С. ф. $f_h(t)$ почти всюду имеет производную

$$f_h'(t)=\frac{1}{h}\left\{f\left(t+\frac{h}{2}\right)-f\left(t-\frac{h}{2}\right)\right\},$$

если $f(t)$ равномерно непрерывна на всей оси, то

$$\sup_{t\in(-\infty,\ \infty)}|f(t)-f_h(t)|\leqslant\omega\left(\frac{h}{2}, f\right),$$

$$\sup_{t\in(-\infty,\ \infty)}|f_h'(t)|\leqslant\frac{1}{h}\omega(h, f),$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции $f(t)$. Аналогичные неравенства имеют место и в метрике $L^p(-\infty, \infty)$, если только $f\in L^p(-\infty, \infty)$.

Лит.: [1] Стеклов В. А., Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям, Хар., 1956; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965. *А. В. Ефимов.*

СТЕПАНОВА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс S_l^p измеримых и суммируемых вместе со своей p-й степенью ($p\geqslant 1$) в каждом конечном интервале $[x, x+l]$ функций, к-рые могут быть в метрике пространства Степанова (см. ниже) аппроксимированы конечными суммами вида

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x},$$

где a_n — комплексные коэффициенты, λ_n — действительные числа. Расстояние в пространстве Степанова определяется формулой

$$D_{S_l^p}[f(x), g(x)]=$$

$$=\sup_{-\infty<x<\infty}\left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)-\varphi(x)|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

Функции класса S_l^p могут быть также определены с помощью понятия *почти периода*.

Функции класса $S^p=S_1^p$ обладают рядом свойств, аналогичных свойствам равномерных почти периодич. функций. Напр., функции класса S^p ограничены и равномерно непрерывны (в метрике $D_{S_l^p}$ соответствуют различным топологически эквивалентным S_l^p), предел $f(x)$ сходящейся последовательности С. п. п. ф. $\{f_n(x)\}$ (в метрике S^p) принадлежит классу S^p. Если функция класса S^p равномерно непрерывна (в обычном смысле) на всей действительной оси, то она есть равномерная почти периодич. функция. Введены В. В. Степановым [1].

Лит: [1] Степанов В. В., «C. r. Acad. sci.», 1925, t. 181, p. 90—94. *Б. М. Бредихин.*

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ — функция

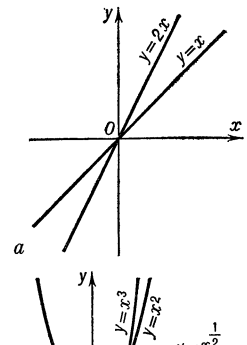
$$y=x^a,$$

где a — постоянное число. Если a — целое число, то С. ф.— частный случай *рациональной функции*. При комплексных значениях x и a С. ф. неоднозначна, если a — нецелое число.

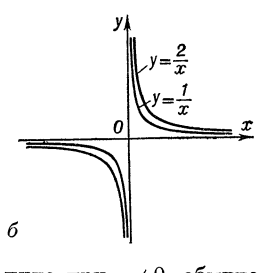
При фиксированных действительных x и a число x^a является *степенью*, поэтому свойства С. ф. $y=x^a$ вытекают из свойств степени.

При $x>0$ С. ф. x^a определена и положительна для любого действительного a. При $x\leqslant 0$ С. ф. x^a определена в следующих случаях.

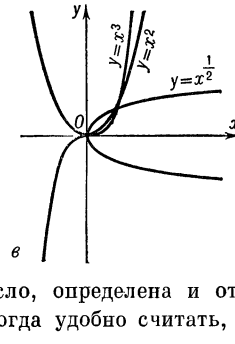
а) С. ф. x^a при $x=0$ определена и равна нулю, если $a>0$, и не определена, если $a<0$. С. ф. x^0 равна единице при $x\neq 0$, обычно считают, что $x^0\equiv 1$ при всех x, хотя символ 0^0 не определен.



а



б



в

б) Если n — натуральное число, то С. ф. x^n определена при всех x, а С. ф. $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ определена при $x\neq 0$.

в) С. ф. $\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$, где n — нечетное натуральное число, определена и отрицательна при $x<0$. Однако иногда удобно считать, что и в этом случае С. ф. $x^{1/n}$

определена только при $x\geqslant 0$. Аналогичные соглашения принимаются и для С. ф. $x^{m/n}$, когда m/n — несократимая дробь.

Свойства С. ф. x^a обычно рассматриваются при $x>0$, хотя многие из них справедливы и при $x\leqslant 0$, напр., когда a — натуральное число.

Функции вида $y=cx^a$, где c — постоянный коэффициент, при $a=1$ выражают прямую пропорциональность (их графики — прямые, проходящие через начало координат, см. рис. *а*), при $a=-1$ — обратную пропорциональность (графики — равносторонние гиперболы с центром в начале координат, имеющие оси координат своими асимптотами, см. рис. *б*). Многие законы физики математически выражаются при помощи функций вида $y=cx^a$ (см. рис. *в*).

С. ф. x^a при $x>0$ непрерывна, монотонна (возрастает, если $a>0$, убывает, если $a<0$), бесконечно дифференцируема и в окрестности каждой точки x_0 может быть разложена в ряд Тейлора. При этом

$$(x^a)'=ax^{a-1},$$

$$\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C \text{ при } a\neq -1,$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$x^a=\sum_{n=0}^{\infty}C_a^n x_0^{a-n}(x-x_0)^n$$

при $|x-x_0|<|x_0|$, где C_a^n — биномиальные коэффициенты.

В комплексной области С. ф. z^a определяется для всех $z\neq 0$ формулой

$$z^a=e^{a\operatorname{Ln} z}=e^{a(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)},\qquad (*)$$

где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. Если a — целое, то С. ф. z^a однозначна:

$$z^a=|z|^a e^{ia\arg z}.$$

Если a — рациональное ($a=p/q$, где p и q взаимно просты), то С. ф. z^a принимает q различных значений:

$$(z^a)_k=|z|^a e^{ia\arg z}\varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k=e^{2k\pi i/q}$ — корни степени q из единицы: $\varepsilon_k^q=1$ и $k=0,\ 1,\ \ldots,\ q-1$. Если a — иррациональное, то С. ф. z^a — бесконечнозначна: множитель $e^{a2k\pi}$ принимает для разных k различные значения. При комплексных значениях a С. ф. z^a определяется той же формулой (*). *В. И. Битюцков.*

СТЕПЕННОЙ ВЫЧЕТ по модулю m — целое число a, для к-рого при заданном целом $n>1$ сравнение

$$x^n\equiv a\pmod m$$

разрешимо. При этом число a наз. вычетом степени n по модулю m. Если указанное сравнение не разрешимо, то число a наз. невычетом степени n по модулю m. При $n=2$ степенные вычеты и невычеты наз. квадратичными, при $n=3$ — кубическими и при $n=4$ — биквадратичными.

В случае простого модуля $m=p$ вопрос о разрешимости сравнения $x^n\equiv a\pmod p$ может быть выяснен с помощью критерия Эйлера: если $q=(n,\ p-1)$, то для разрешимости сравнения $x^n\equiv a\pmod m$ необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{(p-1)/q}\equiv 1\pmod p,$$

и в случае выполнимости этого условия рассматриваемое сравнение имеет q различных по модулю p решений. Из этого критерия следует, что среди чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$ имеется ровно $(p-1)/q$ вычетов и $(q-1)(p-1)/q$ невычетов степени n по модулю p. См. *Распределение степенных вычетов и невычетов.* *С. А. Степанов.*

СТЕПЕННОЙ РЯД — 1) С. р. по одному комплексному переменному z — функциональный ряд вида

$$s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-a)^k,\qquad (1)$$

где a — центр ряда, b_k — его коэффициенты, $b_k(z-a)^k$ — члены ряда. Существует число r, $0\leqslant r\leqslant\infty$, называемое радиусом сходимости С. р. (1) и определяемое по формуле Коши — Адамара

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|b_k|}},\qquad (2)$$

такое, что при $|z-a|<r$ ряд (1) абсолютно сходится, а при $|z-a|>r$ — расходится (теорема Коши — Адамара). В связи с этим круг $D=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<r\}$ на плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z наз. кругом сходимости С. р. (см. рис. 1). В случае $r=0$ круг сходимости вырождается в единственную точку $z=a$, напр. для С. р. $\sum_{k=0}^{\infty}k!\,(z-a)^k$ (этот случай интереса не представляет, и всюду в дальнейшем предполагается, что $r>0$). В случае $r=\infty$ круг сходимости совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$, напр. для С. р. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z-a)^k$. Множество сходимости, т. е. совокупность всех точек сходимости С. р. (1), в случае $0<r<\infty$, кроме точек круга сходимости D, может включать все или нек-рые точки, или ни одной точки окружности сходимости $S=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|=r\}$. Круг сходимости в этом случае есть внутренность множества точек абсолютной сходимости С. р.

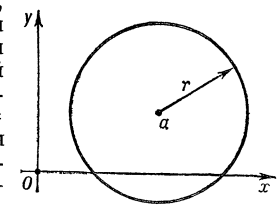


Рис. 1.

Внутри круга D, т. е. на любом компакте $K\subset D$, С. р. (1) сходится абсолютно и равномерно. Таким образом, сумма ряда $s(z)$ определена и является регулярной аналитич. функцией по крайней мере в круге D. При этом на окружности S она имеет по меньшей мере одну особую точку, аналитич. продолжение в к-рую суммы $s(z)$ невозможно. Существуют С. р., имеющие на S в точности одну особую точку, равно как и С. р., у к-рых вся окружность S состоит из особых точек.

В случае $r=\infty$ ряд (1) либо обрывается, т. е. представляет собой многочлен

$$s(z)=\sum_{k=0}^{m}b_k(z-a)^k,$$

либо его сумма $s(z)$ есть целая трансцендентная функция, регулярная во всей плоскости $\mathbb{C}$ и имеющая в бесконечности *существенно особую точку*.

Обратно, само понятие аналитичности функции $f(z)$ в точке a состоит в том, что $f(z)$ в нек-рой окрестности a разлагается в С. р.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-a)^k,$$

к-рый является для $f(z)$ рядом Тейлора, т. е. его коэффициенты определяются формулами

$$b_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

В связи с этим важно свойство единственности С. р.: если сумма $s(z)$ ряда (1) обращается в

нуль на бесконечном множестве $E\subset D$, имеющем предельную точку внутри D, то $s(z)\equiv 0$ и все $b_k=0$, $k=0, 1, \ldots$ В частности, если $s(z)=0$ в окрестности нек-рой точки $z_0\in D$, то $s(z)\equiv 0$ и все $b_k=0$. Таким образом, всякий С. р. есть ряд Тейлора для своей суммы.

Пусть наряду с С. р. (1) имеется другой С. р.

$$\sigma(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (3)$$

с тем же центром a и радиусом сходимости $r_1>0$. Тогда по крайней мере в круге $\Delta=\{z\in\mathbb{C}: |z-a|<\rho\}$, где $\rho=\min\{r, r_1\}$, имеют смысл сложение, вычитание и умножение С. р. (1) и (3) по формулам:

$$\left.\begin{aligned} s(z)\pm\sigma(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}(b_k\pm c_k)(z-a)^k,\\ s(z)\sigma(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n}\Big)(z-a)^k. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности справедливы, причем вычитание есть действие, обратное сложению. Таким образом, множество С. р. с положительными радиусами сходимости и фиксированным центром есть кольцо над полем $\mathbb{C}$. Если $c_0\neq 0$, то возможно и деление С. р.:

$$\frac{s(z)}{\sigma(z)}=\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k, \qquad (5)$$

причем коэффициенты d_k однозначно определяются из бесконечной системы уравнений

$$\sum_{n=0}^{k} c_n d_{k-n}=a_k, \quad k=0, 1, \ldots$$

При $c_0\neq 0$, $r>0$ и $r_1>0$ радиус сходимости ряда (5) также положительный.

Пусть для простоты в (1) и (3) $a=\sigma(0)=c_0=0$. Тогда сложная функция $s(\sigma(z))$ будет регулярной в окрестности начала координат, и процедура разложения ее в С. р. носит название подстановки ряда в ряд:

$$s(\sigma(z))=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\Big)^n=\sum_{m=0}^{\infty} g_m z^m. \qquad (6)$$

Коэффициент g_m в (6) получается как сумма одноименных коэффициентов в разложениях каждой из функций $b_n(\sigma(z))^n$, а эти последние разложения получаются путем n-кратного умножения ряда для $\sigma(z)$ самого на себя. Ряд (6) заведомо сходится при $|z|<\rho$, где ρ таково, что $|\sigma(z)|<r$. Пусть опять $a=\sigma(0)=c_0=0$ и, кроме того, $c_1=\sigma'(0)\neq 0$, $w=\sigma(z)$. Задача построения ряда для обратной функции $z=\varphi(w)$, к-рая при указанных условиях регулярна в окрестности начала, наз. обращением ряда (3). Ее решением является ряд Лагранжа:

$$z=\varphi(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\zeta}{\sigma(\zeta)}\right)^{(n)}_{\zeta=0} w^n$$

(о более общей задаче обращения см. в ст. *Бюрмана — Лагранжа ряд*).

Если С. р. (1) сходится в нек-рой точке $z_0\neq a$, то он абсолютно сходится для всех z таких, что $|z-a|<|z_0-a|$,— в этом состоит первая теорема Абеля. Эта теорема также позволяет установить вид области сходимости С. р. Более тонкий результат представляет собой вторая теорема Абеля: если С. р. (1) сходится в точке $z_0=a+re^{i\theta_0}$ на окружности сходимости S, то

$$\lim_{\rho\to r} s(a+\rho e^{i\theta_0})=s(z_0),$$

т. е. сумма ряда $s(z)$ в точке $z_0\in S$ имеет радиальное граничное значение $s(z_0)$ и, следовательно, непрерывна вдоль радиуса $z=a+\rho e^{i\theta_0}$, $0\leqslant\rho\leqslant r$; более того, $s(z)$ имеет и угловое граничное значение $s(z_0)$. Эту теорему (1827) можно считать первым крупным результатом в направлении исследования граничных свойств С. р. Обращение второй теоремы Абеля без дополнительных ограничений на коэффициенты С. р. невозможно. Однако, если предположить, напр., что $b_k=o(1/k)$ и существует предел $\lim_{\rho\to r} s(a+\rho e^{i\theta_0})=s_0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_0-a)^k$ сходится к сумме s_0. Такого рода частичные обращения второй теоремы Абеля получили название *тауберовых теорем*.

Другие результаты о граничных свойствах С. р. и, в частности, о расположении особых точек С. р. см. в статьях *Адамара теорема*, *Аналитическое продолжение*, *Граничные свойства аналитических функций*, *Фату теорема* (см. также [3]—[5]).

2) С. р. по многим комплексным переменным $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n>1$, или кратный С. р.— функциональный ряд вида

$$s(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} b_k (z-a)^k=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} b_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}, \qquad (7)$$

где $b_k=b_{k_1\ldots k_n}$, $(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$, $a=(a_1, \ldots, a_n)$ — центр ряда, точка комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Областью сходимости D С. р. (7) наз. внутренность множества точек абсолютной сходимости, но при $n>1$ она не имеет столь простого вида, как при $n=1$. Область D пространства $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда является областью сходимости нек-рого С. р. (7), когда D — логарифмически выпуклая полная *кратно круговая область* пространства $\mathbb{C}^n$. Если нек-рая точка $z^0\in D$, то замыкание $\overline{U}(a, r)$ поликруга $U(a, r)=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_\nu-a_\nu|<r_\nu, \nu=1, \ldots, n\}$, где $r_\nu=|z^0_\nu-a_\nu|$, $r=(r_1, \ldots, r_n)$, также принадлежит D и ряд (7) сходится в $\overline{U}(a, r)$ абсолютно и равномерно (аналог первой теоремы Абеля). Поликруг $U(a, r)$, $r=(r_1, \ldots, r_n)$, наз. поликругом сходимости С. р. (7), если $U(a, r)\subset D$, но в любом несколько большем поликруге $\{z\in\mathbb{C}^n: |z_\nu-a_\nu|<r'_\nu\}$, где $r'_\nu\geqslant r_\nu$, $\nu=1, \ldots, n$, и по крайней мере одно неравенство строгое, имеются точки, в к-рых ряд (7) расходится. Радиусы r_ν поликруга сходимости наз. сопряженными радиусами сходимости С. р. (7), они удовлетворяют соотношению, являющемуся аналогом формулы Коши — Адамара:

$$\lim_{|k|\to\infty}\sup\sqrt[|k|]{|b_k|\,r^k}=1,$$

где $|b_k|=|b_{k_1\ldots k_n}|$, $r^k=r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}$. Область сходимости D исчерпывается поликругами сходимости. Напр., для ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(z_1z_2)^k$ поликруги сходимости имеют вид

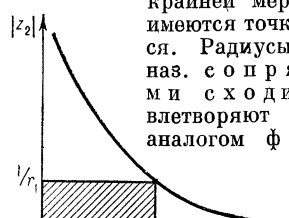


Рис. 2.

$$U(0, r_1, 1/r_1)=\{z=(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2: |z_1|<r_1, |z_2|<1/r_1\},$$

а область сходимости $D=\{z\in\mathbb{C}^2: |z_1|\cdot|z_2|<1\}$ (на рис. 2 она изображена на абсолютной четверть-плоскости).

Свойство единственности С. р. сохраняется в том смысле, что если $s(z)=0$ в нек-рой окрестности точки z^0 в $\mathbb{C}^n$ (достаточно даже в $\mathbb{R}^n$, т. е. на множестве $\{z=x+iy\in\mathbb{C}^n: |x-\mathrm{Re}\,a|<r, y=\mathrm{Im}\,a\}$), то $s(z)\equiv 0$ и все $b_k=0$.

Действия с кратными С. р. производятся в основном по тем же правилам, что и в случае $n=1$. Другие свойства кратных С. р. см., напр., [8], [9].

3) С. р. по действительным переменным $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 1$,— функциональный ряд вида

$$s(x)=\sum_{|k|=0}^{\infty} b_k (x-a)^k, \qquad (8)$$

где использованы сокращенные обозначения, как и в (7), $a=(a_1, \ldots, a_n)\in\mathbb{R}^n$ — центр ряда. Если ряд (8) абсолютно сходится в нек-ром параллелепипеде $\Pi=\{x\in\mathbb{R}^n : |x_k-a_k|<r_k,\ k=1, \ldots, n\}$, то он абсолютно сходится и в поликруге $U(a, r)=\{z\in\mathbb{C}^n : |z-a|<r\}$, $r=(r_1, \ldots, r_n)$. При этом сумма ряда $s(x)$, будучи аналитич. функцией действительных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в Π, аналитически продолжается в виде С. р.

$$s(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \qquad (9)$$

до аналитич. функции $s(z)$ комплексных переменных $z=x+iy=(z_1=x_1+iy_1, \ldots, z_n=x_n+iy_n)$ в $U(a, r)$. Если D — область сходимости С. р. (9) в пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных $z=x+iy$, то сужение Δ области D на пространство $\mathbb{R}^n$ действительных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ является областью сходимости С. р. (8), $\Delta\subset D$. В частности, при $n=1$ область D является кругом сходимости, а его сужением Δ является интервал сходимости на числовой оси $\mathbb{R}$, $\Delta=\{x\in\mathbb{R} : a-r<x<a+r\}$, где r — радиус сходимости.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [3] Титчмарш Е., Теория функций, пер. с англ., М.—Л., 1951; [4] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [5] Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2 Aufl., B., 1929; [6] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [7] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [8] Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1951; [9] Янушаускас А. И., Двойные ряды, Новосиб., 1980.

Е. Д. Соломенцев.

СТЕПЕНЬ — в первоначальном понимании (целая и положительная С.) есть произведение нескольких (n раз) равных сомножителей. Обозначение: $a^n=a\cdot a\cdot \ldots \cdot a$, где a — основание, n — показатель, a^n — степень. Основные действия над С. даются формулами

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m},\quad a^n : a^m=a^{n-m},\quad (a^n)^m=a^{nm}.$$

Дальнейшие обобщения С.: нулевая $a^0=1$ (при $a\neq 0$); отрицательная $a^{-n}=1/a^n$; дробная $a^{n/m}=\sqrt[m]{a^n}$ и С. с иррациональным показателем $a^\alpha=\lim\limits_{r_n\to\alpha} a^{r_n}$, где r_n — произвольная последовательность рациональных чисел, стремящаяся к α. Рассматриваются С. с комплексным основанием (см. *Муавра формула*) и с комплексными основанием и показателем (по определению: $z^u=e^{u\operatorname{Ln} z}$). *БСЭ-3.*

СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ, степень непрерывного отображения $f : (M, \partial M)\to(N, \partial N)$ связных компактных многообразий одинаковой размерности — целое число $\deg f$ такое, что $f_*(\mu_M)=\deg f\cdot\mu_N$, где μ_M, μ_N — *фундаментальные классы* многообразий M и N над кольцом $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$, f_* — индуцированное отображение. В случае неориентированных многообразий С. о. однозначно определена по mod2. Если $f : M\to N$ — дифференцируемое отображение замкнутых дифференцируемых многообразий, то $\deg f$ совпадает mod 2 с числом прообразов регулярного значения y отображения f. В случае ориентированных многообразий

$$\deg f=\sum_{x\in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_x,$$

где $\operatorname{sign} J_x$ — знак якобиана отображения f в точке x (степень Брауэра).

Для непрерывного отображения $f : \mathbb{R}^n, 0\to\mathbb{R}^n, 0$ и изолированной точки x в прообразе нуля определено понятие локальной степени $\deg_x f$ в точке x : $\deg_x f=\deg\pi\cdot h$, где h — сужение отображения f на маленькую сферу

$$S^n_\varepsilon=\partial B^n_\varepsilon,\ B^n_\varepsilon\cap f^{-1}(0)=x\in\operatorname{Int}\in B^n_\varepsilon,$$

π — проекция из нуля на единичную сферу. В случае дифференцируемого f справедлива формула

$$|\deg_x f|=\dim Q(f)-2\dim I,$$

где $Q(f)$ — кольцо *ростков* гладких функций в нуле, профакторизованное по идеалу, порожденному компонентами f, I — идеал факторкольца, максимальный по отношению к свойству $I^2=0$. Пусть $J_0\in Q(f)$ — класс якобиана отображения f, тогда для линейного функционала $\varphi : Q(f)\to R$ такого, что $\varphi(J_0)>0$, выполнено $\deg_x f=\operatorname{Index}<\ ,\ >\varphi$, где $\langle p, q\rangle_\varphi=\varphi(p,q)$ — симметричная билинейная форма на $Q(f)$.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [2] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1972; [3] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений, М., 1982; [4] Eisenbud D., Levine H., «Ann. Math.», 1977, v. 106, N. 1, p. 19—38.

А. В. Хохлов.

СТЕПЕНЬ ТОЧКИ $M(x_0, y_0)$ относительно окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

с центром в точке (a, b) — число

$$p=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2.$$

С. т. $p<0$, если точка M_0 лежит внутри окружности; $p=0$, если точка M_0 принадлежит окружности; $p>0$, если точка M_0 лежит вне окружности. С. т. M_0 относительно окружности может быть представлена как произведение векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$, где M_1 и M_2 — точки пересечения окружности с произвольной прямой, проходящей через точку M_0. В частности, С. т. относительно окружности равна квадрату длины касательной, проведенной из точки M_0 к окружности.

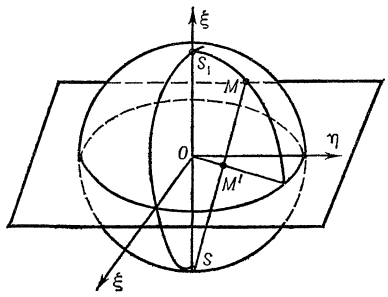
Совокупность всех окружностей на плоскости, относительно к-рых данная точка имеет одинаковую степень, составляет *связку* окружностей. Множество точек, имеющих относительно двух неконцентрич. окружностей одинаковую степень, образует радикальную ось.

Аналогично определяется С. т. относительно сферы. Совокупность всех сфер, относительно к-рых данная точка имеет одинаковую степень, составляет *сеть* сфер. Совокупность всех сфер, относительно к-рых точки нек-рой прямой (радикальной оси) имеют одинаковую степень (различную для разных точек), составляет *связку* сфер. Совокупность всех сфер, относительно к-рых точки нек-рой плоскости (радикальной плоскости) имеют одинаковую степень (различную для разных точек), составляет *пучок* сфер. *А. Б. Иванов.*

СТЕРАДИАН — единица измерения телесного угла. С.— телесный угол, вырезающий на сфере, описанной вокруг вершины угла, поверхность, площадь к-рой равна квадрату радиуса сферы. Полная сфера образует телесный угол, равный 4π. Обозначается *стер.* *БСЭ-3.*

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ — соответствие между точками сферы и плоскости, получаемое следующим образом: из нек-рой точки S на сфере (центра С. п.) другие точки сферы проектируются лучами на плоскость, перпендикулярную радиусу сферы $S0$ (на рис. эта плоскость экваториальная, ее можно

проводить и через конец S_1 диаметра SS_1). При этом каждая точка M на сфере переходит в нек-рую определенную точку M' на плоскости. Если условиться считать, что точке S соответствует бесконечно удаленная точка плоскости, то соответствие точек сферы и плоскости будет взаимно однозначным. Основные свойства С. п.: 1) окружностям на сфере соответствуют окружности на плоскости, причем окружностям, проходящим через центр С. п., соответствуют окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку, т. е. прямые; 2) при С. п. углы между линиями сохраняются.



Если точку трехмерного пространства задавать однородными координатами x_1, x_2, x_3, x_4 и считать, что уравнение сферы $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$, а точку плоскости — декартовыми прямоугольными координатами ξ, η, то связь между координатами точек сферы и плоскости задается формулами

$$\sigma x_1=\xi,\ \sigma x_2=\eta,$$
$$\sigma x_3=\frac{1-(\xi^2+\eta^2)}{2},\quad \sigma x_4=\frac{1+(\xi^2+\eta^2)}{2}.$$

Координаты x_1, x_2, x_3, x_4 можно рассматривать как координаты точки на плоскости (*тетрациклические координаты*).

С. п. устанавливает соответствие не только между точками сферы и плоскости, но и между точками вне сферы и окружностями на плоскости. Для точки вне сферы полярная плоскость пересекает сферу по окружности. При С. п. эта окружность переходит в окружность на плоскости, к-рая и рассматривается как С. п. точки вне сферы на плоскость. Координаты точки трехмерного пространства рассматриваются как тетрацикличе. координаты окружности на плоскость. Точкам внутри сферы при С. п. соответствуют мнимые образы на плоскости.

С. п. можно рассматривать и более общо: вместо сферы брать любую поверхность 2-го порядка. Это проектирование называется также отображением Гессе.

В многомерном случае С. п.— проекция точек евклидова пространства E_{n+1} на пространство E_n, дополненное одной бесконечно удаленной точкой, из точки P сферы S_n в E_{n+1}, когда P не принадлежит E_n. Все рассуждения и формулы аналогичны приведенным выше.

При помощи С. п. расширенная комплексная плоскость отображается взаимно однозначно и конформно на *Римана сферу*.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1939; [2] Blaschke W., Vorlesungen über Differential-Geometrie, Bd 3, B., 1929; [3] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова.

СТЕРЕОЭДР — выпуклый многогранник правильного разбиения пространства на равные многогранники, т. е. выпуклые фундаментальные области произвольных (федоровских) групп движений. Число различных сетей для правильного разбиения n-мерного пространства, в к-ром С. примыкают по целым граням (сторонам фундаментальных областей), конечно и зависит только от размерности пространства. Для $n=3$ число граней С. не превышает 390. Классификация проведена (1984) лишь для частных видов С., напр. для *параллелоэдров*.

Лит.: [1] Узоры симметрии, пер. с англ., М., 1980; [2] Делоне Б. Н., Сандакова Н. Н., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 64, с. 28—51.

А. Б. Иванов.

СТЕФАНА ЗАДАЧА — задача, возникающая при исследовании физич. процессов, связанных с фазовым превращением вещества. Простейшая двухфазная С. з. в теплофизич. терминах формулируется следующим образом ([1], [2]): найти распределение температуры $u(x, t)$ и закон движения границы раздела фаз $\xi=\xi(t)$ (напр., границы «лед—вода» внутри замерзающей воды) из уравнения теплопроводности:

$$c_1\rho_1\frac{\partial u}{\partial t}=k_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
при $0<x<\xi(t),\ t>0,$
$$c_2\rho_2\frac{\partial u}{\partial t}=k_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
при $\xi(t)<x<+\infty,\ t>0,$

граничного условия

$$u(0,\ t)=u_1=\text{const}<T,\ t>0,$$

начального условия

$$u(x,\ 0)=u_2=\text{const}>T,\ x\geqslant 0,$$

и условия на границе замерзания

$$u(\xi(t)-0,\ t)=u(\xi(t)+0,\ t),\ t>0,$$
$$\lambda\rho_1\frac{d\xi(t)}{dt}=k_1\frac{\partial u(\xi(t)-0,\ t)}{\partial x}-\frac{\partial u(\xi(t)+0,\ t)}{\partial x},$$
$$t>0,\ \xi(0)=0,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности, c_1 и c_2 — удельные теплоемкости, ρ_1 и ρ_2 — плотности твердой и соответственно жидкой фаз, λ — скрытая теплота плавления, отнесенная к единице массы, T — температура замерзания. Эта задача имеет автомодельное решение $u=u(xt^{-1/2})$, $\xi(t)=\alpha t^{1/2}$, $\alpha=\text{const}>0$.

Достаточно общая постановка С. з. в пространственно трехмерном случае сводится к краевой задаче для квазилинейного параболич. уравнения 2-го порядка с кусочно непрерывными коэффициентами, терпящими разрывы 1-го рода на заранее неизвестных и подлежащих определению поверхностях, на к-рых задается значение искомой функции и, кроме того, удовлетворяющих дифференциальному *Стефана условию*. Исследовались (см. [3]—[6]) существование и единственность классического и обобщенного решений С. з.; о методах приближенного решения С. з. см. [2], [4], [6].

Такого типа задачу одним из первых исследовал Й. Стефан [1].

Лит.: [1] Stefan J., «Sitzungsber. Wien. Akad. Math. naturwiss», 1890, Bd 98, Abth. 2^a, S. 473—84; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [3] Олейник О. А., «Докл. АН СССР», 1960, т. 135, № 5, с. 1054—57; [4] Будак Б. М., Успенский А. Б., «Ж. вычисл. матем. и матем физ.», 1969, т. 9, № 6, с. 1299—315; [5] Будак Б. М., Москал М. З., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 4, с. 751—54; [6] Будак Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б., Численные методы в газовой динамике, М., 1965, с. 139—83.

Ф. П. Васильев.

СТЕФАНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА — задача, заключающаяся в том, чтобы по заданному закону движения границы раздела фаз (см. *Стефана задача*) восстановить закон изменения граничных условий или коэффициентов уравнения. Напр., найти поток $q(t)=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ из условий:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<\xi(t),\ 0<t\leqslant T,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\xi_0;\quad u(\xi(t)-0,\ t)=\mu(t),$$
$$\gamma(t)\frac{d\xi(t)}{dt}=-\frac{\partial u(\xi(t)-0,\ t)}{\partial x};\ \xi(0)=\xi_0>0,$$

где $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $\gamma(t)\geqslant\gamma_0>0$, $\xi(t)$ — заданные функции. Для приближенного решения такой задачи часто используется вариационный подход (см. [1]).

Лит.: [1] Будак Б. М., Васильева В. Н., Решения задач Стефана, М., [1971], с. 65—86. *Ф. П. Васильев.*

СТЕФАНА УСЛОВИЕ — условие, описывающее закон движения границы, разделяющей две различные фазы вещества, и выражающее собой закон сохранения энергии при фазовых превращениях. Напр., граница раздела между твердой и жидкой фазами вещества при затвердевании (или при плавлении) в одномерном случае может быть описана функцией $\xi=\xi(t)$, связанной с распределением температуры $u(x, t)$ посредством С. у.:

$$\lambda\rho_1\frac{d\xi}{dt}=k_1\frac{\partial u(\xi(t)-0,\,t)}{\partial x}-k_2\frac{\partial u(\xi(t)+0,t)}{\partial x},\ t>0,$$

(об обозначениях см. *Стефана задача*). За время Δt затвердевает (или расплавляется) масса

$$\rho_1\Delta\xi=\rho_1[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)].$$

Выделяющееся при этом количество тепла $\lambda\rho_1\Delta\xi$ равно разности количеств тепла, прошедших через границы $\xi(t)$ и $\xi(t+\Delta t)$:

$$\lambda\rho_1\Delta\xi=\left[k_1\frac{\partial u(\xi(t)-0,\,t)}{\partial x}-k_2\frac{\partial u(\xi(t+\Delta t)+0,\,t+\Delta t)}{\partial x}\right]\Delta t.$$

Отсюда при $\Delta t\to 0$ получается С. у. Кроме того, на границе раздела фаз $\xi=\xi(t)$ температура предполагается непрерывной и ее значение принимается равной известнои температуре плавления.

Аналогичные условия на неизвестных границах, встречающиеся при исследовании нек-рых других процессов и вытекающие из законов сохранения, также принято называть С. у. (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача со свободными границами).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972. *Ф. П. Васильев.*

СТЕФАНА — БОЛЬЦМАНА ЗАКОН: полная испускательная способность u абсолютно черного тела пропорциональна 4-й степени его абсолютной температуры T:

$$u=\sigma T^4,$$

где $\sigma=(5{,}67032\pm0{,}00071)\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4) (постоянная Стефана — Больцмана). Этот закон получен эмпирически из анализа экспериментальных данных Й. Стефаном (J. Stefan, 1879), выведен термодинамическим путем Л. Больцманом (L. Boltzmann, 1884). *А. Б. Иванов.*

СТЕФФЕНСЕНА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — форма записи интерполяционного многочлена, получающегося из *Стирлинга интерполяционной формулы* по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, ..., x_0+nh, x_0-nh в точке $x=x_0+th$:

$$L_{2n}(x_0+th)=f_0+tf_0'+\frac{t^2}{2!}f_0^2+\ldots+$$
$$+\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}f_0^{2n-1}+\frac{t^2(t^2-1)\ldots[(t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}f_0^{2n},$$

с помощью соотношений

$$f_0^{2k-1}=\frac{1}{2}(f_{1/2}^{2k-1}+f_{-1/2}^{2k-1}),\quad f_0^{2k}=f_{1/2}^{2k-1}-f_{-1/2}^{2k-1}.$$

После приведения подобных членов С. и. ф. записывается в виде

$$L_{2n}(x)=L_{2n}(x_0+th)=f_0+\frac{t(t+1)}{2!}f'_{1/2}-\frac{t(t-1)}{2!}f'_{1/2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t(t^2-1)\cdot\ldots\cdot[t^2-(n-1)^2]\,(t+n)}{(2n)!}f_{1/2}^{2n-1}-$$
$$-\frac{t(t^2-1)\cdot\ldots\cdot[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)}{(2n)!}f_{-1/2}^{2n-1}.$$

Лит.: [1] Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров, [пер. с англ.], М., 1973. *М. К. Самарин.*

СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛ — обобщение понятия *Римана интеграла*, реализующее идею интегрирования функции $f(x)$ относительно другой функции $u(x)$. Пусть функции $f(x)$ и $u(x)$ определены и ограничены на $[a, b]$ и $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b_n$. Сумму вида

$$\sigma=f(\xi_1)[u(x_1)-u(x_0)]+\ldots+f(\xi_i)[u(x_i)-u(x_{i-1})]+\ldots$$
$$\ldots+f(\xi_n)[u(x_n)-u(x_{n-1})],\qquad(1)$$

где $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. интегральной суммой Стилтьеса. Число I наз. пределом интегральных сумм (1) при $\max\limits_i\Delta x_i\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при $\max\Delta x_i<\delta$ справедливо неравенство $|\sigma-I|<\varepsilon$. Если существует конечный предел I интегральных сумм (1) при $\max\limits_i\Delta x_i\to 0$, то функцию $f(x)$ наз. интегрируемой по функции $u(x)$ на $[a, b]$, а указанный предел — интегралом Стилтьеса (или интегралом Римана — Стилтьеса) от функции $f(x)$ по функции $u(x)$ и обозначают

$$I=\int_a^b f(x)\,du(x);\qquad(2)$$

функция $u(x)$ наз. при этом интегрирующей. Т. Стилтьес [1] пришел к идее такого интеграла, рассматривая положительное «распределение масс» на прямой, заданное возрастающей функцией $u(x)$, точки разрыва к-рой соответствуют массам, «сконцентрированным в одной точке».

Интеграл Римана представляет собой частный случай С. и., когда в качестве интегрирующей функции $u(x)$ взята функция $x+C$, где $C=$const.

В случае, когда интегрирующая функция $u(x)$ монотонно возрастает, рассматривают верхнюю и нижнюю суммы Дарбу — Стилтьеса:

$$S=\sum_{i=1}^n M_i[u(x_i)-u(x_{i-1})],$$
$$s=\sum m_i[u(x_i)-u(x_{i-1})],\qquad(3)$$

где M_i и m_i — точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$.

Для существования С. и. достаточно выполнение одного из условий: 1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$; 2) функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в смысле Римана, а функция $u(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица, т. е. $|u(x_1)-u(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|$, где $C=$const, для любых x_1 и x_2 из $[a, b]$; 3) функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в смысле Римана, а функция $u(x)$ представима на $[a, b]$ в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$u(x)=C+\int_a^x g(t)\,dt,$$

где $g(t)$ абсолютно интегрируема на $a\leqslant t\leqslant b$.

При выполнении условий 3) интеграл (2) сводится к интегралу Римана по формуле

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.\qquad(4)$$

В частности, равенство (4) имеет место в случае, если $u(x)$ имеет ограниченную и интегрируемую в смысле Римана на $[a, b]$ производную $u'(x)$, в этом случае $g(x)=u'(x)$.

Если функция $u(x)$ интегрируема по функции $f(x)$ на $[a, b]$, то и функция $f(x)$ интегрируема по $u(x)$ на этом отрезке. Это утверждение позволяет получить ряд дополнительных условий существования С. и.

С. и. обладает свойством линейности как относительно интегрируемой, так и относительно интегрирующей функции (при условии существования каждого из С. и. в правой части):

$$\int_a^b [\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]\,du(x)=$$
$$=\alpha\int_a^b f_1(x)\,du(x)+\beta\int_a^b f_2(x)\,du(x).$$
$$\int_a^b f(x)\,d[\alpha u_1(x)+\beta u_2(x)]=$$
$$=\alpha\int_a^b f(x)\,du_1x+\beta\int_a^b f(x)\,du_2(x).$$

Свойством аддитивности С. и., вообще говоря, не обладает: из существования обоих интегралов $\int_a^c f(x)du(x)$ и $\int_c^b f(x)du(x)$ не следует существование интеграла $\int_b^a f(x)du(x)$ (обратное утверждение при $a<c<b$ вместе с тем справедливо).

Если $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, так что $m\leqslant f(x)\leqslant M$, а $u(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$, то найдется μ, удовлетворяющее неравенствам $m\leqslant\mu\leqslant M$, такое, что для С. и. справедлива формула среднего значения

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\mu[u(b)-u(a)]. \qquad (5)$$

В частности, если дополнительно предположить непрерывность $f(x)$ на $[a, b]$, то найдется точка $\xi\in[a, b]$ такая, что $\mu=f(\xi)$.

С. и. $\int_a^b f(x)du(x)$, где $u(x)$ имеет ограниченную вариацию, дает общий вид линейного непрерывного функционала $F(f)$ на пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций (теорема Рисса).

В случае, когда функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию, значение С. и. совпадает со значением соответствующего *Лебега — Стилтьеса интеграла*.

Лит.: [1] Stieltjes Th. J., Recherches sur les fractions continues, P., 1894; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959; [3] Гливенко В. И., Интеграл Стильтьеса, М.—Л., 1936.

В. А. Ильин.

СТИЛТЬЕСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+t}\,dt. \qquad (*)$$

С. п. возникает при итерировании *Лапласа преобразования* и является частным случаем преобразования свертки.

Одна из формул обращения: если функция $f(t)\sqrt{t}$ непрерывна и ограничена на $(0, \infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}[x^{2n}F^{(n)}(x)]^{(n)}=f(x)$$

на $x\in(0, \infty)$.

С. п. обобщенное имеет вид

$$F(x)=\int_0^\infty f(t)\frac{dt}{(x+t)^\rho},$$

где ρ — комплексное число.

С. п. интегрированное имеет вид:

$$F(x)=\int_{+0}^\infty K(x, t)f(t)\,dt,$$

где

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{\ln\frac{x}{t}}{x-t}, & t\neq x\\ 1/x, & t=x.\end{cases}$$

С. п. введены и для обобщенных функций. Преобразование (*) рассмотрено Т. Стилтьесом (T. Stieltjes, 1894—95).

Лит.: [1] Widder D. V., The Laplace transform, N. Y. — L., 1946; [2] Boas R. P., Widder D. V., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1939, v. 45, p. 1—72; [3] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.—Л., 1948; [4] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

СТИНРОДА АЛГЕБРА — градуированная алгебра A_p над полем $\mathbb{Z}_p$ стационарных *когомологических операций* mod$p$. Для любого пространства (*спектра пространств*) X группа $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ является модулем над С. а. A_p.

С. а. мультипликативно порождается *Стинрода операциями*. Так, С. а. A_2 является градуированной ассоциативной алгеброй, мультипликативно порожденной символами Sq^i и $\deg Sq^i=i$, подчиненными соотношениям Адема:

$$Sq^aSq^b=\sum_t\binom{b-t-1}{a-2t}Sq^{a+b-t}Sq^t,$$

$a<2b$, так что аддитивный базис (над $\mathbb{Z}_2$) С. а. A_2 состоит из операций $Sq^{i_1}, \ldots, Sq^{i_r}$, $i_k\geqslant 2i_{k+1}$ (т. н. базис Картана — Серра). Аналогичное верно и для A_p с $p>2$. Далее,

$$(A_p)^i\cong H^{i+n}(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p),\ n\gg i,$$

где $K(\mathbb{Z}_p, n)$ — *Эйленберга — Маклейна пространство*. Умножение

$$K(\mathbb{Z}_p, m)\wedge K(\mathbb{Z}_p, n)\longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, m+n)$$

задает в С. а. диагональ $\Delta: A_p\to A_p\otimes A_p$, являющуюся гомоморфизмом алгебр и, следовательно, превращающую A_p в *Хопфа алгебру*.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [2] Milnor J., «Ann. Math.», 1958, v. 67, p. 150—71; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970.

Ю. Б. Рудяк.

СТИНРОДА ДВОЙСТВЕННОСТЬ — изоморфизм p-мерных гомологий компактного подмножества A сферы S^n ($n-p-1$)-мерным когомологиям дополнения (гомологии и когомологии в размерности нуль — приведенные). Рассмотрена Н. Стинродом [1]. В случае когда A — открытый или замкнутый подполиэдр, аналогичный изоморфизм известен как *Александера двойственность*, а для любого открытого подмножества A — как *Понтрягина двойственность*. Изоморфизм

$$H_p^c(A; G)=H^{n-p-1}(S^n\setminus A; G)$$

имеет место и для произвольного подмножества A (двойственность Ситникова); здесь H_p^c — гомологии с компактными носителями Стинрода — Ситникова, а H^q — когомологии Александрова — Чеха. Двойственность Александера — Понтрягина — Стинрода — Ситникова — простое следствие двойственности Пуанкаре — Лефшеца и точной последовательности пары. Она справедлива не только для S^n, но и для любого многообразия, ацикличного в размерностях p и $p+1$.

Лит: [1] Steenrod N., «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 833—51; [2] Ситников К. А., «Докл. АН СССР», 1951, т. 81, с. 359—62; [3] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [4] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981.

Е. Г. Скляренко.

СТИНРОДА ЗАДАЧА — задача реализации циклов сингулярными многообразиями; поставлена Н. Стинродом (N. Steenrod, см. [1]). Пусть M — замкнутое ориентированное многообразие (топологическое, кусочно линейное, гладкое и т. д.), и пусть $[M]\in H_n(M)$ — его ориентация (здесь $H_n(M)$ — n-мерная *гомологий группа* многообразия M). Любое непрерывное отображение $f: M\to X$ задает элемент $f_*[M]\in H_n(X)$. С. з. состоит в описании тех гомологич. классов из X, называемых реализуемыми, к-рые получаются

таким способом, т. е. имеют вид $f_*[M]$ для нек-рых M из данного класса. Все элементы групп $H_1(X)H_2(X)$ реализуются. Любой элемент группы $H_n(X)$, $n\neq 3$ реализуется, но уже нек-рым отображением *Пуанкаре комплекса* P. Кроме того, любой цикл можно реализовать псевдомногообразием. Можно также рассматривать неориентированные многообразия.

Так, для гладких M С. з. состоит в описании образа гомоморфизма $\Omega_n(X)\to H_n(X)$, где $\Omega_n(X)$ — группа ориентированных *бордизмов* пространства. Открытая Р. Томом (R. Thom, [2]) связь бордизмов Ω_* с *Тома пространствами* $MSO(k)$ прояснила С. з., сведя ее к изучению отображений $H^*(MSO(k))\to H^*(X)$. Был указан нереализуемый класс $x\in H_7(X)$, где X — *Эйленберга — Маклейна пространство* $K(\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_3, 1)$. Для любого класса x нек-рые его кратные nx реализуются (гладкими многообразиями).

Лит.: [1] Eilenberg S., «Ann. Math.», 1949, v. 50, p. 247—60; [2] Том Р., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 293—351; [3] Конер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [4] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973. *Ю. Б. Рудяк.*

СТИНРОДА КВАДРАТ — стационарная (стабильная) *когомологическая операция* Sq^i, $i\geqslant 0$, типа $(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$, повышающая размерность на i. Это означает, что для каждого натурального n и каждой пары топологич. пространств (X, Y) задан такой гомоморфизм

$$Sq^i: H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^{n+i}(X, Y; \mathbb{Z}_2),$$

что $\delta Sq^i = Sq^i\delta$, где δ — кограничный гомоморфизм $\delta: H^q(Y; \mathbb{Z}_2)\to H^{q+1}(X, Y; \mathbb{Z}_2)$ (стационарность) и $f^*Sq^i = Sq^if^*$ для любого непрерывного отображения $f: (X, Y)\to(X', Y')$ (естественность). С. к. Sq^i обладает следующими свойствами:

1) $Sq^0 = id$;

2) $Sq^1 = \beta$, где β — гомоморфизм Бокштейна, ассоциированный с короткой точной последовательностью групп коэффициентов $0\to\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2\to 0$;

3) если $i=\dim x$, то $Sq^ix = x^2$;

4) если $i>\dim x$, то $Sq^ix = 0$;

5) (формула Картана) $Sq^i(xy) = \sum_{j=0}^{i} (Sq^jx)\times(Sq^{i-j}y)$;

6) (соотношения Адема) при $a<2b$ $Sq^aSq^b = \sum_{t=0}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\binom{b-t-1}{a-2t}_2 Sq^{a+b-t}Sq^t$, где $(:)_2$ — биномиальные коэффициенты mod 2.

В формуле Картана умножение можно считать как внешним ($\times$-умножением), так и внутренним ($\cup$-умножением). Она равносильна утверждению, что отображение $Sq: H^*(X; \mathbb{Z}_2)\to H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, определенное формулой

$$Sqx = x + Sq^1x + \ldots + Sq^{n-1}x + x^2,\ x\in H^n(X; \mathbb{Z}_2),$$

является гомоморфизмом колец. Из условия стационарности вытекает, что С. к. Sq^i перестановочны с *надстройкой* и *трансгрессией*.

Операции Sq^i однозначно характеризуются свойствами 1), 3), 4), к-рые поэтому можно принять за определяющие их аксиомы. Конструктивное определение операций Sq^i основывается на симплициальной структуре в группах цепей $C_*(X)$ и на существовании диагонального отображения $\Delta: X\to X\times X$. Пусть W — минимальный ациклический свободный цепной $\mathbb{Z}_2$-комплекс, т. е. цепной комплекс, для к-рого

$$W_i = \mathbb{Z}[e_iTe_i],\ de_i = e_{i-1} + (-1)^i Te_{i-1},$$

где T — образующая группы $\mathbb{Z}_2$. Методом ацикличных носителей или явным построением (см. [4]) доказывается существование такого эквивариантного цепного отображения

$$\varphi: W\otimes C_*(X)\longrightarrow C_*(X)\otimes C_*(X),$$

что

$$\varphi: (e_i\otimes\sigma)\in C_*(\sigma\otimes\sigma)\subset C_*(X)\otimes C_*(X) = C_*(X\times X)$$

для любого симплекса $\sigma\in C_*(X)$ (символом $C_*(\sigma\otimes\sigma)$ здесь обозначен наименьший подкомплекс цепного комплекса $C_*(X)\otimes C_*(X)$, содержащий элемент $\sigma\otimes\sigma$). Пусть $i\geqslant 0$. Любым двум коцепям $u\in C^p(X)$, $v\in C^q(X)$ ставится в соответствие формулой $(u\cup_i v)(\sigma) = (u\otimes v)(\varphi(e_i\otimes\sigma))$ для любого симплекса $\sigma\in C_{p+q-i}(X)$ коцепь $u\cup_i v\in C^{p+q-i}(X)$, наз. их $\cup_i$-произведением. Для кограницы этой коцепи имеет место формула

$$\delta(u\cup_i v) = (-1)^i\delta u\cup_i v + (-1)^{i+p}u\cup_i\delta v + (-1)^{i+1}u\cup_{i-1}v + (-1)^{pq+1}v\cup_{i-1}u,$$

из к-рой следует, что формула $Sq^{p-i}\{u\} = \{u\cup_i u\}$ корректно определяет нек-рый гомоморфизм

$$Sq^{p-i}: H^p(X; \mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^{2p-i}(X; \mathbb{Z}_2),$$

к-рый не зависит от выбора отображения φ.

Аналогичным образом операции Sq^i строятся и в других симплициальных структурах с диагональным отображением, напр. в когомологиях симплициальных абелевых групп, симплициальных алгебр Ли и т. п. Однако при этом сохраняются не все свойства С. к. Sq^i (напр., вообще говоря, $Sq^0\neq id$) и единой общей теории обобщенных операций Sq^i до сих пор (1984) нет (см. [5], [6]).

Через С. к. и их аналоги при $p>2$ (см. *Стинрода приведенная степень*) выражаются многие когомологич. операции, действующие в группах когомологий с коэффициентами в группах $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_p$. Это определяет основополагающую роль, к-рую С. к. играют в алгебраич. топологии и ее приложениях. Напр., группы *бордизмов* вычисляются с помощью С. к.

С. к. введен Н. Стинродом [4].

Лит.: [1] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [2] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969; [3] Мошер Р. Э., Тангора М. К., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970; [4] Steenrod N. E., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 290—320; [5] Epstein D., «Invent. Math.», 1966, v. 1, № 2, p. 152—208; [6] May J., в кн.: The Steenrod algebra and its applications, B.—N. Y., 1970; [7] «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 3—11, 11—30, 30—49, 50—102. *С. Н. Малыгин, М. М. Постников.*

СТИНРОДА ОПЕРАЦИЯ — общее название для стационарных *когомологических операций*, построенных Н. Стинродом (см. [1]) для каждого простого p. Для $p=2$ это — *Стинрода квадрат* Sq^i, для $p>2$ — *Стинрода приведенная степень* $\mathcal{P}^i$. Операции Sq^i мультипликативно порождают *Стинрода алгебру* mod2, а операции $\mathcal{P}^i$ вместе с гомоморфизмом Бокштейна мультипликативно порождают алгебру Стинрода mod p.

Лит.: [1] Стинрод Н., «Математика», 1958, т. 2, в. 6, с. 11—48; [2] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970. *Ю. Б. Рудяк.*

СТИНРОДА ПРИВЕДЕННАЯ СТЕПЕНЬ — стационарная *когомологическая операция* $\mathcal{P}^i$, $i\geqslant 0$, типа $(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, где p — фиксированное нечетное простое число, являющееся аналогом mod$p$ *Стинрода квадрата*, и представляющая собой гомоморфизм

$$\mathcal{P}^i: H^n(X, Y; \mathbb{Z}_p)\longrightarrow H^{n+2i(p-1)}(X, Y; \mathbb{Z}_p),$$

определенный для каждой пары топологич. пространств (X, Y) и любого натурального n. С. п. с. обладает следующими свойствами (кроме естественности $f^*\mathcal{P}^i = \mathcal{P}^if^*$ и стационарности $\delta\mathcal{P}^i = \mathcal{P}^i\delta$, где δ: $H^q(Y; \mathbb{Z}_p)\to H^{q+1}(X, Y; \mathbb{Z}_p)$ кограничный гомоморфизм):

1) $\mathcal{P}^0 = id$;

2) если $2i=\dim x$, то $\mathcal{P}^i x = x^p$;

3) если $2i>\dim x$, то $\mathcal{P}^i x = 0$;

4) (формула Картана) $\mathcal{P}^i(x, y)=\sum_{j=0}^{i}(\mathcal{P}^j x)\times(\mathcal{P}^{i-j}x)$;

5) (соотношения Адема)

$$\mathcal{P}^a\mathcal{P}^b=\sum_{t=0}^{\left[\frac{p}{p}\right]}(-1)^{a+t}\binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt}_p\mathcal{P}^{a+b-t}$$

при $a<pb$,

$$\mathcal{P}^a\beta\mathcal{P}^b=\sum_{t=0}^{\left[\frac{a}{p}\right]}(-1)^{a+t}\binom{(p-1)(b-t)}{a-pt}_p\times$$

$$\times\beta\mathcal{P}^{a+b-t}\mathcal{P}^t+\sum_{t=0}^{\left[\frac{a-1}{p}\right]}(-1)^{a+t-1}\times$$

$$\times\binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1}_p\mathcal{P}^{a+b-t}\beta\mathcal{P}^t \text{ при } a\leqslant pb,$$

где β — гомоморфизм Бокштейна, ассоциированный с короткой точной последовательностью групп коэффициентов $0\to\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_{p^2}\to\mathbb{Z}_p\to 0$, а $(:)_p$ — биномиальные коэффициенты, приведенные по mod p.

Эти свойства аналогичны соответствующим свойствам квадратов Стинрода, при этом операции $\mathcal{P}^i$ соответствует операция Sq^{2i}. Так же, как и для квадратов Стинрода, умножение в 4) можно считать как внешним ($\times$-умножением), так и внутренним ($\cup$-умножением). С. п. с. перестановочны с *надстройкой* и *трансгрессией*.

Свойства 1) —3) однозначно характеризуют $\mathcal{P}^i$, а конструктивно они строятся аналогично квадратам Стинрода с помощью минимального ациклического свободного цепного $\mathbb{Z}_p$-комплекса W.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [2] «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 3—11, 11—30, 30—49, 50—102.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

СТИНРОДА — ЭЙЛЕНБЕРГА АКСИОМЫ — основные свойства групп гомологий (когомологий), однозначно определяющих рассматриваемую теорию гомологий (когомологий). На нек-рой категории пар (X, A) топологич. пространств задана аксиоматическая теория гомологий, если при любом целом q каждой паре (X, A) сопоставлена абелева группа (или модуль над нек-рым кольцом) $H_q(X, A)$, а каждому отображению $f:(X, A)\to(Y, B)$ — гомоморфизм $f_*: H_q(X, A)\to H_q(Y, B)$ таким образом, что выполнены следующие аксиомы:

1) f_* — тождественный изоморфизм, если f — тождественный гомеоморфизм;

2) $(gf)_*=g_*f_*$, где $g:(Y, B)\to(Z, C)$;

3) определены связывающие гомоморфизмы ∂: $H_q(X, A)\to H_{q-1}(A)$, причем $\partial f_*=f_*\partial$ (здесь $A=(A, \varnothing)$, $\varnothing$ — пустое множество, а определяемое f отображение $A\to B$ обозначено через f);

4) аксиома точности: гомологическая последовательность $\ldots\to H_{q+1}(X, A)\xrightarrow{\partial}H_q(A)\xrightarrow{i_*}H_q(X)\xrightarrow{j_*}H_q(X, A)\xrightarrow{\partial}H_{q-1}(A)\to\ldots$, где $i: A\subset X$, $j: X\subset(X, A)$ — естественные вложения, точна, т. е. ядро каждого следующего гомоморфизма совпадает с образом предыдущего;

5) аксиома гомотопии: $f_*=f'_*$ для гомотопных в категории отображений f, f': $(X, A)\to(Y, B)$;

6) аксиома вырезания: если замыкание в X открытого в X подмножества U содержится во внутренности A, а вложение i: $(X\setminus U, A\setminus U)\subset(X, A)$ принадлежит категории, то i_* — изоморфизмы;

7) аксиома размерности: $H_q(P)=0$ при $q\neq 0$ для любого одноточечного P. Группа $H_0(P)$ наз. обычно группой коэффициентов. Двойственным образом определяются аксиоматич. когомологии (отображениям f соответствуют гомоморфизмы $f^*: H^q(Y, B)\to H^q(X, A)$; связывающие гомоморфизмы имеют вид $\partial: H^q(A)\to H^{q+1}(X, A)$). В категории компактных полиэдров обычные гомологии и когомологии являются единственными аксиоматич. теориями с данной группой коэффициентов (теорема единственности). В категории всех полиэдров теорема единственности справедлива при дополнительном требовании, что гомологии (когомологии) объединения открыто-замкнутых попарно не пересекающихся подпространств естественно изоморфны прямой сумме гомологий (прямому произведению когомологий) подпространств (аксиома аддитивности Милнора). Имеется аксиоматич. описание гомологий и когомологий и в более общих категориях топологич. пространств (см. [2], [3]). *Обобщенные теории когомологий* удовлетворяют всем С.-Э. аксиомам (кроме размерности), но не определяются ими однозначно.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Петкова С. В., «Матем. сб.», 1973, т. 90, № 4, с. 607—24; [3] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981.

Е. Г. Скляренко.

СТИРАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ — см. в ст. *Устранимое множество*.

СТИРЛИНГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — полусумма *Гаусса интерполяционной формулы* для интерполирования вперед по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, $\ldots$, x_0+nh, x_0-nh в точке $x=x_0+th$

$$G_{2n}(x_0+th)=f_0+f'_{1/2}t+f_0^2\frac{t(t-1)}{2!}+\ldots+$$

$$+f_0^{2n}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}$$

и формулы Гаусса того же порядка для интерполирования назад по узлам x_0, x_0-h, x_0+h, $\ldots$, x_0-nh, x_0+nh

$$G_{2n}(x_0+th)=f_0+f'_{-1/2}t+f_0^2\frac{t(t+1)}{2!}+\ldots+$$

$$+f_0^{2n}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}.$$

С использованием обозначения

$$f_0^{2k-1}=\frac{1}{2}\left[f_{1/2}^{2k-1}+f_{-1/2}^{2k-1}\right]$$

С. и. ф. имеет следующий вид:

$$L_{2n}(x)=L_{2n}(x_0+th)=f_0+tf'_0+\frac{t^2}{2!}f_0^2+\ldots+$$

$$+\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}f_0^{2n-1}+\frac{t^2(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}f_0^{2n}.$$

При малых t С. и. ф. является более точной по сравнению с другими интерполяционными формулами.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966.

М. К. Самарин.

СТИРЛИНГА ФОРМУЛА — асимптотическое представление, позволяющее находить приближенные значения факториалов $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ и гамма-функции при больших значениях n и имеющее вид:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}e^{\theta(n)}, \qquad (*)$$

где $|\theta(n)|<\frac{1}{12n}$. Имеют место асимптотич. равенства

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n},\ n\to\infty,$$

$$\Gamma(z+1)\approx\sqrt{2\pi z}\,z^ze^{-z},\ \mathrm{Re}\,z\to+\infty,$$

означающие, что при $n\to\infty$ или $\mathrm{Re}\,z\to+\infty$ отношение левой и правой частей стремится к единице.

Представление (*) получено Дж. Стирлингом (J. Stirling, 1730).

Е. Д. Соломенцев.

СТОКСА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая связь между потоком векторного поля через ориентированную поверхность с циркуляцией этого поля по краю поверхности.

Л. Д. Кудрявцев.

СТОКСА ФОРМУЛА — 1) формула, выражающая связь между потоком векторного поля через двумерное ориентированное многообразие и циркуляцию этого поля по соответствующим образом ориентированному краю этого многообразия. Пусть S — ориентированная кусочно гладкая поверхность, $\nu=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичная нормаль к поверхности S (в тех точках, конечно, где она существует), задающая ориентацию S, и пусть край поверхности S состоит из конечного числа кусочно гладких контуров. Через ∂S обозначен край поверхности S, ориентированный с помощью единичного касательного к нему вектора τ так, чтобы получающаяся ориентация края ∂S была согласована с ориентацией ν поверхности S.

Если $\boldsymbol{a}=(P, Q, R)$ — непрерывно дифференцируемое в окрестности поверхности S векторное поле, то

$$\iint_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \nu)\, dS = \int_{\partial S} (\boldsymbol{a}, \tau)\, ds \qquad (*)$$

(dS — элемент площади поверхности S, ds — дифференциал длины дуги края ∂S поверхности S) или, в координатном виде:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Предложена Дж. Стоксом (G. Stokes, 1854). 2) С. ф. наз. также обобщение формулы (*), представляющее собой равенство интеграла от внешнего дифференциала дифференциальной формы ω по ориентированному компактному многообразию M и интеграла от самой формы ω по ориентированному согласованно с ориентацией многообразия M краю ∂M многообразия M:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Частными случаями этой формулы являются *Ньютона — Лейбница формула*, *Грина формула*, *Остроградского формула*.

Л. Д. Кудрявцев.

СТОКСА ЯВЛЕНИЕ — свойство функции $f(z)$ иметь различные асимптотические выражения при $|z|\to\infty$ в различных областях комплексной плоскости z. Дж. Стокс показал [1], что решение $w_0(z)$ т. н. уравнения Эйри:

$$w''-zw=0,$$

убывающее при действительных $z=x\to+\infty$, имеет асимптотику при $|z|\to\infty$:

$$w_0(z)\sim Cz^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right),$$

$$|\arg z|\leqslant\pi-\varepsilon<\pi;$$

$$w_0(z)\sim Ce^{i\pi/4}z^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$|\arg z-\pi|\leqslant\varepsilon<\pi,$$

где $C\neq0$ — постоянная; функция $w_0(z)$ — целая, а ее асимптотика — разрывная функция.

С. я. имеет место для интегралов Лапласа, решений обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Stokes G. G., «Trans. Cambridge Phil. Soc.», 1864, v. 10, p. 106—28; [2] Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (Метод ВКБ), пер. с англ., М., 1965; [3] Брёйн де Н. Г., Асимптотические методы в анализе, пер. с англ., М., 1961.

М. В. Федорюк.

СТОУНА ПРОСТРАНСТВО булевой алгебры $\mathcal{B}$ — вполне несвязное бикомпактное пространство (X, τ), поле всех открыто-замкнутых множеств к-рого изоморфно $\mathcal{B}$. Это пространство канонически определяется по $\mathcal{B}$ следующим образом: X есть множество всех *ультрафильтров* $\mathcal{B}$, а топология τ порождена семействои подмножеств вида $\{\xi\in X : A\in\xi\}$, где A — произвольный элемент $\mathcal{B}$. Вместо ультрафильтров можно использовать множества максимальных идеалов, двузначных гомоморфизмов, двузначных мер на $\mathcal{B}$ с соответствующей топологией. Изоморфные булевы алгебры имеют гомеоморфные С. п. Каждое вполне несвязное бикомпактное пространство есть С. п. булевой алгебры своих открыто-замкнутых множеств.

Понятие С. п. и основные его свойства найдены и исследованы М. Стоуном (M. Stone, 1934—37, см. [1]).

С. п. булевой алгебры метризуемо тогда и только тогда, когда она счетна. Булева алгебра полна тогда и только тогда, когда ее С. п. экстремально несвязно (т. е. замыкание любого открытого множества в нем открыто). Канторово совершенное множество есть С. п. счетной безатомной бесконечной булевой алгебры (все они изоморфны). Канторов обобщенный дисконтинуум D^m есть С. п. свободной булевой алгебры с m образующими.

Лит.: [1] Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969.

В. И. Малыхин.

СТОУНА РЕШЕТКА — дистрибутивная решетка L с псевдодополнениями (см. *Решетка с дополнениями*), в к-рой $a^*+a^{**}=1$ для всех $a\in L$. Дистрибутивная решетка L с псевдодополнениями является С. р. тогда и только тогда, когда теоретико-структурное объединение двух ее различных минимальных простых идеалов совпадает с L (теорема Гретцера — Шмидта, [3]).

С. р., рассматриваемая как универсальная алгебра с основными операциями $\langle\vee,\wedge,{}^*, 0, 1\rangle$, наз. алгеброй Стоуна. Всякая алгебра Стоуна является подпрямым произведением двухэлементных и трехэлементных цепей. В решетке с псевдодополнениями элемент x наз. плотным, если $x^*=0$. Центр $C(L)$ решетки Стоуна L — булева алгебра, а множество $D(L)$ всех ее плотных элементов — дистрибутивная решетка с единицей. При этом гомоморфизм φ^L решетки $C(L)$ в решетку $F(D(L))$ фильтров решетки $D(L)$, определяемый условием

$$a\varphi^L=\{x\mid x\in D(L),\ x\geqslant a^*\},$$

сохраняет 0 и 1.

Тройкой, ассоциированной с алгеброй Стоуна L, наз. тройка $\langle C(L), D(L), \varphi^L\rangle$. Естественным образом определяются гомоморфизмы и изоморфизмы троек. Произвольная тройка $\langle C, D, \varphi\rangle$, где C — булева алгебра, D — дистрибутивная решетка с 1, а $\varphi: C\to F(D)$ — гомоморфизм, сохраняющий 0 и 1, изоморфна тройке, ассоциированной с нек-рой алгеброй Стоуна; алгебры Стоуна изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны ассоциированные с ними тройки (теорема Чена — Гретцера, [2]).

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; [2] Chen C. C., Grätzer G., «Canad. J. Math.», 1969, v. 21, № 4, p. 884—903; [3] Grätzer G., Schmidt E. T., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1957, v. 8, fasc. 3—4, p. 455—60; [4] Фофанова Т. С., в кн.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975, с. 22—40.

Т. С. Фофанова.

СТОУНА — ЧЕХА БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ — наибольшее бикомпактное расширение βX вполне регулярного топологич. пространства X. Построено Э. Чехом [1] и М. Стоуном [2].

Пусть $\{f_\alpha : X\to[0,1]\}_{\alpha\in A}$ — множество всех непрерывных функций $X\to[0,1]$. Отображение $\varphi: X\to\mathbb{R}^A$, где $\varphi(x)_\alpha=f_\alpha(x)$, является гомеоморфизмом на свой образ. Тогда, по определению, $\beta X=[\varphi(X)]$ (где $[\cdot]$ — операция замыкания). Для любого бикомпактного расширения bX существует непрерывное отображение $\beta X\to bX$, тождественное на X, что и выражается эпитетом «наибольшее».

С.—Ч. б. р. квазинормального пространства совпадает с его *Уолмена бикомпактным расширением*.

Лит.: [1] Cech E., «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 823—44; [2] Stone M., «Trans. Amer. Soc.», 1937, v. 41. p. 375—

481; [3] Engelking R., Outline of general topology, Amst., 1968; [4] Александров П. С., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2, с. 25—95. *И. Г. Кошевникова.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ— метод решения класса задач статистич. оценивания, в к-ром новое значение оценки представляет собой поправку к уже имеющейся оценке, основанную на новом наблюдении. Первая процедура С. а. была предложена в 1951 Х. Роббинсом (H. Robbins) и С. Монро (S. Monre).

Пусть каждое измерение $Y_n(X_n)$ функции $R(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, в точке X_n содержит случайную ошибку с нулевым средним. Процедура С. а. Роббинса—Монро для нахождения корня уравнения $R(x)=\alpha$ имеет вид

$$X_{n+1}=X_n+a_n(Y_n(X_n)-\alpha). \qquad (1)$$

Если $\sum a_n=\infty$, $\sum a_n^2<\infty$, функция $R(x)$, напр., убывает, $|R(x)|$ растет не быстрее, чем линейная функция, а случайные ошибки независимы, то X_n стремится к корню x_0 уравнения $R(x)=\alpha$ с вероятностью 1 и в среднем квадратическом (см. [1], [2]). Из (1) видно, что процедура С. а. рекуррентна, т. е. получение нового значения оценки возможно без запоминания старых измерений Y_n, и удобна, когда неизвестно заранее, в какой момент потребуется представление оценки — она формируется непрерывно на основании наблюдений, имеющихся к данному моменту. Эти черты сближают С. а. с рекуррентными фильтрами и обусловливают популярность С. а. в теоретических и прикладных работах. Процедура (1) непосредственно обобщается на многомерный случай.

Другая процедура С. а., применимая для нахождения точки максимума функции регрессии $R(x)$, принадлежит Дж. Киферу (J. Kiefer) и Дж. Вольфовицу (J. Wolfowitz). Пусть $Y_n(x)$ — наблюдение в точке x. Тогда процедура С. а. Кифера — Вольфовица имеет вид

$$X_{n+1}-X_n=[Y_n(X_n+C_n)-Y_n(X_n-C_n)]/2C_n. \qquad (2)$$

Доказывается, что X_n сходится к точке максимума $x_{\max}$ функции $R(x)$, если, напр., $R'(x)(x-x_{\max})<0$ при $x\neq x_{\max}$, функция регрессии и дисперсия случайных ошибок растут не слишком быстро при $|x|\to\infty$ и выполнены условия

$$a_n>0,\ \sum c_n=\infty,\ c_n>0,$$
$$\sum a_nc_n<\infty,\ \sum a_n^2/c_n^2<\infty,\ c_n\to 0.$$

Процедура С. а. Кифера — Вольфовица также допускает многомерное обобщение: вместо правой части в (2) следует подставить приближенное значение градиента функции $Y_n(x)$.

Процедуры С. а. естественным образом обобщаются на непрерывный процесс наблюдений. Напр., если процесс наблюдений возмущается гауссовским белым шумом, то аналог процедуры (1) имеет вид

$$dX(t)=a(t)\,dY(t),$$

где

$$dY(t)=R(X(t))\,dt+\sigma(X(t),t)\,dw(t)$$

— дифференциал наблюдаемого процесса, $w(t)$ — *винеровский процесс*. Условия сходимости непрерывных процедур аналогичны приведенным выше условиям для дискретного времени (см. [2]). Основным инструментом доказательства сходимости процедур С. а. является теорема о сходимости неотрицательных супермартингалов (см. *Мартингал*).

Изучалось предельное поведение при соответствующей нормировке разности X_n-x_0 при $n\to\infty$. Пусть в (1)

$$a_n=an^{-1},\ Y_n(X_n)=R(X_n)+G(n,X_n,\omega)$$

и $X_n\to x_0$ почти наверное при $n\to\infty$. При нек-рых ограничениях, основными из к-рых являются требования

$$R'(x_0)<0,\ aR'(x_0)+\tfrac{1}{2}<0,$$
$$\mathsf{E}G^2(n,x,\omega)\longrightarrow S_0$$

при $n\to\infty$, $x\to x_0$, доказывается асимптотич. нормальность с параметрами 0, $a^2S/(-2aR'(x_0)-1)$ величины $Z_n=\sqrt{n}(X_n-x_0)$. Наименьшая дисперсия предельного распределения достигается при $a_0=-[R'(x_0)]^{-1}$. Такой выбор a невозможен, т. к. функция $R(x)$ и ее производная неизвестны наблюдателю. Однако в ряде работ построены адаптивные процедуры, в к-рых $a=a(n)$ зависит от наблюдений и приближается к a_0 при $n\to\infty$. Эти процедуры обладают асимптотически оптимальными в смысле асимптотич. дисперсии свойствами.

Результаты об асимптотич. нормальности известны и в многомерном случае. Пусть все корни матрицы

$$A=a\frac{\partial R}{\partial x}(x_0)+\frac{1}{2}I$$

имеют отрицательные действительные части (I — единичная матрица),

$$\mathsf{E}G(n,x,\omega)\,G^*(n,x,\omega)=S(n,x)\longrightarrow S_0$$

при $n\to\infty$, $x\to x_0$ и $X_n\to x_0$ почти наверное, и выполнены нек-рые другие не слишком ограничительные условия. Тогда вектор $Z_n=\sqrt{n}(X_n-x_0)$ асимптотически нормален с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$S=a^2\int_0^\infty \exp(At)\,S_0\exp(A^*t)\,dt.$$

Приведенный выше результат об асимптотически оптимальной процедуре Роббинса — Монро также обобщен на многомерный случай. Доказано, что случайный процесс Z_n сходится к гауссовскому марковскому процессу в логарифмич. масштабе. При нек-рых условиях доказана сходимость моментов случайной величины X_n к моментам предельного закона.

Процедуры типа С. а. удобны в непараметрич. ситуации, т. к. они применимы при наличии скудной априорной информации о функции регрессии. Они применимы и для оценки параметра θ плотности $f(x,\theta)$ по независимым наблюдениям $X_1,\ldots,X_n$ с этой плотностью. При нек-рых ограничениях рекуррентная процедура

$$\theta_{n+1}-\theta_n=\frac{1}{n}I^{-1}(\theta_n)\operatorname{grad}_\theta \ln f(X_{n+1},\theta_n)$$

($I(\theta)$ — *информационная матрица* Фишера плотности f) является состоятельной и асимптотически эффективной рекуррентной оценкой параметра θ. Аналогичная процедура возможна и в случае непрерывного времени.

Изучалось поведение процедур С. а. в случае, когда функция регрессии имеет несколько нулей (несколько точек экстремума), различные модификации и обобщения процедур С. а.

Лит.: [1] Вазан М., Стохастическая аппроксимация, пер. с англ., М., 1972; [2] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [3] Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968; [4] его же, Основы теории обучающих систем, М., 1970. *Р. З. Хасьминский.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — математическая дисциплина, изучающая взаимоотношения между геометрией и теорией вероятностей. С. г. развилась из классич. *интегральной геометрии* и задач о *геометрических вероятностях* с привнесением идей и методов теории случайных процессов, в особенности теории точечных процессов.

Одним из основных понятий С. г. является понятие процесса геометрич. элементов (геометрич. процесса)

в нек-ром «основном» пространстве X; геометрич. процессы определяются как точечные процессы на многообразиях, представляющих пространство соответствующих элементов. Так, процессы прямых на плоскости определяются как точечные процессы на листе Мёбиуса (последний представляет пространство прямых на $\mathbb{R}^2$). Рассматриваются также процессы d-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, процессы выпуклых фигур в $\mathbb{R}^n$, случайные мозаики в $\mathbb{R}^n$ (последние можно рассматривать как процессы выпуклых многогранников, в реализациях к-рых с вероятностью 1 внутренности многогранников не пересекаются, а объединение их замыканий дают все $\mathbb{R}^n$) и т. д.

Более общим понятием являются процессы многообразий; здесь С. г. смыкается с теорией случайных множеств (см. [1]).

Другой особенностью, выделяющей С. г. из теории случайных множеств, является интерес С. г. к геометрич. процессам с распределениями, инвариантными относительно групп, действующих в основном пространстве X. Характерным результатом в этом направлении является следующий (см. [2]). Рассматривается класс процессов прямых на $\mathbb{R}^2$, обладающих конечной интенсивностью и инвариантных относительно группы евклидовых движений плоскости. Процесс наз. неособенным, если его распределение Палма абсолютно непрерывно относительно (безусловного) распределения процесса. Все неособенные процессы прямых суть дважды стохастические пуассоновские (т. е. пуассоновские, управляемые случайной мерой). Для точечных полей в $\mathbb{R}^n$ это не имеет места.

Ряд столь же неожиданных свойств других геометрич. процессов, инвариантных относительно групп, было обнаружено с помощью аппарата комбинаторной интегральной геометрии (см. [3]). Способом усреднения комбинаторных разложений по пространству реализаций процесса был получен, напр., следующий результат (см. [3]). Рассматривается случайное множество U на $\mathbb{R}^2$, представляющее собой объединение областей из нек-рого процесса выпуклых областей, инвариантного относительно евклидовой группы. Пусть U — черное множество, его дополнение — белое. Альтернирующий процесс черных и белых интервалов, индуцируемый множеством U на прямой Ox, наз. черно-рекуррентным, если:

а) белые интервалы a_i составляют независимый процесс восстановления;

б) тройки $(b_i,\ a_i,\ \beta_i)$, где b_i — длина i-го черного интервала, a_i, β_i — углы пересечения Ox с ∂U на концах b_i, для разных i независимы.

При общих предположениях эргодичности и существования нек-рых моментов, а также при отсутствии прямолинейных участков на ∂U, из черно-рекуррентности следует, что длина белого интервала распределена экспоненциально.

Важное значение в С. г. имеет развитое здесь понятие «типичного» элемента данного геометрич. процесса. Рассматриваются задачи об описании распределений, удовлетворяющих различным условиям «типичных» k-подмножеств элементов в геометрич. процессах (пример такой задачи: найти распределение евклидово инвариантных характеристик «типичного» треугольника с вершинами в реализациях точечного процесса, причем требуется, чтобы внутренность треугольника содержала бы l точек из реализации). Решение таких задач получено для пуассоновских процессов. Подобные задачи возникают, напр., в астрофизике.

Задачи т. н. стереологии также относятся к С. г., если они ставятся для процессов геометрич. фигур. (В стереологии требуется описать многомерный образ по его сечениям прямыми или плоскостями меньшего числа измерений.) Здесь имеются результаты по стереологии первой и второй моментной меры.

Выше были затронуты лишь наиболее характерные задачи, т. к. границы С. г. вряд ли можно точно определить. К С. г. примыкают следующие области: геометрич. статистика [4], теория (случайных) множеств дробной размерности [5], математич. морфология и анализ изображений [6].

Лит.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Harding E. F., Kendall D. G., Stochastic geometry, N. Y., 1974; [3] Ambartzumian R. V., Combinatorial integral geometry, N. Y., 1982; [4] Ripley B. D., Spatial statistics, N. Y.—[a. o.], 1981; [5] Mandelbrot B. B., Fractals: Form, chance and dimension, S. F., 1977; [6] Serra J., Image analysis and mathematical morphology, N. Y., 1982.

Р. В. Амбарцумян.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ (вероятностная, статистическая) — зависимость между случайными величинами, к-рая выражается в изменении условных распределений любой из величин при изменении значений других величин. Виды С. з. многообразны: если случайные величины не являются взаимно независимыми, то им в той или иной степени свойственна С. з. Одним из наиболее общих типов С. з. является корреляционная зависимость (см. *Корреляция, Регрессия*). Из конкретных видов С. з. наиболее изучена марковская зависимость (см. *Маркова цепь, Марковский процесс, Марковское свойство*).

См., кроме того, *Случайный процесс, Стационарный случайный процесс.*

А. В. Прохоров.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИГРА — *динамическая игра*, у к-рой переходная функция распределения не зависит от предыстории игры, т. е.

$$F(x_k \mid x_1,\ s^{(x_1)},\ \ldots,\ x_{k-1},\ s^{(x_{k-1})}) = F(x_k \mid x_{k-1}, s^{(x_{k-1})}).$$

С. и. были впервые определены Л. Шепли [1], к-рый рассматривал антагонистич. С. и. с интегральным выигрышем (игры Шепли). В играх Шепли как множество X состояний игры, так и множества элементарных стратегий игроков конечны и, кроме того, на любом шаге при любом выборе игроками альтернатив имеется ненулевая вероятность окончания партии. Вследствие последнего условия, партия с вероятностью 1 заканчивается за конечное число шагов, и математич. ожидание выигрыша каждого из игроков конечно. Любая такая игра обладает значением и оба игрока имеют стационарные оптимальные стратегии, т. е. стратегии, в к-рых выбор игроком элементарной стратегии в каждом состоянии игры зависит лишь от текущего состояния. Им же была указана процедура, дающая возможность найти как значение игры, так и оптимальные стратегии.

Рассматривались также С. и., отличающиеся от игр Шепли возможностью бесконечных партий, с предельным средним выигрышем, т. е. антагонистич. С. и. с

$$h_1(P) = -h_2(P) = \lim_{n\to\infty} \sup \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} h_i(x_k,\ s^{(x_k)}).$$

Было показано существование значения такой игры и стационарных оптимальных стратегий в предположении эргодичности марковской цепи, возникающей при подстановке в переходные функции $F(x_k|x_{k-1},\ s^{(x_{k-1})})$ любых стационарных стратегий. Эти результаты обобщались как в направлении снятия ограничений на число состояний и элементарных стратегий, так и на случай иных форм выигрышей.

Лит.: [1] Shapley L. S., «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1953, v. 39, p. 1095—1100; [2] Gillette D., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 3, Princeton (N. J.), 1957, p. 179—87.

В. К. Доманский.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА — квадратная (возможно, бесконечная) матрица $P = \|p_{ij}\|$ с неотрицательными элементами такими, что

$$\sum_j p_{ij} = 1 \text{ при любом } i.$$

Множество всех С. м. n-го порядка представляет собой выпуклую оболочку n^n С. м., составленных из нулей и единиц. Любую С. м. P можно рассматривать как *переходных вероятностей матрицу* цепи Маркова $\xi^P(t)$ с дискретным временем.

Абсолютные величины собственных значений С. м. не превосходят единицы; единица является собственным значением любой С. м. Если С. м. P неразложима (цепь Маркова $\xi^P(t)$ имеет один положительный класс состояний), то единица является простым собственным значением матрицы P (т. е. имеет кратность 1); в общем случае кратность собственного значения 1 совпадает с числом положительных классов цепи Маркова $\xi^P(t)$. Если С. м. неразложима и положительный класс состояний цепи Маркова имеет период d, то множество всех собственных значений матрицы P, как множество точек комплексной плоскости, переходит в себя при повороте на угол $2\pi/d$. При $d=1$ С. м. P и цепь Маркова $\xi^P(t)$ наз. непериодическими.

Левые собственные векторы $\pi=\{\pi_j\}$ С. м. P конечного порядка, соответствующие единичному собственному значению:

$$\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij} \text{ при всех } j, \qquad (1)$$

и удовлетворяющие условиям $\pi_j\geqslant 0$, $\sum_j \pi_j=1$, определяют стационарные распределения цепи Маркова $\xi^P(t)$; в случае неразложимой С. м. P стационарное распределение единственно.

Если P — неразложимая непериодическая С. м. конечного порядка, то существует

$$\lim_{n\to\infty} P^n=\Pi, \qquad (2)$$

где Π — матрица, каждая строка к-рой совпадает с вектором π (см. также *Маркова цепь эргодическая*; для бесконечных С. м. P система уравнений (1) может не иметь ненулевых решений, удовлетворяющих условию $\sum_j \pi_j<\infty$; в этом случае матрица Π — нулевая). Скорость сходимости в (2) можно оценить геометрич. прогрессией с любым показателем ρ, к-рый по модулю больше всех собственных значений матрицы P, отличных от 1.

Если $P=\|p_{ij}\|$ — С. м. n-го порядка, то любое ее собственное значение λ удовлетворяет неравенству (см. [3]):

$$|\lambda-\omega|\leqslant 1-\omega, \text{ где } \omega=\min_{1\leqslant i\leqslant n} p_{ii}.$$

Описано множество M_n, являющееся объединением множеств собственных значений всех С. м. n-го порядка (см. [4]).

С. м. $P=\|p_{ij}\|$, удовлетворяющая дополнительному условию

$$\sum_i p_{ij}=1 \text{ при всех } j,$$

наз. дважды стохастической матрицей. Множество дважды стохастич. матриц n-го порядка представляет собой выпуклую оболочку $n!$ перестановочных матриц n-го порядка (т. е. дважды стохастич. матриц, составленных из нулей и единиц). Стационарное распределение конечной цепи Маркова $\xi^P(t)$ с дважды стохастич. матрицей P является равномерным.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; [2] Беллман Р., Введение в теорию матриц, пер. с англ., М., 1969; [3] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972; [4] Карпелевич Ф. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, с. 361—83. *А. М. Зубков.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — свойство выборочных функций случайного процесса. Случайный процесс $X(t)$, заданный на нек-ром множестве $T\subseteq\mathbb{R}^1$, наз. стохастически непрерывным на этом множестве, если для любого $\varepsilon>0$ при всех $t_0\in T$

$$\lim_{t\to t_0} \mathsf{P}\{\rho[X(t),\ X(t_0)]>\varepsilon\}=0,$$

где ρ — расстояние между точками в соответствующем пространстве значений процесса $X(t)$.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973. *А. В. Прохоров.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕРАЗЛИЧИМОСТЬ — свойство двух случайных процессов $X=(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ и $Y=(Y_t(\omega))_{t\geqslant 0}$, означающее, что случайное множество

$$\{X\neq Y\}=\{(\omega,\ t): X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$$

является пренебрежимым, т. е. вероятность множества $\{\omega:\ \exists t\geqslant 0,$ что $(\omega,\ t)\in\{X\neq Y\}\}$ равна нулю. Если X и Y стохастически неразличимы, то $X_t=Y_t$ (для всех $t\geqslant 0$, т. е. X и Y — стохастически эквивалентны). Обратное, вообще говоря, неверно, но для процессов непрерывных справа (слева) из стохастич. эквивалентности следует С. н.

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975. *А. Н. Ширяев.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ, ограниченность по вероятности,— свойство случайного процесса $X(t)$, $t\in T$, к-рое выражается условием: для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $C>0$, что при всех $t\in T$

$$\mathsf{P}\{|X(t)|>C\}<\varepsilon.$$ *А. В. Прохоров.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность случайных величин $X=(X_n)_{n\geqslant 1}$, заданная на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{F})$, с выделенным на нем неубывающим семейством σ-алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$, $\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{F}$, обладающих свойством согласованности (адаптированности): X_n при каждом $n\geqslant 1$ $\mathcal{F}_n$-измеримы. Для записи таких последовательностей часто используется обозначение $X=(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$, подчеркивающее измеримость X_n относительно $\mathcal{F}_n$. Типичными примерами С. п., заданных на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, являются марковские последовательности, *мартингалы*, *семимартингалы* и др. В случае непрерывного времени (когда дискретное время $n\geqslant 1$ заменяется на $t\geqslant 0$) соответствующая совокупность объектов $X=(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ наз. стохастическим процессом. *А. Н. Ширяев.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ — то же, что *сходимость по вероятности*.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение эквивалентности между случайными величинами, различающимися лишь на множестве нулевой вероятности. Точнее, случайные величины X_1 и X_2, заданные на одном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, наз. стохастически эквивалентными, если $\mathsf{P}\{X_1=X_2\}=1$. В большинстве задач теории вероятностей имеют дело не с самими случайными величинами, а с классами эквивалентных случайных величин.

Случайные процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$, $t\in T$, определенные на одном вероятностном пространстве, наз. стохастически эквивалентными, если при любом $t\in T$ имеет место С. э. между соответствующими случайными величинами: $\mathsf{P}\{X_1(t)=X_2(t)\}=1$. По отношению к случайным процессам $X_1(t)$ и $X_2(t)$, у к-рых совпадают соответственные конечномерные распределения, применим также термин «С. э.» в широком смысле. *А. В. Прохоров.*

СТОХАСТИЧЕСКИЙ БАЗИС — полное вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ с выделенным на нем неубывающим семейством $\mathbb{F}=(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$ под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$, удовлетворяющих (т. н. обычным) условиям:

1) непрерывность справа, $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ $(=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s)$, $t\geqslant 0$,

2) пополненность, т. е. $\mathcal{F}_t$ содержит все подмножества из $\mathcal{F}$ P-нулевой меры. Для С. б. используют также обозначения $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ или $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$.

А. Н. Ширяев.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ — вычислительный алгоритм, включающий операции со случайными числами, вследствие чего результат вычисления является случайным. Стохастическими являются алгоритмы *статистического моделирования*, используемые для численного исследования случайных процессов и явлений, и алгоритмы *Монте-Карло метода* для решения детерминированных задач: вычисления интегралов, решения интегральных уравнений, краевых задач и т. д.

Особый класс С. в. а. составляют рандомизированные вычислительные процедуры интерполяционных и квадратурных формул со случайными узлами. Рандомизация здесь обычно производится так, чтобы математич. ожидание результата вычисления по С. в. а. равнялось искомой величине. Окончательная оценка строится путем осреднения результатов нескольких реализаций С. в. а. (о погрешности и трудоемкости таких оценок см. в статье *Монте-Карло метод*). Для задач большой размерности рандомизация может дать существенную экономию памяти времени ЭВМ (см. [1]—[4]). Это показывают, в частности, оценки трудоемкости рандомизированного метода конечных сумм для решения интегральных уравнений 2-го рода (см. [4]). Особенно эффективны такие С. в. а. при использовании многопроцессорных вычислительных систем, к-рые позволяют строить одновременно несколько реализаций алгоритма.

Специальные С. в. а. строятся для реализации случайного поиска глобального экстремума функции многих переменных (см. [5]). Такие алгоритмы сравнительно эффективны, если значение функции определяется со случайной погрешностью.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975; [2] Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [3] Соболь И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973; [4] Михайлов Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло, Новосиб., 1974; [5] Растригин Л. А., Статистические методы поиска, М., 1968.

Г. А. Михайлов.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — случайная функция интервала dX, определяемая формулой

$$(dX)\, I = X_t - X_s,\quad I=(s,\ t],$$

для каждого процесса $X=(X_t, \mathcal{F}_t, \mathsf{P})$ из класса семимартингалов S, рассматриваемых на стохастич. базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$. В семействе С. д. $dS=\{dX : X\in S\}$ вводятся: аддитивная (А), мультипликативная (М) операции и операция умножения (Р) соответственно по формулам:

(А) $$dX+dY=d(X+Y)$$

(М) $$(\Phi dX)\ (s,\ t)=\int_s^t \Phi\, dX$$ (стохастический интеграл, где Φ — локально ограниченный процесс, согласованный с потоком $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$),

(Р) $$dX\cdot dY=d(XY)-XdY-YdX.$$

При этом оказывается, что

$$(dX\cdot dY)\,(s,\ t]=\operatorname*{l.i.p.}_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})(Y_{t_i}-Y_{t_{i-1}}),$$

где $\Delta=(s=t_0<t_1<\ldots<t_n=t)$ — произвольное разбиение интервала $(s,\ t]$, l. i. p.— предел по вероятности, $|\Delta|=\max|t_i-t_{i-1}|$.

В стохастическом исчислении важное место принадлежит правилу «дифференцирования» случайных функций, или формуле Ито: если $X', \ldots, X^n\in S$ и функция $f=f(x_1, \ldots, x_n)\in C^2$, то процесс

$$Y=f(X', \ldots, X^n)\in S$$

и

$$df(X', \ldots, X^n)=\sum_{i=1}^{n}\partial_i f\cdot dX^i+\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\partial_i\partial_j f\cdot dX^i dX^j, \tag{1}$$

где ∂_i частная производная по i-й координате. В частности, из (1) выводится, что если $X\in S$, то

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})\,d\langle X\rangle^c+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\,\Delta X_s], \tag{2}$$

где X^c — непрерывная мартингальная составляющая X, $\Delta X_s=X_s-X_{s-}$.

Формуле (2) можно придать следующий вид:

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})\,d[X,\ X]_s+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\,\Delta X_s-\frac{1}{2}f''(X_{s-})(\Delta X_s)^2],$$

где $[X,\ X]$ — квадратическая вариация X.

Лит.: [1] Itô K., Watanabe Sh., Introduction to stochastic differential equations, в кн.: Proc. of Intern., Symp. SDE Kyoto, 1976, N. Y.— [a. o], 1978, p. I—XXX; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

А. Н. Ширяев.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл «$\int H dX$» по *семимартингалу* X, определенный для всякого предсказуемого процесса локально ограниченного $H=(H_t, \mathcal{F}_t)$. Одна из возможных конструкций С. и. состоит в следующем. Сначала С. и. определяется для простых предсказуемых процессов H, имеющих вид

$$H_t=h(\omega)\,I_{(a,\,b]}(t),\quad a<b.$$

В этом случае под С. и. $\int_0^t H_s\,dX_s$ (или $(H\cdot X)_t$, или $\int_{(t,0]}H_s dX_s$) понимают величину

$$h(\omega)\,(X_{b\wedge t}-X_{a\wedge t}).$$

Отображение $H\rightsquigarrow H\cdot X$, где

$$H\cdot X=(H\cdot X)_t,\ t\geqslant 0,$$

допускает продолжение (обозначаемое $H\cdot X$) на множество всех ограниченных предсказуемых функций, обладающее следующими свойствами:

а) процесс $(H\cdot X)_t$, $t\geqslant 0$, является непрерывным справа и имеющим пределы слева;

б) $H\rightsquigarrow H\cdot X$ линейно, т. е.

$$(cH_1+H_2)\cdot X=c\,(H_1\cdot X)+H_2\cdot X;$$

в) если $\{H^n\}$ — последовательность предсказуемых равномерно ограниченных функций, H — предсказуемая функция и

$$\sup_{s\leqslant t}|H^n_s-H_s|\xrightarrow{\mathsf{P}}0,\ t>0,$$

то

$$(H^n\cdot X)_t\xrightarrow{\mathsf{P}}(H\cdot X)_t,\ t>0.$$

При этом продолжение $H\cdot X$ единственно в том смысле, что если $H\rightsquigarrow\alpha(H)$ — другое отображение со свойствами а) — в), то $H\cdot X$ и $\alpha(H)$ стохастически неразличимы.

Определение

$$(H\cdot X)_t=h(\omega)\,(X_{b\wedge t}-X_{a\wedge t}),$$

данное для функций $H_t=h(\omega)\,I_{(a,b]}(t)$, имеет смысл для любого процесса X, а не только для семимартингала. Продолжение $H\cdot X$ с указанными свойствами а) — в) на класс ограниченных предсказуемых процессов оказывается возможным лишь для того случая, когда X есть семимартингал. В этом смысле класс семимартингалов является тем максимальным классом, для к-рого определен С. и. с естественными свойствами а) — в).

Если X — семимартингал, а $T=T(\omega)$ — марковский момент, то «остановленный» процесс $X^T=(X_{t\wedge T},\mathcal{F}_t)$ также является семимартингалом и для всякого предсказуемого ограниченного процесса H

$$(H\cdot X)^T=H\cdot X^T=(HI_{[\![0,\,T]\!]})\cdot X.$$

Это свойство позволяет распространить определение С. и. и на класс локально ограниченных предсказуемых функций H. Если T_n — локализующая (для H) последовательность марковских моментов, то H^{T_n} ограничены. Значит $H\cdot I_{[\![0,\,T]\!]}$ ограничены и

$$[(HI_{[\![0,T_{n+1}]\!]})\cdot X]^{T_n}$$

стохастически неотличим от $HI_{[\![0,\,T_n]\!]}\cdot X$ (см. *Стохастическая неразличимость*). Поэтому существует такой процесс $H\cdot X$, называемый снова С. и., что

$$(H\cdot X)^{T_n}=HI_{[\![0,T_n]\!]}\cdot X,\ n\geqslant 0.$$

Построенный С. и. $H\cdot X$ обладает свойствами: $H\cdot X$ — семимартингал; отображение $X\rightsquigarrow H\cdot X$ линейно; если X — процесс локально ограниченной вариации, то таков же и интеграл $H\cdot X$; при этом $H\cdot X$ совпадает с интегралом Стилтьеса от H по dX; $\Delta(H\cdot X)=H\Delta X$; $K\cdot(H\cdot X)=(KH)\cdot X$.

В зависимости от дополнительных предположений на X С. и. $H\cdot X$ удается определить и для более широкого запаса функций H. Напр., если X является локально квадратично интегрируемым мартингалом, то С. и. $H\cdot X$ (со свойствами а) — в)) можно определить для любого предсказуемого процесса H, обладающего тем свойством, что процесс

$$\left(\int_0^t H_s^2\,d\langle X\rangle_s\right)_{t\geqslant 0}$$

локально интегрируем (здесь $\langle X\rangle$ — квадратическая вариация X, т. е. такой предсказуемый возрастающий процесс, что X^2 — $\langle X\rangle$ есть локальный мартингал).

Лит.: [1] Jacod J., Calcul stochastique et problèmes de martingales, B., 1979; [2] Dellacherie C., Meyer P., Probabilites et potentiel, v. 11, P., 1980. *А. Н. Ширяев.*

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕРВАЛ — интервал одного из видов:

$$[\![\sigma,\,\tau]\!]=\{(\omega,\,t):t\geqslant 0,\ \sigma(\omega)\leqslant t\leqslant\tau(\omega)\},$$

$$[\![\sigma,\,\tau[\![=\{(\omega,\,t):t\geqslant 0,\ \sigma(\omega)\leqslant t<\tau(\omega)\},$$

$$]\!]\sigma,\,\tau]\!]=\{(\omega,\,t):t\geqslant 0,\ \sigma(\omega)<t\leqslant\tau(\omega)\},$$

$$]\!]\sigma,\,\tau[\![=\{(\omega,\,t):t\geqslant 0,\ \sigma(\omega)<t<\tau(\omega)\},$$

где $\sigma=\sigma(\omega)$ и $\tau=\tau(\omega)$ — два марковских момента, определенных на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{F})$, с выделенным на нем неубывающим семейством $\mathbb{F}=(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$ под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$.

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975. *А. Н. Ширяев.*

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС — то же, что *случайный процесс*.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ для процесса $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ по винеровскому процессу $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ — уравнение вида

$$dX_t=a(t,\,X)\,dt+b(t,\,X)\,dW_t,\ X_0=\xi, \qquad (1)$$

где $a(t,\,X)$ и $b(t,\,X)$ — неупреждающие функционалы, а случайная величина ξ играет роль начального значения. Различают два понятия решения С. д. у.— сильное и слабое.

Пусть $(\Omega,\,\mathcal{F},\,\mathsf{P})$ — вероятностное пространство с выделенным на нем неубывающим семейством σ-алгебр $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, $W=(W_t,\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс. Говорят, что непрерывный стохастич. процесс $X=(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ есть **сильное решение** С. д. у. (1) с коэффициентами сноса $a(t,\,X)$, диффузии $b(t,\,X)$ и начальным значением ξ, если для каждого $t>0$ с вероятностью единица

$$X_t=\xi+\int_0^t a(s,\,X)\,ds+\int_0^t b(s,\,X)\,dW_s, \qquad (2)$$

где подразумевается, что входящие в (2) интегралы определены.

Первый общий результат относительно существования и единственности сильного решения С. д. у. вида

$$dX_t=a(t,\,X_t)\,dt+b(t,\,X_t)\,dW_t \qquad (3)$$

был получен К. Ито (K. Ito). Им было показано, что если для каждого $t>0$ функции $a(t,\,x)$ и $b(t,\,x)$ удовлетворяют по x условию Липшица и растут не быстрее, чем линейно, то существует непрерывное решение $X=(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ уравнения (3) и оно единственно в том смысле, что если $Y=(Y_t,\,\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — другое непрерывное решение, то

$$\mathsf{P}\{\sup_{s\leqslant t}|X_s-Y_s|>0\}=0,\ t\geqslant 0.$$

Для случая $b(t,\,x)\equiv\mathrm{const}$ измеримость и ограниченность коэффициента (вектора) сноса $a(t,\,x)$ обеспечивает существование и единственность сильного решения. Уравнение $dX_t=a(t,X)dt+dW_t$, вообще говоря, не имеет сильного решения для любого ограниченного неупреждающего функционала $a(t,\,X)$.

При рассмотрении понятия слабого решения С. д. у. (1) не фиксируются заранее вероятностное пространство $(\Omega,\,\mathcal{F},\,\mathsf{P})$ с семейством σ-алгебр $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, винеровский процесс $W=(W_t,\,\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ и случайная величина ξ, а фиксируются лишь неупреждающие функционалы $a(t,\,X)$, $b(t,\,X)$, определенные для непрерывных функций $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, функция распределения $F(x)$ (так сказать, начального значения). Тогда под **слабым решением** С. д. у. (1) с заданными $a(t,\,X)$, $b(t,\,X)$ и $F(x)$ понимается набор объектов

$$\tilde{\mathcal{A}}=(\tilde\Omega,\,\tilde{\mathcal{F}},\,(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geqslant 0},\ \tilde W=(\tilde W_t)_{t\geqslant 0},\ \tilde X=(\tilde X_t)_{t\geqslant 0}\mathsf{P}),$$

где $\tilde W=(\tilde W)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс относительно $((\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geqslant 0},\,\mathsf{P})$, $\tilde W$ и $\tilde X$ связаны соотношением

$$\tilde X_t=\tilde X_0+\int_0^t a(s,\,\tilde X)\,ds+\int_0^t b(s,\,\tilde X)\,d\tilde W s,$$

причем $\tilde{\mathsf{P}}\{\tilde X_0\leqslant x\}=F(x)$. Иногда термин «слабое решение» относят лишь к процессу $\tilde X$, входящему в набор $\tilde{\mathcal{A}}$. Слабое решение С. д. у. (1) существует при более слабых допущениях. Достаточно, напр., чтобы $b^2(t,x)\geqslant c>0$, а также непрерывности $b^2(t,\,x)$ по $(t,\,x)$, измеримости $a(t,\,x)$ по $(t,\,x)$ и ограниченности: $|a|+|b|\leqslant\mathrm{const}$.

Развитие теории стохастич. интегрирования (см. *Стохастический интеграл*) по *семимартингалам* и случайным мерам привело к рассмотрению более общих С. д. у., где в качестве порождающих выступают (помимо винеровского процесса) семимартингалы или случайные меры. Типичным результатом в этом направлении является следующий. Пусть $(\Omega,\,\mathcal{F},\,\mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — неубывающее семейство σ-алгебр, $Z=(Z_t,\,\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ есть m-мерный семи-

мартингал, $G(t, X)=\|g^{ij}(t, X)\|_{ij}$ — матрица, состоящая из неупреждающих функционалов $g^{ij}(t, X)$ таких, что

$$|g^{ij}(t, X)-g^{ij}(t, Y)|\leqslant L_t^{ij}\sup_{s\leqslant t}|X_s-Y_s|,$$

где L_t^{ij} растут (по t) не слишком быстро. Тогда С. д. у. $dX_t=G(t, X)\,dZ_t$, $X_0=0$, имеет и притом единственное сильное решение.

Если функции $a(t, x)$ и $b(t, x)$, $t\geqslant 0$, $x\in R$, удовлетворяют (по x) условию Липшица и растут не быстрее, чем линейно, то (единственное с точностью до *стохастической эквивалентности*) решение $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ С. д. у. (1) будет марковским процессом. Если, кроме того, $a(t, x)$ и $b(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных, то этот процесс будет диффузионным. Тем самым с помощью С. д. у., отправляясь лишь от винеровского процесса, можно строить марковские и диффузионные процессы.

При нек-рых дополнительных условиях гладкости функций $a(t, x)$ и $b(t, x)$ решение $(X_t^x)_{t\geqslant 0}$ С. д. у. (1) с начальным условием $X_0^x=x$ таково, что функция $u(s, x)=\mathsf{E}f(X_s^x)$ при достаточно гладкой функции $f(x)$ удовлетворяет в области $s\in(0, t)$, $x\in R$, обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial u(s, x)}{\partial s}+a(s, x)\frac{\partial u(s, x)}{\partial x}+\frac{b^2(s, x)}{2}\frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2}=0,$$

с граничным условием

$$\lim_{s\uparrow t}u(s, x)=f(x).$$

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974. *А. Н. Ширяев.*

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, изучающий теорию и методы решения условных экстремальных задач при неполной информации о целях и ограничениях задачи. В схемы С. п. укладываются многочисленные практич. задачи управления, планирования и проектирования. Методы С. п. могут быть также использованы для адаптации устройств и алгоритмов к случайно меняющемуся состоянию среды, где они функционируют. Стохастич. модели оптимизации обычно более адекватны реальным условиям выбора решений, чем детерминированные постановки экстремальных задач.

Для построения рациональных стохастич. моделей процессов управления необходимо, помимо статистич. характеристик случайных параметров условий, располагать еще данными о порядке поступления, хранения и использования информации, о допустимой очередности решений и о требованиях к качеству решений. Различают одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные стохастич. задачи.

В одноэтапных задачах С. п. динамика поступления исходной информации не играет роли, а решение принимается один раз и не корректируется. Одноэтапные задачи классифицируются по типу целевого функционала, по характеру ограничений и по виду решения. Чаще других в качестве целевой функции используют вероятность попадания в нек-рую, вообще говоря, случайную область (*P*-модели) и математич. ожидание или дисперсию нек-рой функции от решения (соответственно *M*-модели и *V*-модели). Область допустимых решений одноэтапной задачи С. п. определяется жесткими, вероятностными или статистич. ограничениями. Ограничения задачи, к-рые должны выполняться при всех (или почти при всех) реализациях случая, наз. жесткими. Ограничения стохастич. задач наз. вероятностными, если допустимы невязки в условиях задачи с вероятностью, не превышающей заданной величины. Ограничения наз. статистическими, если по содержательным соображениям требуется только, чтобы они удовлетворялись в среднем.

Одноэтапные задачи различаются также в зависимости от того, принимается ли решение до или после наблюдения реализаций исходных данных. В первом случае решение определяется в виде детерминированного вектора, а во втором — в виде «решающего правила» — функции от случайных параметров условий задачи.

Исследуются прямые и косвенные методы решения одноэтапных задач С. п. Прямые методы — это итеративные процедуры, позволяющие по наблюдениям последовательных реализаций условий приближаться к решению задачи. Прямые методы интерпретируются в содержательных терминах как методы адаптации. Эти методы обобщают т. н. схемы *стохастической аппроксимации*. Косвенные методы сводятся к построению детерминированных эквивалентов стохастич. задач и к использованию известных методов детерминированного математич. программирования. Как прямые, так и косвенные методы эффективны в тех случаях, когда детерминированный эквивалент представляет собой задачу *выпуклого программирования*.

Двухэтапные задачи С. п. представляют собой наиболее распространенные модели процессов управления в условиях неполной информации. Двухэтапные модели обобщаются на стохастич. задачи различной информационной структуры, отражающей возможные аспекты динамики накопления информации и выбора и корректирования решений. Теория многоэтапных стохастич. моделей охватывает, в частности, марковское программирование (см., напр., [6]) и стохастическое дискретное оптимальное управление.

Теория и методы С. п. обобщаются на ряд классов стохастического оптимального управления (см. [5]).

Лит.: [1] Юдин Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, М., 1974; [2] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Управляемые марковские процессы и их приложения, М., 1975; [3] Ермольев Ю. М., Методы стохастического программирования, М., 1976; [4] Аркин В. И., Евстигнеев И. В., Вероятностные модели управления и экономической динамики, М., 1979; [5] Юдин Д. Б., Задачи и методы стохастического программирования, М., 1979; [6] Юдин Д. Б., Юдин А. Д., Экстремальные модели в экономике, М., 1979. *Д. Б. Юдин.*

СТРАННЫЙ АТТРАКТОР — аттрактор (т. е. притягивающее множество *динамической системы*) со сложной структурой. Аттрактор — компактное инвариантное подмножество фазового пространства, к-рое асимптотически устойчиво, т. е. оно устойчиво по Ляпунову, и все траектории из нек-рой его окрестности стремятся к нему при $t\to\infty$. (Иногда в понятие аттрактора устойчивость по Ляпунову не включается, однако практически важные аттракторы обладают этим свойством.) Сложная структура — выражение несколько неопределенное, с чем связана и нек-рая неопределенность термина С. а. Для гладких динамич. систем теоретически изучены два типа С. а., сохраняющихся при малых возмущениях,— аттракторы, являющиеся *гиперболическими множествами*, и *Лоренца аттрактор*, в связи с к-рым был введен и сам термин С. а. В обоих этих примерах С. а. обладает *топологической транзитивностью*; возможно, это или какое-то родственное свойство следует включать в понятие С. а. На основании численных экспериментов можно предполагать существование многих других типов С. а., по-видимому, тоже «выдерживающих» малые возмущения, однако ситуация с ними не выяснена с достаточной полнотой. Так, в одном из первых экспериментов появился аттрактор Энона (см. [2]), однако близко к нему имеются устойчивые периодич. траектории, и не исключено, что именно к ним стремится большинство траекторий. При нек-рой модификации этого примера полу-

чается аттрактор Лози (см. [3]), существование к-рого может быть строго доказано, но в этом примере гладкость динамич. системы кое-где нарушается.

Лит.: [1] Марсден Дж., Мак-Кракен М., Бифуркация рождения цикла и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; [2] Странные аттракторы. Сб. ст., пер. с англ., М., 1981; [3] Lozi R., «J. de Physique», 1978, ser. C, t. 39, № 5, p. 9—10.

Д. В. Аносов.

СТРАТЕГИЯ в теории игр — возможный в соответствии с правилами стратегич. игры способ действия игрока или коалиции действия (см. *Игр теория*). В играх в нормальной форме (см. *Бескоалиционная игра*) непосредственное описание множеств стратегий входит в «правила» игры. В *позиционных играх* (см. также *Динамическая игра*) С. не задаются непосредственно правилами игры, а определяются на их основе косвенным образом. Если в бескоалиционной игре выбор стратегий фиксирован (напр., нек-рым принципом оптимальности), то игра превращается в нестратегическую (см. *Кооперативная игра*).

СТРАТИФИКАЦИЯ — разложение многообразия (может быть, бесконечномерного) на связные подмногообразия, размерности к-рых строго убывают.

М. И. Войцеховский.

СТРЕЛЬБЫ МЕТОД — численный метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, основанный на нек-рой специальной параметризации задачи. См. *Пристрелки метод*.

СТРОГАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ *топологической динамической системы* в узком смысле (потока или каскада) — свойство, рассматриваемое в *эргодической теории*. Оно состоит в следующем: 1) система имеет единственную инвариантную нормированную меру μ (совместимую с топологией); 2) $\mu(U)>0$ для любого непустого открытого множества U; 3) для любой ограниченной непрерывной функции f ее временные средние вдоль любой траектории стремятся к $\int f d\mu$. Хотя приведенное определение имеет смысл независимо от каких-либо ограничений на фазовое пространство W, практически оно применяется тогда, когда W — полное сепарабельное метрич. пространство (обычно даже метрич. компакт). В этом случае С. э. означает, что W представляет собой *эргодическое множество*. Из С. э. следует, что W является *минимальным множеством* (но не обратно). Любой эргодич. поток или каскад в *Лебега пространстве* метрически изоморфен нек-рому топологич. потоку или каскаду со свойством С. э.

Иногда под С. э. понимается одно только свойство 1); в этом смысле употребляется также термин однозргодичность.

Д. В. Аносов.

СТРОГОЙ ИМПЛИКАЦИИ ИСЧИСЛЕНИЕ — логическое исчисление, основанное на строгой импликации, т. е. логической операции, соответствующей союзу «если..., то...». Для строгой импликации устраняются (полностью или частично) т. н. «парадоксы (материальной) импликации»: ложное высказывание имплицирует (влечет) любое высказывание и истинное высказывание имплицируется любым высказыванием.

С. и. и. ставит своей целью отразить связь по смыслу между посылкой и заключением условного предложения. Существует целый ряд С. и. и. (исчисления Льюиса, Аккермана и т. д.), отличающихся друг от друга тем, что в одних выводимы формулы, невыводимые в других (напр., в исчислениях Льюиса «парадоксы импликации» устраняются лишь частично, в то время как в исчислении Аккермана они устраняются полностью). С. и. и. тесно связано с формализацией модальных выражений («возможно», «невозможно», «необходимо» и т. д.): в одних исчислениях строгая импликация выражается через модальности, а в других, наоборот, модальности выражаются через строгую импликацию.

Лит.: [1] Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974; [2] Lewis C. I., Langford C. H., Symbolic logic, N. Y.—L., 1932; [3] Ackermann W., «J. Symbolic Logic», 1956, v. 21, № 2, p. 113—28.

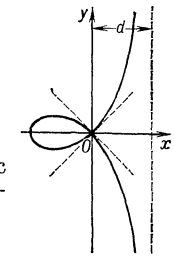
В. В. Донченко.

СТРОФОИДА — плоская алгебраич. кривая 3-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах A_α имеет вид:

$$y^2 = x^2\frac{d+x}{d-x};$$

в полярных координатах:

$$\rho = -d\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$



Начало координат — узловая точка с касательными $y=\pm x$ (см. рис.). Асимптота $x=d$. Площадь петли:

$$S = 2d^2 - 1/2\pi d^2.$$

Площадь между кривой и асимптотой:

$$S_2 = 2d^2 + 1/2\pi d^2.$$

С. относится к т. н. *узлам*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Смогоржевский А. С., Столова Е. С., Справочник по теории кривых третьего порядка, М., 1961.

Д. Д. Соколов.

СТРУВЕ ФУНКЦИЯ — функция

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2}\sin(z\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt,$$
$$\operatorname{Re}\nu > -1/2,$$

удовлетворяющая неоднородному уравнению Бесселя:

$$z^2y'' + zy' + (z^2-\nu^2)y = \frac{4(z/2)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}.$$

Разложение в степенной ряд:

$$\mathbf{H}_\nu(z) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+3/2)}\left[1 - \frac{z^2}{3(2\nu+3)} + \frac{z^4}{3\cdot5(2\nu+3)(2\nu+5)} - \dots\right].$$

С. ф. целого порядка n связана с *Вебера функцией* следующими соотношениями:

$$\mathbf{H}_0(z) = -E_0(z),\ \mathbf{H}_1(z) = 2/\pi - E_1(z),$$
$$\mathbf{H}_2(z) = \frac{z}{3\pi} - E_2(z)\dots.$$

С. ф. порядка $n+1/2$ (n — целое число) являются элементарными функциями, напр.

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathbf{H}_{1/2}(z) = \frac{1-\cos z}{\sqrt{z}}.$$

При $|z|\gg1$, $|z|\gg|\nu|$ имеет место асимптотич. разложение

$$\mathbf{H}_\nu(z) - N_\nu(z) \approx$$
$$\approx \frac{(z/2)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left[1 + \frac{1\cdot(2\nu-1)}{z^2} + \frac{1\cdot3\cdot(2\nu-1)(2\nu-3)}{z^4} + \dots\right],$$

где $N_\nu(z)$ — *Неймана функция*.

Модифицированная функция Струве — функция

$$\mathbf{L}_\nu(z) = -ie^{i\nu\pi/2}\mathbf{H}_\nu(iz).$$

Ее разложение в ряд:

$$\mathbf{L}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k}}{\Gamma(k+3/2)\,\Gamma(k+\nu+3/2)}.$$

Для больших $|z|$ имеет место асимптотич. разложение

$$\mathbf{L}_\nu(z) - I_{-\nu}(z) \approx \frac{1}{\pi},$$

где $I_{-\nu}$ — модифицированная функция Бесселя.

С. ф. иногда обозначается $S_\nu(z)$. Функцию ввел Х. Струве [1].

Лит.: [1] Struve H., «Ann. der Physik und Chemie», 1882, Bd 17, S. 1008—16; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977; [3] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, пер. с англ., М., 1979. *А. Б. Иванов.*

СТРУКТУРА — 1) С., математическая структура,— родовое название, объединяющее понятия, общей чертой к-рых является то, что они применимы к множествам, природа элементов к-рых не определена. Чтобы определить С., задают отношения, в к-рых находятся элементы множества (типовая характеристика С.), затем постулируют, что данные отношения удовлетворяют условиям — аксиомам С.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [2] его же, Теория множеств, пер. с франц., М., 1965. *М. И. Войцеховский.*

2) С.— то же, что *решетка*.

3) С. на многообразии, геометрическая величина, поле геометрических объектов,— сечение расслоения, ассоциированного с главным расслоением кореперов многообразия M. Интуитивно геометрич. величину можно рассматривать как величину, значение к-рой зависит не только от точки x многообразия M, но и от выбора корепера — инфинитезимальной системы координат в точке x (см. *Карта*).

Более подробно, пусть $GL^k(n)$ — общая дифференциальная группа порядка k (группа k-струй в нуле преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих начало координат), M_k — многообразие кореперов порядка k n-мерного многообразия M (т. е. многообразие k-струй $j^k_x(u)$ локальных карт $u : M \supset U \to \mathbb{R}^n$ с началом в точке $x = u^{-1}(0)$). Группа $GL^k(n)$ действует слева на многообразии M_k по формуле

$$j^k_0(\varphi)\, j^k_0(u) = j^k_x(\varphi \circ u),\quad j^k_0(\varphi) \in GL^k(n),\ j^k_x(u) \in M_k,$$

и это действие определяет в M_k структуру главного $GL^k(n)$-расслоения $\pi_k : M_k \to M$, называемого расслоением кореперов порядка k. Пусть W — произвольное $GL^k(n)$-многообразие, т. е. многообразие с левым действием группы $GL^k(n)$. Пусть, наконец, $W(M)$ — пространство орбит левого действия группы $GL^k(n)$ в $M_k \times W$, а π_W — его естественная проекция на M. Расслоение π_W: $W(M) \to M$ (ассоциированное с M_k и W) наз. расслоением геометрических структур порядка $\leqslant k$ и типа W, а его сечения — структурами типа W. С. типа W находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с $GL^k(n)$-эквивариантными отображениями $S : M_k \to W$. Таким образом, С. типа W можно рассматривать как W-значную функцию S на многообразии M_k k-реперов, удовлетворяющую следующему условию эквивариантности:

$$S(gu^k) = gS(u^k),\quad g \in GL^k(n),\ u^k \in M_k.$$

Расслоение π_W геометрич. объектов является естественным расслоением в том смысле, что группа диффеоморфизмов многообразия M действует как группа автоморфизмов π_W.

Если W есть векторное пространство с линейным (соответственно аффинным) действием группы $GL^k(n)$, то С. типа W наз. линейными (соответственно аффинными).

Основными примерами линейных С. 1-го порядка являются тензорные С., или тензорные поля. Пусть $V = \mathbb{R}^n$, $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ и $V^p_q = ((\otimes^p V)) \otimes ((\otimes^q V^*))$ — пространство тензоров типа (p, q) с естественным тензорным представлением группы $GL^1(n) = GL(n)$. С. типа V^p_q наз. тензорным полем типа (p, q). Ее можно рассматривать как вектор-функцию на многообразии кореперов M_1, сопоставляющую кореперу $\theta = j^1_x(u) = (du^1, \ldots, du^n)$ набор координат $S(\theta)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ тензора $S(\theta) \in V^p_q$, относительно стандартного базиса

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \ldots \otimes e^{*j_p}\}$$

пространства V^p_q. При линейном преобразовании корепера $\theta \to g\theta = (g^i_a\, du^a)$ координаты $S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ преобразуются по тензорному представлению:

$$S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(g\theta) = g^{i_1}_{a_1} \ldots g^{i_p}_{a_p} (g^{-1})^{b_1}_{j_1} \ldots (g^{-1})^{b_q}_{j_q} S(\theta)^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q}.$$

Важнейшим примером тензорных С. являются *векторное поле, дифференциальная форма, риманова метрика, симплектическая структура, комплексная структура* и, более общо, *аффинор*. Все линейные С. (любых порядков) исчерпываются сверхтензорами Рашевского [4]. Примером аффинной С. 2-го порядка служит *аффинная связность* без кручения, к-рую можно рассматривать как С. типа $V^1_{(2)}$, где $V^1_{(2)} \approx V \otimes S^2 V^*$ — ядро естественного гомоморфизма $GL^2(n) \to GL^1(n)$, рассматриваемое как векторное пространство с естественным действием группы $GL^2(n) = GL(n) V^1_{(2)}$. Широким и важным классом С. является класс инфинитезимально однородных структур, или *G-структур*, — структур типа W, где $W = GL^k(n)/G$ — однородное пространство группы $GL^k(n)$.

Приведенное выше определение С. оказывается недостаточно общим и не охватывает ряд важных геометрич. С.— спинорную С., симплектическую спинорную С. и др. Естественное обобщение состоит в рассмотрении обобщенных G-структур — главных расслоений, гомоморфно отображающих на G-структуру, и сечений ассоциированных с ними расслоений.

Лит.: [1] Рашевский П., «Тр. сем. по вект. и тенз. анализу...», 1933, в. 1, с. 126—42; [2] Вагнер В., «Докл. АН СССР», 1945, т. 46, № 9, с. 383—86; [3] Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1949; [4] Рашевский П. К., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1957, т. 6, с. 337—70; [5] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [6] Ehresmann Ch., «Géométrie diff. Coll. internat. du Centre Nat. de la recherche Sci.», 1953, p. 97—110. *Д. В. Алексеевский.*

G-СТРУКТУРА на многообразии — главное подрасслоение расслоения кореперов многообразия со структурной группой G. Более подробно, пусть π_k: $M_k \to M$ — главное $GL^k(n)$-расслоение всех кореперов порядка k n-мерного многообразия M и G — подгруппа общей дифференциальной группы $GL^k(n)$ порядка k. Подмногообразие P многообразия k-кореперов M_k задает G-структуру порядка k $\pi = \pi_k|_P$: $P \to M$, если π есть главное G-расслоение, т. е. слои отображения π являются орбитами группы G. Напр., сечение $x \mapsto u^k_x$ расслоения π_k (поле кореперов) определяет G-структуру $P = \{gu^k_x,\ x \in M,\ g \in G\}$, наз. G-структурой, порожденной полем кореперов. Локально любая G-структура порождается полем кореперов. Стандартной плоской G-структурой наз. G-структура в пространстве $V = \mathbb{R}^n$, порождаемая полем кореперов $x \mapsto j^k_x(id)$, где $id : V \to V$ — тождественное отображение.

Пусть $\pi : P \to M$ есть G-С. Отображение многообразия P в точку $eG \in GL^k(n)/G$ продолжается до $GL^k(n)$-эквивариантного отображения $S : M_k \to GL^k(n)/G$, к-рое можно рассматривать как структуру типа $GL^k(n)/G$ на M. Если однородное пространство $GL^k(n)/G$ вкладывается в качестве орбиты в векторное пространство W с линейным действием группы $GL^k(n)$, то структуру S можно рассматривать как линейную структуру типа W. Она наз. тензором Бернара G-С. π и часто отождествляется с последней. Обратно, пусть $S : M_k \to W$ — линейная геометрич. структура типа W (напр., тензорное поле), причем $S(M_k)$ принадлежит

одной орбите $GL^k(n)w_0$ группы $GL^k(n)$. Тогда $P=S^{-1}(w_0)$ есть G-С., где G — стабилизатор точки w_0 в $GL^k(n)$, и S является ее тензором Бернара. Напр., риманова метрика задает $O(n)$-структуру, почти симплектич. структура — $Sp(\frac{n}{2}, \mathbb{R})$-структуру, почти комплексная структура — $GL(\frac{n}{2}, \mathbb{C})$-структуру, аффинная связность без кручения — $GL(n)$-структуру 2-го порядка ($GL(n)$ рассматривается здесь как подгруппа группы $GL^2(n)$). Аффинор (поле эндоморфизмов) задает G-С. тогда и только тогда, когда он во всех точках приводится к одной и той же жордановой нормальной форме A, причем G есть централизатор матрицы A в $GL(n)$.

Элементы многообразия M_k можно рассматривать как кореперы порядка 1 на M_{k-1}, что позволяет рассматривать естественное расслоение $\pi^k : M_k \to M_{k-1}$ как N^k-структуру 1-го порядка, где N^k — ядро естественного гомоморфизма $GL^k(n) \to GL^{k-1}(n)$. С каждой G-С. $\pi : P \to M$ порядка k связывается последовательность G-С. 1-го порядка

$$P \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_{-k} = M,$$

где $P_{-i} = \pi^k(P_{-i+1}) \subset M_{k-i}$. Благодаря этому изучение G-С. высших порядков сводится к изучению G-С. первого порядка. Корепер $u_x^1 \in M_1$ можно рассматривать как изоморфизм $u_x^1 : T_xM \to V$.

1-форма $\theta : TM_1 \to V$, значение к-рой на векторе $X \in T_{u_x^1}M_1$ равно $\theta_{u_x^1}(X) = u_x^1 (\pi_1)_* X$, наз. формой смещения. В локальных координатах (x^i, u_i^a) многообразия M_1 форма θ имеет вид $\theta = u_i^a\, dx^i \otimes e_a$, где e_a — стандартный базис в V.

Ограничение θ_P формы смещения θ на G-С. $P \subset M_1$ наз. формой смещения G-С. Она обладает следующими свойствами: 1) строгая горизонтальность: $\theta_P(X)=0 \Leftrightarrow \pi_* X = 0$; 2) G-эквивариантность: $\theta_P \circ g = g \circ \theta_P$ для любого $g \in G$.

С помощью формы θ_P можно охарактеризовать главные расслоения с базой M, изоморфные G-С. А именно, главное G-расслоение $\pi : P \to M$ изоморфно G-С. тогда и только тогда, когда имеются точное линейное представление α группы G в n-мерном векторном пространстве V, $n = \dim M$, и V-значная строго горизонтальная G-эквивариантная 1-форма θ на P. Отказ от требования точности представления α приводит к понятию обобщенной G-С. (1-го порядка) на M — это главное G-расслоение $P \to M$ вместе с линейным представлением $\alpha : G \to GL(V)$, $\dim V = \dim M$, и V-значной строго горизонтальной G-эквивариантной 1-формой θ на P.

Примером обобщенной G-С. является канонич. расслоение $\pi : P \to G \backslash P$ над однородным пространством $G \backslash P$ группы Ли P. Здесь α — *изотропии представление* группы G, а θ определяется *Маурера — Картана формой* группы Ли P.

Пусть $\pi : P \to M$ есть G-С. 1-го порядка. Расслоение $\pi' : P' \to P$ 1-струй локальных сечений расслоения π можно рассматривать как G'-структуру на P, где $G' = \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g})$ — коммутативная группа, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, линейно представленная в пространстве $V \oplus \mathfrak{g}$ формулой

$$A(v, X) = (v, X + A(v)),\ A \in G',\ v \in V,\ X \in \mathfrak{g},$$

и действующая на многообразии P' по формуле

$$H \mapsto AH = \{l_p A(\theta(h)) + H,\ A \in G',\ p = \pi'(H),\ h \in H\},$$

где l_p — канонич. изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G на вертикальное подпространство $T_p^V P = T_p(\pi^{-1}(\pi(p)))$. Элемент $H \in P'$ может рассматриваться как горизонтальное (т. е. дополнительное к вертикальному) подпространство в $T_p P$. Он определяет корепер $\theta'_H : T_p P \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} + V$, к-рый на вертикальном подпространстве задается отображением l_p, а на горизонтальном — отображением $\theta_H = \theta | H$. Вектор-функция $C' : P' \to W = \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$, заданная формулой $H \mapsto C'_H$, $C'_H(u,v) = d\theta(\theta_H^{-1}u, \theta_H^{-1}v)$, наз. функцией кручения G-С. π. Сечение $s : x \mapsto H_{P(x)}$ расслоения $\pi \circ \pi' : P' \to M$ задает связность в расслоении π, а ограничение функции C' на $S(M)$ есть функция, задающая координаты тензора кручения этой связности относительно поля кореперов $p(x)$.

Отображение $C' : P' \to W$ G'-эквивариантно относительно вышеуказанного действия группы G' в P и действия G' в W, задаваемого формулой

$$A : w \mapsto Aw = w + \delta A,$$

где $\delta : G' \to W$, $(\delta A)(u, v) = A(u)\, v - A(v)\, u$. Индуцированное отображением C' отображение $C : P \to G' \backslash W$ наз. структурной функцией G-структуры π. Обращение в нуль функции C равносильно существованию в расслоении π связности без кручения.

Выбор подпространства $D \subset W$, дополнительного к $\delta G'$, определяет подрасслоение $P^{(1)} = C'^{-1}(D)$ расслоения кореперов $\pi' : P' \to P$ со структурной группой $G^{(1)} = G' \cap \mathrm{Ker}\, \delta \cong \mathfrak{g} \otimes V^* \cap V \otimes S^2 V^* \subset V \otimes V^{*2}$, т. е. $G^{(1)}$-структуру $\pi^{(1)} = \pi'|_{P^{(1)}} : P^{(1)} \to P$ на P. Она наз. первым продолжением G-С. π. По индукции определяется i-е продолжение $\pi^{(i)} : P^{(i)} \to P^{(i-1)}$ как $G^{(i)}$-структура на $P^{(i-1)}$, где группа $G^{(i)}$ изоморфна векторной группе $\mathfrak{g} \otimes S^i V^* \cap V \otimes S^{i+1} V^* \subset V \otimes V^{*(i+1)}$. Структурная функция $C^{(i)}$ i-го продолжения наз. структурной функцией i-го порядка G-С. π.

Центральной проблемой теории G-С. является локальная проблема эквивалентности — нахождение необходимых и достаточных условий, при к-рых две G-С. $\pi : P \to M$ и $\bar{\pi} : \bar{P} \to \bar{M}$ с одной и той же структурной группой G локально эквивалентны, т. е. существует локальный диффеоморфизм $\varphi : M \supset U \to \bar{U} \subset \bar{M}$ многообразий M и $\bar{M}$, индуцирующий изоморфизм G-С. над окрестностями U и $\bar{U}$. Частным случаем этой проблемы является проблема интегрируемости — нахождение необходимых и достаточных условий локальной эквивалентности данной G-С. и стандартной плоской G-С. Проблему локальной эквивалентности можно переформулировать как проблему нахождения полной системы локальных инвариантов G-С.

Для $O(n)$-структуры, к-рая отождествляется с римановой метрикой, проблема интегрируемости была решена Б. Риманом (B. Riemann): необходимые и достаточные условия интегрируемости состоят в обращении в нуль тензора кривизны метрики, а локальная проблема эквивалентности — Э. Кристоффелем (E. Christoffel) и Р. Липшицем (R. Lipschitz): полная система локальных инвариантов римановой метрики состоит из ее тензора кривизны и его последовательных ковариантных производных (см. [1]).

Подход к решению проблемы эквивалентности основан на понятиях продолжения и структурной функции. С каждой G-С. $\pi : P \to M$ 1-го порядка со структурной группой $G \subset GL(n)$ связываются последовательность продолжений

$$\ldots \longrightarrow P^{(i)} \longrightarrow P^{(i-1)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

и последовательность структурных функций $C^{(i)}$. Для $O(n)$-структуры структурная функция $C^{(0)} = C$ на $P^{(0)} = P$ равна 0, а существенные части остальных структурных функций $C^{(i)}$, $i > 0$, отождествляются с тензором кривизны соответствующей метрики и его последовательными ковариантными производными. Для интегрируемости G-С. π необходимо и достаточно посто-

янство структурных функций $C^{(0)}, C^{(1)}, \ldots, C^{(k)}$ и совпадение их значений с соответствующими значениями структурных функций стандартной плоской G-С. (см. [6]). Число k зависит только от группы G. Для широкого класса линейных групп, в частности для всех неприводимых групп $G \subset GL(n)$, не принадлежащих списку Берже групп голономии пространств аффинной связности без кручения [3], $k=0$, для интегрируемости G-С. необходимо и достаточно обращение в 0 структурной функции $C^{(0)}$ или, что эквивалентно, существование линейной связности без кручения, сохраняющей G-С.

G-С. π наз. G-С. конечного типа (равного k), если $G^{(k-1)} \neq \{e\}$, $G^{(k)} = \{e\}$. В этом случае $\pi^{(k)} : P^{(k)} \to P^{(k-1)}$ есть поле кореперов (абсолютный параллелизм), группа автоморфизмов G-С. π изоморфна группе автоморфизмов этого параллелизма и является группой Ли. Проблема локальной эквивалентности таких структур сводится к проблеме эквивалентности абсолютных параллелизмов и решается в терминах конечной последовательности структурных функций (см. [2]). Для G-С. бесконечного типа проблема локальной эквивалентности в общем случае не решена (1984).

Две G-С. $\pi : P \to M$ и $\pi' : P' \to M'$ наз. формально эквивалентными в точках $x \in M$, $x' \in M'$, если существует изоморфизм слоев $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x')$, к-рый продолжается до изоморфизма соответствующих слоев продолжений $P^{(i)} \to M$ и $P'^{(i)} \to M'$ $(i \geqslant 0)$. Известны примеры, к-рые показывают, что из формальной эквивалентности двух G-С. класса C^∞ для всех пар $(x, x') \in M \times M'$, вообще говоря, не следует их локальная эквивалентность [6]. В аналитич. случае существуют такие собственные подмножества $S(M) \subset M$, $S(M') \subset M'$, являющиеся счетными объединениями аналитич. множеств, что для любых $x \in M \setminus S(M)$, $x' \in M' \setminus S(M')$ из формальной эквивалентности структур P и P' в точках x, x' следует их локальная эквивалентность [7].

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1981; [2] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [3] Berger M., «Bull. Soc. math. de France», 1955, t. 83, p. 279—330; [4] Chern S.-S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1966, v. 72, p. 167—219; [5] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.—N. Y., 1972; [6] Molino P., Théorie des G-structures. Le problème d'équivalence, B.—N. Y., 1977; [7] Morimoto T., «C. r. Acad. Sci.», 1981, t. 292, № 1, p. 63—66.

Д. В. Алексеевский.

(B, φ)-СТРУКТУРА — нек-рая структура в векторном (или сферическом) расслоении, обобщение понятия структурной группы расслоения.

Пусть $\varphi_n : B_n \to BO_n$ — нек-рое расслоение и ξ — нек-рое n-мерное векторное расслоение над пространством X, классифицируемое отображением $\xi : X \to BO_n$. Тогда (B_n, φ_n)-структурой на ξ наз. гомотопич. класс поднятий отображения $\xi : X \to BO_n$ до отображения в B_n, т. е. класс эквивалентности отображений $\tilde{\xi} : X \to B_n$ таких, что $\varphi_n \circ \tilde{\xi} = \xi$, где отображения $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\xi}' : X \to B_n$ наз. эквивалентными, если они послойно гомотопны. Не существует способа согласованно определять (B_n, φ_n)-структуры для эквивалентных расслоений, ибо это согласование зависит от выбора эквивалентности.

Пусть задана последовательность (B, φ, g) расслоений $\varphi_r : B_r \to BO_r$ и отображений $g_r : B_r \to B_{r+1}$ таких, что $j_r \circ \varphi_r = \varphi_{r+1} \circ g_r$ ($j_r : BO_r \to BO_{r+1}$ — стандартное отображение). Семейство $\{B_r, \varphi_r, g_r\}$ (а иногда лишь (B_r, φ_r)) наз. структурной серией. (B, φ)-структурой на многообразии M^n наз. класс эквивалентности последовательностей (B_r, φ_r)-структур на *нормальном расслоении* $\{\xi_r\}$ многообразия M^n; они совпадают начиная с нек-рого достаточно большого r. (B, φ)-многообразием наз. многообразие M^n вместе с фиксированной (B, φ)-С. на нем.

Вместо BO_n можно более общим образом рассматривать пространство BG_n, классифицирующее сферич. расслоения, и вводить (B, φ)-С. на них.

Лит.: [1] Lashof R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 109, p. 257—77; [2] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973.

Ю. Б. Рудяк.

СТРУКТУРНАЯ КОНСТАНТА алгебры A над полем или ассоциативно-коммутативным кольцом P — элемент $c_{\alpha\beta}^{\gamma} \in P$, $\alpha, \beta, \gamma \in I$, определяемый равенством

$$e_\alpha e_\beta = \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^{\gamma} e_\gamma,$$

где $\{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — фиксированная база алгебры A. С. к. определяют алгебру однозначно. Если $d_{\xi\eta}^{\zeta}$ — С. к. алгебры A в другой базе $\{f_\xi \mid \xi \in J\}$, где $f_\xi = \Sigma t_\xi^\alpha e_\alpha$, то

$$\sum_\xi d_{\xi\eta}^{\zeta} t_\zeta^\gamma = \sum_{\alpha,\beta} t_\xi^\alpha t_\eta^\beta c_{\alpha\beta}^{\gamma}.$$

Всякое тождество, справедливое в алгебре A, может быть выражено соотношениями между С. к. Напр.,

$$c_{\alpha\beta}^{\gamma} = c_{\beta\alpha}^{\gamma}$$

— коммутативность,

$$\sum_\xi c_{\alpha\beta}^{\xi} c_{\xi\gamma}^{\lambda} = \sum_\sigma c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\beta\gamma}^{\sigma}$$

— ассоциативность,

$$\sum_\xi \left(c_{\alpha\beta}^{\xi} c_{\xi\gamma}^{\lambda} + c_{\beta\gamma}^{\xi} c_{\xi\alpha}^{\lambda} + c_{\gamma\alpha}^{\xi} c_{\xi\beta}^{\lambda} \right) = 0$$

— тождество Якоби.

Л. А. Скорняков.

СТРУКТУРНАЯ ЛИНГВИСТИКА — раздел лингвистики, для к-рого характерно преимущественное внимание к исследованию структуры языковых механизмов и стремление к точному описанию этой структуры. Развитие С. л. привело к созданию математич. методов изучения структуры языка и возникновению *математической лингвистики*. Общие принципы С. л. впервые были сформулированы Ф. де Соссюром (F. de Saussure, [1]) в 1916.

В С. л. различают язык и речь, при этом основной задачей С. л. является изучение языка. Язык представляет собой определенную систему знаков; каждый языковой знак есть соединение означаемого — смысла — и означающего — акустического образа. Напр., означаемое русского слова «стол» — понятие стола, а означающее — акустический образ, возникающий в мозгу носителя русского языка, когда он слышит соответствующую последовательность звуков. Языковой знак произволен в том смысле, что выбор означающего, за редкими исключениями, не мотивирован никакими свойствами означаемого. Вообще, «материал» знака несущественен для языка, существенны только отношения между знаками. Это сближает язык с изучаемыми в математике абстрактными системами и делает возможным изучение его строения математич. методами.

Поскольку язык непрерывно изменяется, его можно изучать в двух планах: синхроническом (изучение языка в данный фиксированный момент времени) и диахроническом (изучение процесса изменения языка). Основные достижения С. л. относятся к области синхронич. изучения языка.

В С. л. разработано учение о фонеме — минимальной смыслоразличительной единице языка, характеризуемой определенным набором т. н. дифференциальных (или различительных) признаков (см. [2], [3]). Напр., в русском языке звуковые сегменты, передаваемые на письме как «м», «а» и «ма»,— смыслоразличительные, так как для каждого из них существует содержащая его значащая языковая единица (слово), в к-рой замена этого сегмента другим приводит к изменению смысла: замена «м» на «б» в слове «мак» дает «бак», замена «а» на «и» в слове «пар» дает «пир», замена «ма» на «ду» в слове «мало» дает «дуло». При этом сегмент «ма» не

минимальный, т. к. он разлагается на смыслоразличительные сегменты «м» и «а», к-рые уже не могут быть разложены, т. е. они являются минимальными. Из всевозможных признаков, к-рыми могут характеризоваться звуки языка, в каждом конкретном языке лишь нек-рые являются различительными, и совокупность различительных признаков меняется от языка к языку. Так, долгота гласного, не имеющая различительного значения в русском языке, имеет его в латышском (напр., pile — капля, а pīle — утка) и в ряде других языков. Предпринимались попытки формальной трактовки понятия фонемы с привлечением простейших математич. средств (см., напр., [4], [5]), однако достаточно полной формальной теории фонемы пока (1984) нет. С точки зрения различительных признаков в С. л. рассматриваются и минимальные значимые единицы языка — м о р ф е м ы. Напр., в русском слове «столику» выделяются: корневая морфема «стол»—, словообразовательная морфема — —«ик» — и словоизменительная морфема — «у», несущая различительные признаки единственного числа и дательного падежа.

В С. л. разработаны т. н. дескриптивные процедуры исследования языка (см. [6], [7]), основанные на работе с информантом — носителем языка, к-рому исследователь задает вопросы типа «Правильно ли данное выражение?» и «Одинаковы или различны смыслы двух данных выражений?». Многие используемые в математич. лингвистике конструкции представляют собой, по существу, формализацию таких процедур (см. *Аналитическая модель языка*). Разработаны строго формальные, по существу математические, способы описания структуры предложения (см. *Синтаксическая структура*), позволившие изучить ряд важных проблем теории синтаксиса. Развивается с т р у к т у р н а я с е м а н т и к а, изучающая структуру отношений между смыслом языковых выражений и их формой и между смыслами различных выражений (см., напр., [10], [11]).

Развитие идей С. л. привело к выработке представления о языке как о механизме, служащем для порождения речевых выражений или для преобразования означаемых (смыслов) в означающие (тексты) и обратно (см. [8]—[10]). Это представление легло в основу теории формальных *грамматик*.

Лит.: [1] Д е С о с с ю р Ф., Труды по языкознанию, пер. с франц., М., 1977; [2] Т р у б е ц к о й Н. С., Основы фонологии, пер. с нем., М., 1960; [3] Я к о б с о н Р., Ф а н т Г. М., Х а л л е М., в кн.: Новое в лингвистике, в. 2, М., 1962, с. 173—230; [4] У с п е н с к и й В. А., «Вопросы языкознания», 1964, № 6, с. 39—53; [5] Р е в з и н И. И., Структура языка как моделирующей системы, М., 1978; [6] Б л у м ф и л д Л., Язык, пер. с англ., М., 1968; [7] H a r r i s Z. S., Structural linguistics, Chi., 1961; [8] Х о м с к и й Н., в кн.: Новое в лингвистике, в. 2, М., 1962, с. 412—527; [9] е г о ж е, Аспекты теории синтаксиса, пер. с англ., М., 1972; [10] М е л ь ч у к И. А., Опыт теории лингвистических моделей «Смысл↔текст», М., 1974; [11] А п р е с я н Ю. Д., Лексическая семантика, М., 1974; [12] е г о ж е, Идеи и методы современной структурной лингвистики, М., 1966. *А. В. Гладкий.*

СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА, р е ш е т о ч н о у п о р я д о ч е н н а я г р у п п а, *l*-г р у п п а,— группа G, на множестве элементов к-рой задано отношение частичного порядка $\leqslant$, обладающее свойствами: 1) G — решетка относительно $\leqslant$, т. е. для любых $x, y \in G$ существуют элементы $x \wedge y$, $x \vee y$ такие, что $x \wedge y \leqslant x$, y и $x \vee y \geqslant x$, y; для любого $z \in G$, $z \leqslant x$, y выполнено $z \leqslant x \wedge y$, и для любого $t \in G$ и x, $y \leqslant t$ выполнено $x \vee y \leqslant t$; 2) для любых a, b, x, $y \in G$ неравенство $a \leqslant b$ влечет за собой $xay \leqslant xby$. Эквивалентным образом С. у. г. может быть определена как алгебраич. система в сигнатуре $< \cdot, ^{-1}, e, \vee, \wedge >$, удовлетворяющая аксиомам: 3)$\langle G, \cdot, ^{-1}, e\rangle$ — группа; 4)$\langle G, \vee, \wedge\rangle$ — решетка; 5) $x(y \vee z)\, t = xyt \vee xzt$ и $x(y \wedge z)\, t = xyt \wedge xzt$ для любых x, y, z, $t \in G$.

Решетка элементов С. у. г. дистрибутивна. М о д у л е м (соответственно п о л о ж и т е л ь н о й и о т р и ц а т е л ь н о й ч а с т ь ю) э л е м е н т а x наз. элемент $|x| = x \vee x^{-1}$ (соответственно $x^+ = x \vee e$ и $x^- = x \wedge e$). В С. у. г. верны соотношения:

$$x = x^+ x^-,\ |x|^{-1} \leqslant x \leqslant |x|,$$
$$|x| = x^+ (x^-)^{-1},\ x^+ \wedge (x^-)^{-1} = e,$$
$$(x \vee y)^{-1} = x^{-1} \wedge y^{-1},\ (x \wedge y)^{-1} = x^{-1} \vee y^{-1}.$$

Элементы x и y наз. о р т о г о н а л ь н ы м и, если $|x| \vee |y| = e$. Ортогональные элементы перестановочны.

Подмножество H l-группы G наз. l-п о д г р у п п о й, если H — подгруппа и подрешетка в G; l-подгруппа H наз. l-и д е а л о м С. у. г. G, если она нормальна и выпукла в G. Множество l-подгрупп С. у. г. образует подрешетку решетки всех ее подгрупп. Решетка l-идеалов С. у. г. дистрибутивна. l-г о м о м о р ф и з м о м l-группы G в l-группу H наз. гомоморфизм φ группы G в группу H такой, что

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y),\ \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

Ядрами l-гомоморфизмов являются в точности l-идеалы l-групп. Если G есть l-группа, $M \subset G$, то множество $M^{\perp} = \{x \in G \mid |x| \wedge |m|$-е для всякого $m \in M\}$ является выпуклой l-подгруппой в G.

Группа $A(L)$ взаимно однозначных сохраняющих порядок отображений линейно упорядоченного множества L на себя есть l-группа (если для f, $g \in A(L)$ положить $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$ для любого $\alpha \in L$). Всякая l-группа l-изоморфна l-подгруппе С. у. г. $A(L)$ для нек-рого подходящего множества L.

Класс всех С. у. г. является многообразием сигнатуры $< \cdot, ^{-1}, e, \wedge, \vee >$. Важнейшее его подмногообразие — класс С. у. г., аппроксимирующихся линейно упорядоченными группами (класс п р е д с т а в и м ы х l-г р у п п).

Лит.: [1] Б и р к г о ф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Ф у к с Л., Частично упорядоченные алгебраич. системы, пер. с англ., М., 1965. *В. М. Копытов.*

СТРУКТУРНОЕ ПРОСТРАНСТВО к о л ь ц а — множество $\mathfrak{P}$ всех его примитивных идеалов с топологией, замкнутые множества в к-рой суть такие подмножества $C \subseteq \mathfrak{P}$, что C содержит всякий идеал, содержащий пересечение всех идеалов из C (ср. *Зарисского топология*). С. п. кольца R гомеоморфно С. п. факторкольца R/J, где J — радикал Джекобсона. С. п. является T_0-пространством. Если все примитивные идеалы кольца максимальны, то С. п. оказывается T_1-пространством. С. п. кольца с единицей компактно. С. п. бирегулярного кольца (см. *Регулярное кольцо*) локально компактно и вполне несвязно. Оно используется для представления бирегулярного кольца в виде кольца непрерывных функций с компактными носителями.

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961. *Л. А. Скорняков.*

СТРУКТУРНЫЙ ИЗОМОРФИЗМ — изоморфизм между *решетками* (структурами) двух однотипных алгебраич. систем.

Для групп исследовался вопрос о том, когда из С. и. двух групп следует их изоморфизм (см. [1]).

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *О. А. Иванова.*

СТРУХАЛЯ ЧИСЛО — критерий подобия нестационарных движений жидкостей или газов. С. ч. характеризует одинаковость протекания процессов во времени:

$$\mathrm{Sh} = l/vt = \omega l/v,$$

где v — характерная скорость течения, l — характерный линейный размер, t — характерный для нестационарного движения промежуток времени, ω — характерная частота (иногда через Sh обозначают обратную величину vt/l).

Аналогичный критерий $H_0 = vt/l$ в механических, тепловых и электромагнитных процессах наз. к р и т е р и е м г о м о х р о м н о с т и.

С. ч. наз. по имени В. Струхаля (В. Строугаль, V. Strouhal). *По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.*

СТРУЯ, джет,— многочлен $j^k f$, получающийся усечением (формального) ряда Тейлора дифференцируемой функции f. Подробнее, пусть M, N суть C^k-многообразия. Тогда k-струей из M в N наз. класс $[x, f, U]$ эквивалентных троек (x, f, U), где $U \to M$ — открыто, $x \in U$, $f : U \to N$ — отображение класса C^k. Эквивалентность определяется так:

$$(x, f, u) \sim (x', f', u'),$$

если $x = x'$ и локальные представления отображений f, f' в x по отношению к нек-рой паре карт имеют одинаковые производные до k-го порядка включительно. Пространство С. $J^k(M, N)$ является C^0-многообразием.

Лит.: [1] Брёкер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [2] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [3] Постон Т., Стюарт И., Теория катастроф и ее приложения, пер. с англ., М., 1980. *М. И. Войцеховский.*

СТУПЕНЧАТАЯ СЕМАНТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — вариант *конструктивной семантики*, предложенный А. А. Марковым (см. [2], [3]). Основное внимание при построении этой системы уделяется одной из проблем семантики — конструктивному истолкованию *импликации*. Традиционное интуиционистское разъяснение смысла утверждения $(A \supset B)$ состоит в том, что $(A \supset B)$ выражает осуществимость конструкции p такой, что если q — произвольная конструкция, подтверждающая A, то p и q в совокупности позволяют отыскать конструкцию, подтверждающую B. Приведенное неформальное разъяснение по ряду причин плохо поддается уточнению. Идея А. А. Маркова состоит в том, что импликация $(A \supset B)$ рассматривается как формулировка утверждения о выводимости B из посылки A средствами нек-рой теории с правилом бесконечной индукции (полуформальной теории). При этом рассматриваемая полуформальная теория, так же как и семантика формул A и B, должна быть объяснена ранее на нек-ром предыдущем этапе построения. В результате возникает С. с. с., в к-рой смысл формул следующей ступени определяется в терминах объектов предыдущей ступени.

А. А. Марков построил два эквивалентных варианта С. с. с.— «длинная башня» [2] и «короткая башня» [3]. Ниже кратко описан вариант построения короткой башни в традиционных обозначениях *предикатов исчисления* и для языка *арифметики формальной* (сам А. А. Марков использовал бесскобочные обозначения формул). Элементарные формулы языка $\mathcal{A}_0$ имеют один из видов $(t = r)$ или $(t \neq r)$, где t, r — примитивно-рекурсивные термы (термы $\mathcal{A}_0$). Остальные формулы $\mathcal{A}_0$ строятся обычным образом с помощью логических связок *конъюнкции* $\wedge$, *дизъюнкции* $\vee$ и *ограниченных кванторов* $(\forall x \leqslant t)\varphi$, $(\exists x \leqslant t)\varphi$, где φ — формула $\mathcal{A}_0$ и t — терм $\mathcal{A}_0$. Язык $\mathcal{A}_0$ разрешим в том смысле, что имеется общий способ распознавания истинных замкнутых формул $\mathcal{A}_0$ среди всего множества формул $\mathcal{A}_0$. Семантика формул $\mathcal{A}_0$ определяется индукцией по построению формулы. Всякая формула $\mathcal{A}_0$ эквивалентна бескванторной формуле.

Формулы $\mathcal{A}_1$ строятся исходя из формул $\mathcal{A}_0$ с помощью любого числа применений связок $\wedge$, $\vee$ и квантора существования. Язык $\mathcal{A}_1$ неразрешим, но может быть построено нек-рое исчисление $И$, в к-ром выводятся все истинные замкнутые формулы $\mathcal{A}_1$ и только они.

Формулы $\mathcal{A}_2$ строятся индуктивно исходя из формул $\mathcal{A}_1$ с помощью однократного применения связки $\supset$ и любого числа применений конъюнкции $\wedge$ и квантора общности $\forall$. Таким образом, формулы $\mathcal{A}_2$ имеют один из следующих видов: 1) формулы $\mathcal{A}_1$; 2) $(\varphi \wedge \psi)$, где φ, ψ — формулы $\mathcal{A}_2$; 3) $(\alpha \supset \beta)$, где α, β — формулы языка $\mathcal{A}_1$; 4) $\forall x \varphi$, где φ — формула $\mathcal{A}_2$. Импликации $(\alpha \supset \beta)$ понимаются следующим образом: $(\alpha \supset \beta)$ выражает наличие общего метода, позволяющего по любому слову Q в алфавите языков устанавливать, что Q не есть вывод формулы α в исчислении $И$, либо давать вывод β в исчислении $И$. Затем строится полуформальная теория $\mathcal{S}_2$, в к-рой выводимы замкнутые формулы $\mathcal{A}_2$ (роль $\mathcal{S}_2$ для $\mathcal{A}_1$ играет $И$). Аксиомами $\mathcal{S}_2$ являются верные формулы $\mathcal{A}_2$. Среди обычных правил вывода имеется и эффективное ω-правило с бесконечным числом посылок: если имеется общий метод, позволяющий вывести в $\mathcal{S}_2$ формулу $\varphi(n)$ при всяком натуральном n, то и формула $\forall x\, \varphi(x)$ может считаться выводимой в $\mathcal{S}_2$. Семантическая пригодность $\mathcal{S}_2$ выражается следующей теоремой: всякая замкнутая формула $\mathcal{A}_2$, выводимая из верной формулы $\mathcal{A}_2$ как из посылки, верна в $\mathcal{A}_2$.

Формулы $\mathcal{A}_3$ строятся индуктивно исходя из формул $\mathcal{A}_2$ с помощью однократного применения связки $\supset_1$ и любого числа применений $\wedge$ и $\forall$. Импликация $(\alpha \supset_1 \beta)$ выражает, что β выводится из формулы α в теории $\mathcal{S}_2$. Можно показать, что два вида импликаций в языке $\mathcal{A}_3$ согласованы между собой там, где оба они применимы. Затем строится полуформальная теория $\mathcal{S}_3$ и доказывается ее семантическая пригодность. Аналогичным образом определяются языки $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, ... и полуформальные теории $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{S}_5$, ... Формулы $\mathcal{A}_{n+1}$ строятся исходя из формул $\mathcal{A}_n$ с помощью однократного применения связки $\supset_{(n-1)}$ к формулам предыдущего языка $\mathcal{A}_n$ и любого числа применений связок $\wedge$ и $\forall$ к формулам языка $\mathcal{A}_{n+1}$. Импликация $(\alpha \supset_{(n-1)} \beta)$ выражает, что β выводится из α в теории $\mathcal{S}_n$. Все $\mathcal{S}_n$ семантически пригодны: всякая замкнутая формула $\mathcal{A}_n$, выводимая из верной формулы, верна. Импликации различных уровней согласованы там, где обе они применимы.

Указанная согласованность дает возможность объединить все языки $\mathcal{A}_n$ в один язык $\mathcal{A}_\omega$, формулы к-рого получаются, если у импликаций всех языков $\mathcal{A}_n$ убрать индексы. Формула φ языка $\mathcal{A}_\omega$ считается верной, если она верна в нек-ром языке $\mathcal{A}_n$ при произвольной расстановке индексов у импликаций, превращающей φ в формулу языка $\mathcal{A}_n$.

Если ввести в $\mathcal{A}_\omega$ отрицание $\neg\varphi$ как сокращение для $(\varphi \supset 0 = 1)$, то формула вида $\neg\neg\alpha \supset \alpha$ верна в $\mathcal{A}_\omega$ для всякой формулы α языка $\mathcal{A}_1$. Таким образом, *конструктивного подбора принцип* оказывается верным в $\mathcal{A}_\omega$. Языки $\mathcal{A}_n$ образуют существенно невырожденную иерархию с точки зрения выразительных возможностей формул этих языков. Классическое исчисление предикатов со связками $\wedge$, $\neg$, $\supset$, $\forall$ является полным относительно истинности в $\mathcal{A}_\omega$.

Наконец, язык $\mathcal{A}_{\omega+1}$ содержит все формулы формальной арифметики. С помощью алгоритма выявления конструктивной задачи по Шанину [4] всякая замкнутая формула φ языка $\mathcal{A}_{\omega+1}$ может быть приведена к виду $\exists x\, \psi(x)$, где $\psi(x)$ — формула языка $\mathcal{A}_\omega$. Формула φ считается верной, если осуществимо натуральное число n такое, что $\varphi(n)$ верна в $\mathcal{A}_\omega$. Такое понимание суждений арифметики хорошо согласовано со всеми основными принципами *конструктивной математики*. В частности, всякая формула $\mathcal{A}_{\omega+1}$ эквивалентна утверждению о собственной рекурсивной реализуемости по Клини [5].

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965; [2] Марков А. А., «Rev. internat. Phil.», 1971, t. 25, fasc. 4, p. 477—507; [3] его же, «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 1, с. 40—43; № 2, с. 279—82; № 3, с. 513—16; № 4, с. 765—68; № 5, с. 1031—34; № 6, с. 1262—64; т. 215, № 1, с. 57—60; № 2, с. 266—69; [4] Шанин Н. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 52, с. 226—311; [5] Драгалин А. Г., Математич. интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979. *А. Г. Драгалин.*

СТЬЮДЕНТА КРИТЕРИЙ, t-критерий,— *значимости критерий* для средних значений нормальных распределений.

О д н о в ы б о р о ч н ы й С. к. Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ подчиняются нормальному $N_1(a, \sigma^2)$ закону, параметры к-рого a и σ^2 неизвестны, и пусть проверяется *сложная гипотеза* $H_0: a=a_0$ против сложной альтернативы $H_1: a\neq a_0$. Для решения этой задачи используется С. к., основанный на статистике

$$t_{n-1}=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s},$$

где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ и } s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

— оценки параметров a и σ^2, вычисленные по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$. При справедливости гипотезы H_0 статистика t_{n-1} подчиняется *Стьюдента распределению* с $f=n-1$ степенями свободы, т. е.

$$\mathsf{P}\{|t_{n-1}|<t\mid H_0\}=2S_{n-1}(t)-1,\ t>0,$$

где $S_f(t)$ — функция распределения Стьюдента с f степенями свободы. Согласно одновыборочному С. к. с уровнем значимости α, $0<\alpha<0{,}5$, гипотезу H_0 следует принять, если

$$\left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s}\right|<t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

где $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ — *квантиль* уровня $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $f=n-1$ степенями свободы, т. е. $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ — решение уравнения $S_{n-1}(t)=1-\alpha/2$. Напротив, если

$$\left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s}\right|\geqslant t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

то согласно С. к. уровня α проверяемую гипотезу $H_0: a=a_0$ следует отвергнуть и принять конкурирующую гипотезу $H_1: a\neq a_0$.

Д в у х в ы б о р о ч н ы й С. к. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ — взаимно независимые нормально распределенные случайные величины, имеющие одинаковую, но неизвестную дисперсию σ^2, и пусть

$$\mathsf{E}X_1=\mathsf{E}X_2=\ldots=\mathsf{E}X_n=a_1,$$
$$\mathsf{E}Y_1=\mathsf{E}Y_2=\ldots=\mathsf{E}Y_m=a_2,$$

причем параметры a_1 и a_2 тоже неизвестны (часто говорят, что имеются две независимые нормальные выборки). Далее, пусть проверяется гипотеза $H_0: a_1=a_2$ против альтернативы $H_1: a_1\neq a_2$. В этом случае как проверяемая гипотеза H_0, так и конкурирующая гипотеза H_1 являются сложными. По наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ можно вычислить оценки

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ и } \overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_j$$

для неизвестных математич. ожиданий a_1 и a_2, а также оценки

$$s_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \text{ и } s_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2$$

для неизвестной дисперсии σ^2. Далее, пусть

$$s^2=\frac{1}{n+m-2}[(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2].$$

Тогда при справедливости гипотезы H_0 статистика

$$t_{n+m-2}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{s\sqrt{1/n+1/m}}$$

подчиняется распределению Стьюдента с $f=n+m-2$ степенями свободы. Именно этот факт и лежит в основе двухвыборочного С. к., предназначенного для проверки H_0 против H_1. Согласно двухвыборочному С. к. уровня α, $0<\alpha<0{,}5$ гипотеза H_0 принимается, если

$$|t_{n+m-2}|<t_{n+m-2}(1-\alpha/2),$$

где $t_{n+m-2}(1-\alpha/2)$ — квантиль уровня $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $f=n+m-2$ степенями свободы. Если же

$$|t_{n+m-2}|\geqslant t_{n+m-2}(1-\alpha/2),$$

то согласно С. к. уровня α гипотеза H_0 отвергается в пользу H_1.

Лит.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, 2 изд., пер. с англ., М., 1975; [2] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] С м и р н о в Н. В., Д у н и н-Б а р к о в с к и й И. В., Краткий курс математич. статистики для технич. приложений, М., 1959; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математич. статистики, 3 изд., М., 1983; [5] Л и н н и к Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистич. теории обработки наблюдений, М., 1958. *М. С. Никулин.*

СТЬЮДЕНТА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ с f с т е п е н я м и с в о б о д ы, t-р а с п р е д е л е н и е,— распределение вероятностей случайной величины

$$t_f=\frac{U}{\sqrt{\frac{1}{f}\chi_f^2}},$$

где U — случайная величина, подчиняющаяся стандартному нормальному $N(0, 1)$ закону, χ_f^2 — случайная величина, не зависящая от U и подчиняющаяся *«хи-квадрат» распределению* с f степенями свободы. Функция распределения случайной величины t_f выражается формулой

$$\mathsf{P}\{t_f\leqslant x\}=S_f(x)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi f}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{u^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}du,\ |x|<\infty.$$

В частности, если $f=1$, то

$$S_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x$$

представляет собой функцию распределения закона Коши. Плотность вероятности С. р. симметрична относительно 0, поэтому

$$S_f(t)+S_f(-t)=1 \text{ для любого } t\in\mathbb{R}^1.$$

Моменты $\mu_r=\mathsf{E}t_f^r$ С. р. существуют только для $r<f$, при этом нечетные моменты равны 0, в частности $\mathsf{E}\,t_f=0$. Четные моменты С. р. выражаются формулой

$$\mu_{2r}=f^r\,\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f}{2}-r\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)},\quad 2\leqslant 2r<f,$$

в частности $\mu_2=\mathsf{D}\{t_f\}=f/(f-2)$. Функция распределения $S_f(x)$ случайной величины t_f выражается в терминах функции *бета-распределения* следующим образом:

$$S_f(x)=1-\frac{1}{2}\,I_{f/(f+x^2)}\left(\frac{f}{2},\frac{1}{2}\right),$$

где $I_z(a, b)$ — неполная бета-функция, $0\leqslant z\leqslant 1$. Если $f\to\infty$, то С. р. сходится к стандартному нормальному закону, т. е.

$$\lim_{f\to\infty}S_f(x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt.$$

П р и м е р. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково нормально $N(a, \sigma^2)$ распределенные случайные величины, причем параметры a и σ^2 неизвестны. Тогда статистики

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ и } s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

являются наилучшими несмещенными оценками параметров a и σ^2, причем $\overline{X}$ и s^2 стохастически независимы.

Так как случайная величина $\sqrt{n}(\overline{X}-a)/\sigma$ подчиняется стандартному нормальному закону, а

$$\frac{n-1}{\sigma^2}s^2=\chi^2_{n-1}$$

распределена по закону «хи-квадрат» с $f=(n-1)$ степенями свободы, то в силу их независимости дробь

$$\frac{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\chi^2_{n-1}}}=\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-a)}{s}$$

подчиняется С. р. с $f=n-1$ степенями свободы. Пусть $t_f(P)$ и $t_f(1-P)=-t_f(P)$ суть решения уравнений

$$S_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-a)}{s}\right)=\begin{cases}P, & 0{,}5<P<1,\\ 1-P, & f=n-1.\end{cases}$$

Тогда статистики $\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_f(P)$ и $\overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_f(P)$ суть нижняя и верхняя границы доверительного множества для неизвестного математич. ожидания a нормального закона $N(a,\sigma^2)$, причем коэффициент доверия этого доверительного множества равен $2P-1$, т. е.

$$\mathrm{P}\left\{\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_f(P)<a<\overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_f(P)\right\}=2P-1.$$

С. р. впервые было использовано У. С. Госсетом (W. S. Gosset, псевдоним Student — Стьюдент).

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] «Student» (Gosset W. S.), «Biometrika», 1908, v. 6, p. 1—25.

М. С. Никулин.

СТЬЮДЕНТИЗИРОВАННЫЙ РАЗМАХ — статистика из класса т. н. стьюдентизированных статистик, получающихся в результате специальной нормировки линейной комбинации порядковых статистик, построенных по нормальной выборке.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые нормально $N(a,\sigma^2)$ распределенные случайные величины, и пусть $X^{(n)}=(X_{(n1)},\ldots,X_{(nn)})$ — вектор порядковых статистик, построенный по наблюдениям $X_1,\ldots,X_n$. Далее, пусть статистика $\sum_{i=1}^n a_i X_{(ni)}$, являющаяся линейной комбинацией порядковых статистик $X_{(n1)},\ldots,X_{(nn)}$, не зависит от нек-рой среднеквадратической оценки s_f^2 дисперсии σ^2, причем $fs_f^2/\sigma^2=\chi_f^2$. В таком случае говорят, что

$$\frac{1}{s_f}\sum_{i=1}^n a_i X_{(ni)}$$

является стьюдентизированной статистикой.

С. р.— стьюдентизированная статистика, когда $\sum_{i=1}^n a_i X_{(ni)}$ представляет собой размах выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, т. е.

$$\sum_{i=1}^n a_i X_{(ni)}=X_{(nn)}-X_{(n1)},$$

и, следовательно, С. р. имеет вид

$$[X_{(nn)}-X_{(n1)}]/s_f.$$

Лит.: [1] Дэйвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

М. С. Никулин.

СТЭНТОНА ЧИСЛО — один из критериев подобия тепловых процессов, характеризующий интенсивность диссипации энергии в потоке жидкости или газа:

$$\mathrm{St}=\alpha/c_p\rho v,$$

где α — коэффициент теплоотдачи, c_p — удельная теплоемкость среды при постоянном давлении, ρ — плотность, v — скорость течения.

С. ч. связано с *Нуссельта числом* Nu и *Пекле числом* Pe соотношением: $\mathrm{St}=\mathrm{Nu}/\mathrm{Pe}$.

С. ч. наз. по имени Т. Стэнтона (Th. Stanton).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $u=u(x): D\to[-\infty,\infty)$ точки $x=(x_1,\ldots,x_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, определенная в области $D\subset\mathbb{R}^n$ и обладающая следующими свойствами: 1) $u(x)$ полунепрерывна сверху в D; 2) для любой точки $x_0\in D$ существуют сколь угодно малые значения $r>0$ такие, что

$$u(x_0)\leqslant I(u;\,x_0,\,r)=\frac{1}{s_n r^{n-1}}\int_{S(x_0,\,r)}u(x)\,d\sigma(x),$$

где $I(u;\,x_0,\,r)$ — среднее значение функции $u(x)$ по площади сферы $S(x_0,\,r)$ с центром x_0 радиуса r, $s_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$; 3) $u(x)\not\equiv-\infty$ (это условие иногда опускается). В данном определении С. ф. среднее значение $I(u;\,x_0,\,r)$ по площади сферы можно заменить на среднее значение

$$J(u;\,x_0,\,r)=\frac{1}{v_n r^n}\int_{B(x_0,\,r)}u(x)\,dv(x)$$

по объему шара $B(x_0,\,r)$, где $v_n=s_n/n$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Равносильное определение С. ф., объясняющее название «С. ф.», получается, если условие 2) заменить на 2′) : если Δ — относительно компактная подобласть D, а $v(x)$ — гармоническая функция в Δ, непрерывная на замыкании $\overline{\Delta}$ и такая, что

$$u(x)\leqslant v(x) \qquad (1)$$

на границе $\partial\Delta$, то неравенство (1) сохраняется и всюду в области Δ ($v(x)$ наз. гармонической мажорантой С. ф. $u(x)$ в Δ). Если функция $u(x)$ принадлежит классу $C^2(D)$, то для того чтобы она была С. ф., необходимо и достаточно, чтобы в D оператор Лапласа Δu был неотрицательным.

Идея С. ф. была заложена по существу в *выметания методе* А. Пуанкаре (H. Poincaré). Важные применения С. ф. нашли в основополагающих работах Ф. Гартогса [1] по теории аналитич. функций многих комплексных переменных; систематич. изучение С. ф. началось с работ Ф. Рисса [2]. Тесная связь С. ф. с аналитич. функциями $f(z)$ одного или нескольких комплексных переменных $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $n\geqslant 1$, и вытекающие отсюда возможности применения С. ф. для изучения аналитич. функций обусловлены тем, что модуль $|f(z)|$ и логарифм модуля $\ln|f(z)|$ аналитич. функции суть С. ф. С другой стороны, условие 2′) показывает, что С. ф. можно рассматривать как аналог *выпуклых функций* одного действительного переменного.

Простейшие свойства С. ф. 1) Если $u_1,\ldots,u_m$ — С. ф. в D и $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ — неотрицательные числа, то линейная комбинация $\sum_{k=1}^m\lambda_k u_k$ есть С. ф. в D. 2) Верхняя огибающая $\sup\{u_k(x):1\leqslant k\leqslant m\}$ конечного семейства С. ф. $\{u_k\}_{k=1}^m$ есть С. ф. Если верхняя огибающая бесконечного семейства С. ф. полунепрерывна сверху, то она есть также С. ф. 3) Равномерно сходящаяся и монотонно убывающая последовательности С. ф. сходятся к С. ф. 4) Если $u(x)$ — С. ф. в D, а $\varphi(u)$ — выпуклая неубывающая функция на области значений E функции u в D, или если $u(x)$ — гармоническая функция в D, а $\varphi(u)$ — выпуклая функция на E, то $\varphi(u(x))$ — С. ф. в D. В частности, если $u(x)$ — С. ф. в D, то $e^{\lambda u(x)}$, $\lambda>0$, и $[u^+(x)]^k$, $k\geqslant 1$, где $u^+(x)=\max\{u(x),\,0\}$, суть С. ф. в D; если $u(x)$ — гармоническая функция в D, то $|u(x)|^k$, $k\geqslant 1$,— С. ф. в D. 5) Принцип максимума: если $u(x)$ — С. ф. в D и для любой граничной точки $\xi\in\partial D$ и любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $V=V(\xi)$ такая, что $u(x)<\varepsilon$ в $D\cap V$,

либо $u(x)<0$ в D, либо $u(x)\equiv 0$. Это свойство остается в силе и для неограниченных областей D, причем если $\xi=\infty\in\partial D$, то под окрестностью V понимается внешность шара $V=V(\infty)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|>R\}$. 6) Если $u(z)$ — С. ф. в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, и $z=z(w)$ — голоморфное отображение области $D'\subset\mathbb{C}^n$ в D, то $u(z(w))$ — С. ф. в D'. 7) Функция $u(x)$ — гармоническая в области $D\subset\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ и $-u(x)$ суть С. ф. в D. 8) Если $u(x)$ — С. ф. во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная сверху, то $u(x)=\mathrm{const}$ (в $\mathbb{R}^n$ при $n\geqslant 3$ это свойство не имеет места). На свойствах 2), 5) и 7) основан *Перрона метод* решения задачи Дирихле для гармонич. функций.

Большое значение имеют свойства выпуклости средних значений С. ф.: если $u(x)$ — С. ф. в кольце $r_1\leqslant r=|x-x_0|\leqslant r_2$, $0<r_1<r_2$, то средние $I(u;\ x_0,\ r)$, $J(u;\ x_0,\ r)$, а также максимум

$$M(u;\ x_0,\ r)=\max\{u(x):|x-x_0|=r\}$$

суть выпуклые функции относительно $\ln r$ для $n=2$ или относительно r^{2-n} для $n\geqslant 3$ на отрезке $r_1\leqslant r\leqslant r_2$; если $u(x)$ — С. ф. в шаре $0\leqslant r=|x-x_0|\leqslant r_2$, то, кроме того, $I(u;\ x_0,\ r)$ и $J(u;\ x_0,\ r)$ суть непрерывные неубывающие функции от r на отрезке $0\leqslant r\leqslant r_2$, причем принимается

$$I(u;\ x_0,\ 0)=J(u;\ x_0,\ 0)=u(x_0);$$

в этом последнем случае

$$u(x_0)\leqslant J(u;\ x_0,\ r)\leqslant I(u;\ x_0,\ r)$$

для $0\leqslant r\leqslant r_2$. Средние $I(u;\ x_0,\ r)$ и $J(u;\ x_0,\ r)$, рассматриваемые как функции точки x_0 при фиксированных u и r, суть С. ф. в соответствующей подобласти $D'\subset D$, причем $J(u;\ x_0,\ r)$ непрерывна. Составляя итерации достаточно высокого порядка

$$u_m^{(k)}(x)=J\left(u_m^{(k-1)};\ x,\ \frac{1}{m}\right),\quad u_m^{(0)}(x)=u(x),$$

можно получить монотонно убывающую последовательность сколь угодно гладких С. ф. $\{u_m^{(k)}(x)\}_{m=m_0}^{\infty}$, сходящуюся при $m\to\infty$ к произвольно заданной С. ф. $u(x)$.

Ньютонов потенциал и *логарифмический потенциал* неотрицательных масс, взятые со знаком минус, суть С. ф. всюду в пространстве $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, одной из основных в теории С. ф. является теорема Рисса о локальном представлении произвольной С. ф. в виде суммы гармонич. функции и взятого со знаком минус потенциала (см. [2]). Точнее, если $u(x)$ — С. ф. в области $D\subset\mathbb{R}^n$, то существует единственная неотрицательная борелевская мера μ на D (ассоциированная с $u(x)$ мера, или мера Рисса) такая, что для любого компакта $E\subset D$ справедливо представление

$$u(x)=\int_E K(x-\xi)\,d\mu(\xi)+h(x),\qquad (2)$$

где $K(x-\xi)=\ln|x-\xi|$ при $n=2$, $K(x-\xi)=-|x-\xi|^{2-n}$ при $n\geqslant 3$, $h(x)$ — гармонич. функция во внутренности E. Теорема Рисса устанавливает тесную связь теории С. ф. с *потенциала теорией*.

Если компакт E есть регулярная замкнутая область $\overline{G}$, $E=\overline{G}$, ограниченная, напр., поверхностью Ляпунова и допускающая *Грина функцию* $g(x,\ \xi)$, то наряду с (2) справедливо представление с участием потенциала Грина:

$$u(x)=-\int_{\overline{G}} g(x,\ \xi)\,d\mu(\xi)+w(x),\qquad (3)$$

где $w(x)$ — наименьшая гармоническая мажоранта С. ф. $u(x)$ в области G.

Представление вида (3), вообще говоря, не имеет места во всей области определения D С. ф. $u(x)$, и в теории С. ф. важное значение имеет вопрос о выделении класса тех С. ф. $u(x)$, к-рые допускают представление (3) во всей области D, т. е. вопрос о выделении класса A С. ф. $u(x)$, имеющих гармонич. мажоранту во всей области D. Напр., если $D=B(0,\ R)$ — шар и существует константа $C=C(u)$ такая, что

$$\int_{S(0,\ R)} u^+(r\xi)\,d\sigma(\xi)<C(u)<+\infty,\ 0<r<1,\qquad (4)$$

то $u(x)$ допускает представление (3) в D, причем наименьшая гармонич. мажоранта $w(x)$ в свою очередь представима интегралом Пуассона — Стилтьеса

$$w(x)=\int\frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{|x-\xi|^n}\,d\nu(\xi),\qquad (5)$$

где ν — борелевская мера произвольного знака, сосредоточенная на граничной сфере $\partial D=S(0,\ R)$ (граничная мера) и нормированная условием $\int d\nu(\xi)=1$.

В связи с представлением (5) в приложениях важно знать, при каких условиях граничная мера ν имеет только отрицательную сингулярную составляющую, т. е. при каких условиях в каноническом разложении $\nu=\nu^+-\nu^-$ составляющая ν^+ абсолютно непрерывна. Этот вопрос решается введением класса сильно субгармонических функций (см. [11]—[13], [15], а также [10], где рассмотрены и обобщения). Пусть $\psi(y)$ — возрастающая вогнутая функция от y такая, что $\lim\limits_{y\to+\infty} y/\psi(y)=+\infty$. Функция $u(x)$, $x\in D$, наз. сильно субгармонической относительно $\psi(y)$, если $\psi(u(x))$ есть С. ф. Напр., к классу сильно субгармонических относятся *логарифмически субгармонические функции* $u(x)\geqslant 0$, для к-рых $\ln u(x)$ есть С. ф. Если для сильно С. ф. $u(x)$ в шаре D выполняется условие (4), то $u(x)$ представима в виде (3) в D и для нее граничная мера ν характеризуется разложением

$$d\nu(\xi)=u(\xi)\,d\sigma(\xi)-d\nu^-(\xi),\ \xi\in\partial D,$$

где $u(\xi)$ — радиальные граничные значения функции $u(x)$ (существующие почти всюду по мере Лебега на сфере $\partial D=S(0,\ R)$), $d\nu^-\geqslant 0$ — сингулярная составляющая меры ν.

С. ф. класса A в шаре D почти всюду на граничной сфере $\partial D=S(0,\ R)$ имеют радиальные граничные значения. Однако построены примеры ограниченных и непрерывных в шаре D С. ф., нигде на сфере ∂D не имеющих угловых граничных значений,— явление, не имеющее места для гармонич. функций. Для существования угловых граничных значений нужно наложить дополнительные, кроме (4), условия на ассоциированную меру μ в D (см., напр., [14]).

Одним из существенных вопросов в теории С. ф. и ее приложениях является характеризация граничных свойств функций различных подклассов класса A. Общий способ введения таких подклассов состоит в том, что для сильно субгармонич. функций $u(x)$ относительно вогнутой функции $\psi(y)$ рассматривается какая-либо неубывающая функция $\varphi(y)$, выпуклая относительно $\psi(y)$ и такая, что $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi(y)/\psi(y)=+\infty$, и вводится класс A_φ, определяемый для шара условием

$$\int_{S(0,\ R)}\varphi^+(u(r\xi))\,d\sigma(\xi)<C(u,\varphi)<+\infty,0<r<1.$$

О граничных свойствах С. ф. см. [3]—[5], [10]—[16].

Для функций, представимых в виде разности двух С. ф., вводится понятие характеристической функции по Р. Неванлинне (R. Nevanlinna) и обобщается теория *ограниченного вида функций* (см. [3], [7]).

Своеобразным обобщением теории *целых функций* является теория С. ф. во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Здесь получаются обобщения классич. теорем о представле-

нии целых функций Вейерштрасса и Адамара, теория роста и распределения значений, теория асимптотич. значений и асимптотич. путей и др. (см. [7]).

В теории аналитич. функций многих комплексных переменных важное значение имеет изучение таких подклассов С. ф., как *плюрисубгармонические функции* и *плюригармонические функции* (см. [17]). Об аксиоматических обобщениях С. ф. см. [9].

Лит.: [1] Hartogs F., «Math. Ann.», 1906, Bd 62, S. 1—88; [2] Riesz F., «Acta math.», 1926, v. 48, p. 329—43; 1930, v. 54, p. 321—60; [3] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937; [4] его же, Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1941; [5] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [6] Radó T., Subharmonic functions, B., 1937; [7] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., М., 1980; [8] Brelot M., Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point, P., 1934; [9] его же, Lectures on potential theory, Bombay, 1960; [10] Heins M., Hardy classes on Riemann surfaces, B.—[u. a.], 1969; [11] Соломенцев Е. Д., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1938, № 5—6, с. 571—82; [12] Привалов И. И., Кузнецов П. И., «Матем. сб.», 1939, т. 6, № 3, с. 345—76; [13] Соломенцев Е. Д., «Вестн. МГУ», 1959, № 5; [14] его же, «Чехосл. матем. ж.», 1958, т. 8, № 4, с. 520—36; [15] Gårding L., Hörmander L., «Math. Scand.», 1964, v. 15, p. 93—96; 1966, v. 18, p. 183; [16] Соломенцев Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100; [17] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ выпуклой функции $f: X \to \mathbb{R}$ в точке x_0, определенной на пространстве X, находящемся в двойственности с пространством Y — множество в Y, определяемое соотношением:

$$\partial f(x_0) = \{y \in Y : f(x) - f(x_0) \geqslant \geqslant \langle y, x - x_0 \rangle \text{ для всех } x \in X\}.$$

Напр., С. нормы $f(x) = \|x\|$ в нормированном пространстве X с сопряженным X^* имеет вид

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|, \ \|x^*\| = 1\}, & \text{если } x \neq 0, \\ \{x^* : \|x^*\| = 1\}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

С. выпуклой функции f в точке x_0 является выпуклым множеством. Если f непрерывна в этой точке, то С. непуст и компактен в топологии $\sigma(Y, X)$.

С. выпуклой функции играет роль, подобную роли производной в классич. анализе. Для него справедливы теоремы, аналогичные соответствующим теоремам для производной. Напр., если f_1 и f_2 — выпуклые функции и в нек-рой точке $x \in (\operatorname{dom} f_1) \wedge (\operatorname{dom} f_2)$, по крайней мере, одна из функций непрерывна, то

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \partial (f_1 + f_2)(x)$$

для всех x (теорема Моро — Рокафеллара).

С. опорной функции выпуклого множества A из X, компактного в топологии $\sigma(Y, X)$, совпадает с самим множеством A. Это выражает двойственность между выпуклыми компактными множествами и выпуклыми замкнутыми однородными функциями (см. также *Опорная функция*, *Надграфик*, *Выпуклый анализ*).

Лит.: [1] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973.

В. М. Тихомиров.

СУБМЕРСИЯ — отображение $f: M \to N$ m-мерного многообразия M в n-мерное многообразие N, $n \leqslant m$, при к-ром для любой точки $p \in M$ можно так ввести локальные координаты $x_1, \ldots, x_m$ на M возле p и $y_1, \ldots, y_n$ на N возле $f(p)$, что в терминах этих координат f локально представляется в виде

$$(x_1, \ldots, x_m) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_n).$$

Если M и N снабжены структурой кусочно линейного, аналитического или дифференцируемого (класса C^k) многообразия и локальные координаты можно выбрать кусочно линейными, аналитическими или дифференцируемыми (класса C^l, $l \leqslant k$), то С. наз. кусочно линейной, аналитической или дифференцируемой (класса C^l). С. можно также определить для многообразия с краем (при этом в топологич. задачах оказывается целесообразным налагать дополнительное условие о поведении отображения возле края, см. [1]) и в бесконечномерном случае (см. [2]). Понятие С. в нек-ром неформальном смысле двойственно понятию *погружения* (иммерсии), и теории их аналогичны.

Лит.: [1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967.

Д. В. Аносов.

СУБНОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА, достижимая подгруппа,— любой член нек-рого субнормального ряда группы. Для обозначения субнормальности подгруппы H в группе G используется обозначение $H \lhd\lhd G$.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, М., 1972.

Н. Н. Вильямс.

СУБНОРМАЛЬНЫЙ РЯД группы — *подгрупп ряд* группы G

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

где каждая подгруппа G_i является нормальной подгруппой в G_{i+1}. Факторгруппы G_{i+1}/G_i наз. факторами, а число n — длиной С. р. Рассматриваются и бесконечные С. р. (см. *Подгрупп система*). Неуплотняемый далее С. р. наз. композиционным рядом, а его факторы — композиционными факторами.

О. А. Иванова.

СУБПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, субтепловая функция,— аналог *субгармонической функции* для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad (*)$$

где $u = u(x, t)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа. Напр., функция $v = v(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, класса C^2 будет С. ф. в прямоугольнике

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : a < x < b, \ 0 < t < h\},$$

если

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0$$

всюду в D. В более общем случае пусть точка $(x_0, t_0) \in D$ и Δ — достаточно малый равносторонний треугольник, основание к-рого параллельно оси $t = 0$, $(x_0, t_0) \in \Delta \subset D$. Непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$ функция $v = v(x, t)$ наз. субпараболической в D, если ее значение в любой точке $(x_0, t_0) \in D$ не больше, чем значение в этой точке того решения уравнения $(*)$ в любом достаточно малом треугольнике Δ, $(x_0, t_0) \in \Delta$, к-рое имеет на сторонах Δ те же значения, что и $v(x, t)$.

Для С. ф. справедливы многие свойства субгармонических функций, в т. ч. и принцип максимума.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [2] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [3] его же, «Compos. math.», 1935, t. 1, p. 383—419.

Е. Д. Соломенцев.

СУБПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО — одно из обобщений пространств постоянной кривизны (проективного пространства). Определяется k-кратное проективное пространство аффинной связности, геодезические линии к-рого выражаются в нек-рой системе координат системой из $(n - 1)$ уравнений, из к-рых ровно k линейных. При $k = n - 2$ геодезич. линии являются плоскими, располагаясь в двумерных евклидовых плоскостях, и пространство наз. субпроективным, если все эти двумерные евклидовы плоскости проходят через общую точку или параллельны одному направлению (общая точка — бесконечно удаленная).

Пусть A_n есть n-мерное С. п. аффинной связности без кручения. В нек-рой проективной системе x^i координат пространства A_n коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{jk}=x^i f_{jk}+\delta^i_k p_j+\delta^i_j p_k,\ f_{jk}=f_{kj},$$

где δ^i_j — символ Кронекера,

$$p_k=\frac{1}{2}(\Gamma^k_{kk}-f_{kk}x^k);$$

в этой системе координат все двумерные евклидовы плоскости, в к-рых расположены геодезич. линии A_n, проходят через начало координат.

Вообще в С. п. A_n существует канонич. система координат x^i, в к-рой коэффициенты связности принимают наиболее простой вид

$$\Gamma^i_{jk}=x^i f_{jk}.$$

Аналогично определяется риманово субпроективное пространство V_n, метрика к-рого приводится к одному из трех возможных видов:

$$ds^2=g_{\alpha\gamma}dx^\alpha dx^\gamma,$$

где

1) $g_{ik}=\partial_i\tau\partial_k\tau+\frac{\lambda}{\theta}\partial_{ik}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)$,

2) $g_{ik}=\partial_i\tau\partial_k\tau+c\frac{\lambda}{\theta}\partial_{ik}\lambda,\ c=\text{const}\neq 0$;

здесь θ — произвольная функция координат x^i, τ — функция величины $\frac{\lambda}{\theta}$, ν — квадратичная форма от x^i, λ в 1) — линейная форма, а в 2) — квадратный корень из квадратичной формы, не являющейся полным квадратом.

3) Исключительный случай

$$\theta ds^2=a_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta+2d\lambda dx^{n-1}+2d\nu dx^n,$$

где $a_{\alpha\beta}=\text{const}$, $\det|a_{\alpha\beta}|\neq 0$, θ — однородная функция 1-й степени от x^{n-1} и x^n, λ и ν — функции, связанные соотношением

$$\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+\lambda x^{n-1}+\nu x^n=0,\ \alpha,\beta=1,\ldots,n-2.$$

Функции λ и ν не являются однородными функциями 1-й степени.

Все эти три случая могут быть приведены путем выбора координат z^i к единообразному виду:

1) $ds^2=e^{-2\mu(z^1)}(e_1dz^{1^2}+e_2dz^{2^2}+\ldots+e_ndz^{n^2})$,

2) $ds^2=e^{-2\mu(z)}\sum_{i=1}^n(e_idz^{i^2}),\ z=\sqrt{\sum_{i=1}^n e_idz^{i^2}}$,

3) $ds^2=e^{-2\mu(z^1)}\left(2dz^1dz^2+\sum_{i=3}^n e_idz^{i^2}\right)$,

$i=3,\ldots,n\ (e_i=\text{const})$.

Все римановы С. п. V_n являются конформно-евклидовыми пространствами. Римановы С. п. принадлежат к классу полуприводимых римановых пространств и имеют специальное построение метрик.

Существуют тензорные признаки конформно евклидовых С. п., выделяющие их из класса всех конформно евклидовых пространств. Всякое С. п. V_n (кроме случая 3) может быть реализовано на нек-рой гиперповерхности в евклидовом пространстве E_{n+1} в случае 1) или на гиперповерхности вращения в E_{n+1} в случае 2). Имеет место и обратное утверждение: всякая гиперповерхность вращения вокруг неизотропной оси в евклидовом пространстве E_{n+1}, $n>2$, представляет собой риманово С. п. с метрикой вида 2).

Движения в римановых С. п. V_n определяются обычным способом. С. р. V_n характеризуются тем, что если V_n не является пространством постоянной кривизны, то оно допускает максимальную нетранзитивную группу движений порядка $\frac{1}{2}n(n-1)$, и, наоборот, всякое риманово пространство V_n, допускающее максимальную нетранзитивную группу порядка $\frac{1}{2}n(n-1)$, является С. п. Римановы С. п. V_n являются максимально подвижными неэйнштейновыми пространствами (аналогичное место занимают пространства постоянной кривизны среди пространств Эйнштейна).

Понятие С. п. допускает следующее обобщение: пространство аффинной связности A_n наз. обобщенным субпроективным пространством, если его геодезич. линии лежат в евклидовых плоскостях E_{r+1}, $1\leqslant r\leqslant n-2$, проходящих через фиксированную плоскость E_{r-1} (конечную или бесконечно удаленную).

Лит.: [1] Каган В. Ф., Субпроективные пространства, М., 1961.

Л. А. Сидоров.

СУДЗУКИ ГРУППА — простая конечная группа, член бесконечной серии простых групп $\mathrm{Sz}(q)$, открытых М. Судзуки (M. Suzuki).

Пусть n — натуральное число, F — конечное поле из $q=2^{2n+1}$ элементов, θ — такой автоморфизм поля F, что $\alpha^{\theta^2}=\alpha^2$ для любого $\alpha\in F$. Тогда С. г. $\mathrm{Sz}(q)$ порождается подгруппой T, состоящей из всех диагональных матриц порядка 4 с диагональными элементами $\lambda^{1+\theta}$, λ, λ^{-1}, $(\lambda^{1+\theta})^{-1}$ ($\lambda\in F$, $\lambda\neq 0$), подгруппой U, состоящей из всех треугольных матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^{1+\theta}+\beta & \alpha^\theta & 1 & 0 \\ \alpha^{2+\theta}+\alpha\beta+\beta^\theta\beta & \alpha & 1 & \end{Vmatrix}$$

($\alpha,\beta\in F$), и матрицей

$$\begin{Vmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{Vmatrix}.$$

Подгруппа U — силовская 2-подгруппа группы $\mathrm{Sz}(q)$; она является *Судзуки 2-группой*. Подгруппа UT совпадает с нормализатором подгруппы U. Подстановочное представление группы $\mathrm{Sz}(q)$ на смежных классах по UT дважды транзитивно; степень его равна q^2+1. Порядок С. г. $\mathrm{Sz}(q)$ равен $q^2(q-1)(q^2+1)$ и не делится на 3. Наоборот, любая неабелева конечная простая группа, чей порядок не делится на 3, изоморфна некрой С. г. Группа $\mathrm{Sz}(q)$ — максимальная подгруппа симплектической группы $Sp(4,q)$ и централизатор в $Sp(4,q)$ нек-рого автоморфизма порядка 2 группы $Sp(4,q)=B_2(q)$. Иными словами, $\mathrm{Sz}(q)$ изоморфна ${}^2B_2(q)$ — скрещенному аналогу *Шевалле группы* типа B_2 над полем из q элементов.

Лит.: [1] Suzuki M., «Ann. Math.», 1962, v. 75, № 1, p. 105—45; [2] Картер Р., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 3—47.

В. Д. Мазуров.

СУДЗУКИ 2-ГРУППА — конечная неабелева 2-группа U, отличная от группы кватернионов, к-рая допускает циклическую группу автоморфизмов $\langle a\rangle$, действующую транзитивно на множестве Ω элементов порядка 2 группы U. Последнее означает, что для любых двух элементов x, y из Ω найдется такое натуральное число n, что $y=x^{a^n}$. В С. 2-г. U множество Ω вместе с единичным элементом составляют подгруппу Z, совпадающую с центром группы U; при этом факторгруппа U/Z элементарна. Если порядок Z равен q, то порядок U равен q^2 или q^3.

С. 2-г. полностью описаны (см. [1]). Название связано с тем, что в *Судзуки группах* силовская 2-подгруппа U обладает этими же свойствами.

Лит.: [1] Higman G., «Ill. J. Math.», 1963, v. 7, № 1, p. 79—96. *В. Д. Мазуров.*

СУДЗУКИ СПОРАДИЧЕСКАЯ ГРУППА — простая конечная группа порядка

$$448\ 345\ 497\ 600 = 2^{13}\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13,$$

построенная М. Судзуки (M. Suzuki) как примитивная группа подстановок степени 1782 со стабилизатором точки, изоморфным *Шевалле группе* G_2 (4).

О других спорадических группах см. *Спорадическая простая группа.*

СУЖДЕНИЕ, предложение, утверждение, высказывание,— повествовательное сообщение, к-рое в силу своего смысла может быть истинным или ложным. В более узком значении термина под С. в математич. логике понимается замкнутая формула логико-математич. языка, к-рая в силу семантических соглашений языка, *семантики* языка, может быть квалифицирована как истинная или ложная.

Так, в аксиоматич. теории множеств различные математич. утверждения, напр. *выбора аксиома* или *континуум-гипотеза*, записываются в виде нек-рых формул, к-рые в силу общих семантических соображений могут быть истолкованы как выражающие соответствующие содержательные утверждения. При этом совершенно не обязательно, чтобы имелся способ распознавания истинных и ложных утверждений языка. Более того, сама семантика может оказаться недостаточно разработанной или может встречаться с принципиальными трудностями при решении вопроса относительно истинности нек-рых С. языка. Неразрешимость С. в рамках нек-рой теории выясняется с помощью *формализации метода* (примеры см. в ст. *Аксиоматическая теория множеств*). *А. Г. Драгалин.*

СУЖЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ на инвариантное подпространство — то же, что *подпредставление представления*; С. п. л группы X на подгруппу Y (алгебры X на подалгебру Y) — представление ρ группы (алгебры) Y, определяемое формулой $\rho(y)=\pi(y)$ для всех $y\in Y$. С. п. л наз. также ограничением представления π соответственно на инвариантное подпространство или на подгруппу, подалгебру. Если π — непрерывное представление, то и С. п. л также непрерывно. *А. И. Штерн.*

СУММАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ функции f — функция $x\geqslant 1$, обозначающая сумму значений $f(n)$ на множестве натуральных чисел $n\leqslant x$, $\sum_{n\leqslant x} f(n)$. С. ф. являются одним из основных средств выражения разнообразных свойств числовых последовательностей.

Примеры С. ф.: число простых чисел $\leqslant x$, $\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$ — *Чебышева функция*, число делителей всех $n\leqslant x$ и т. п. (см. [1], [2]).

Основная задача состоит в том, чтобы найти возможно более точное асимптотич. выражение С. ф., а для С. ф., не имеющей асимптотики, наилучшую оценку ее модуля для больших значений x.

В основе аналитич. методов изучения С. ф. лежат *Коши интегральная теорема* и *Дирихле ряды* вида

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,n^{-s}.$$

Если такой ряд абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\ s>\sigma_0\geqslant 1$, то для нецелого x, $c>\sigma_0$, справедливо тождество

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds,$$

из к-рого, имея аналитич. продолжение $F(s)$ переносом пути интегрирования влево на нек-рое $\mathrm{Re}\ s=\sigma_1<0$ за счет оценок интеграла по новому контуру, получается соответствующая оценка для С. ф. f. В случае $f(n)=\Lambda(n)$, напр., интегрирование можно перенести на $\mathrm{Re}\ s=-\infty$, что дает формулу Римана — Мангольдта для $\psi(x)$. Из общих применений метода известна следующая теорема.

Предположения: $f(n)$, l_n — комплексные числа, $\alpha\geqslant 0$, α_r, γ_r — действительные числа, σ_r, β_r — положительные числа, μ и ν — целые числа $\geqslant 1$, Γ — гамма-функция, $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$.

1) Для любого $\varepsilon>0$ $f(n)\ll n^{\alpha+\varepsilon}$.

2) Определенная для $s=\sigma+it$, $\sigma>1+\alpha$, функция

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,n^{-s}$$

мероморфна во всей плоскости и имеет конечное число полюсов в полосе $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} l_n \exp(\lambda_n s)$ абсолютно сходится при $\sigma<0$.

4) Для $\sigma<0$

$$\prod_{r=1}^{\mu}\Gamma(\alpha_r+\beta_r s)\,F(s)=$$

$$=\prod_{r=1}^{\nu}\Gamma(\gamma_r-\delta_r s)\sum_{n=1}^{\infty} l_n \exp(\lambda_n s).$$

5) $\beta_1+\ldots+\beta_\mu=\delta_1+\ldots+\delta_\nu$.

6) Если положить

$$\sum_{r=1}^{\nu}\gamma_r-\sum_{r=1}^{\mu}\alpha_r+\frac{1}{2}(\mu-\nu)=\eta,$$

то $\eta\geqslant\alpha+\frac{1}{2}$.

Для фиксированной полосы $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ найдется постоянная $\gamma=\gamma(\sigma_1,\sigma_2)$ такая, что $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ и больших $|t|$ имеет место оценка $F(s)\ll\exp(\gamma|t|)$.

Заключение. Для любого $\varepsilon>0$ имеют

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=R(x)+O\left(x^{(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}+\varepsilon}\right),$$

где $R(x)$ — сумма вычетов функции $F(s)\,x^s/s$ для всех ее полюсов в полосе

$$(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}<\sigma\leqslant\alpha+1.$$

Лит.: [1] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [2] Хуа Л о-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964. *А. Ф. Лаврик.*

СУММИРОВАНИЕ рядов, последовательностей, интегралов — вычисление соответственно сумм рядов, пределов последовательностей, значений интегралов. Термин «С.» обозначает и само определение суммы ряда (предела последовательности, значения интеграла), когда в обычном определении эти значения не существуют, т. е. ряд (последовательность, интеграл) расходится. Такое определение задают обычно в виде нек-рого правила и называют *суммирования методом* рядов (последовательностей, интегралов). *И. И. Волков.*

СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ — построение обобщенных сумм расходящихся рядов с помощью *суммирования методов*. Если по нек-рому правилу P ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad (*)$$

относят число s, называемое его суммой ряда, то говорят, что ряд суммируем к сумме s методом суммирования P или P-суммируем к сумме s и этот факт обозначается одним из символов

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s\,(P),$$

$$\lim s_n = s\,(P),\quad P\text{-}\lim s_n = s,$$

где s_n — частичные суммы ряда (*). Число s в этом случае наз. также P-суммой ряда. Напр., для ряда (*) рассматривают последовательность $\{\sigma_n\}$ средних арифметических первых n частичных сумм ряда

$$\sigma_n=\frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{(n+1)}.$$

Если при этом σ_n имеет предел при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=s,$$

то говорят, что ряд (*) суммируем к сумме s *средних арифметических методом суммирования* и обозначают символом

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k=s\,(C,1),$$

или

$$\lim s_k=s\,(C,1)$$

(см. *Чезаро методы суммирования*).

При таком определении суммы ряда каждый сходящийся ряд суммируем, причем к той же сумме, к к-рой он сходится, и, кроме того, существуют расходящиеся ряды, суммируемые этим методом. Напр., ряд

$$1-1+1-1+\ldots$$

суммируем указанным методом и его $(C, 1)$-сумма равна $^1/_2$.

Определение метода суммирования обычно подчиняется ряду требований. Напр., требуют, чтобы метод суммировал целый класс рядов; чтобы не противоречил сходимости, т. е., будучи применен к сходящемуся ряду, суммировал бы его к той же сумме, к к-рой ряд сходится (см. *Регулярные методы суммирования*); чтобы из суммируемости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty}v_k$$

данным методом соответственно к суммам u и v следовала суммируемость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda u_k+\mu v_k),$$

причем к сумме $\lambda U+\mu V$ (свойство линейности). См. также *Расходящийся ряд*.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Канторович Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977; [5] Peyerimhoff A., Lectures on summability, B., 1969; [6] Knopp K., Theory and application on infinite series, N. Y., 1971; [7] Zeller K., Beekmann V., Theorie der Limitierungsverfahren, 2 Aufl., B.—Hdlb.— N. Y., 1970; [8] Petersen G. M., Regular matrix transformations, L., 1966. *И. И. Волков.*

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ — построение средних рядов Фурье с помощью *суммирования методов*. Наиболее развита теория С. р. Ф. по тригонометрич. системе. В этом случае для функций $f\in L(0,\ 2\pi)$ с рядами Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\equiv\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)$$

изучаются свойства средних, соответствующих рассматриваемому методу суммирования. Напр., для *Абеля — Пуассона метода суммирования* средними являются гармонические в единичном круге функции

$$f(r,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}r^kA_k(x),$$

а для *средних арифметических метода суммирования* — суммы Фейера

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)A_k(x).$$

Кроме названных, наиболее важными в теории одномерных тригонометрич. рядов являются *Чезаро методы суммирования*, *Рисса метод суммирования*, *Римана метод суммирования*, *Бернштейна — Рогозинского метод суммирования*, *Валле Пуссена метод суммирования*. Рассматриваются также методы суммирования, порождаемые более или менее произвольной последовательностью λ-множителей

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{n,\,k}A_k(x).$$

С. р. Ф. применяется в следующих задачах.

Представление функций с помощью рядов Фурье. Напр., средние Абеля — Пуассона $f(r, x)$ при $r\to1-0$ и суммы Фейера $\sigma_n(x)$ при $n\to\infty$ сходятся к функции $f(x)$ в точках ее непрерывности, причем сходятся равномерно, если f непрерывна во всех точках; для каждой функции $f\in L$ эти средние сходятся к ней в метрике L. Частные суммы рядов Фурье указанными свойствами не обладают.

Построение полиномов с хорошими аппроксимативными свойствами. Фактически с помощью С. р. Ф. было установлено *Джексона неравенство*. Для решения этой задачи, наряду с использованием известных методов суммирования, были предложены новые методы — *Джексона сингулярный интеграл*, *Валле Пуссена суммы*.

В терминах средних рядов Фурье можно характеризовать многие свойства функций. Напр., функция f является существенно ограниченной в том и только том случае, когда существует такая постоянная M, что $|\sigma_n(x)|\leqslant M$ для всех n и x.

Существенную роль играет С. р. Ф. в теории кратных тригонометрич. рядов. Так, вместо сферических частных сумм чаще используют их средние Рисса достаточно высокого порядка.

Рассматривается также С. р. Ф. по другим ортонормированным системам функций — как по конкретным системам или классам систем, напр., по ортогональным многочленам, так и по произвольным ортонормированным системам.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., М., 1965; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [5] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. *С. А. Теляковский.*

СУММИРОВАНИЯ МЕТОДЫ — способы построения обобщенных сумм рядов, обобщенных пределов последовательностей, значений несобственных интегралов.

В математич. анализе возникает потребность обобщить понятие суммы ряда (предела последовательности, значения интеграла) на случай, когда в обычном смысле ряд (последовательность, интеграл) расходится. Такое обобщение задают обычно в виде нек-рого правила или операции и называют методом суммирования.

1) Ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ может расходиться на бесконечном множестве точек $E\subset[0,\ 2\pi]$. Последовательность же $\{\sigma_n(x)\}$ средних арифметических первых n частичных сумм этого ряда

$$\sigma_n(x)=\frac{s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_n(x)}{n+1}\qquad(1)$$

равномерно сходится на всей оси Ox к функции $f(x)$. Если сумму ряда определить как

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x),$$

то в этом смысле ряд Фурье 2π-периодической непрерывной функции будет равномерно сходиться к $f(x)$ на всей оси Ox.

2) Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad (2)$$

полученный в результате умножения двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

сходящихся соответственно к A и B, может оказаться расходящимся. Если сумму ряда (2) определить, как в примере 1), т. е. как предел последовательности средних арифметических первых n частичных сумм, то в этом смысле произведение указанных рядов будет сходиться к сумме $C=AB$.

3) Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (3)$$

сходится для $|z|<1$ к сумме $1/(1-z)$ и расходится для $|z|\geqslant 1$. Если же сумму ряда (3) определить как

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n x^n}{n!},$$

где s_n — частичные суммы ряда (3), то в этом смысле ряд (3) будет сходиться для всех z, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\, z<1$, причем его суммой будет функция $1/(1-z)$ (см. *Бореля метод суммирования*).

Важнейшими свойствами С. м. являются регулярность (см. *Регулярные методы суммирования*) и линейность (см. *Линейный метод суммирования*). Наиболее распространенные С. м. обладают этими свойствами. Многие из методов обладают также свойством транслятивности (см. *Транслятивность метода суммирования*). Широкий класс С. м. составляют *матричные методы суммирования* и *полунепрерывные методы суммирования*. Эти методы являются линейными и для них установлены условия регулярности. К матричным С. м., в частности, относятся *Вороного метод суммирования*, *Чезаро методы суммирования*. Подкласс матричных С. м. составляют методы, определенные конечностроч ными матрицами (см. *Конечностроч ный метод суммирования*) и в частности треугольными матрицами (см. *Треугольный метод суммирования*). Полунепрерывными методами суммирования являются *Абеля метод суммирования*, Бореля метод суммирования, *Миттаг-Леффлера метод суммирования*, *Линделёфа метод суммирования*, *Рисса метод суммирования*. Существуют С. м., не относящиеся к указанным видам, напр. интегральный метод суммирования Бореля, *Гёльдера методы суммирования*.

Одна и та же последовательность (ряд) может быть суммируема одним методом и не суммируема другим. Множество всех последовательностей (рядов), суммируемых данным методом, наз. *суммируемости полем* данного метода.

Если рассматривают два С. м., и поле суммируемости одного метода содержит поле другого метода, то говорят о *включении методов суммирования*; в случае совпадения полей говорят о равносильности методов суммирования. Если поле С. м. состоит только из сходящихся последовательностей, то говорят, что С. м. эквивалентен сходимости. Установление условий, при к-рых имеет место включение С. м., является одной из задач теории суммируемости. Два или несколько С. м. могут быть совместными и несовместными. С. м. наз. совместными методами суммирования, если они не могут суммировать одну и ту же последовательность к различным пределам. В тех случаях когда из суммируемости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

методом A всегда следует суммируемость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k u_k$$

методом B, говорят, что числа λ_k являются *суммируемости множителями* типа (A, B).

Относительно С. м. различают два типа теорем. В теоремах 1-го (абелевого) типа из свойств последовательности делают заключение о свойствах средних этой последовательности, полученных в результате преобразования, определяющего С. м. Напр., теорема Коши, устанавливающая, что из $s_n\to s$ всегда следует $(s_0+s_1+\ldots+s_n)/n+1\to s$. В теоремах 2 го (тауберова) типа из свойств средних соответствующих данному С. м., и дополнительных условий делают заключения о свойствах преобразуемой последовательности (см. *Тауберовы теоремы*).

По аналогии с обычной сходимостью вводят понятия специальных видов суммируемости: абсолютной суммируемости, безусловнои суммируемости, сильной суммируемости, почти-суммируемости, λ-суммируемости и др. видов суммируемости.

Понятие обобщенного предела вводят также для функций и интегралов. В этих случаях говорят о суммировании функции (соответственно интеграла). Напр., для функции $s(y)$, определенной для всех y, С. м., аналогичный матричному С. м. последовательностей, состоит в том, что рассматривается интегральное преобразование типа

$$t(x)=\int_0^{\infty} c(x,\ y)\, s(y)\, dy$$

с ядром $c(x, y)$, и функции $s(y)$ в качестве ее обобщенного предела при $y\to\infty$ относят число s, если

$$\lim_{x\to\infty} t(x)=s.$$

Аналогично, один из С. м. несобственных интегралов

$$\int_0^{\infty} a(t)\, dt \qquad (4)$$

состоит в том, что рассматривают преобразования

$$\gamma(x)=\int_0^{x} K(x,\ t)\, a(t)\, dt$$

с ядром $K(x, t)$, и интеграл (4) называют суммируемым к значению s, если

$$\lim_{x\to\infty}\gamma(x)=s.$$

Определение С. м., введенное для суммирования числовых и функциональных последовательностей, обобщается на последовательности из элементов любого множества и общее определение С. м. может быть сформулировано так: пусть X — заданное множество, $s(X)$ — множество последовательностей $x=\{\xi_n\}$ из элементов $\xi_n\in X$, $\overline{A}$ — оператор, определенный на нек-ром подмножестве $A^*\subset s(X)$ со значениями в X. Тогда пару $(\overline{A}, A^*)$ наз. методом суммирования, определенным в $s(X)$, а A^* — полем суммируемости. В этом случае последовательность $x\in A^*$ (или ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ с членами $u_k=\xi_k-\xi_{k-1}$) наз. суммируемой к пределу $\overline{A}(x)$, где $\overline{A}(x)=Ax$.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977; [5] Peyerimhoff A., Lectures on summability, B.— Hdlb.— N. Y., 1969; [6] Knopp K., Theory and application on infinite series, L., 1966; [7] Zeller K., Beekmann W., Theorie der Limitierungsverfahren, 2 Aufl., B.—Hdlb.—N. Y., 1970; [8]

Pitt H., Tauberian theorem's, L., 1958; [9] Ganelius T. H., Tauberian remainder theorems, B.—[a. o.], 1971; [10] Petersen G. M., Regular matrix transformations, N. Y.—Toronto—Sydney, [1966]; [11] Брудно А. Л., «Матем. сб.», 1945, т. 16 (58), № 2, с. 191—247. *И. И. Волков.*

СУММИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция $f: X \to \mathbb{R}$, где (X, μ) — пространство с неотрицательной мерой, для к-рой определен и конечен *Лебега интеграл* $\int_X f d\mu$. Множество С. ф. $L(X)$ образует линейное подпространство пространства измеримых функций. Взятие абсолютной величины функции, максимума и минимума конечной системы функций не выводит из $L(X)$. Если $\mu X < \infty$, то $L(X)$ замкнуто в смысле равномерной сходимости. *И. А. Виноградова.*

СУММИРУЕМОСТИ МНОЖИТЕЛИ — числовые множители λ_n (для членов ряда), преобразующие ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1)$$

суммируемый *суммирования методом* A, в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n, \qquad (2)$$

суммируемый методом B. В этом случае С. м. λ_n наз. множителями суммируемости типа (A, B). Напр., числа $\lambda_n = 1/(n+1)^s$ являются С. м. типа $((c, k), (c, k-s))$ (см. *Чезаро методы суммирования*) при $0 < s < k+1$ (см. [1]).

Основной задачей теории С. м. является отыскание условий, при к-рых числа λ_n будут С. м. того или иного типа. Точнее этот вопрос формулируется так: если X и Y — два класса рядов, то каковы должны быть условия на числа λ_n, чтобы для каждого ряда (1) из класса X ряд (2) принадлежал классу Y. Возникновение теории С. м. восходит к теореме Дедекинда — Адамара: ряд (2) сходится для любого сходящегося ряда (1) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta\lambda_n| < \infty,$$

где $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$. Имеется обобщение этой теоремы со сходимости на суммируемость методом Чезаро.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кангро Г. Ф., «Ученые записки Тартуского университета», 1955, т. 37, с. 191—232; [3] его же, в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости, Таллин, 1977; [5] Moore C. N., Summable series and convergence factors, N. Y., 1938. *И. И. Волков.*

СУММИРУЕМОСТИ ПОЛЕ, поле сходимости метода суммирования, для методов суммирования последовательностей — множество всех последовательностей, суммируемых данным методом. С. п. любого регулярного матричного метода суммирования не может содержать все ограниченные последовательности [3]. С. п. регулярного матричного метода, суммирующего хотя бы одну расходящуюся последовательность, не может состоять только из ограниченных последовательностей [4]. Однако существуют регулярные матричные методы суммирования, суммирующие расходящиеся последовательности, С. п. к-рых не содержит ограниченных расходящихся последовательностей. Множество ограниченных последовательностей, суммируемых данным методом, наз. ограниченным полем. С. п. регулярного матричного метода суммирования является полным метрическим локально-выпуклым пространством с непрерывными координатными проекциями.

Лит.: [1] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [3] Steinhaus H., «Prace mat. fizyczno», 1911, v. 22, p. 121—34; [4] Mazur S., Orlicz W., «C. r. Acad. sci.», 1933, t. 196, p. 32—34. *И. И. Волков.*

СУММИРУЕМОСТЬ СИЛЬНАЯ комплексной числовой или функциональной последовательности $\{S_n\}$ (или ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ с частичными суммами S_n) — суммируемость методом $A = \|(a_{nk})\|$ такая, что для нек-рого $p > 0$:

1) последовательность

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |S_k - S|^p$$

сходится для каждого $n > 1$ и для почти всех x в случае функциональной последовательности;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = 0$.

Если, сохранив п. 2), заменить п. 1) на:

1′) для каждой монотонно возрастающей последовательности индексов $\{\nu_k\}$ последовательность

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n\nu_k} |S_{\nu_k} - S|^p$$

сходится для каждого $n > 1$ и для почти всех x в случае функциональной последовательности, то приходят к понятию очень сильной суммируемости.

Понятие С. с. введено в связи с $(C, 1)$-суммируемостью рядов Фурье. Смысл этого понятия хорошо иллюстрируется на примере сильной $(C, 1)$-суммируемости. Именно, сильная $(C, 1)$-суммируемость означает, что частичные суммы $S_{\nu_1}, S_{\nu_2}, \ldots, S_{\nu_n}, \ldots$, к-рые портят сходимость последовательности $\{S_n\}$, расположены достаточно редко, т. е. имеют нулевую плотность. В отличие от С. с., очень сильная суммируемость означает, что сходимость последовательности $\{S_n\}$ портят только очень редкие последовательности $\{S_{\nu_m}\}$.

Лит.: [1] Hardy G. H., Littlerood J. E., «C. r. Acad. sci.», 1913, t. 156, p. 1307—09; [2] Алексич Г., Проблема сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Sunouchi Gen-Ichirô, «Tôhoku Math. J.», 1964, v. 16, p. 228—37; [6] его же, «Acta sci. math.», 1966, v. 27, № 1—2, p. 71—76; [7] Болгов В. А., Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 6, с. 1389—408; [8] Zalewasser Z., «Studia Math.», 1936, v. 6, p. 82—88; [9] Leindler L., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1962, v. 13, № 3—4, p. 401—14. *А. В. Ефимов.*

СУММЫ РАНГОВ КРИТЕРИЙ — критерий однородности двух выборок $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, основанный на ранговой статистике $R_1 + R_2 + \ldots + R_m$ — сумме рангов R_j случайных величин Y_j в общем вариационном ряду X_i и Y_j (элементы двух выборок взаимно независимы и подчиняются непрерывным распределениям). Является вариантом *Вилкоксона критерия.* *А. В. Прохоров.*

СУПЕРАЛГЕБРА — $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра над полем k (см. *Градуированная алгебра*), т. е. *суперпространство* A над k, снабженное четным линейным отображением $A \otimes A \to A$. С. наз. коммутативной (или градуированно-коммутативной), если

$$ab = (-1)^{p(a)p(b)} ba, \quad a, b \in A.$$

Определение С. можно обобщить на случай, когда областью скаляров является произвольная ассоциативно-коммутативная С. C. Примеры ассоциативных С. над C: алгебра $M_{m|n}(C)$ матриц вида $\left\|\begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix}\right\|$, где $X \in M_m(C)$, $T \in M_n(C)$, снабженная естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой; *тензорная алгебра* $T(M)$ $\mathbb{Z}_2$-градуированного модуля M над C; *симметрическая алгебра* $S(M) = T(M)/I$ модуля M, где I — идеал, порожденный элементами вида

$$x \otimes y - (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x;$$

внешняя алгебра $\Lambda(M) = S(\Pi(M))$ модуля M (последние две С. коммутативны).

С. $\mathfrak{G}$ над полем характеристики 0 с умножением $[,]$ наз. супералгеброй Ли, если $\forall x, y, z \in \mathfrak{G}$

$$[x, y] = (-1)^{p(x)p(y)+1}[y, x],$$
$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{p(x)p(y)}[y, [x, z]].$$

Примеры. Любая ассоциативная С., снабженная операцией коммутирования

$$[x, y] = xy + (-1)^{p(x)p(y)+1} yx;$$

алгебра $\mathrm{Der}\, A$ дифференцирований произвольной С. A (т. е. линейных преобразований δ: $A \to A$ таких, что $\delta(ab) = (\delta a)b + (-1)^{p(\delta)p(a)} a(\delta b)$) с операцией коммутирования. По любой С. Ли $\mathfrak{G}$ строится ассоциативная универсальная обертывающая С., причем справедливо обобщение *Биркгофа — Витта теоремы*.

Известна классификация конечномерных простых С. Ли над полем $\mathbb{C}$ (см. [2], [3]). Они делятся на С. Ли классического типа (характеризуемые тем, что алгебра Ли $\mathfrak{G}_{\bar{0}}$ редуктивна) и С. Ли картановского типа. С. Ли классич. типа исчерпываются следующими сериями матричных алгебр:

$$sl(m, n) = \left\{ \left\| \begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix} \right\| \in M_{m|n}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\, X = \mathrm{tr}\, T \right\} \quad (m \neq n);$$
$$psl(n, n) = sl(n, n)/\{cE \mid c \in \mathbb{C}\};$$

$$osp(m, 2n) = \{\alpha \in M_{m|2n}(\mathbb{C}) \mid \beta(\alpha(x), y) + \beta(x, \alpha(y)) = 0\};$$

$$\Pi(n) = \{\alpha \in M_{n|n}(\mathbb{C}) \mid \beta(\alpha(x), y) + \beta(x, \alpha(y)) = 0\}$$

для четной (соответственно нечетной) симметрической невырожденной билинейной формы;

$$Q(n)/\{cE \mid c \in \mathbb{C}\},$$

где $Q(n) = \left\{ \left\| \begin{matrix} X & Y \\ Y & X \end{matrix} \right\| \in M_{n|n}(\mathbb{C}) \right\}$, а также нек-рыми исключительными алгебрами. С. картановского типа — это алгебра $\mathrm{Der}\, \Lambda(\mathbb{C}^n)$ и ее подалгебры, аналогичные простым *Ли градуированным алгебрам* W_n, S_n, H_n.

Известны также классификация конечномерных простых С. Ли над $\mathbb{R}$ и описание полупростых С. Ли в терминах простых.

Теория линейных представлений С. Ли существенно сложнее, чем для алгебр Ли, поскольку представления простых С. Ли, как правило, не являются вполне приводимыми, а неприводимые представления разрешимых С. Ли могут не быть одномерными. Известны классификация неприводимых представлений простых конечномерных С. Ли над $\mathbb{C}$ в терминах старших весов (см. [1], [2]), а также явное описание конечномерных представлений и *характеров формула* для нек-рых серий этих алгебр [1].

Лит.: [1] Лейтес Д. А., «Функциональный анализ и его приложения», 1980, т. 14, с. 35—38; [2] Kac V. G., «Adv. math.», 1977, v. 26, p. 8—96; [3] Scheunert M., The theory of Lie superalgebras. An introduction, B.—Hdlb.—N. Y., 1979.

Д. А. Лейтес.

СУПЕРГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — такая функция $u(x)$ точки x евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, что $-u(x)$ является *субгармонической функцией*.

Е. Д. Соломенцев.

СУПЕРГРУППА, супергруппа Ли,— групповой объект в категории супермногообразий. С. $\mathcal{G}$ задается функтором точек $\underline{\mathcal{G}}$ из категории коммутативных супералгебр в категорию групп. На С. переносятся *Ли теоремы*, что дает соответствие между С. и конечномерными супералгебрами Ли [1, 2].

Примеры. 1) С. $GL_{n|m}$ задается функтором $C \mapsto GL_{n|m}(C)$ в группы четных обратимых матриц из $M_{n|m}(C)$ (см. *Суперпространство*), т. е. матриц вида $\left\| \begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix} \right\|$, где X, T — обратимые матрицы порядков n, m над $C_{\bar{0}}$, а Y, Z — матрицы над $C_{\bar{1}}$. Определен гомоморфизм $GL_{n|m}(C) \to C_{\bar{0}}^*$, заданный формулой

$$\mathrm{Ber} \left\| \begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix} \right\| = \det(X - YT^{-1}Z) \det T^{-1}$$ (березиниан);

2) С. $SL_{n|m} = \mathrm{Ker}\, \mathrm{Ber}$;

3) Подгруппы $OSp_{n|2m} \subset GL_{n|2m}$ и $\Pi_n \subset GL_{n|n}$, оставляющие инвариантными четную или нечетную невырожденную симметрическую билинейную форму в соответствующем суперпространстве.

С каждой С. $\mathcal{G}$ и ее подсупергруппой $\mathcal{H}$ связано супермногообразие $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, представляемое функтором $C \mapsto \mathcal{G}(C)/\mathcal{H}(C)$, — однородное пространство С. $\mathcal{G}$.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Кац Г. И., «Матем. сб.», 1970, т. 82, с. 343—59; [2] Березин Ф. А., Лейтес Д. А., «Докл. АН СССР», 1975, т. 224, с. 505—08.

Д. А. Лейтес.

СУПЕРМНОГООБРАЗИЕ — обобщение понятия многообразия, в к-ром функции принимают значения в коммутативной *супералгебре*. Структура С. на дифференцируемом многообразии M со структурным пучком $\mathcal{O}_M$ задается пучком $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ коммутативных супералгебр над пучком $\mathcal{O}_M$, причем любая точка $p \in M$ обладает такой окрестностью U, что окольцованное пространство $(U, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}|U)$ изоморфно $(U, (\mathcal{O}_M|U) \otimes \Lambda(\mathbb{R}^m))$, где $\Lambda(\mathbb{R}^m)$ — внешняя алгебра с m нечетными образующими. Аналогично определяются аналитич. С. Дифференцируемые (или аналитические) С. образуют категорию, морфизмами к-рой служат морфизмы окольцованных пространств, четные на структурных пучках. Размерностью С. наз. пара $(\dim M, m)$. Суперобластью размерности (n, m) наз. С. вида $(U, \mathcal{O}_U \otimes \Lambda(\mathbb{R}^m))$, где $(U, \mathcal{O}_U)$ — открытое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Каждое С. локально изоморфно суперобласти.

Если E — векторное расслоение над M, то пучок сечений $L_{\Lambda E}$ расслоения ΛE определяет на M структуру С. Каждое дифференцируемое С. изоморфно С. вида $(M, L_{\Lambda E})$ (см. [1], в комплексно-аналитическом случае это неверно). В то же время морфизмов в категории С. больше, чем в категории векторных расслоений.

С. $\mathcal{M}$ можно задавать функтором точек, т. е. функтором $\underline{\mathcal{M}}$ из категории коммутативных супералгебр в категорию множеств, сопоставляющим супералгебре C множество $\underline{\mathcal{M}}(C) = \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}\, C, \mathcal{M})$, где $\mathrm{Spec}\, C$ — множество простых идеалов в C, снабженное естественным пучком супералгебр (см. *Представимый функтор*).

На С. переносятся основные понятия анализа на дифференцируемых многообразиях (см. [3], [5]).

Понятие С. возникло в теоретич. физике; оно позволяет объединять в единые мультиплеты частицы с *Бозе — Эйнштейна статистикой* и *Ферми — Дирака статистикой*, а также объединять в единую супергруппу внутренние и динамические симметрии калибровочных теорий [4].

Лит.: [1] Batchelor M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1979, v. 253, p. 329—38; [2] Kostant B., в кн.: Differential geometrical methods in mathematical physics, B., 1977, p. 177—306; [3] Лейтес Д. А., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, № 1, с. 3—57; [4] Огиевецкий В. И., Мезинческу Л., «Успехи физич. наук», 1975, т. 117, № 4, с. 637—83; [5] Шандер В. Н., «Функциональный анализ и его приложения», 1980, т. 14, № 2, с. 91—92.

Д. А. Лейтес.

СУПЕРПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, супертепловая функция,— такая функция $v(x, t)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, что $-v(x, t)$ является *субпараболической функцией*.

Е. Д. Соломенцев.

СУПЕРПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ, композиция функций,— составление из двух функций *сложной функции*.

СУПГРПРОСТРАНСТВО — векторное пространство V над полем k, наделенное $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $V=V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1}$. Элементы пространств $V_{\bar 0}$ и $V_{\bar 1}$ наз. соответственно четными и нечетными; для $x\in V_i$ определена четность $p(x)=i$ ($i\in\mathbb{Z}_2=\{\bar 0, \bar 1\}$). С каждым С. V связано С. $\Pi(V)$ такое, что $\Pi(V)_i=V_{i+\bar 1}$ ($i\in\mathbb{Z}_2$). Размерностью С. V наз. пара (m, n), где $m=\dim V_{\bar 0}$, $n=\dim V_{\bar 1}$. Поле k обычно рассматривается как С. размерности $(1, 0)$.

Для С. V и W естественным образом определяется структура С. в пространствах $V\oplus W$, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$, V^* и т. д. В частности, линейное отображение $\varphi: V\to W$ четно, если $\varphi(V_i)\subset W_i$, и нечетно, если $\varphi(V_i)\subset W_{i+\bar 1}$. Однородная билинейная форма $\beta\in V^*\oplus V^*$ наз. симметрической, если

$$\beta(y, x)=(-1)^{p(x)\,p(y)+p(\beta)\,(p(x)+p(y))}\,\beta(x, y),$$

и кососимметрической, если

$$\beta(y, x)=-(-1)^{p(x)\,p(y)+p(\beta)\,(p(x)+p(y))}\,\beta(x, y).$$

Все эти понятия переносятся на $\mathbb{Z}_2$-градуированные свободные модули V над произвольной коммутативной *супералгеброй* C. Базис в V обычно выбирается так, чтобы первые его векторы были четными, а последние — нечетными. Любой эндоморфизм φ модуля V записывается в таком базисе блочной матрицей $\alpha=\begin{Vmatrix} X & Y \\ Z & T \end{Vmatrix}$, где $X\in M_n(C)$, $T\in M_m(C)$, причем, если φ четен, то X и T состоят из четных, а Y и Z из нечетных элементов (матрица α четна), а если φ нечетен, то X и T состоят из нечетных, а Y и Z из четных элементов (α нечетна).

Лит.: [1] Березин Ф. А., Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными, М., 1983; [2] Лейтес Д. А., Теория супермногообразий, Петрозаводск, 1983.

Д. А. Лейтес.

СУСЛИНА ГИПОТЕЗА — гипотеза, утверждающая, что всякое линейно упорядоченное множество без первого и последнего элементов, являющееся полным, плотным и удовлетворяющее условию Суслина, изоморфно действительной прямой. При этом полнота означает существование точной верхней грани у всякого непустого ограниченного подмножества, плотность — непустоту любого интервала (a, b), условие Суслина состоит в том, что всякая непересекающаяся система интервалов не более чем счетна. Действительная прямая обладает всеми свойствами, фигурирующими в формулировке С. г. Таким образом, С. г. состоит в том, что отмеченные свойства действительной прямой полностью ее определяют. Эта гипотеза сформулирована М. Суслиным в 1920 [1].

В рамках системы ZFC (системы ZF с аксиомой выбора) С. г. нельзя ни доказать, ни опровергнуть при условии, что ZF непротиворечива. При этом из аксиомы конструктивности Гёделя (см. *Конструктивное по Гёделю множество*) вытекает отрицание С. г. Совместимость С. г. с аксиомами ZFC доказывается построением соответствующей модели с помощью разновидности *вынуждения метода* (итерированное вынуждение). Добавление к ZFC континуум-гипотезы также не позволяет дать ни положит., ни отрицат. решения С. г.

С. г. и ее обобщения оказали большое влияние на развитие аксиоматич. теории множеств. С ней связана разработка ряда идей и методов. Это — комбинаторные принципы Йенсена $\diamondsuit_k$ к $\square_k$ (см. [4]) и теория тонкой структуры конструктивной иерархии (см. [5]), аксиома Мартина [7] и метод итерированного вынуждения [2].

Принцип Йенсена $\diamondsuit_k$. Подмножество $A\subseteq k$ кардинала $k=\{\alpha|\alpha<k\}$ наз. замкнутым неограниченным, если оно содержит все свои предельные точки и для всякого $\alpha<k$ существует $\beta\in A$ такое, что $\alpha<\beta$. Множество $A\subseteq k$ наз. стационарным, если его пересечение с каждым замкнутым неограниченным подмножеством кардинала k непусто. Принцип $\diamondsuit_k$: существует последовательность $\langle S_\alpha|\alpha<k\rangle$, $S_\alpha\subseteq\alpha$, такая, что для всякого $X\subseteq k$ множество $\{\alpha<k|S_\alpha=X\cap\alpha\}$ стационарно. Для всякого регулярного k принцип $\diamondsuit_k$ вытекает из аксиомы конструктивности, а из $\diamondsuit_{\omega_1}$ следует отрицание С. г. Комбинаторные принципы Йенсена, а также аксиома Мартина (см. ниже) нашли плодотворные применения в топологии (см. [4], [6], [8]).

Пусть P — частично упорядоченное множество. Множество $D\subseteq P$ наз. плотным, если для всякого $p\in P$ существует $d\in D$ такое, что $d\leqslant p$. Множество $Q\subseteq P$ наз. совместимым, если для любого конечного подмножества $F\subseteq Q$ найдется такое $p\in P$, что $p\leqslant r$ для всякого $r\in F$. Два элемента p_1 и p_2 из P наз. несовместимыми, если множество $\{p_1, p_2\}$ не является совместимым. Говорят, что частично упорядоченное множество P удовлетворяет условию счетности антицепей, если всякое множество, состоящее из попарно несовместимых элементов, не более чем счетно. Аксиома Мартина (МА) утверждает следующее: если частично упорядоченное множество удовлетворяет условию счетности антицепей и $\mathcal{P}$ — семейство мощности $<2^\omega$ плотных подмножеств, то существует совместимое множество $Q\subseteq P$ такое, что для всякого $D\in\mathcal{P}$ пересечение $D\cap Q$ непусто.

При наличии *континуум-гипотезы* (СН) аксиома Мартина доказуема. Наиболее интересные следствия дает сочетание аксиомы Мартина (МА) с отрицанием континуум-гипотезы ($\neg$СН). Принцип $\diamondsuit_{\omega_1}$ противоречит сочетанию МА+$\neg$СН, так как $\diamondsuit_{\omega_1}$ влечет СН. При этом часто оказывается, что предложение, выводимое из $\diamondsuit_{\omega_1}$, будет опровержимо в предположении МА+$\neg$СН. Так, напр., обстоит дело с С. г. Именно, МА+$\neg$СН влечет С. г., в то время как $\diamondsuit_{\omega_1}$ влечет отрицание С. г.

Сочетание МА+$\neg$СН совместимо с ZFC, если ZF непротиворечива.

Лит.: [1] Suslin M., «Fundam. math.», 1920, v. 1, p. 223; [2] Devlin K. J., Johnsbråten H., The Souslin problem, B.—[a. o.], 1974 (Lecture Notes in Math., v. 405); [3] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [4] Справочная книга по математической логике в четырех частях, ч. 2 — Теория множеств, пер. с англ., М., 1982; [5] Devlin K. J., Aspects of Constructibility, B.—[a. o.], 1973 (Lecture Notes in Math., v. 354); [6] Федорчук В. В., «Матем. сб.», 1976, т. 99, № 1, с. 3—33; [7] Martin D. A., Solovay R., «Ann. Math. Logic», 1970, v. 2, p. 143—78; [8] Малыхин В. И., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 1, с. 69—118.

В. Н. Гришин.

СУСЛИНА КРИТЕРИЙ — см. *Суслина теорема.*

СУСЛИНА ПРОБЛЕМА: подобно ли множеству действительных чисел плотное в себе линейно упорядоченное множество без первого и последнего элементов, в к-ром всякое семейство непустых дизъюнктных интервалов счетно.

Утверждение положительного решения этой проблемы есть гипотеза Суслина — она выдвинута М. Я. Суслиным [1]. Гипотеза Суслина эквивалентна несуществованию линейно упорядоченного несепарабельного бикомпакта, в к-ром всякое семейство непустых дизъюнктных интервалов счетно,— такой бикомпакт наз. континуумом Суслина.

В настоящее время (1984) известна независимость С. п. от основных аксиом теории множеств. Впервые континуум Суслина методом форсинга построен в 1967—68. В 1970 было доказано, что конъюнкция аксиомы Мартина и отрицания континуум-гипотезы (совместная с системой Цермело — Френкеля аксиом теории множеств) влечет несуществование континуума Суслина, т. е. справедливость гипотезы Суслина.

Лит.: [1] Suslin M., Problem 3, «Fundam. math.», 1920, v. 1, p. 223.

В. И. Малыхин.

СУСЛИНА ТЕОРЕМА (в дескриптивной теории множеств) —

1) Существует A-множество (числовой прямой $\mathbb{R}$), не являющееся *борелевским множеством*.

2) Для того чтобы данное A-множество было борелевским, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было также A-множеством.

3) Всякое A-множество n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ есть (ортогональная) проекция борелевского (даже типа G_δ) множества пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ (и следовательно, существует плоское борелевское множество типа G_δ, проекция которого не является борелевским множеством); проекция всякого A-множества есть A-множество.

Все эти результаты получены М. Я. Суслиным [1]. Для определения A-множества там использовалась *A-операция*, а другие способы задания A-множеств были найдены позже. A-операция фактически построена П. С. Александровым [2], к-рый показал (хотя явно и не формулировал), что всякое борелевское множество может быть получено как результат A-операции над замкнутыми множествами (следовательно, является A-множеством), и использовал это для доказательства теоремы о мощности борелевских (на самом деле, A-) множеств пространства $\mathbb{R}$. После этого Н. Н. Лузиным был поставлен вопрос о существовании A-множества, не являющегося борелевским. Ответом на этот вопрос и явилась теорема 1). Теоремы 1) и 2) даны М. Я. Суслиным [1] без доказательств. Доказательства их, полученные М. Я. Суслиным, были позже упрощены Н. Н. Лузиным и только тогда опубликованы. Для доказательства теоремы 1) М. Я. Суслин построил плоское A-множество, универсальное для всех борелевских множеств и рассмотрел множество его точек, лежащих на диагонали $x=y$ (см. [3], с. 94). Теорема 2) теперь часто наз. критерием Суслина борелевских множеств. Доказательство М. Я. Суслина этой теоремы было основано на разложении *CA-множества* на сумму $\xi\xi_1$ борелевских множеств (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Суслин М. Я., «C. r. Acad. sci.», 1917, t. 164, p. 88—91; [2] Александров П. С., там же, 1916, t. 162, p. 323—25; [3] Келдыш Л. В., Новиков П. С., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 2, с. 93—104; [4] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958; [5] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937. *А. Г. Елькин.*

СУСЛИНА УСЛОВИЕ — условие, возникшее при выдвижении *Суслина гипотезы*. Топологич. пространство (булева алгебра, частично упорядоченное множество) удовлетворяет С. у. тогда и только тогда, когда всякое семейство непустых дизъюнктных открытых подмножеств (ненулевых попарно несовместных элементов) не более чем счетно. С. у. обобщено на произвольный кардинал; соответствующий кардинальнозначный инвариант — число Суслина. *В. И. Малыхин.*

СУЩЕСТВЕННО НЕРАЗРЕШИМАЯ ТЕОРИЯ — алгоритмически неразрешимая логическая теория, все непротиворечивые расширения к-рой также неразрешимы (см. *Неразрешимость*). *Элементарная теория* является С. н. т. тогда и только тогда, когда всякая ее модель имеет неразрешимую элементарную теорию. С. н. т. является всякая полная неразрешимая теория, *арифметика формальная*; всякая теория, имеющая конечную модель, не является С. н. т.

Существенная неразрешимость подходящей конечно аксиоматизируемой элементарной теории S часто используется при доказательстве неразрешимости данной теории T (см. [1], [2]). При таком доказательстве теория S интерпретируется в какой-либо модели M теории T. Область интерпретации и значения элементов сигнатуры теории S определяются с помощью значений в модели M подходящих формул в языке теории T. Если построенная интерпретация является моделью теории S, то теория T неразрешима; более того, эта теория наследственно неразрешима, т. е. неразрешима всякая ее подтеория той же сигнатуры, что и T. Таким методом может быть доказана неразрешимость элементарной логики предикатов, элементарной теории групп, элементарной теории полей и т. п. В качестве С. н. т. S часто берут конечно аксиоматизированную формальную арифметику.

Лит.: [1] Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Undecidable theories, Amst., 1953; [2] Ершов Ю. Л. [и др.], «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 4, с. 37—108; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *А. Л. Семенов.*

СУЩЕСТВЕННО ОСОБАЯ ТОЧКА — *изолированная особая точка a* однозначного характера аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z, для к-рой не существует никакого, конечного или бесконечного, предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. В достаточно малой проколотой окрестности $V=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-a|<r\}$ С. о. т. $a\neq\infty$ или $V'=\{z\in\mathbb{C}: r<|z|<\infty\}$ в случае $a=\infty$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k,\quad a\neq\infty,\ z\in V,$$

или соответственно

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},\quad a=\infty,\ z\in V',$$

причем в главной части этих рядов имеется бесконечно много отличных от нуля коэффициентов c_k с отрицательными индексами k.

Сохоцкого теорема показывает, что любое комплексное значение w из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ является предельным для функции $f(z)$ в любой сколь угодно малой окрестности С. о. т. a. Согласно *Пикара теореме*, любое конечное комплексное значение $w\in\mathbb{C}$ за исключением, быть может, одного, даже принимается функцией $f(z)$, и притом бесконечно часто, в любой окрестности С. о. т. a. Теорему Сохоцкого иначе выражают, говоря, что *предельное множество* $C(a; f)$ функции $f(z)$ в С. о. т. a совпадает со всей расширенной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$. Для регулярных точек и полюсов это множество, напротив, вырожденное, т. е. сводится к одной точке $w\in\overline{\mathbb{C}}$. Поэтому в более общем смысле существенно особой точкой аналитич. функции $f(z)$ наз. всякая такая особая точка a (не обязательно изолированная), в к-рой не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$, или, иначе говоря, в к-рой предельное множество $C(a; f)$ невырожденное. Теоремы Сохоцкого и Пикара для таких С. о. т., не являющихся изолированными точками множества всех особых точек, доказаны лишь при нек-рых дополнительных предположениях. Напр., эти теоремы остаются в силе для изолированной точки a множества С. о. т., в частности для предельной точки a полюсов *мероморфной функции*.

Точка $a=(a_1, \ldots, a_n)$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, наз. точкой мероморфности аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, если $f(z)$ есть мероморфная функция в нек-рой окрестности U точки a, т. е. если $f(z)$ представима в U в виде отношения двух голоморфных функций $f(z)=p(z)/q(z)$, $z\in U$. Существенно особыми точками аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных наз. особые точки a функции $f(z)$, не являющиеся точками мероморфности. При этом невырожденность предельного множества $C(a; f)$ перестает быть характеристическим свойством С. о. т.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитич. функций многих комплексных переменных, М., 1962. *Е. Д. Соломенцев.*

СУЩЕСТВЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение f топологич. пространства X в открытый симплекс T^n такое, что всякое непрерывное отображение $f_1 : X \to T^n$, совпадающее с f во всех точках множества $f^{-1}(\overline{T^n} \setminus T^n)$, есть отображение на все T^n. Напр., тождественное отображение $\overline{T^n}$ на себя есть С. о.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности ..., М., 1973.

М. И. Войцеховский.

СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАНТОР — логическая операция, служащая для образования высказываний с помощью оборота «для некоторых x» («существует x, для которого»). В формализованных языках С. к. обозначается через $\exists x$, $(\exists x)$, $\bigcup x$, $\vee x$, Σ_x. *В. Е. Плиско.*

СФЕР ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ — объект изучения классич. теории гомотопий. Вычисление С. г. г. $\pi_i(S^n)$ в свое время (особенно в 50-х гг.) рассматривалось как одна из центральных задач топологии. Топологи надеялись, что эти группы удастся полностью вычислить и что с их помощью можно будет решать другие классификационные гомотопич. задачи. Эти надежды в основном не сбылись: С. г. г. удалось вычислить лишь частично, и с развитием теории обобщенных когомологий задача их вычисления стала менее актуальной. Все же накопленная информация об этих группах не пропала даром, она нашла применения там, где их не ждали, в частности в дифференциальной топологии (классификации дифференциальных структур на сферах и многомерных узлов).

I. Общая теория. 1) Если $i<n$ или $i>n=1$, то $\pi_i(S^n)=0$.

2) $\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}$ (теорема Брауэра—Хопфа); этот изоморфизм относит элементу группы $\pi_n(S^n)$ степень представляющего его отображения $S^n \to S^n$.

3) Группы $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ имеют ранг 1; прочие группы $\pi_i(S^n)$ с $i \neq n$ конечны.

Гомоморфизм *надстройки*

$$E\colon \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$$

относит элементу группы $\pi_i(S^n)$, представляемому сфероидом $f : S^i \to S^n$, класс сфероида $Ef : S^{i+1} \to S^{n+1}$, определяемого формулой

$$Ef(\sqrt{1-x^2}\,x,\ x) = \begin{cases} (\sqrt{1-x^2}\,f(x),\ x), & |x| \leqslant 1, \\ (0,\ x), & |x| = 1, \end{cases}$$

где $x \in S^i$, $x \in \mathbb{R}$.

4) Гомоморфизм E является изоморфизмом при $i>2n-1$ и эпиморфизмом при $i \geqslant 2n-1$.

Таким образом, при каждом k группы $\pi_{n+k}(S^n)$ могут быть составлены в последовательность

$$\pi_{1+k}(S^1) \xrightarrow{E} \pi_{2+k}(S^2) \xrightarrow{E} \pi_{3+k}(S^3) \xrightarrow{E} \dots,$$

в $(k+2)$-м члене к-рой наступает стабилизация; группа $\pi_{n+k}(S^n)$ с $n \geqslant k+2$ наз. k-й стабильной С. г. г. и обозначается π_k^s. При этом $\pi_k^s=0$ при $k<0$ и $\pi_0^s=\mathbb{Z}$.

Как и в *гомотопических группах* любого топологич. пространства, в С. г. г. определено умножение Уайтхеда:

$$\pi_i(S^n) \times \pi_j(S^n) \longrightarrow \pi_{i+j-1}(S^n),\ (\alpha,\ \beta) \longrightarrow [\alpha,\ \beta].$$

К обычным его свойствам (дистрибутивность, косая коммутативность, тождество Якоби) добавляется

5) $E[\alpha,\ \beta]=0$.

Умножение Уайтхеда позволяет сделать следующее уточнение к 4):

6) ядро эпиморфизма $E : \pi_{2n-1}(S^n) \to \pi_{2n}(S^{n+1})$ порождается классом $[i_n, i_n]$, где i_n — каноническая образующая группы $\pi_n(S^n)$ (представляемая тождественным сфероидом).

С умножением Уайтхеда тесно связан *Хопфа инвариант* $H(\alpha)$, определенный для $\alpha \in \pi_{4m-1}(S^{2m})$. Так, элемент группы $\pi_3(S^2)$, представляемый отображением Хопфа $h : S^3 \to S^2$, действующим по формуле $h(z_1,\ z_2) = z_1 : z_2$ (в к-рой S^3 интерпретируется как единичная сфера пространства $\mathbb{C}^2$, а S^2 — как $\mathbb{C}P^1$), имеет инвариант Хопфа, равный 1.

7) Отображение $H : \pi_3(S^2) \to \mathbb{Z}$ есть изоморфизм.

8) $H([i_{2m},\ i_{2m}])=2$.

Следствием 8) является бесконечность групп $\pi_{4m-1}(S^{2m})$, уже утверждавшаяся в 3).

9) При $m \neq 1, 2, 4$ в $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ отсутствуют элементы с нечетным инвариантом Хопфа (как было известно задолго до доказательства этой теоремы, ее утверждение равносильно следующей гипотезе Фробениуса: при $l \neq 1, 2, 4, 8$ в $\mathbb{R}^l$ отсутствует билинейное умножение с однозначным делением на ненулевые элементы).

Специфическим для сфер является композиционное умножение

$$\pi_i(S^j) \times \pi_j(S^n) \longrightarrow \pi_i(S^n),\ (\beta,\ \alpha) \longrightarrow \alpha \circ \beta,$$

определяемое при помощи компонирования представляющих отображений.

10) Для любых α, α_1, $\alpha_2 \in \pi_j(S^n)$, β, β_1, $\beta_2 \in \pi_i(S^j)$, $\delta \in \pi_{i-1}(S^{j-1})$, $\gamma \in \pi_k(S^j)$, имеет место:

а) $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$,

б) $\alpha \circ (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \circ \beta_1 + \alpha \circ \beta_2$,

в) $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ E\delta = \alpha_1 \circ E\delta + \alpha_2 \circ E\delta$,

г) $E(\alpha \circ \beta) = E\alpha \circ E\beta$.

«Левый закон дистрибутивности» $(\alpha_1+\alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$, вообще говоря, места не имеет. Утверждение г) позволяет определить стабильное композиционное умножение

$$\pi_q^s \times \pi_r^s \longrightarrow \pi_{q+r}^s,\ (\beta,\ \alpha) \longrightarrow \alpha \circ \beta.$$

11) Для любых α, α_1, $\alpha_2 \in \pi_r^s$, β, $\beta_1\beta_2 \in \pi_q^s$, $\gamma \in \pi_p^s$ имеют место утверждения а), б) из 10), а также:

в′) $(\alpha_1+\alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$,

д) $\alpha \circ \beta = (-1)^{qr} \beta \circ \alpha$.

II. Методы вычисления. Геометрич. метод Понтрягина (см. [1]), предложенный в сер. 30-х гг., основывается на следующем определении. Гладкое m-мерное компактное многообразие X пространства $\mathbb{R}^i$ наз. оснащенным, если на нем задано гладкое поле трансверсальных к нему $(i-m)$-реперов; само это поле наз. оснащением. Оснащенные многообразия X_0, $X_1 \subset \mathbb{R}^i$, не имеющие края, наз. кобордантными, если существует оснащенное многообразие $Y \subset \mathbb{R}^i \times (0,\ 1] \subset \mathbb{R}^{i+1}$ с $\partial Y = (X_0 \times 0) \cup (X_1 \times 1)$, у к-рого сужение оснащения на $X_0 \times 0$ и $X_1 \times 1$ содержится в $\mathbb{R}^i \times 0$ и $\mathbb{R}^i \times 1$, и при естественном отождествлении $\mathbb{R}^i \times 0$ и $\mathbb{R}^i \times 1$ с $\mathbb{R}^i$ превращается в заданное оснащение многообразий X_0 и X_1. Множество классов кобордантных оснащенных m-мерных многообразий без края в $\mathbb{R}^i$ обозначается через $\Omega^m(i)$.

1) Имеет место взаимно однозначное соответствие между $\pi_i(S^n)$ и $\Omega^{i-n}(i)$.

Метод дает хорошие результаты при небольших $i-n$. Он позволяет также доказать нек-рые из теорем п. I и доставляет разнообразную геометрич. информацию о многообразиях малых размерностей.

Другую группу методов составляют элементарные алгебраич. методы, состоящие в использовании гомотопич. последовательностей различных расслоений, свойств умножения Уайтхеда, композиционного умножения и соответствующего высшего умножения (скобок Тоды, см. [3]), а также следующую теорему Джеймса.

2) Имеется последовательность групп и гомоморфизмов

$$\dots \pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \longrightarrow \pi_{i-1}(S^n) \longrightarrow \dots,$$

точная при нечетном n и при $i<3n-1$ (в этой последовательности H — обобщение инварианта Хопфа).

Элементарные алгебраич. методы оказываются довольно действенными: почти не прибегая к другим приемам, удается вычислить группы $\pi_i(S^n)$ при $i-n\leqslant 13$.

Далее, имеется метод *убивающих пространств* (см. [5]). Этот метод пригоден для вычисления гомотопич. групп любого пространства. Он основывается на построении по пространству X последовательности убивающих пространств $X|_k$ со следующим свойством:

$$\pi_i(X|_k)=\begin{cases}\pi_i(X), & i\geqslant k,\\ 0, & i<k.\end{cases}$$

Таким образом, $\pi_i(X)=\pi_i(X|_i)=H_i(X|_i)$ и задача вычисления гомотопич. групп сводится к задаче вычисления гомологий (и когомологий) пространства $X|_i$. Эти гомологии находятся по индукции при помощи *спектральных последовательностей* расслоений: $X|_k$ расслаивается со слоем $X|_{k+1}$ над *Эйленберга — Маклейна пространством* $K(\pi_k(X), k)$. Вычисление не носит автоматич. характера: чтобы продвинуться в нем, необходимо как можно больше знать о когомологиях пространства X, включая действие в них примарных и высших *когомологических операций*.

Более удобный аппарат для вычисления стабильных С. г. г. доставляет спектральная последовательность Адамса. Пусть p — простое число, а $A_{(p)}$ — *Стинрода алгебра* стабильных когомологич. операций, действующих в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$.

3) Существует спектральная последовательность, начальный член к-рой совпадает с когомологиями алгебры Стинрода (т. е. с $\mathrm{Ext}_{A_{(p)}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$), а предельный член присоединен к стабильным С. г. г., профакторизованным по кручению порядка, взаимно простого с p.

Спектральная последовательность Адамса позволяет продвинуться в вычислении стабильных гомотопич. С. г. г. довольно далеко. Аналогичная спектральная последовательность имеется для вычисления стабильных гомотопич. групп любого пространства. Имеется и нестабильный аналог спектральной последовательности Адамса (см. [4]).

Более современные методы вычисления С. г. г. основываются на привлечении *обобщенных теорий когомологий*. Один из них заключается в использовании тесно связанного с K-теорией *e-инварианта Адамса*. Для его построения фиксируется отображение $f: S^i\to S^n$, представляющее класс $\alpha\in\pi_i(S^n)$, и рассматривается пространство $X_\alpha=S^n\cup_f D^{i+1}$, полученное приклеиванием к сфере S^n $(i+1)$-мерной клетки по отображению f. Оказывается

$$H_n(X_\alpha;\ \mathbb{Z})\cong H_{n+i+1}(X_\alpha;\ \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z};$$

пусть u, v — канонические образующие этих групп. Существует комплексное векторное расслоение ξ над X_α, *Чжэня характер* $\mathrm{ch}\,\xi$ к-рого удовлетворяет соотношению $\langle\mathrm{ch}\,\xi, u\rangle=1$. Тогда $\langle\mathrm{ch}\,\xi, v\rangle$ есть рациональное число, вычет к-рого по модулю 1 не зависит от выбора ξ. Этот вычет и есть *e-инвариант* $e(\alpha)$ класса α. Функция e представляет собой гомоморфизм

$$e:\ \pi_i(S^n)\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

образ к-рого может быть найден (см. [2]).

Наконец, потенциально самый мощный метод вычисления С. г. г. (и не только сфер) доставляет спектральная последовательность Адамса — Новикова — аналог спектральной последовательности Адамса, построенный на базе не обычных когомологий, а кобордизмов. Однако уже явное вычисление начального члена этой последовательности содержит в себе трудности, пока (1984) не преодоленные.

III. Результаты вычисления. 1) Группы $\pi_i(S^n)$ с $i-n\leqslant 2$ изоморфны группам из следующей таблицы:

$i-n$ \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	стаб.
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
2	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{24}$	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_{24}$
4	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	0	...	...	...	...	...	...	0
5	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	...	...	...	...	...	0
6	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
7	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}_{240}$	...	...	...	$\mathbb{Z}_{240}$
8	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^2$	...	...	$\mathbb{Z}_2^2$
9	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	...	$\mathbb{Z}_2^3$
10	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}\oplus\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{72}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{72}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6$
11	$\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\oplus\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{84}\oplus\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}_{504}$

2) Группы π_k^s с $12\leqslant k\leqslant 22$ изоморфны группам из следующей таблицы:

$k=12$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{480}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_8\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{264}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$

Дальнейшие результаты вычисления групп $\pi_i(S^n)$ см. [3]. Особенного прогресса удалось достичь в вычислении нечетных примарных компонент этих групп.

Так, например:

3) если p — нечетное простое число, то p-примарная компонента группы π_k^s есть $\mathbb{Z}_p$ при $k=2l(p-1)-1$, $l=1, \ldots, (p-1)$, и тривиальна при других $k<2p(p-1)-2$.

Имеется большое количество результатов о С. г. г., область действия к-рых не ограничивается никаким конечным диапазоном значений $i-n$. В частности, известно большое количество бесконечных серий нетривиальных элементов групп $\pi_i(S^n)$ (см. [4]).

4) Порядок образа *Уайтхеда гомоморфизма* J_k равен знаменателю несократимой дроби, равной $B_k/4k$, где B_k есть k-е *Бернулли число*. В частности, Card Im $J_1=24$, Card Im $J_2=240$, Card Im $J_3=504$, Card Im $J_4=480$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [2] Adams J., «Topology», 1963, v. 2, p. 181—95; 1965, v. 3, p. 137—81, 193—222; 1966, v. 5, p. 21—71; [3] Тода Х., Композиционные методы в теории гомотопических групп сфер, пер. с англ., М., 1982; [4] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974; [5] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969. *Д. Б. Фукс.*

СФЕРА — множество S^n точек x евклидова пространства E^{n+1}, находящихся от нек-рой точки x_0 (центр С.) на постоянном расстоянии R (радиус С.), т. е.

$$S^n=\{x\in E^{n+1}\colon \rho(x, x_0)=R\}.$$

С. S^0 — пара точек, С. S^1 — это окружность, С. S^n при $n>2$ иногда наз. гиперсферой. Объем С. S^n (длина при $n=1$, поверхность при $n=2$) вычисляется по формуле

$$S^n=\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}R^n,$$

в частности,

$$S^1=2\pi R,\ S^2=4\pi R^2,\ S^3=2\pi^2R^3,\ S^4=\frac{8}{3}\pi^2R^4.$$

Уравнение С. S^n в декартовых прямоугольных координатах в E^{n+1} имеет вид

$$\sum(x^i-x_0^i)^2=R^2$$

(здесь x^i, x_0^i, $i=1, \ldots, n+1$,— координаты x, x_0 соответственно), т. е. С.— (гипер)квадрика, или поверхность второго порядка специального вида.

Положение какой-либо точки в пространстве относительно С. характеризуется *степенью точки*. Совокупность всех С., относительно к-рых данная точка имеет одинаковую степень, составляет *сеть* С. Совокупность всех С., относительно к-рых точки нек-рой прямой (радикальной оси) имеют одинаковую степень (различную для различных точек), составляет *связку* С. Совокупность всех С., относительно к-рых точки нек-рой плоскости (радикальной плоскости) имеют одинаковую степень (различную для разных точек), составляет *пучок* С.

С точки зрения дифференциальной геометрии, С. S^n — *риманово пространство*, имеющее постоянную (гауссову при $n=2$ и риманову при $n>2$) кривизну $k=\frac{1}{R^n}$. Все геодезич. линии С. замкнуты и имеют постоянную длину $2\pi R$ — это т. н. большие окружности, т. е. пересечения с S^n двумерных плоскостей в E^{n+1}, проходящих через ее центр. Внешнегеометрич. свойства S^n: все нормали пересекаются в одной точке, кривизна любого нормального сечения одна и та же и не зависит от точки, в к-рой оно рассматривается, в частности имеет постоянную среднюю кривизну, причем полная средняя кривизна С. — наименьшая среди выпуклых поверхностей одинаковой площади, все точки С. омбилические.

Нек-рые из таких свойств, принятые за основные, послужили отправной точкой для обобщения понятия С. Так, напр., *аффинная сфера* определяется тем, что все ее (аффинные) нормали пересекаются в одной точке; *псевдосфера* — поверхность в E^3 постоянной гауссовой кривизны (но уже отрицательной); одна из интерпретаций *орисферы* (предельной сферы) — множество точек внутри S^2, определяемое уравнением также второго порядка

$$(1-x^2-y^2-z^2)=\text{const}\,(1-x\alpha-y\beta-z\gamma)^2.$$

На С. S^n дважды транзитивно действует ортогональная группа $O(n+1)$ пространства E^{n+1} (2-транзитивность означает, что для любых двух пар точек с равными расстояниями между ними существует вращение — элемент $O(n+1)$, переводящее одну пару в другую); эта группа является полной группой изометрий S^n; наконец, С. есть однородное пространство: $S^n=O(n+1)/O(n)$.

С точки зрения (дифференциальной) топологии, С. S^n — замкнутое дифференцируемое многообразие, разделяющее E^{n+1} на две области и являющееся их общей границей; при этом ограниченная область, гомеоморфная E^{n+1},— это (открытый) *шар*, так что С. можно определить как его границу.

Группы гомологий С. S^n, $n\geqslant 1$:

$$H_k(S^n)=\begin{cases}0, & k\neq n,\\ \mathbb{Z}, & k=n,\end{cases}$$

в частности S^n не стягивается в точку сама по себе, т. е. тождественное отображение S^n в себя существенно.

Группы гомотопий С. S^n, $n\geqslant 1$:

$$\pi_k(S^n)=\begin{cases}0, & k<n,\\ \mathbb{Z}, & k=n.\end{cases}$$

Напр., $\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$, $\pi_{n+1}(S^n)=\pi_{n+2}(S^n)=\mathbb{Z}_2$ при $n>2$. В общем случае — для любых k и n, $k>n$, группы $\pi_k(S^n)$ не вычислены (см. *Сфер гомотопические группы*).

И здесь понятие С. получает обобщение. Напр., *дикая сфера* — топологич. С. (см. ниже) в E^{n+1}, не ограничивающая области, гомеоморфной E^{n+1}; *Милнора сфера* (экзотическая С.) — многообразие, гомеоморфное, но не диффеоморфное S^n.

Топологич. пространство, гомеоморфное С., наз. топологической сферой. Одним из основных здесь является вопрос об условиях того, что нек-рое пространство является топологич. сферой.

Примеры. а) Инвариантная топологич. характеристика С. S^n при $n>2$ не известна (1984). О случае $n=1$ см. *Одномерное многообразие*. Для того чтобы континуум был гомеоморфен С. S^2, необходимо и достаточно, чтобы он был локально связан, содержал хотя бы одну простую замкнутую линию и чтобы всякая лежащая на нем такая линия разбивала его на две области, имеющие эту линию своей общей границей (теорема Уайлдера).

б) Полное односвязное риманово пространство размерности $n\geqslant 2$, кривизна K_δ к-рого для всех касательных двумерных плоскостей σ δ-ограничена с $\delta>1/4$, т. е. $\delta\leqslant K_\delta\leqslant 1$ гомеоморфно S^n (теорема о сфере, см. *Риманова геометрия*).

в) Односвязное замкнутое гладкое многообразие, (целые) гомологии к-рого совпадают с гомологиями S^n, гомеоморфно S^n при $n\geqslant 4$ (при $n=3$ — неизвестно (1984)). Если $n=5, 6$, то оно также и гомеоморфно S^n (обобщенная гипотеза Пуанкаре), при $n=3, 4$ гипотеза остается (1984), при $n\geqslant 7$ диффеоморфизм не имеет места.

Совершенно аналогично определяется С. S в метрич. пространстве (M, ρ): $S=\{x\in M, \rho(x, x_0)=R\}$.

Однако это множество, вообще говоря, может быть устроено достаточно сложно (или может быть пустым).

В нормированном пространстве E с нормой $\|\cdot\|$ С. наз. множество $S=\{x\in E,\ \|x\|=R\}$; это, по существу, произвольная, вообще говоря, бесконечномерная выпуклая (гипер)поверхность, не всегда обладающая, напр., гладкостью, округлостью и т. п. полезными свойствами обычной С. Один из вариантов, применяющихся в топологии,— т. н. бесконечномерная сфера — строгий индуктивный предел S^∞ последовательности вложенных сфер:

$$S^1\subset S^2\subset\ldots;$$

другое определение: $S^\infty=V_1(\mathbb{R}^\infty)$, где $V_1(\mathbb{R}^\infty)$ — бесконечномерное *Штифеля многообразие*. Для любого i оказывается, что $\pi_i(S^\infty)=0$.

Приложения понятия С. чрезвычайно разнообразны. Напр., С. участвует в конструкциях новых пространств или дополнительных структур на них. Так, напр., проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ можно интерпретировать как С. S^n с отождествленными диаметрально противоположными точками; С. с ручками и дырами используется в *ручек теории*; см. также *Когомотопическая группа*, *Сферическое отображение*.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966; [2] его же, Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Леви П., Конкретные проблемы функционального анализа, пер. с франц., М, 1967; [4] Введение в топологию, М., 1980; [5] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962. *И. С. Шарадзе.*

СФЕРИЧЕСКАЯ ГАРМОНИКА степени k — сужение однородного *гармонического многочлена* $h^{(k)}(x)$ степени k от n переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)$ на единичной сфере S^{n-1} евклидова пространства E^n, $n\geqslant 3$. В частности, при $n=3$ С. г. — это классич. *сферические функции*.

Пусть $x\in E^n$, $x\neq 0$, $r=|x|$, $x'=x/r\in S^{n-1}$. Основным свойством С. г. является свойство ортогональности: если $Y^{(k)}(x')$ и $Y^{(l)}(x')$ — С. г. соответственно степеней k и l, причем $k\neq l$, то

$$\int_{S^{n-1}} Y^{(k)}(x')\,Y^{(l)}(x')\,dx'=0.$$

Простейшими С. г. являются зональные сферические гармоники. Для любого $t'\in S^{n-1}$ и любого $k>0$ существует зональная С. г. $Z_{t'}^{(k)}(x')$, постоянная на любой параллели сферы S^{n-1}, ортогональной вектору t'. Зональные С. г. $Z_{t'}^{(k)}(x')$ лишь постоянным множителем отличаются от *Лежандра многочленов* $P_k^{(\lambda)}$ при $n=3$ или от *ультрасферических многочленов* $P_k^{(\lambda)}$ при $n>3$:

$$Z_{t'}^{(k)}(x')=c(k,\ n)\,P_k^{(\lambda)}(x't'),$$

где многочлены $P_k^{(\lambda)}$ определяются при $n\geqslant 3$ через производящую функцию

$$(1-2st+s^2)^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k^{(\lambda)}(t)\,s^k,$$

$0\leqslant|s|<1$, $|t|=1$, $\lambda=(n-2)/2$. Многочлены $P_k^{(\lambda)}$, $k=0,1,\ldots$, ортогональны с весом $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ и образуют ортогональный базис пространства $L^2([-1,1];\ (1-t^2)^{\lambda-1/2})$. Если $f(x')$ — функция из пространства $L^2(S^{n-1})$, причем $\int_{S^{n-1}}f(x')dx'=0$, то существует единственный набор С. г. $Y^{(k)}$ такой, что

$$f(x')=\sum_{k=1}^{\infty}Y^{(k)}(x'),$$

причем ряд сходится по норме $L^2(S^{n-1})$.

Разложения по С. г. во многом аналогичны разложениям в ряды Фурье, обобщением к-рых они в сущности являются. Однородные гармонические многочлены $h^{(k)}(x)$ иногда наз. пространственными С. г. В силу однородности

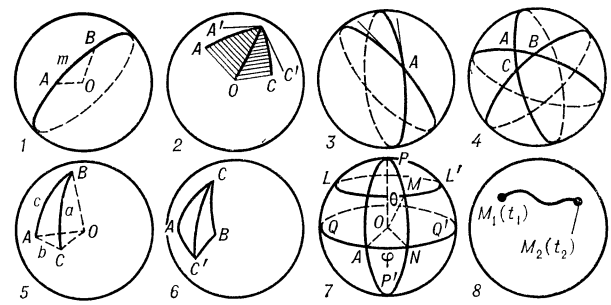
$$h^k(x)=|x|^k\,Y^{(k)}(x'),$$

в связи с чем С. г. иногда наз. также поверхностными С. г.

Лит.: [1] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1—2, М., 1960; [2] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974. *Е. Д. Соломенцев.*

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — математич. дисциплина, изучающая геометрич. образы, находящиеся на сфере, подобно тому как планиметрия изучает геометрич. образы, находящиеся на плоскости.

Всякая плоскость, пересекающая сферу, дает в сечении нек-рую окружность; если секущая плоскость проходит через центр O сферы, то в сечении получается т. н. большой круг. Через каждые две точки A и B на сфере (рис., *1*), кроме случая диаметрально



противоположных точек, можно провести единственный большой круг. Большие круги сферы являются ее *геодезическими линиями* и поэтому в С. г. играют роль, аналогичную роли прямых в планиметрии. Однако в то время как любой отрезок прямой является кратчайшим между его концами, дуга большого круга на сфере будет кратчайшей лишь в случае, когда она короче дополнительной дуги. Во многих других отношениях С. г. также отлична от планиметрии; так, напр., в С. г. не существует параллельных геодезических: два больших круга всегда пересекаются, и притом в двух точках.

Длину отрезка AB на сфере, то есть дугу AmB (рис., *1*) большого круга, измеряют соответствующим пропорциональным ей центральным углом AOB. Угол ABC (рис., *2*), образованный на сфере дугами двух больших кругов, измеряют углом $A'BC'$ между касательными к соответствующим дугам в точке пересечения B или двугранным углом, образованным плоскостями OBA и OBC.

При пересечении двух больших кругов на сфере образуются четыре сферических двуугольника (рис., *3*). Сферич. двуугольник определяется заданием своего угла. Площадь сферич. двуугольника определяется по формуле $S=2R^2A$, где R — радиус сферы, A — угол двуугольника, выраженный в радианах.

Три больших круга, не пересекающихся в одной паре диаметрально противоположных точек, образуют на сфере восемь сферических треугольников (рис., *4*); зная элементы (углы и стороны) одного из них, легко определить элементы всех остальных. Поэтому обычно рассматривают соотношения между элементами лишь одного треугольника, притом того, все стороны к-рого меньше половины большого круга (такие треугольники наз. эйлеровыми треугольниками). Стороны a, b, c сферич. треугольника измеряются плоскими углами трехгранного угла $OABC$ (рис., *5*), углы A, B, C треугольника — двугранными углами того же трехгранного угла. Свойства

сферич. треугольников во многом отличаются от свойств треугольников на плоскости (прямолинейных треугольников). Так, к известным трем случаям равенства прямолинейных треугольников для треугольников на сфере добавляется еще четвертый: два треугольника равны, если равны их соответствующие углы (на сфере не существует подобных треугольников).

Равными треугольниками считаются те, к-рые могут быть совмещены после передвижения по сфере. Равные сферич. треугольники имеют равные элементы и одинаковую ориентацию. Треугольники, имеющие равные элементы и различную ориентацию, наз. симметричными; таковы, напр., треугольники $AC'C$ и BCC' на рис., *6*.

Во всяком сферич. треугольнике (эйлеровом) каждая сторона меньше суммы и больше разности двух других; сумма всех сторон всегда меньше 2π. Сумма углов сферического треугольника всегда меньше 3π и больше π. Разность $s-\pi=\varepsilon$, где s — сумма углов сферического треугольника, наз. сферическим избытком. Площадь сферич. треугольника определяется по формуле $S=R^2\varepsilon$, где R — радиус сферы. О соотношениях между углами и сторонами сферич. треугольника см. *Сферическая тригонометрия*.

Положение каждой точки на сфере вполне определяется заданием двух чисел: эти числа (координаты) можно определить, напр., следующим образом. Фиксируются (рис., *7*) нек-рый большой круг QQ' (экватор), одна из двух точек пересечения диаметра PP' сферы, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью сферы, напр. P (полюс), и один из больших полукругов PAP', выходящих из полюса (нулевой меридиан). Большие полукруги сферы, выходящие из P, наз. меридианами, малые ее круги, параллельные экватору,— параллелями. В качестве одной из координат точки M на сфере принимается угол $\theta=POM$ — полярное расстояние, в качестве второй — угол $\varphi=AON$ между нулевым меридианом и меридианом, проходящим через точку M,— долгота, отсчитываемая против часовой стрелки.

Длина L дуги M_1M_2 (рис., *8*) линии $\theta=f(t)$, $\varphi=g(t)$ вычисляется по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\sin f\,\frac{dg}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Лит.: [1] Степанов Н. Н., Сферическая тригонометрия, 2 изд., Л.—М., 1948; [2] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 — Геометрия, М., 1963. *В. И. Битюцков.*

СФЕРИЧЕСКАЯ ИНДИКАТРИСА — изображение кривой трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с помощью отображения точек кривой в единичную сферу S^2 какими-либо единичными векторами: касательным, главной нормали, бинормали этой кривой. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ — радиус-вектор кривой l, s — естественный параметр, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(s)$ — радиус-вектор сферич. отображения кривой l в единичную сферу S^2 с центром в начале координат с помощью одного из указанных единичных векторов. Уравнение С. и. касательных определится уравнением

$$\boldsymbol{R}(s)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},$$

С. и. главных нормалей — уравнением

$$\boldsymbol{R}(s)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\Big/\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|,$$

а С. и. бинормалей — уравнением

$$\boldsymbol{R}(s)=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)\Big/\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|.$$

Касательная к С. и. в соответствующих точках s параллельна главной нормали кривой. Кривизна и кручение С. и. выражаются через кривизну и кручение самой кривой. Для каждой из С. и. существует бесконечное множество кривых, для к-рых она является индикатрисой, т. е. кривая не может быть однозначно восстановлена по ее С. и.

Лит.: [1] Выгодский М. Я., Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1949. *Л. А. Сидоров.*

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ — математич. дисциплина, изучающая зависимости между углами и сторонами сферических треугольников (см. *Сферическая геометрия*). Пусть A, B, C — углы и a, b, c — противолежащие им стороны сферического треугольника ABC. Углы и стороны сферич. треугольника связаны следующими основными формулами С. т.:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \tag{1}$$

— теорема синусов;

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \tag{2}$$

— теорема косинусов для сторон;

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a \tag{2_1}$$

— теорема косинусов для углов;

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A, \tag{3}$$

$$\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a \tag{3_1}$$

— формулы, связывающие пять элементов. В этих формулах стороны a, b, c измеряются соответствующими центральными углами, длины этих сторон равны соответственно aR, bR, cR, где R — радиус сферы. Меняя обозначения углов (и сторон) по правилу круговой перестановки: $A\to B\to C\to A$ ($a\to b\to c\to a$), можно написать другие формулы С. т., аналогичные указанным. Формулы С. т. позволяют по любым трем элементам сферич. треугольника определить три остальные.

Для решения сферич. треугольника по данным двум сторонам a, b и углу C между ними и по данным двум углам A, B и прилежащей к ним стороне c применяются следующие формулы (аналогии Непера):

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{c}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}; \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}. \tag{5}$$

Для прямоугольных сферич. треугольников ($A=90°$, a — гипотенуза, b, c — катеты) формулы С. т. упрощаются, напр.:

$$\sin b=\sin a\sin B \tag{1'}$$

— теорема синусов;

$$\cos a=\cos b\cos c \tag{2'}$$

— сферическая теорема Пифагора;

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c. \tag{3'}$$

При решении задач удобны следующие формулы Делламбра, связывающие все шесть элементов сферич. треугольника:

$$\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B-C)=\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(b+c),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B-C)=\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(b-c),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B+C)=\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b+c),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B+C)=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b-c);$$

формулы половинных углов:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},$$

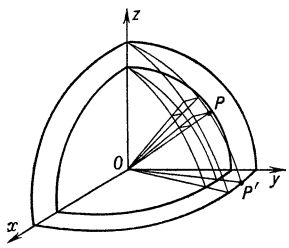
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},\quad s=\frac{a+b+c}{2};$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}},\quad S=\frac{A+B+C}{2}.$$

Лит. см. при ст. *Сферическая геометрия.* *В. И. Битюцков.*

СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа ρ, θ и φ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами



$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta,$$

где $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Координатные поверхности (см. рис.): концентрич. сферы с центром O ($\rho=OP=$const); полуплоскости, проходящие через ось Oz ($\varphi=<xOP'=$ =const); круговые конусы с вершиной O и осью Oz ($\theta=<zOP=$const). Система С. к.— ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho=1,\quad L_\varphi=\rho\sin\theta,\quad L_\theta=\rho.$$

Элемент площади поверхности:

$$d\sigma=\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\,(d\rho\,d\varphi)^2+\rho^2\,(d\rho\,d\theta)^2+\rho^4\sin^2\theta\,(d\varphi\,d\theta)^2}.$$

Элемент объема:

$$dV=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_\rho f=\frac{\partial f}{\partial\rho},\quad \operatorname{grad}_\varphi f=\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi},\quad \operatorname{grad}_\theta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}a_\rho+\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho\operatorname{tg}\theta}a_\theta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta};$$

$$\operatorname{rot}_\rho\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{\rho\operatorname{tg}\theta}a_\varphi;$$

$$\operatorname{rot}_\theta\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\rho}-\frac{a_\theta}{\rho};$$

$$\operatorname{rot}_\varphi\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}a_\varphi-\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi};$$

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}.$$

Обобщенными С. к. наз. числа u, v и w, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами

$$x=au\cos v\sin w,\quad y=bu\sin v\sin w,\quad z=cu\cos w,$$

где $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$, $0\leqslant w\leqslant\pi$, $a>b$, $b>0$. Координатные поверхности: эллипсоиды ($u=$const), полуплоскости ($v=$const) и эллиптич. конусы ($w=$const).

Д. Д. Соколов.

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, шаровые функции, присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода,— два линейно независимых решения $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ дифференциального уравнения

$$(1-z)^2\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]=0,$$

где μ, ν — комплексные постоянные, к-рое возникает при решении нек-рых классов дифференциальных уравнений с частными производными методом разделения переменных. Точки $z=\pm1$, ∞ являются в общем случае точками ветвления решений. С. ф. являются частными случаями гипергеометрич. функции:

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)$$
$$\left(\arg\frac{z+1}{z-1}=0\quad\text{при}\quad \operatorname{Im}z=0,\ z>1\right),$$

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{e^{\mu\pi i}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}\frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{z^{\mu+\nu+1}}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\mu+\nu+2}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)$$
$$(\arg z=0\quad\text{при}\quad \operatorname{Im}z=0,\ z>0;\quad \arg(z^2-1)=0$$
$$\text{при}\quad \operatorname{Im}z=0,\ z>1).$$

С. ф. $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ определены и однозначны соответственно в областях $|1-z|<2$ и $|z|>1$ комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+1$.

Если $\operatorname{Im}z=0$, $z=x$, $-1<x<1$, то обычно в качестве решений рассматриваются функции

$$P_\nu^\mu(x)=\frac{1}{2}\left[e^{\mu\pi i/2}P_\nu^\mu(x+i0)+e^{-\mu\pi i/2}P_\nu^\mu(x-i0)\right]=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$Q_\nu^\mu(x)=\frac{1}{2}e^{\mu\pi i}\left[e^{-\mu\pi i/2}Q_\nu^\mu(x+i0)+e^{\mu\pi i/2}Q_\nu^\mu(x-i0)\right]=$$
$$=\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\left[\cos\mu\pi P_\nu^\mu(x)-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(x)\right],$$

где $f(x+i0)$ ($f(x-i0)$) — значения функции $f(z)$ на верхней (нижней) границе разреза.

При $\mu=0$, $\nu=n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ $P_n(z)\equiv P_n^0(z)$ — многочлены Лежандра. О зональных С. ф. см. ст. *Сферическая гармоника.*

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1974; [2] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математич. таблицами, пер. с англ., М., 1979; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [5] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК МЕТОД — способ приближенного решения кинетич. уравнения с помощью разложения фазовой плотности частиц в конечную сумму по сферич. функциям от аргументов, задающих направление скорости частицы (см. [1]). Метод широко применяется при решении задач нейтронной физики.

В одномерной плоской геометрии стационарное интегро-дифференциальное кинетич. уравнение переноса (при изотропном рассеянии частиц)

$$\mu\frac{d\psi(x,\mu)}{dx}+\psi(x,\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x,\mu')\,d\mu' \qquad (1)$$

приближенно заменяется системой дифференциальных уравнений для $\tilde\psi_n(x)$ — приближенных значений коэффициентов Фурье

$$\psi_n(x)=\int_{-1}^{+1}\psi(x,\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2N-1. \qquad (2)$$

Система вида

$$n\frac{d\tilde\psi_{n-1}(x)}{dx}+(2n+1-c\delta_{n0})\,\tilde\psi_n(x)+(n+1)\frac{d\tilde\psi_{n+1}(x)}{dx}=0 \qquad (3)$$

возникает при условии

$$\tilde\psi_{2N}(x)\equiv0. \qquad (4)$$

Здесь $\psi(x, \mu)$ — фазовая плотность частиц, распространяющихся в веществе, c — среднее число вторичных частиц, возникающих в одном акте взаимодействия с частицами вещества, $P_n(\mu)$ — многочлен Лежандра степени n. Система (3) определяет P_{2N-1}-приближение С. г. м. для уравнения (1). Приближенное значение фазовой плотности

$$\tilde{\psi}(x, \mu) = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{2n+1}{2} \tilde{\psi}_n(x) P_n(\mu). \qquad (5)$$

Для уравнения (1) типичные краевые условия имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} \psi(0, \mu) = 0 \quad \text{для} \quad 0 < \mu \leqslant 1, \\ \psi(h, \mu) = 0 \quad \text{для} \quad -1 \leqslant \mu < 0. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Таковы, напр., краевые условия для задачи нейтронной физики о критич. режиме слоя толщины h со свободными поверхностями $x=0$ и $x=h$ (границы с вакуумом). В этой задаче необходимо найти положительное решение (1), (6) и собственное значение c.

В С. г. м. вместо (6) естественно взять

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^1 P_n(\mu)\, \tilde{\psi}(0, \mu)\, d\mu = 0 \\ \int_{-1}^0 P_n(\mu)\, \tilde{\psi}(h, \mu)\, d\mu = 0, \\ n = 0, 1, \ldots, 2N-1. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Однако такой подход дает в два раза больше условий, чем необходимо для частного решения системы (3). На практике был испытан различный выбор значений n в (7). Наилучший результат дают условия с $n=2k+1$, $k=0, 1, \ldots, N-1$. Для односкоростного уравнения переноса общего вида из *Владимирова вариационного принципа* получается система уравнений С. г. м. и указанные граничные условия (при выборе пробных функций в виде линейной комбинации *сферических гармоник*). Для трехмерной геометрии граничные условия можно записать в виде

$$\int_{(\Omega n)<0} (\Omega n)\, \tilde{\psi}(r, \Omega)\, Y_{2k, i}(\Omega)\, d\Omega \Big|_{r \in \Gamma} = 0, \qquad (8)$$
$$i = 0, \pm 1, \ldots, \pm 2k; \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Здесь r — вектор пространственной координаты, Ω — единичный вектор скорости частицы, имеющий сферич. координаты $\{\theta, \varphi\}$, n — единичный вектор внешней нормали к кусочно гладкой поверхности Г, ограничивающей выпуклую область пространства, в к-рой решается задача

$$Y_{k, i}(\Omega) = P_k^{(|i|)}(\cos\theta) \sin|i|\varphi, \quad i = -k, \ldots, -1,$$
$$Y_{k, i}(\Omega) = P^{(i)}(\cos\theta) \cos i\varphi, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

— сферич. функции, $P_k^{(i)}(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го рода ($P_k^{(0)}(\mu) = P_k(\mu)$ — многочлены Лежандра).

Низшие приближения С. г. м. (P_1, P_3) широко используются при решении задач нейтронной физики и дают хорошие результаты вдали от границ области, от источников и сильных поглотителей нейтронов. Теория возраста также строится в P_1-приближении. Обобщенное решение С. г. м. сходится к решению уравнения переноса при $N \to \infty$ (см. [2]). Скорость сходимости $\tilde{\psi}(x, \mu) \to \psi(x, \mu)$ легко оценить, сравнив интегральные уравнения для $\tilde{\psi}_0(x)$ и $\psi_0(x)$, т. е. оценив близость их ядер. Уравнение (1) с граничными условиями (6) приводит к интегральному уравнению с ядром

$$E_1(|x-s|) = \int_0^1 \frac{e^{-|x-s|/\mu}}{\mu}\, d\mu.$$

Система С. г. м. (3) при граничных условиях, аналогичных (6),

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\psi}(0, \mu_i) = 0 \quad \text{для} \quad 0 < \mu_i < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \\ \tilde{\psi}(h, \mu_i) = 0 \quad \text{для} \quad -1 < \mu_i < 0, \; i = -1, -2, \ldots, -N, \end{array}\right\} \qquad (9)$$

где μ_i — корни $P_{2N}(\mu)$, приводит к интегральному уравнению с ядром

$$\tilde{E}_1(|x-s|) = \sum_{i=1}^N a_i \frac{e^{-|x-s|/\mu_i}}{\mu_i},$$

где a_i — веса квадратурной формулы Гаусса для системы узлов $-1 < \mu_i < 1$. Особенность, к-рую имеет функция $\frac{e^{-|x-s|/\mu}}{\mu}$, приводит к медленной сходимости при больших N:

$$\int_0^h |E_1(x) - \tilde{E}_1(x)|\, dx < \frac{\text{const}}{N}, \quad |\psi_0(x) - \tilde{\psi}_0(x)| < \frac{\text{const}}{N}.$$

Приближенное собственное значение сходится к точному со скоростью $1/N^2$.

Граничные условия (9) возникают естественно при решении кинетич. уравнения методом дискретных ординат, к-рый состоит в замене (1) на приближенную систему

$$\mu_i \frac{\partial \tilde{\tilde{\psi}}_i(x)}{\partial x} + \tilde{\tilde{\psi}}_i(x) = \frac{c}{2} \sum_{i=-N}^N a_i \tilde{\tilde{\psi}}_i(x). \qquad (10)$$

Метод дискретных ординат в одномерной геометрии эквивалентен С. г. м. (см. [3]), т. к. система (10) может быть получена из (3) с помощью линейного преобразования неизвестных функций:

$$\tilde{\psi}_n(x) = \sum_{i=-N}^N a_i \tilde{\tilde{\psi}}_i(x) P_n(\mu_i).$$

Однако в многомерных задачах С. г. м. в низших приближениях дает большую точность, чем метод дискретных ординат.

Лит.: [1] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [2] Султангазин У. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1974, т. 14, № 1, с. 166—78; [3] Рихтмайер Р., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, пер. с англ., М., 1972.

В. А. Чуянов.

СФЕРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ — образ *сферического отображения.*

СФЕРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение гладкой ориентируемой (гипер)поверхности M^k пространства E^{k+1} в (единичную) сферу S^k с центром в начале координат E^{k+1}, сопоставляющее точке $x \in M^k$ точку $x^* \in S^k$ с радиус-вектором $\bar{n}(x)$ — (единичной) нормалью к M^k в x. Иначе, С. о. определяется поливектором, построенным из k независимых векторов, касательных к M^k:

$$\bar{n} = \frac{\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_k}{|\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_k|}$$

(здесь $u^1, \ldots, u^k$ — локальные координаты точки x, $\bar{x}_i = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i}$, $\bar{x}$ — радиус-вектор M^k). Напр., при $k=2$

$$\bar{n} = \frac{[\bar{x}_u, \bar{x}_v]}{|[\bar{x}_u, \bar{x}_v]|},$$

где $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение; этот простейший случай был рассмотрен К. Гауссом (C. Gauss, 1814). Образ С. о. наз. сферическим изображением M^k, или его сферическим образом.

Форма

$$d\bar{n}^2 = \gamma_{ij}\, du^i\, du^j$$

— обратный образ метрич. формы S^k — наз. третьей квадратичной формой (гипер)поверх-

ности M^k. Отвечающий ей тензор γ_{ij} связан с тензорами g_{ij} и b_{ij} соответственно первой и второй квадратичных форм соотношением

$$\gamma_{ij} = g^{ki} b_{ik} b_{jl},$$

а метрич. связности, соответствующие g_{ij} и γ_{ij}, оказываются *сопряженными связностями*.

Наряду со С. о. в случае (гипер)поверхности, однозначно проектирующейся на нек-рую (гипер)плоскость, удобно рассматривать т. н. нормальное отображение $\bar{n}$. Для (гипер)поверхности, заданной уравнением

$$x^{k+1} = f(x^1, \ldots, x^k)$$

(здесь x^i — декартовы координаты в E^{k+1}), оно определяется так:

$$\bar{n} = \{p_1, \ldots, p_k\},$$

где $p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, при этом $\bar{n} = n\sqrt{1 + \Sigma p_i^2}$.

Для неориентируемых (гипер)поверхностей используется т. н. неориентируемое С. о.— отображение M^k в эллиптич. пространство $\mathcal{E}^k$ (интерпретируемое как связка прямых, проходящих через центр E^{k+1}): точке $x \in M^k$ ставится в соответствие прямая, перпендикулярная касательной плоскости к M^k в x.

С. о. характеризует искривленность (гипер)поверхности в пространстве. Именно, отношение элементов площадей сферич. образа dS^* и самой поверхности dS в точке $x \in M^k$ равно полной (или кронекеровой, или внешней) кривизне K_l — произведению главных кривизн M^k в x:

$$K_l = dS^*/dS, \quad \text{т. е.} \quad K(ds^*) = \frac{K(ds)}{K_l}.$$

Точно так же (интегральная) кривизна множества $F \subset M^k$ равна площади его сферич. образа (т. е. множества $F^* = \bar{n}(F) \subset S^k$):

$$\int\int K_l \, dS = \int\int dS^*. \qquad (1)$$

Обобщения сферического отображения.

1) Касательное представление — С. о. подмногообразия M^k в E^N — отображение

$$M^k \longrightarrow G_{K, M},$$

где $G_{K,M}$ — *Грассмана многообразие*, определяемое (здесь) следующим образом. Пусть T_x — касательное пространство к M^k в точке x, к-рое можно считать (гипер)плоскостью в E^N, а $T(x)$ есть K-мерное подпространство, проходящее через начало координат E^N параллельно T_x. Отображение $x \to T(x)$ и наз. С. о. Имеет место обобщение формулы (1) (для четных k):

$$\int_{T_N(M^k)} \tilde{\Omega} = \int_{M^k} \Omega,$$

здесь $\Omega = \varepsilon^{i_1 \ldots i_k} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{k-1} i_k}$, где Ω_{ij} — *кривизны форма* на M^k, $\tilde{\Omega}$ — аналогичная форма на $G_{K,N}$, $T_N(M^k)$ — образ M^k при С. о. Двойственным образом определяется нормальное отображение $M^k \to G_{N,K}$: точке $x \in M^k$ сопоставляется ортогональное дополнение к $T(x)$.

2) Гауссово отображение (г. о.) *векторного расслоения* ξ^k в векторное пространство F^N, $k \leqslant N \leqslant \infty$,— (произвольное) отображение

$$g : E(\xi^k) \longrightarrow F^N$$

пространства расслоения $E(\xi^k)$, индуцирующее на каждом слое линейный мономорфизм. Для канонического векторного расслоения γ_k^N (подрасслоения расслоения-произведения $(G_{N,k} \times \mathbb{R}^N, p, G_{N,k})$, пространство к-рого состоит из всевозможных пар $(V, x) \in G_{N,k} \times \mathbb{R}^N$ с $x \in V$) отображение $(V, x) \to x$ наз. каноническим гауссовым отображением. Для любого расслоения ξ^k каждое г. о. является композицией канонич. г. о. и нек-рого морфизма расслоений; г. о. существует тогда и только тогда, когда существует такое отображение (B — база расслоения) $f: B(\xi) \to G_{N,k}$, что ξ и $f^*(\gamma_k^N)$ изоморфны (в частности, для каждого векторного расслоения над паракомпактным пространством существует г. о. в F^∞). Для подмногообразий риманова пространства имеется несколько обобщений С. о.

3) Локальное гауссово отображение. Пусть U — риманова нормальная координатная окрестность точки $x \in M^k \subset V^N$, $\perp U$ — сужение на U нормального расслоения многообразия M^k. Тогда отображение

$$G_U : \perp U \longrightarrow M_x \longrightarrow M_x^{\perp},$$

где M_x, $M_x^{\perp}$ — соответственно касательная и нормальная (гипер)плоскости к M^k в x, наз. локально гауссовым, если $G_U(z)$, $z \in U$, есть параллельный перенос в V^N вектора z назад вдоль геодезич. луча в U, идущего из x в начальную точку вектора z. Если V^N имеет тривиальную группу голономии, то перенос не зависит от пути, так что можно определить глобальное отображение G на $\perp M$ согласованно с G_U на $\perp U$.

4) Ефимовское отображение относится к поверхностям M^2 в римановом пространстве V^3 и является развитием упомянутого выше понятия сопряженных связностей. Оно определяется более формально из-за отсутствия абсолютного параллелизма в V^3 и рассматривает аналог третьей квадратич. формы — квадрат ковариантного дифференциала нормали — $(D\bar{n})^2$. При этом связь гауссовых кривизн $K(ds^*)$ и $K(ds)$ оказывается более сложной (вследствие неоднородности, вообще говоря, уравнений Кодацци). Эта связь остается прежней, т. е. $K(|Dn|) = \frac{K(ds)}{K_l}$, здесь $K(ds)$, $K(|Dn|)$ — гауссовы кривизны метрик ds и $|Dn|$ (в случае $V^3 = E^3$ $K(ds) = K_l$), и получается прежняя формула $K(|Dn|) = K(|dn|) = 1$, где K_l — внешняя кривизна M^2 в V^3, напр. в следующей ситуации: нормаль к M^2 является собственным вектором *Риччи тензора* пространства V^3 (рассматриваемого в точках M^2), другими словами, M^2 — одна из главных поверхностей этого тензора. Это всегда так, если V^3 является пространством постоянной кривизны.

Наконец, понятие С. о. вводится для нек-рых классов нерегулярных поверхностей.

5) Полярное отображение — С. о. выпуклой (гипер)поверхности F^k в E^{k+1}, сопоставляющее точке $x \in F^k$ множество $\nu(x)$ всех тех единичных векторов, отложенных от начала координат, к-рые параллельны нормалям к опорным (гипер)плоскостям к F^k в x. Теорема Александрова: сферич. образ $\nu(A)$ каждого борелевского множества $A \subset F^k$ измерим, и интегральная кривизна $K(A) = \mathrm{mes}\, \nu(A)$ есть вполне аддитивная функция.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей . . . , ч. 2, М.—Л., 1948; [2] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973; [3] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., Курс дифференциальной геометрии и топологии, М., 1980; [4] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [5] Шварц Дж., Дифференциальная геометрия и топология, пер. с англ., М., 1970; [6] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [7] Бишоп Р. Л., Криттенден Р., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [8] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [9] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964.

Л. А. Сидоров.

СХЕМА — окольцованное пространство, локально изоморфное *аффинной схеме*. Подробнее, С. состоит из топологич. пространства X (базисного пространства схемы) и пучка $\mathcal{O}_X$ коммутативных колец с единицей на X (структурного пучка схемы); при этом должно существовать открытое покрытие $(X_i)_{i\in I}$ пространства X такое, что $(X_i, \mathcal{O}_X|X_i)$ изоморфно аффинной схеме $\operatorname{Spec}\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ кольца сечений $\mathcal{O}_X$ над X_i. С.— одно из обобщений понятия *алгебраического многообразия*. О формировании понятия С. см. [2], [3], [5].

Основные понятия и свойства. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — С. Для каждой точки $x\in X$ слой пучка $\mathcal{O}_{X,x}$ является локальным кольцом; поле вычетов этого кольца обозначается $k(x)$ и наз. полем вычетов точки x. Топологич. свойствами С. наз. свойства базисного пространства X (напр., квазикомпактность, связность, неприводимость). Если P — нек-рое свойство аффинных С. (то есть свойство колец), то говорят, что С. локально обладает свойством P, если любая ее точка имеет открытую аффинную окрестность, обладающую этим свойством. Примером является свойство локальной нётеровости (см. *Нётерова схема*). С. регулярна, если все ее локальные кольца регулярны. Аналогично определяются нормальные, приведенные С., схемы Коэна — Маколея и т. д.

Морфизм схем — это морфизм их как локально окольцованных пространств. Иначе говоря, морфизм f С. X в С. Y состоит из непрерывного отображения $f: X\to Y$ и гомоморфизма пучков колец $f^*: \mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X$, причем для любой точки $x\in X$ гомоморфизм локальных колец $\mathcal{O}_{Y,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$ должен переводить максимальный идеал в максимальный. Для любого кольца A морфизмы С. X в $\operatorname{Spec} A$ находятся в биективном соответствии с гомоморфизмами колец $A\to\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Для любой точки $x\in X$ вложение ее в X также можно рассматривать как морфизм С. $\operatorname{Spec} k(x)\to X$. Важным свойством является существование в категории С. прямых и *расслоенных произведений*, обобщающих понятие тензорного произведения колец. Базисное топологич. пространство произведения С. X и Y отличается, вообще говоря, от произведения базисных пространств $X\times Y$.

С. X, снабженная морфизмом f в схему S, наз. S-схемой, или схемой над S. Морфизмом S-схем $f: X\to S$ в $g: Y\to S$ наз. морфизм $h: X\to Y$, для к-рого $f=g\circ h$. Любую С. можно рассматривать как С. над $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Задание морфизма *замены базы* $S'\to S$ позволяет переходить от S-схемы X к S'-схеме $X_{S'}=X\times_S S'$ — расслоенному произведению X и S'. Если базисная схема S является спектром кольца k, то говорят также о k-схеме. k-схема наз. k-схемой конечного типа, если существует конечное аффинное покрытие $(X_i)_{i\in I}$ схемы X такое, что k-алгебры $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ порождаются конечным числом элементов. Алгебраическим многообразием обычно наз. С. конечного типа над полем, требуя иногда отделимость и целостность. Рациональной точкой k-схемы X наз. морфизм k-схем $\operatorname{Spec} k\to X$; множество таких точек обозначается $X(k)$.

Для S-схемы f: $X\to S$ и точки $s\in S$ слоем морфизма f над s наз. $k(s)$-схема $f^{-1}(s)=X_s$, получаемая из X заменой базы $\operatorname{Spec} k(s)\to X$. Если вместо поля $k(s)$ в этом определении взять его алгебраич. замыкание, то получится понятие геометрического слоя. Тем самым S-схема X может рассматриваться как семейство схем X_s, параметризованное схемой S; часто, говоря о семействах, требуют дополнительно, чтобы морфизм f был плоским.

Понятия, связанные со схемами над S, часто наз. относительными в противоположность абсолютным понятиям, связанным со С. Фактически у каждого понятия, применимого к С., есть относительный вариант. Напр., S-схема X наз. отделимой, если диагональное вложение $X\to X\times_S X$ является замкнутым; морфизм $f: X\to S$ наз. гладким, если он плоский и все его геометрич. слои регулярны. Аналогично определяются морфизмы: аффинный, проективный, собственный, конечный, этальный, неразветвленный, конечного типа и т. д. Свойство морфизма наз. универсальным, если оно сохраняется после любой замены базы.

Когомологии схем. Исследование схем, а также алгебро-геометрич. объектов, связанных со С., часто удается разбить на две задачи — локальную и глобальную. Локальные задачи обычно линеаризуются и данные их описываются теми или иными *когерентными пучками* или комплексами пучков. Напр., при изучении локального строения морфизма $X\to S$ важную роль играют пучки $\Omega^p_{X/S}$ относительных *дифференциальных форм*. Глобальная часть обычно связана с когомологиями этих пучков (см., напр., *Деформация* алгебраического многообразия). Здесь бывают полезны *конечности теоремы* и теоремы об обращении в нуль когомологий (см. *Кодаиры теорема*), *двойственность*, *Кюннета формулы*, *Римана — Роха теорема* и т. д.

С. конечного типа над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться и как комплексное *аналитическое пространство*. Используя трансцендентные методы, можно вычислять когомологии когерентных пучков; более важно, однако, что можно говорить о комплексной, или сильной, топологии на $X(\mathbb{C})$, фундаментальной группе, числах Бетти и т. д. Желание иметь нечто подобное для произвольных схем и глубокие арифметич. гипотезы (см. *Дзета-функция* в алгебраической геометрии) привели к построению различных топологий в категории схем, наиболее известной из к-рых является *этальная топология*. Это позволило определить фундаментальную группу С., другие гомотопич. инварианты, когомологии со значениями в дискретных пучках, числа Бетти и т. д. (см. *l-адические когомологии*, *Вейля когомологии*, *Мотивов теория*).

Конструкции схем. Чаще всего построение конкретной С. использует понятия аффинного или проективного спектра (см. *Аффинный морфизм*, *Проективная схема*), включая задание подсхемы пучком идеалов. Конструкция проективного спектра позволяет, в частности, строить раздутие, или моноидальное преобразование схем. Для построения С. используются также расслоенное произведение или склеивание. Менее элементарные конструкции опираются на понятие представимого функтора. Располагая хорошим понятием семейства объектов, параметризованных С., и сопоставляя каждой С. S множество $F(S)$ семейств, параметризованных схемой S, получают контравариантный функтор F из категории С. в категорию множеств (снабженных, быть может, дополнительной структурой). Если функтор F представим, т. е. существует С. X такая, что $F(S)=\operatorname{Hom}(S, X)$ для любого S, то получается универсальное семейство объектов, параметризованное С. X. Так строятся, напр., *Пикара схема* или *Гильберта схема* (см. также *Алгебраическое пространство*, *Модулей теория*).

Еще один способ порождения новых С.— переход к факторпространству по отношению эквивалентности на С. Как правило, такой фактор существует как алгебраич. пространство. Частный случай этой конструкции — С. орбит X/G при действии схемы групп G на схеме X (см. *Инвариантов теория*).

Одно из обобщений понятия С.— формальная С., к-рую можно понимать как индуктивный предел С. с одним и тем же базисным топологич. пространством.

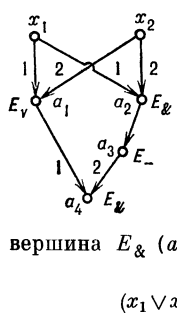
Лит.: [1] Grothendieck A., Dieudonné J., Elements de géométrie algébrique, t. 1, B.—Hdlb.—N. Y., 1971; [2] Дьедонне Ж., «Математика», 1965, т. 9, № 1, с. 54—126; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [4] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [5] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112.

В. И. Данилов.

СХЕМА ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ — математич. модель реальных объектов, связанных с переработкой информации, в к-рых допускается многократное использование промежуточных результатов. К подобным объектам относятся, напр., электронно-ламповые схемы, сети нейронов, нек-рые виды вычислительных алгоритмов. Это один из основных классов *управляющих систем*. С. из ф. э. можно рассматривать как *автомат* без памяти.

Математически С. из ф. э. можно определить как ориентированный *граф* без циклов с помеченными ребрами и вершинами, множество вершин к-рого разбито на два подмножества. Вершины одного из них наз. входами С. из ф. э. Им не инцидентны входящие ребра, и каждой из них приписана буква из алфавита переменных $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$. Вершинам другого подмножества приписаны буквы из алфавита $\mathcal{E}=\{\varphi_1(\ ), \ldots, \varphi_m(\ )\}$ функциональных символов.

Алфавиту $\mathcal{E}$, таким образом, соответствует однозначно множество функций $\overline{\mathcal{E}}=\{\varphi_1(\ ), \ldots, \varphi_m(\ )\}$. Некрые вершины графа выделены и объявлены выходами С. из ф. э. Вершина с входящими в нее (занумерованными) ребрами, к-рой приписан символ φ_i из $\mathcal{E}$ (местность его равна числу входящих ребер), наз. функциональным элементом E_{φ_i}. Другие концы инцидентных этой вершине входящих ребер суть входы функционального элемента E_{φ_i}, а сама вершина есть выход функционального элемента E_{φ_i}. Если на входы функционального элемента E_{φ_i} подать набор $\tilde{\sigma}$ значений переменных из X, то на выходе E_{φ_i} (т. е. в вершине φ_i) реализуется значение функции φ_i на этом наборе $\tilde{\sigma}$; таким образом, функциональный элемент E_{φ_i} реализует функцию φ_i. Всякая С. из ф. э. также реализует на своих выходах нек-рые функции. Набор функциональных элементов, соответствующий алфавиту $\mathcal{E}$, из к-рого строятся С. из ф. э., наз. базисом $B_{\mathcal{E}}$. Множество всех С. из ф. э., построенных при помощи функциональных элементов из $B_{\mathcal{E}}$, наз. множеством С. из ф. э. в базисе $B_{\mathcal{E}}$. Если $\overline{\mathcal{E}}$ полно, то $B_{\mathcal{E}}$ полон, и С. из ф. э. в $B_{\mathcal{E}}$ можно реализовать любую функцию. Далее предполагается, что переменные из X принимают значения 0, 1, и $\overline{\mathcal{E}}$ — подмножество функций алгебры логики. Именно такого типа базисы изучены наиболее полно.



В качестве примера С. из ф. э. может служить изображенная на рис. С. из ф. э. в базисе $\{\&, \vee, {}^-\}$. Ее входы — вершины x_1 и x_2, выход — вершина $E_{\&}$ (a_4), на нем реализуется функция

$$(x_1 \vee x_2)\,\&\,\overline{x_1\,\&\,x_2}, \quad \text{т. е.} \quad x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Эквивалентное определение С. из ф. э. можно дать также в терминах равенств. Для рассмотренного на рис. примера такая система может быть записана следующим образом:

$$a_1 = x_1 \vee x_2, \quad a_2 = x_1\,\&\,x_2,$$

$$a_3 = \bar{a}_2, \quad a_4 = a_1\,\&\,a_3 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Обычно функциональным элементам из $B_{\mathcal{E}}$ приписываются неотрицательные числа, именуемые весами (или сложностями) функциональных элементов базиса. Под сложностью С. из ф. э. понимается сумма весов всех функциональных элементов, присутствующих в этой С. из ф. э. Минимальная сложность, достаточная для реализации произвольной функции алгебры логики от n переменных С. из ф. э. в произвольном конечном базисе (с ненулевыми весами), асимптотически равна $\rho 2^n/n$ (см. [1]), где ρ — константа для рассматриваемого базиса (см. *Синтева задачи*). Минимальная сложность, достаточная для реализации С. из ф. э. системы F функций, зависящих от одних и тех же переменных, асимптотически равна

$$\rho \frac{\log_2 |F|}{\log_2 \log_2 |F|},$$

где $|F|$ — число функций F, а ρ — константа, вычисляемая по базису.

По числу входов, к-рые могут быть присоединены к выходу произвольного функционального элемента, из класса С. из ф. э. выделяются т. н. С. из ф. э. без ветвления выходов, или формулы (к выходу каждого функционального элемента такой С. из ф. э. может быть присоединен только один вход). В отличие от формул, С. из ф. э. общего вида можно рассматривать как схемы вычислений с запоминанием промежуточных результатов. Для класса формул минимальная сложность, необходимая для реализации произвольной функции алгебры логики от n переменных формулой в произвольном конечном базисе (с ненулевыми весами), асимптотически равна $\rho 2^n/\log n$, где ρ — константа, зависящая от базиса (ср. с контактными л-схемами, см. *Контактная схема*). Для базисов, содержащих элементы с нулевыми весами, сложности С. из ф. э. ведут себя иначе (см., напр., [5]).

Кроме того, интерес представляет задача о синтезе схем в бесконечных базисах. Наиболее полно исследован случай, когда элементы базиса реализуют пороговые функции. Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. пороговой, если существуют действительные числа $w_1, \ldots, w_n, h$ такие, что

$$w_1x_1 + \ldots + w_nx_n \geqslant h \qquad (*)$$

тогда и только когда, когда $f(x_1, \ldots, x_n)=1$. Функциональный элемент, реализующий пороговую функцию, наз. пороговым элементом. С. из ф. э. в базисе из пороговых элементов наз. схемами из пороговых элементов. Обычно рассматриваются два типа базисов из пороговых элементов: 1) веса пороговых элементов равны единице, 2) вес порогового элемента равен сумме модулей всех коэффициентов w_i (при условии, что пороговые функции задаются целочисленным неравенством (*)). Для каждого из этих базисов получены асимптотические оценки сложности схем из пороговых элементов: 1) $2(2^n/n)^{1/2}$, 2) $2^n/n$.

Путь между входом и выходом С. из ф. э. наз. цепью. Число вершин цепи, отличных от входа, наз. длиной цепи. Максимальная длина цепи в С. из ф. э. наз. глубиной С. из ф. э. Минимальная глубина С. из ф. э. (и формулы), достаточная для реализации произвольной функции алгебры логики от n переменных в базисе $\{\&, \vee, {}^-\}$, равна

$$n - \log_2 \log_2 n + O(1).$$

Кроме весов, функциональным элементам базиса могут быть приписаны неотрицательные числа, именуемые задержками. Под задержкой цепи понимается сумма задержек присутствующих в ней функциональных элементов. Под задержкой С. из ф. э. понимается максимальная задержка цепей этой

С. из ф. э. Понятия задержки (при единичных задержках базиса) и глубины С. из ф. э., вообще говоря, не совпадают (см. [9]).

В качестве примера других определений сложности С. из ф. э. можно упомянуть мощность С. из ф. э.: мощностью С. из ф. э. на наборе $\tilde{\sigma}$ наз. число ее функциональных элементов, выходы к-рых находятся в состоянии 1 при подаче на входы S набора $\tilde{\sigma}$. Мощность С. из ф. э. S — максимум ее мощностей на множестве всех наборов. Минимальная мощность, достаточная для реализации произвольной функции алгебры логики от n переменных С. из ф. э. в произвольном конечном базисе, по порядку не меньше n и не больше $2^n/n$.

Лит.: [1] Лупанов О. Б., «Изв. вузов. Радиофизика», 1958, т. 1, № 1, с. 120—40; [2] его же, «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, с. 31—110; [3] его же, там же, 1960, в. 3, с. 61—80; 1962, в. 7, с. 61—114; [4] Нечипорук Э. И., там же, 1962, в. 8, с. 123—60; [5] Лупанов О. Б., там же, 1973, в. 26, с. 109—40; [6] Захарова Е. Ю., там же, 1963, в. 9, с. 317—19; [7] Гашков С. Б., там же, 1978, в. 34, с. 265—68; [8] Храпченко В. М., там же, 1979, в. 35, с. 141—68; [9] Лупанов О. Б., там же, 1970, в. 23, с. 43—81; [10] Вайнцвайг М. Н., «Докл. АН СССР», 1961, т. 139, № 2, с. 320—23; [11] Касим-Заде О. М., «Проблемы кибернетики», 1981, в. 38, с. 117—79; 1978, в. 33, с. 215—20.

Н. А. Карпова.

СХЕМНАЯ ВЯЗКОСТЬ — понятие, характеризующее диссипативность разностных схем (см. [1]). С. в. показывает, какие дополнительные диссипативные свойства появляются при *аппроксимации дифференциального уравнения разностным* (см. [2], [3]). Наряду с термином «С. в.» употребляют термин «аппроксимационная вязкость» (см. [4], [5]). С. в. является *диссипативной функцией* (см. [6]). Структура С. в. определяется видом коэффициентов при четных производных минимального порядка по пространственным переменным от вычисляемых функций при разложении разностных функций в ряд Тейлора по сеточным параметрам (см. [7]—[9]). Коэффициенты при третьих производных по пространственным переменным представляют собой коэффициенты (матрицу) схемной дисперсии (см. [10]). Дифференциальное представление включает в себя все члены разложения (бесконечное число) разностного оператора в ряд Тейлора по сеточным параметрам (см. [9], [10]). Дифференциальное приближение включает в себя часть членов разложения; первое дифференциальное приближение состоит из исходного дифференциального оператора и первого ненулевого члена разложения.

В зависимости от формы исходной системы дифференциальных уравнений и типа базисных функций разложения реализуются различные виды матриц С. в. и дисперсионных матриц. При рассмотрении *газовой динамики численных методов* различают 6 видов матриц С. в. (см. [10]).

Условие неотрицательности матрицы С. в. параболич. формы первого дифференциального приближения рассматривается как условие устойчивости разностной схемы; в этом случае реализуется *корректная задача* (см. [8]). Путем рассмотрения уравнения со С. в. можно с помощью аппарата дифференциальных приближений производить групповую классификацию разностных схем (см. [9]).

С. в. для каждой детерминированной разностной схемы определена однозначно. Для возможности эффективного управления С. в. целесообразно рассматривать классы разностных схем. Так, введя многопараметрич. класс разностных схем расщепления (см. [10]), можно путем варьирования числовых значений параметров изменять величины членов С. в., придавая С. в. вид Навье-Стоксовской, турбулентной и др. вязкости. С. в., зависящую от параметров, можно оптимизировать (см. [11]), требуя выполнения различных условий: математических, программистских, архитектурных. При выполнении условий неотрицательности С. в. и минимальности С. в. по параметрам из многопараметрич. класса разностных схем расщепления выделяется семейство оптимальных схем (минимально диссипативных и устойчивых), к-рому принадлежит разностная схема *крупных частиц метода* (см. [12]).

При исследовании С. в. целесообразно выявить внутреннюю структуру матрицы С. в. (см. [11]), напр.: рассматривать матрицу С. в. расщепления, нестационарную матрицу С. в., матрицу С. в. переноса, архитектурную матрицу С. в. и др.

При решении краевой задачи вводится понятие С. в. и дифференциального приближения или представления разностных краевых условий (см. [10]).

С помощью рассмотрения С. в. исследуется устойчивость нелинейных разностных схем как во внутренних точках расчетной области, так и на границах и в их окрестности.

Лит.: [1] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные методы решения задач газовой динамики, 2 изд., М., 1980; [4] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [5] Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики, М., 1979; [6] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Диссипативные свойства разностных схем, М., 1981; [7] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, 2 изд., М., 1978; [8] Яненко Н. Н., Шокин Ю. И., «Докл. АН СССР», 1968, т. 182, № 2, с. 280—81; [9] Шокин Ю. И., Метод дифференциального приближения, Новосиб., 1979; [10] Давыдов Ю. М., Дифференциальные приближения и представления разностных схем, М., 1981; [11] его же, «Докл. АН СССР», 1979, т. 245, № 4, с. 812—16; [12] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Метод крупных частиц в газовой динамике, М., 1982.

Ю. М. Давыдов.

СХЕМЫ СЕРИЙ случайных величин — см. *Серий схема.*

СХОДИМОСТИ МНОЖИТЕЛИ для функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ — числа λ_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, такие, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n(x)$ сходится почти всюду на измеримом множестве X, где $u_n(x)$ — числовые функции, определенные на X.

Напр., для тригонометрич. ряда Фурье функции из L_1 С. м. являются числа $\lambda_n = \frac{1}{\ln n}$, $n=2, 3, \ldots$ (λ_0 и λ_1 можно выбрать произвольно), то есть если $f \in L_1[-\pi, \pi]$ и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\ln n}$$

сходится почти всюду на всей числовой прямой. Если же $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p>1$, то ее тригонометрич. ряд Фурье уже сам сходится почти всюду (см. *Карлесона теорема*).

Л. Д. Кудрявцев.

СХОДИМОСТИ СКОРОСТЬ — характеристика итерационного метода, позволяющая судить о зависимости погрешности метода на n-й итерации от числа n (см. [1]—[3]). Напр., если $\|z^n\| \leqslant q^n \|z^0\|$, где $\|z^n\|$ — норма погрешности на n-й итерации, а $q<1$, то говорят, что метод сходится со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем q, а величину $-\ln q$ наз. асимптотической скоростью сходимости.

При наличии неравенств типа $\|z^{n+1}\| \leqslant C\|z^n\|^k$ говорят о степенной с порядком k скорости сходимости (напр., о квадратичной скорости сходимости итерационного метода Ньютона — Канторовича).

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [3] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

Е. Г. Дьяконов.

СХОДИМОСТИ УСКОРЕНИЕ (для итерационного метода) — построение по рассматриваемому итерационному методу нек-рой его модификации, обладающей большей *сходимости скоростью*. Применяемые способы ускорения (процессы ускорения) довольно разнообразны (см. [1]—[4]) и зависят как от решаемой задачи, так и от типа итерационного метода. В тех случаях, когда итерационный метод может рассматриваться как частный случай нек-рого класса итерационных методов, содержащих свободные итерационные параметры, С. у. может быть сведено к задаче оптимального выбора этих параметров. Задача оптимизации может ставиться в различных формах, приводя, напр., к переходу от метода простой итерации

$$u^{n+1} = u^n - \tau (Lu^n - f) \qquad (1)$$

для решения системы линейных алгебраич. уравнений

$$Lu = f, \quad L = L^* > 0 \qquad (2)$$

или к методу Ричардсона с чебышевскими параметрами, или к методу сопряженных градиентов. Скорость сходимости подобных классич. итерационных методов зависит от числа обусловленности $\nu(L)$ матрицы L и может быть довольно медленной при больших $\nu(L)$. В таких ситуациях, и в особенности для решения систем сеточных уравнений, часто используются модификации этих методов, определяемые тем, что они применяются не для (2), а для эквивалентной ей системы

$$B^{-1}Lu = B^{-1}f,$$

где $B = B^* > 0$ — специально подобранный оператор (см. [2]—[4]).

Оператор $B^{-1}L$ является самосопряженным и положительным оператором в нек-ром евклидовом пространстве и скорость сходимости получающихся модификаций зависит от $\nu(B^{-1}L)$. Подобные же модификации применяются и для более общих задач, включая нелинейные (см. *Нелинейное уравнение*; численные методы решения). При их реализации важно уметь эффективно решать системы $Bv = g$, т. к., напр., модификация (1) сводится к соотношению

$$u^{n+1} = u^n - \tau B^{-1}(Lu^n - f) \qquad (3)$$

(см. *Минимизация вычислительной работы*).

Одним из традиционных и общих приемов С. у. для методов (1) является δ^2-процесс. Он же вместе с целым рядом других способов ускорения (см. [1]) применяется и в итерационных методах для частичной задачи на собственные значения.

При решении нелинейных задач С. у. часто достигается за счет специального выбора начального приближения на основе методов продолжения по параметру. Для этих же задач С. у. иногда осуществляется и на основе использования итерационных методов более высокого порядка (метод Ньютона — Канторовича и др.).

Различные приемы С. у. применяются и в вероятностных итерационных методах типа метода Монте-Карло (см. [2]).

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.—Л., 1963; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [4] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

Е. Г. Дьяконов.

СХОДИМОСТЬ — одно из основных понятий математич. анализа, означающее, что нек-рый математич. объект имеет *предел*. В этом смысле говорят о С. последовательности каких-либо элементов, С. ряда, С. бесконечного произведения, С. цепной дроби, С. интеграла и т. п. Понятие С. возникает, напр., при изучении математич. объектов с помощью приближения их в каком-то смысле более простыми. Так, для вычисления площади круга используется последовательность площадей правильных многоугольников, вписанных в этот круг; для приближенных вычислений интегралов от функций применяются аппроксимации их кусочно линейными функциями или, более общо, *сплайнами* и т. п. Можно сказать, что математич. анализ начинается с того момента, когда в множестве тех или иных элементов введено понятие С.

I. Сходимость последовательностей. В одном и том же множестве элементов можно вводить разные понятия С. его элементов в зависимости от изучаемого вопроса. Большую роль использование понятия С. играет при решении всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т. п.), в частности при нахождении их численных приближенных решений. Например, с помощью *последовательных приближений метода* можно получить последовательность функций, сходящихся к соответствующему решению данного обыкновенного дифференциального уравнения, и тем самым одновременно доказать при определенных условиях существование решения и дать метод, позволяющий вычислить это решение с нужной точностью. Как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений с частными производными существует теория различных сходящихся разностных методов их численного решения, удобных для их использования на современных вычислительных машинах.

Если в нек-ром множестве X введено понятие С. последовательностей его элементов, т. е. в совокупности всех указанных последовательностей выделен некрый класс, каждая последовательность к-рого названа сходящейся, и всякой сходящейся последовательности поставлен в соответствие нек-рый элемент из множества X, наз. ее пределом, то само множество X наз. пространством со сходимостью.

Обычно от понятия С. последовательностей требуется, чтобы оно обладало следующими свойствами:

1) каждая последовательность элементов множества X может иметь не более одного предела;

2) всякая стационарная последовательность $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$, $x \in X$, является сходящейся и ее пределом является элемент x;

3) всякая подпоследовательность сходящейся последовательности также является сходящейся и имеет тот же предел, что и вся последовательность.

При выполнении этих условий пространство X наз. часто пространством со сходимостью по Фреше. Примером такого пространства является всякое хаусдорфово топологич. пространство, а следовательно, любое метрич. пространство, в частности счетно-нормированное, а потому и просто нормированное (но отнюдь не всякое полунормированное) пространство. Для того чтобы последовательность сходилась в полном метрич. пространстве, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Примером неметризуемого пространства со сходимостью по Фреше является пространство всех действительных функций, определенных на числовой оси $\mathbb{R}$, для к-рых С. последовательности $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, означает ее С. при каждом фиксированном $x \in X$.

Если в пространстве со сходимостью по Фреше X определить для каждого его подмножества $A \subset X$ замыкание $\bar{A}$ как совокупность всех точек пространства X, к-рые являются пределом последовательностей точек, принадлежащих множеству A, то пространство X может не оказаться топологич. пространством, т. к. не обязательно замыкание $\bar{\bar{A}}$ замыкания $\bar{A}$ всякого множества A при данном определении будет совпадать с $\bar{A}$.

Если в одном и том же множестве введены два определения С. и всякая последовательность, сходящаяся в смысле первого определения, сходится и в смысле вто-

рого, то говорят, что вторая сходимость сильнее первой. Во всяком пространстве со С. X можно ввести более сильную С. так, что порожденная ей операция замыкания превратит уже X в топологич. пространство, короче говоря, каждое пространство со С. может быть вложено в топологич. пространство, состоящее из тех же точек.

Во всяком топологич. пространстве определено понятие С. последовательностей его точек, но этого понятия недостаточно, вообще говоря, для того чтобы описать замыкание любого множества в этом пространстве, т. е. дать определение точек прикосновения множества, и, следовательно, недостаточно, чтобы полностью описать топологию данного пространства. Чтобы это стало возможно, вводится понятие сходящейся обобщенной последовательности.

Частично упорядоченное множество $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}, \geqslant)$ наз. *направленным множеством*, если за любыми двумя его элементами имеется следующий за ними. Отображение $f: \mathfrak{A}\to X$ направленного множества $\mathfrak{A}$ в нек-рое множество X наз. обобщенной последовательностью или *направленностью* в X. Обобщенная последовательность $f: \mathfrak{A}\to X$ в топологич. пространстве X наз. сходящейся к точке x_0 из X, если для каждой окрестности U точки x_0 существует такое $\alpha_0\in\mathfrak{A}$, что для всех $\alpha\geqslant\alpha_0$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, выполняется включение $f(\alpha)\in U$. В этом случае говорят, что предел обобщенной последовательности $f: \mathfrak{A}\to X$ существует и равен x_0, при этом пишут $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha)=x_0$.

В этих терминах замыкание множества, лежащего в топологич. пространстве X, описывается следующим образом: для того чтобы точка x принадлежала замыканию $\bar{A}$ множества $A\subset X$, необходимо и достаточно, чтобы нек-рая обобщенная последовательность точек из X сходилась к x; а для того чтобы топологич. пространство было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы каждая обобщенная последовательность его точек имела не более одного предела.

В терминах С. обобщенных последовательностей можно сформулировать и критерий непрерывности отображения F топологич. пространства X в топологич. пространство Y: для непрерывности отображения F в точке $x_0\in X$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой обобщенной последовательности $f: \mathfrak{A}\to X$ такой, что $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha)=x_0$, выполнялось бы условие $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F(f(\alpha))=F(x_0)$.

II. Сходимость числовых последовательностей и рядов. Простейшим примером, иллюстрирующим понятие С., являются сходящиеся числовые последовательности, т. е. последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, имеющие конечные пределы, и сходящиеся числовые ряды, т. е. ряды, последовательности частичных сумм к-рых сходятся. Сходящиеся числовые последовательности и ряды часто применяются для получения различных оценок, а в численных методах — для приближенных вычислений значений функций и различных постоянных. В подобных задачах важно, с какой «скоростью» сходится рассматриваемая последовательность к своему пределу. Напр., число π можно представить в виде суммы рядов следующими способами:

$$\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

$$\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left[\frac{4}{5^{2n-1}}-\frac{1}{239^{2n-1}}\right].$$

Ясно, что для приближенного вычисления числа π с достаточно большой точностью целесообразно воспользоваться второй формулой (формулой Мэчина), т. к. для одной и той же заданной степени точности вычислений при использовании второй формулы будет возможным ограничиться меньшим числом членов ряда.

Для описания сравнения С. двух рядов вводится следующее определение. Пусть даны два сходящихся ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\quad a_n\geqslant 0, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\quad b_n\geqslant 0, \tag{2}$$

и пусть $\alpha_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$, $\beta_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_{n+k}$ — их остатки порядка $n=1, 2, \ldots$ Ряд (1) наз. сходящимся быстрее ряда (2), или, что то же самое, ряд (2) наз. сходящимся медленнее ряда (1), если $\alpha_n=o(\beta_n)$ при $n\to\infty$, т. е. если существует такая бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, что $\alpha_n=\varepsilon_n\beta_n$, $n=1, 2, \ldots$

Если же ряды (1) и (2) расходятся и $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ — их частичные суммы порядка $n=1, 2, \ldots$, то ряд (1) наз. расходящимся быстрее ряда (2), или ряд (2) расходящимся медленнее ряда (1), если $\sigma_n=o(s_n)$ при $n\to\infty$.

Для каждого сходящегося ряда с неотрицательными членами существует ряд также с неотрицательными членами, к-рый медленнее сходится, а для всякого расходящегося — к-рый медленнее расходится. Существуют методы, позволяющие преобразовать данный сходящийся ряд в быстрее сходящийся без изменения его суммы. Для этого применяется, напр., *Абеля преобразование*.

Наряду с обычным, указанным выше понятием суммы ряда, имеются и другие более общие определения его суммы, базирующиеся на различных методах суммирования рядов, основанных на построении по определенным правилам из членов ряда вместо последовательностей частичных сумм других последовательностей, к-рые могут оказаться сходящимися в том случае, когда последовательность частичных сумм расходится. Пределы построенных последовательностей и наз. обобщенными суммами ряда.

Аналогично случаю рядов вводится понятие более быстрой С. и расходимости для несобственных интегралов, причем одним из самых распространенных методов убыстрения С. (расходимости) интегралов является метод интегрирования по частям. Имеются и различные методы усреднения несобственных интегралов, аналогичные методам суммирования рядов и позволяющие для нек-рых расходящихся интегралов определить обобщенную С.

III. Сходимость функциональных рядов и последовательностей. В случае последовательностей функций

$$f_n: X\longrightarrow Y,\quad n=1, 2, \ldots, \tag{3}$$

при соответствующих предположениях о множествах X и Y существуют различные понятия С., хорошо иллюстрирующие многообразие конкретных реализаций этого понятия. Если Y — топологич. пространство и последовательность (3) сходится при каждом фиксированном $x\in X$, то она наз. (поточечно) сходящейся на множестве X. Если Y — равномерное топологич. пространство (в частности, метрич. пространство или топологич. группа), то можно ввести понятие равномерно сходящейся последовательности (см. *Равномерная сходимость*).

Пусть $X=(X, S, \mu)$ является пространством с мерой μ (т. е. во множестве X выделена σ-алгебра $\{S\}$ его подмножеств, на которых задана мера μ), $Y=\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ — расширенное множество действительных чисел $\mathbb{R}$, а функции

$$f_n: X\longrightarrow \bar{\mathbb{R}},\quad n=1, 2, \ldots, \tag{4}$$

почти всюду конечны и измеримы.

Последовательность (4) наз. сходящейся почти всюду к функции $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$, если существует такое множество $X_0\subset X$ меры нуль, что сужения функций последовательности (4) на множестве $X\setminus X_0$ сходится на этом множестве к сужению на нем функции f. Если последовательность (4) почти всюду сходится к функции f, то эта функция также почти всюду конечна и измерима. Связь между С. последовательности почти всюду и равномерной С. устанавливается *Егорова теоремой*.

Последовательность (4) наз. сходящейся по мере на множестве X к измеримой функции $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$, если для любого $\varepsilon>0$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x\in X: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}=0.$$

Если последовательность (4) сходится почти всюду к функции f, то она сходится к этой функции и по мере, а если последовательность (4) сходится к функции f по мере, то в последовательности (4) существует подпоследовательность, к-рая сходится к функции f почти всюду.

Пусть для функции $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$

$$\|f\|_p=\left(\int_X|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<+\infty, \tag{5}$$

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\operatorname{vrai}|f(x)| \tag{6}$$

и пусть $L_p(X)$ — пространство функций f, для к-рых

$$\|f\|_p<+\infty,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{7}$$

Эти пространства наз. обычно пространствами Лебега. На классах эквивалентных относительно меры μ функций, для к-рых выполняется условие (7), функционал $\|\cdot\|_p$ является нормой (см. *Сходимость по норме*).

Если последовательность (4) сходится по норме (6) к функции, то она сходится к этой функции почти всюду. Если последовательность $f_n\in L_p(X)$, $n=1, 2, \ldots$, сходится по норме $\|\cdot\|_p$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, к нек-рой функции $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$, то $f\in L_p(X)$ и данная последовательность наз. сходящейся к f в пространстве $L_p(X)$. С. по норме $\|\cdot\|_p$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, наз. также сильной сходимостью в пространстве $L_p(X)$, или, при $1\leqslant p<+\infty$, сходимостью в среднем порядка p, в частности, при $p=1$ — сходимостью в среднем, а при $p=2$ — сходимостью в смысле среднего квадратичного. Примером последовательностей функций, сходящихся в смысле среднего квадратичного, являются последовательности частичных сумм Фурье рядов функций, принадлежащих пространству $L_2[-\pi, \pi]$.

Если последовательность (4) сходится в $L_p(X)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, к функции f, то она сходится к этой функции на множестве X и по мере, а следовательно, из последовательности (4) можно выделить подпоследовательность, к-рая будет сходиться к функции f почти всюду на X. Если $1\leqslant p\leqslant q\leqslant+\infty$, $\mu X<+\infty$ и последовательность (4) сходится в пространстве $L_q(X)$, то она сходится и в пространстве $L_p(X)$.

Последовательность (4) функций $f_n\in L_p(X)$, $1<p<+\infty$ наз. слабо сходящейся в пространстве $L_p(X)$ к функции $f\in L_p(X)$, если для любой функции $g\in L_q(X)$, $1/p+1/q=1$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\int_X[f_n(x)-f(x)]\,g(x)\,dx=0.$$

Если последовательность $f_n\in L_p(X)$, $n=1, 2, \ldots$, сильно сходится в пространстве $L_p(X)$, $1<p<+\infty$, то она и слабо сходится к той же функции, и в пространстве $L_p(X)$ существуют слабо сходящиеся последовательности, не сходящиеся сильно. Напр., последовательность функций $\sin nx$, $n=1, 2, \ldots$, слабо сходится к нулю в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, но не сходится сильно. Действительно, для любой функции $g\in L_2[-\pi, \pi]$ интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\,dx$$

являются коэффициентами Фурье функции g по системе $\{\sin nx\}$ и потому стремятся к нулю при $n\to\infty$, однако $\|\sin nx\|_2=\sqrt{\pi}$, $n=1, 2, \ldots$

Пределы последовательностей функций, сходящихся почти всюду, по мере, в смысле сильной или слабой С. в пространстве $L_p(X)$, в случае полной меры μ определяются однозначно с точностью до эквивалентных относительно меры μ функций.

Обобщениями пространства Лебега $L_p(X)$ являются *Никольского пространства*, *Орлича пространства*, *Соболева пространства* и ряд др.

Понятие сильной и слабой С. обобщается на более общие пространства, в частности на линейные нормированные пространства.

Другого типа понятия С. последовательности функций (являющиеся частным случаем С. в *счетнонормированных пространствах*) встречаются в теории обобщенных функций. Напр., пусть D является пространством основных функций, состоящим из бесконечно дифференцируемых финитных функций $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Последовательность $f_n\in D$, $n=1, 2, \ldots$, наз. сходящейся к f в пространстве D, если существует такой отрезок $[a, b]$, что носители всех функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, и f содержатся в нем, а последовательности $\{f_n^{(k)}\}$ самих функций f_n и всех их производных равномерно на $[a, b]$ сходятся соответственно к $f^{(k)}$, $k=0, 1, \ldots$ При изучении преобразования Фурье обобщенных функций рассматриваются другие пространства основных функций со С.

Перечисленные отдельные виды С. последовательностей функций приспособлены к изучению различных вопросов математич. анализа. Так, понятие равномерной сходимости дает возможность сформулировать условия, когда при предельном переходе сохраняется непрерывность: напр., если X — топологич. пространство, Y — метрич. пространство, и члены последовательности (3) непрерывны на X и последовательность (3) равномерно сходится на X, то предельная функция также непрерывна на пространстве X. В терминах понятия С. почти всюду или С. в среднем порядка p можно сформулировать условия перехода к пределу под знаком интеграла. Если X — пространство с мерой μ, $Y=\overline{\mathbb{R}}$, последовательность $f_n\in L_1(X)$, $n=1, 2, \ldots$, сходится почти всюду на X и существует такая функция $F\in L_1(X)$, что для почти всех $x\in X$ и всех $n=1, 2, \ldots$, выполняется неравенство $|f_n(x)|\leqslant F(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,dx=\int_X\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]dx. \tag{8}$$

Если $\mu X<+\infty$, $f_n\in L_p(X)$, $n=1, 2, \ldots$, $1<p<+\infty$ и последовательность $\{f_n\}$ сходится слабо (сильно) в пространстве $L_p(X)$, то справедлива формула (8).

В теории вероятностей для последовательностей случайных величин употребляются понятия *сходимости почти наверное* (С. с вероятностью единица), соответствующее понятию С. почти всюду, *сходимости по вероятности*, соответствующее понятию С. по мере, *сходимости по распределению*.

Обобщением понятия С. последовательности функций является С. семейства функций по параметру, к-рый принадлежит нек-рому топологич. пространству.

Математики древности (Евклид, Архимед) по существу употребляли понятие С., используя ряды для на-

хождения площадей и объемов. Доказательством С. рядов им служили рассуждения по схеме исчерпывания метода. Термин «С.» в применении к рядам был введен в 1668 Дж. Грегори (J. Gregory) при исследовании нек-рых способов вычисления площади круга и гиперболич. сектора. Математики 17 в. обычно имели достаточно ясное представление о С. употребляемых ими рядов, хотя и не могли проводить строгих с современной точки зрения доказательств С. В 18 в. широко распространилось в математич. анализе употребление заведомо расходящихся рядов [в частности, их широко применял Л. Эйлер (L. Euler). Это привело впоследствии, с одной стороны, ко многим недоразумениям и ошибкам, устраненным лишь с развитием четкой теории С., а с другой — предвосхитило современную теорию суммирования расходящихся рядов. Строгие методы исследования С. рядов были разработаны в 19 в. О. Коши (A. Cauchy), Н. Абелем (N. Abel), Б. Больцано (B. Bolzano), К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) и др. Понятие равномерной С. сформировалось в работах Н. Абеля (1826), Ф. Зайделя (Ph. Seidel, 1847—48), Дж. Стокса (G. Stokes, 1847—48), О. Коши (1853) и стало систематически применяться в лекциях по математич. анализу К. Вейерштрассом в кон. 50-х гг. прошлого столетия. Дальнейшие расширения понятия С. были связаны с развитием теории функций, функционального анализа и топологии.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, 2 изд., М., 1981; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971, ч. 2, 2 изд., М., 1980; [5] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [6] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ ПОРЯДКА p — см. *Сходимость.*

СХОДИМОСТЬ ДИСКРЕТНАЯ — сходимость сеточных функций и операторов в соответствующих пространствах. Пусть E, F, E_n, F_n ($n\in N=\{1, 2, 3, \ldots\}$) — банаховы пространства, а $P=\{p_n\}$ и $Q=\{q_n\}$ — системы линейных операторов (связывающих отображений) $p_n: E\to E_n$, $q_n: F\to F_n$ со свойством

$$\|p_n x\|\longrightarrow\|x\|,\quad \|q_n y\|\longrightarrow\|y\|\,(n\in N)\ \forall x\in E,\quad y\in F.$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & F \\ {\scriptstyle p_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_n} \\ E_n & \xrightarrow{A_n} & F_n \end{array}$$

Последовательность $\{x_n\}_{n\in N'\subset N}$ с $x_n\in E_n$:

а) дискретно сходится (или P-сходится) к $x\in E$, если $\|x_n-p_nx\|\to 0$ ($n\in N'$); б) дискретно компактна (или P-компактна), если для любого бесконечного $N''\subset N'$ существует бесконечное $N'''\subset N''$ такое, что подпоследовательность $\{x_n\}_{n\in N'''}$ дискретно сходится.

Последовательность $\{A_n\}_{n\in N}$ операторов $A_n: E_n\to F_n$:

а) дискретно сходится (или PQ-сходится) к оператору $A: E\to F$, если для любой P-сходящейся последовательности $\{x_n\}$ имеет место соотношение

$$x_n\xrightarrow{P}x\ (n\in N)\Rightarrow A_nx_n\xrightarrow{Q}Ax\ (n\in N);\qquad (1)$$

б) компактно сходится к A, если кроме (1) выполняется условие: $x_n\in E_n$, $\|x_n\|\leqslant\mathrm{const}\ (n\in N)\Rightarrow\{A_nx_n\}$ Q-компактна;

в) регулярно (или собственно) сходится к A, если кроме (1) выполняется условие: $x_n\in E_n$, $\|x_n\|\leqslant\mathrm{const}$, $\{A_nx_n\}$ Q-компактна$\Rightarrow\{x_n\}$ P-компактна;

г) устойчиво сходится к A, если кроме (1) выполняется условие: $\exists A_n^{-1}\in L(F_n, E_n)$, $\|A_n^{-1}\|\leqslant\mathrm{const}\ (n\geqslant n_0)$.

Пусть A и A_n — линейные ограниченные операторы. Тогда $A_n\xrightarrow{PQ}A$ тогда и только тогда, когда $\|A_n\|\leqslant\mathrm{const}$ $(n\in N)$ и $\|A_np_nx-q_nAx\|\to 0$ для каждого x из нек-рого плотного в E подмножества.

Для линейных ограниченных операторов A и A_n следующие условия равносильны: 1) $A_n\xrightarrow{PQ}A$ устойчиво, $AE=F$; 2) $A_n\xrightarrow{PQ}A$ регулярно, $Ax=0\Rightarrow x=0$, операторы A_n $(n\geqslant n_0)$ фредгольмовы с нулевым индексом; 3) $A_n\xrightarrow{PQ}A$ устойчиво и регулярно. Если выполнено одно из условий 1), 2) и 3), то существуют A^{-1} и (при достаточно больших n) A_n^{-1}, причем $A_n^{-1}\xrightarrow{QP}A^{-1}$ устойчиво и регулярно. Выполнение условий 1), 2), 3) можно трактовать как теорему сходимости для уравнений $Ax=y$ и $A_nx_n=y_n$: если выполнено условие 1), 2) или 3), то из $y_n\xrightarrow{Q}y$ следует сходимость

$$x_n=A_n^{-1}y_n\xrightarrow{P}A^{-1}y=x$$

с быстротой

$$c_1\|A_np_nx-y_n\|_{F_n}\leqslant\|x_n-p_nx\|_{E_n}\leqslant c_2\|A_np_nx-y_n\|_{F_n}.$$

При доказательстве сходимости приближенных методов чаще всего используются условия 1) и 2). В качестве E и F выбираются подходящие пространства функций, а в качестве p_n и q_n — операторы перехода от функций к их значениям на сетке.

Лит.: [1] Stummel F., «Math. Z», 1971, Bd 120, S. 231—64; [2] Вайникко Г. М., в кн.: Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 16, 1979, с. 5—53. *Г. М. Вайникко.*

СХОДИМОСТЬ МЕР — понятие теории меры, задаваемое той или иной топологией в пространстве мер, определенных на нек-рой σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств пространства X или, более общо, в пространстве $\mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$ зарядов, т. е. счетно аддитивных действительных или комплексных функций $\mu=\{\mu(A), A\in\mathfrak{B}\}$, определенных на множествах из $\mathfrak{B}$. Наиболее употребительны следующие топологии в подпространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})\subset\mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$ пространства $\mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$, состоящем из ограниченных зарядов, т. е. таких, что $\sup|(\mu(A)|<\infty$, $A\in\mathfrak{B}$.

1) В пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ вводится норма

$$\|\mu\|\equiv\mathrm{Var}\,\mu=\sup_{A\in\mathfrak{B}}(|\mu(A)|+|\mu(X\setminus A)|),\quad \mu\in\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B}),$$

наз. вариацией заряда μ. Сходимость последовательности зарядов $\mu_n\to\mu$, $n\to\infty$ к заряду $\mu\in\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ в этой норме наз. сходимостью по вариации.

2) В пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ рассматривается обычная слабая топология: сходимость последовательности зарядов $\mu_n\to\mu$, $n\to\infty$ этой топологии (слабая сходимость) означает, что для любого линейного непрерывного функционала на пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$, $F(\mu_n)\to F(\mu)$, $n\to\infty$. Эта сходимость равносильна тому, что последовательность зарядов ограничена: $\sup_n\|\mu_n\|<\infty$ и для любого множества $A\in\mathfrak{B}$ последовательность значений $\mu_n(A)\to\mu(A)$, $n\to\infty$. Слабая сходимость последовательности зарядов μ_n, $n=1, 2, \ldots$ влечет сходимость интегралов $\int_X f(x)d\mu_n\to\int_X f(x)d\mu$, $n\to\infty$, для любой ограниченной измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ функции f на X.

3) В случае, когда X — топологич. пространство, а $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(X)$ — его борелевская σ-алгебра в пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$, рассматривают топологию, также наз.

слабой (иногда узкой) топологией. Она определяется как самая слабая из топологий в $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$, относительно к-рой непрерывны все функционалы вида

$$F_f(\mu) = \int_X f(x)\, d\mu,$$

где f — произвольная ограниченная непрерывная функция на пространстве X. Эта топология слабее предыдущей топологии и сходимость последовательности зарядов $\mu_n \to \mu$, $n \to \infty$ относительно нее (с л а б а я или у з к а я с х о д и м о с т ь) равносильна сходимости значений $\mu_n(A) \to \mu(A)$, $n \to \infty$ для любого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(X)$, для к-рого $\mu(\partial A) = 0$, где $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ и чертой обозначена операция замыкания множества.

4) В случае, когда X — локально компактное топологич. пространство (а $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$ — борелевская σ-алгебра) в пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$, рассматривают т. н. широкую топологию: сходимость последовательности зарядов $\mu_n \to \mu$, $n \to \infty$ (ш и р о к а я с х о д и м о с т ь) означает сходимость функционалов $F_f(\mu_n) \to F(\mu)$, $n \to \infty$, для любой непрерывной функции f с компактным носителем. Эта топология слабее, чем слабая топология в $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$. Аналогичная топология естественно определяется и в более широком пространстве $\mathfrak{M}^b_{\text{лок}}(X, \mathfrak{B})$ локально ограниченных зарядов μ, т. е. таких, что для любой точки $x \in X$ найдется такая ее окрестность U, что $\sup |\mu(A)| \subset \infty$, $A \subset U$, $A \in \mathfrak{B}(X)$.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967; [2] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1962; [3] Б и л л и н г с л е й П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977. *Р. А. Минлос.*

СХОДИМОСТЬ ПО ВАРИАЦИИ — см. *Распределений сходимость, Сходимость мер.*

СХОДИМОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ — сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, заданных на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, к случайной величине X, определяемая следующим образом: $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

В математич. анализе этот вид сходимости называют с х о д и м о с т ь ю п о м е р е. Из С. по в. вытекает *сходимость по распределению.* *В. И. Битюцков.*

СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ — см. *Сходимость.*

СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ — сходимость последовательности $\{x_n\}$ в нормированном векторном пространстве X к x, определяемая следующим образом: $x_n \to x$, если

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в X. *М. И. Войцеховский.*

СХОДИМОСТЬ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ — сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, заданная на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, к случайной величине X, определяемая следующим образом: $X_n \xrightarrow{d} X$, если

$$\mathsf{E} f(X_n) \longrightarrow \mathsf{E} f(X) \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty \qquad (*)$$

для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$. Наименование этого вида сходимости связано с тем, что условие $(*)$ эквивалентно сходимости функций распределения $F_{X_n}(x)$ к функции распределения $F_X(x)$ в каждой точке x, где $F_X(x)$ непрерывна. *В. И. Битюцков.*

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ — см. *Сходимость.*

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ НАВЕРНОЕ, с х о д и м о с т ь с в е р о я т н о с т ь ю е д и н и ц а,— сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, заданных на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, к случайной величине X, определяемая следующим образом: $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ (или $X_n \to X$ P-п. н.), если

$$\mathsf{P}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \longrightarrow 0\} = 1, \quad \omega \in \Omega.$$

В математич. анализе этот вид сходимости называют с х о д и м о с т ь ю п о ч т и в с ю д у. Из С. п. н. вытекает *сходимость по вероятности.* *В. И. Битюцков.*

СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ — см. *Распределений сходимость.*

СХОДИМОСТЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ЕДИНИЦА — см. *Сходимость почти наверное.*

СЧЕТНОАДДИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ м н о ж е с т в — аддитивная *функция множеств,* определенная на алгебре Σ подмножеств множества M такая, что

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

для любых непересекающихся множеств E из Σ. *М. И. Войцеховский.*

СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО — множество, равномощное множеству натуральных чисел. Напр., множества рациональных чисел, алгебраических чисел. *М. И. Войцеховский.*

СЧЕТНОКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство X такое, что из любого счетного открытого покрытия его можно выделить конечное подпокрытие. *М. И. Войцеховский.*

СЧЕТНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — нормальное пространство X, представимое в виде суммы $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ своих подпространств X_i размерности $\dim X_i \leqslant 0$. *М. И. Войцеховский.*

СЧЕТНОНОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — локально-выпуклое пространство X, топология к-рого задается с помощью счетной совокупности с о г л а с о в а н н ы х н о р м $\|*\|_1, \ldots, \|*\|_n, \ldots$, т. е. таких, что если последовательность $\{x_n\} \subset X$, фундаментальная по нормам $\|*\|_p$ и $\|*\|_q$, по одной из них сходится к нулю, то по второй также сходится к нулю. Последовательность норм $\{\|*\|_n\}$ можно заменить неубывающей, $\|*\|_p \leqslant \|*\|_q$ при $p < q$, порождающей ту же топологию с базой окрестностей нуля $U_{p,\varepsilon} = \{x \in X : \|x\|_p < \varepsilon\}$. С. п. метризуемо, и метрика может быть задана равенством

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x - y\|_n}{1 + \|x - y\|_n}.$$

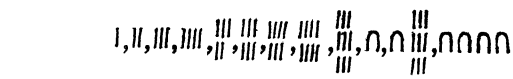
Пример С. п.— пространство целых аналитических в единичном круге $|z| < 1$ функций с топологией равномерной сходимости на любом замкнутом подмножестве этого круга и совокупностью норм $\|x(z)\| = \max_{|z| \leqslant 1/n} |x(z)|$.

Лит.: [1] Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958. *В. И. Соболев.*

СЧИСЛЕНИЕ, н у м е р а ц и я,— совокупность приемов представления натуральных чисел. В любой системе счисления (с. с.) нек-рые символы (слова или знаки) служат для обозначения определенных чисел, наз. у з л о в ы м и, остальные числа (алгоритмические) получаются в результате каких-либо операций из узловых чисел. С. с. различаются выбором узловых чисел и способами образования алгоритмических, а с появлением письменных обозначений числовых символов с. с. стали различаться характером числовых знаков и принципами их записи.

Напр., у древних вавилонян узловыми являлись числа 1, 10, 60; у маори (коренных жителей Новой Зеландии) узловыми являлись числа 1, 11, 11^2, 11^3. В римской с. с. узловыми являются числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, обозначаемые соответственно знаками I, V, X, L, C, D, M.

С. с., в к-рых алгоритмич. числа образуются сложением узловых, наз. а д д и т и в н ы м и. Так, в древнеегипетской (иероглифической) с. с. числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 19, 40 обозначались соответственно символами



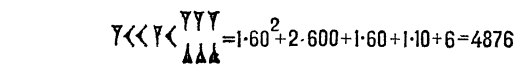
Те же числа в римской с. с. обозначаются следующим образом: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XIX, XL. В этой с. с. алгоритмич. числа получаются путем сложения и вычитания узловых. В числительных русского языка отчетливо выражен аддитивно-мультипликативный способ образования алгоритмич. чисел, напр. триста пятьдесят семь.

В нек-рых с. с., наз. а л ф а в и т н ы м и, числа обозначались теми же знаками, что и буквы. Так, древние греки числа от 1 до 9, а также все десятки и сотни обозначали при помощи последовательных букв алфавита, снабженных черточками. К примеру, числа 803, 833 и 83 записывались так:

$$\overline{\omega\gamma},\ \overline{\omega\lambda\gamma},\ \overline{\pi\gamma}.$$

Алфавитные изображения чисел употребляли славяне и многие другие народы.

С. с. наз. н е п о з и ц и о н н о й, если каждый числовой знак в записи любого числа в ней имеет одно и то же значение. Если же значение числового знака зависит от его расположения в записи числа, то система наз. п о з и ц и о н н о й. Римская с. с. — непозиционная. Любое число в вавилонской с. с. записывалось при помощи комбинации двух знаков: вертикального клина и углового клина (пример см. ниже). Эти знаки объединялись в группы от одного до девяти в случае вертикальных клиньев и от одного до пяти в случае угловых клиньев. Вертикальный клин мог обозначать единицу и любую степень числа 60, а угловой клин — 10 и произведение 10 на любую степень числа 60. Порядок следования разрядов чисел совпадал с ныне принятым. Так,



$$=1\cdot60^2+2\cdot600+1\cdot60+1\cdot10+6=4876$$

В связи с тем, что в вавилонской С. с. отсутствовал знак для пропуска разряда, соответствующий нашему нулю, запись числа не гарантировала однозначность ее прочтения. Точный смысл записи обычно устанавливался из контекста рукописи. Поэтому описанную с. с. принято называть неабсолютно позиционной. Позднее в древнем Вавилоне стали употреблять специальный знак для пропуска разряда. Современная десятичная с. с.— позиционная.

Все известные позиционные с. с.— аддитивно-мультипликативные системы. Позиционный принцип записи чисел в таких системах оправдывается следующей теоремой элементарной теории чисел.

Пусть $q_0=1$ и $q_1, q_2, \ldots$ — последовательность отличных от единицы натуральных чисел. Тогда для любого натурального числа a можно найти одно и только одно натуральное число n, для к-рого уравнение

$$a_0+a_1q_1+a_2q_1q_2+\ldots+a_{n-1}q_1\ldots q_{n-1}=a \qquad (1)$$

имеет решение в целых числах $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ таких, что

$$0\leqslant a_0<q_1,\ \ldots,\ 0\leqslant a_{n-1}<q_{n-1},\ 0<a_{n-1}<q_n. \qquad (2)$$

При этом уравнению (1) удовлетворяет только один упорядоченный набор (кортеж)

$$\langle a_{n-1},\ \ldots,\ a_0\rangle \qquad (3)$$

целых чисел с условием (2).

В вавилонской с. с. $q_1=10$, $q_2=6$, $q_3=10$, $q_6=6$, ... и т. д. У индейцев племени майя $q_1=5$, $q_2=4$, $q_3=18$, $q_4=q_5=\ldots=20$.

С. с., в к-рой все члены упомянутой в теореме последовательности $q_1, \ldots, q_n$ равны одному и тому же числу q и в к-рой каждое из чисел от 0 до $q-1$ обозначается определенным символом, наз. q-и ч н о й с. с. или п о з и ц и о н н о й с. с. с о с н о в а н и е м q. В q-ичной с. с. каждое натуральное число обозначается кортежем из указанных символов. Для выполнения сложения и умножения чисел, записанных в q-ичной с. с., достаточно иметь таблицы сложения и умножения для всех чисел от 0 до $q-1$.

Лит.: [1] Б а ш м а к о в а И. Г., Ю ш к е в и ч А. П., Происхождение систем счисления, в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 1, М.—Л., 1951, с. 11—74; [2] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959; [3] Ю ш к е в и ч А. П., История математики в ср. века, М., 1961; [4] В а й м а н А. А., Шумеро-вавилонская математика, М., 1961; [5] История математики, т. 1, М., 1970.

В. И. Нечаев.

СЮРЪЕКЦИЯ, с ю р ъ е к т и в н о е о т о б р а ж е н и е множества A в множество B — отображение f такое, что $f(A)=B$. Вместо «f сюръективно» говорят также «f есть отображение множества A на множество B». С. множества A на A наз. также п е р е с т а н о в к о й множества A.

О. А. Иванова.

Т

ТАБЛИЧНАЯ СВОДИМОСТЬ, tt-сводимость,— специальный вид *алгоритмической сводимости*. Пусть A и B — два подмножества натурального ряда. Говорят, что A таблично сводится к B (обозначение: $A \leqslant_{tt} B$), если существует алгоритм f, к-рый по всякому натуральному числу a строит булеву функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (функция задается, напр., своей таблицей, число аргументов функции может зависеть от a) и числа $b_1, \ldots, b_n$ такие, что принадлежность a к B эквивалентна истинности $\varphi(b_1 \in B, b_2 \in B, \ldots, b_n \in B)$.

Отношение $\leqslant_{tt}$ является предпорядком на множестве всех подмножеств натурального ряда, упорядочение по нему образует верхнюю полурешетку. Отношению $\leqslant_{tt}$ соответствует отношение эквивалентности $\equiv_{tt}$ на подмножествах натурального ряда, а именно: $A \equiv_{tt} B$, если $A \leqslant_{tt} B$ и $B \leqslant_{tt} A$. Классы эквивалентности по этому отношению наз. табличными степенями (или tt-степенями).

В теории алгоритмов рассматриваются также специальные виды Т. с., напр., ограниченная Т. с. (btt-сводимость), определяемая дополнительным требованием, чтобы число аргументов функции φ не зависело от a. Если в качестве функции φ берется просто функция x_1, то сводимость наз. m-сводимостью (обозначение: $\leqslant_m$). Сводимости, промежуточные между tt-сводимостью и m-сводимостью (т. е. такие алгоритмич. сводимости $\leqslant_r$, что $\leqslant_{tt} \supseteq \supseteq \leqslant_r \supseteq \leqslant_m$), в частности все упомянутые выше, иногда наз. сводимостями табличного типа.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Дегтев А. Н., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 3, с. 137—68.

А. Л. Семенов.

ТАВТОЛОГИЯ — формула языка исчисления высказываний, принимающая *истинностное значение* «истина» независимо от того, какое истинностное значение «истина» или «ложь» принимает каждая ее пропозициональная переменная. Примеры Т.: $A \supset A$, $A \vee \neg A$, $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$.

Вопрос о тавтологичности данной формулы решается в общем случае прямым перебором всех наборов значений ее пропозициональных переменных.

В. Н. Гришин.

ТАЙХМЮЛЛЕРА ПРОСТРАНСТВО, пространство Тейхмюллера,— метрическое пространство (M_g, d), точками к-рого являются абстрактные римановы поверхности (т. е. классы $\overline{X}$ конформно эквивалентных римановых поверхностей X рода g с выделенными эквивалентными относительно тождественного отображения системами Σ-образующих фундаментальной группы $\pi_1(X)$), а расстояние d между $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ равно $\ln K$, где постоянная K — отклонение отображения Тайхмюллера (квазиконформного отображения $\overline{X} \to \overline{X}'$, дающего наименьшее максимальное отклонение среди всех таких отображений). Введено О. Тайхмюллером [1].

Лит.: [1] Teichmüller O., «Abhandl. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl.», 1939, № 22, S. 3—197; [2] Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961; [3] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975.

М. И. Войцеховский.

ТАКТИЧЕСКАЯ КОНФИГУРАЦИЯ, t-схема, t-(v, k, λ)-схема на v-множестве S,— система k-подмножеств (блоков) множества S такая, что каждое t-подмножество элементов из S встречается точно в λ блоках. Класс 2-схем совпадает с классом уравновешенных неполных *блок-схем*. Иногда Т. к. наз. также *инцидентности система*, в к-рой каждое множество инцидентно в точности k элементам, а любой элемент инцидентен в точности r множествам. Т. к. при $t=k$ наз. тривиальной. Если Т. к. нетривиальна, то

$$t+1 \leqslant k \leqslant v-1-t.$$

Каждая t-схема есть s-схема при любом $s \leqslant t$. Число λ_s появлений произвольного s-подмножества в блоках t-схемы дается формулой

$$\lambda_s = \binom{k-s}{t-s}^{-1} \binom{v-s}{t-s} \lambda, \quad 0 < s \leqslant t.$$

Условия целостности λ_s — необходимые условия существования Т. к. В частности, при $t \geqslant 2$ каждая Т. к. есть уравновешенная неполная блок-схема.

Центральным вопросом для Т. к. является проблема их существования и построения. Долгое время для $t>3$ были известны лишь отдельные примеры, в частности 5-(12, 6, 1)- и 5-(24, 8, 1)-схемы, связанные с пятикратно транзитивными группами Матьё M_{12} и M_{24} соответственно. Однако в 60-х гг. 20 в. была открыта связь Т. к. с теорией кодирования (см., напр., [3], [4]) и указан способ построения Т. к., исходя из векторов с v ненулевыми координатами, принадлежащих линейному (n, k)-коду, к-рый представляет собой k-мерное векторное подпространство в n-мерном пространстве над конечным полем (см. [5], [7]).

Известно, что t-кратно транзитивные группы, отличные от симметрической и знакопеременной, приводят к нетривиальным t-схемам; это дает несколько бесконечных серий 3-схем. С помощью теоретико-групповых и геометрич. соображений были построены также бесконечные классы 4- и 5-схем (см., напр., [6]).

Для числа b блоков в t-схеме справедливо неравенство

$$b \geqslant \begin{cases} \binom{v}{s}, & \text{если } t=2s, \quad v \geqslant k+s, \\ 2\binom{v-1}{s}, & \text{если } t=2s+1, \quad v-1 \geqslant k+s, \end{cases} \qquad (*)$$

обобщающее неравенство Фишера ($b \geqslant v$) для уравновешенных неполных блок-схем. При равенстве в (*) Т. к. наз. плотной. Плотные Т. к. обобщают симметричные 2-схемы; в частности, при $t=2s$ множество чисел пересечений блоков плотной Т. к. содержит в точности s различных элементов. Для существования плотной 4-схемы необходимо, чтобы

$$(v-3) \mid 2(k-1)(k-2) \quad \text{и} \quad (k-3) \mid 4\lambda.$$

Плотные 3-схемы адамаровы, т. е. суть 3-$(4n, 2n, n-1)$-схемы, а при $s \geqslant 2$ нетривиальных плотных $(2s+1)$-схем не существует. Из данной t-(v, k, λ)-схемы можно построить три других Т. к.: а) беря дополнения в S для каждого блока, б) удаляя какой-либо элемент и все блоки, его содержащие, в) беря блоки, содержа-

щие какой-либо элемент, и удаляя его из них. Полученные Т. к. наз. соответственно дополнительной, остаточной и произвоДной по отношению к исходной Т. к.; они суть соответственно: t-$(v,\ v-k,\ \lambda^c)$-схема с

$$\lambda^c=\binom{k}{t}^{-1}\binom{v-k}{t}\lambda;$$

$(t-1)$-$(v-1,\ k,\ \lambda^r)$-схема с

$$\lambda^r=(v-k)(k-t+1)^{-1}\lambda$$

и $(t-1)$-$(v-1,\ k-1,\ \lambda)$-схема.

Лит.: [1] Dembowski P., Finite geometries, B.—N. Y., 1968; [2] Ray-Chaudhuri D. K., Wilson R. M., «Osaka J. Math.», 1975, v. 12, p. 737—44; [3] Assmus E. F., Mattson H. F., «Arch. Math.», Basel, 1966, Bd 17, S. 121—35; [4] их же, «J. Comb. Theory», 1969, v. 6, p. 122—51; [5] Семаков Н. В., Зиновьев В. А., «Проблемы передачи информации», 1969, т. 5, в. 3, с. 28—36; [6] Alltop W. O., «J. Comb. Theory», 1972, v. 12, p. 390—95; [7] Pless Vera, «J. Comb. Theory», 1972, v. 12, p. 119—42.

В. Е. Тараканов.

ТАМАГАВЫ МЕРА — мера τ на группе *аделей* G_A связной линейной алгебраич. группы G, определенной над глобальным полем K, конструируемая следующим образом. Пусть ω — ненулевая K-определенная дифференциальная форма на G максимальной степени. Для нормирования v из множества V всех неэквивалентных нормирований поля K через ω_v обозначается мера Хаара на локально компактной группе G_{K_v} точек G над пополнением K_v, получаемая из ω (см. [1], [2]). Если произведение $\prod\omega_v(G_{O_v})$, взятое по всем неархимедовым v, где G_{O_v} — группа целых v-адических точек, абсолютно сходится (что всегда имеет место для полупростых и унипотентных групп G), то полагают $\tau=\prod_{v\in V}\omega_v$. В противном случае для определения τ нек-рым канонич. способом вводят систему чисел $(\lambda_v)_{v\in V}$, называемых множителями сходимости, таких, что произведение $\prod_{v\in V}\lambda_v\omega_v(G_{O_v})$ абсолютно сходится, и тогда $\tau=\prod_{v\in V}\lambda_v\omega_v$ (см. [13]). Получаемая описанным образом мера τ не зависит от первоначального выбора формы ω, являясь канонической мерой Хаара на G_A. Это позволяет однозначно говорить об объеме однородных пространств, связанных с G_A (см. *Тамагавы число*).

Лит.: [1] Вейль А., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 3—74; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969, с. 374—96; [3] Ono T., «Ann. Math.», 1963, v. 78, № 1, p. 47—73.

А. С. Рапинчук.

ТАМАГАВЫ ЧИСЛО — объем однородного пространства $G_A^{(1)}/G_K$, ассоциированного с группой аделей связной линейной алгебраич. группы G, определенной над глобальным полем K, относительно *Тамагавы меры*. Здесь $G_A^{(1)}$ — подгруппа в G_A, состоящая из таких аделей $g=(g_v)_{v\in V}\in G_A$, что

$$\prod_{v\in V}|\chi(g_v)|_v=1$$

для любого K-определенного характера χ группы G (произведение берется по всем нормированиям v из множества V нормализованных нормирований поля K). Конечность Т. ч. вытекает из теории приведения (см. [5]).

При описании значений $\tau(G)$ удобно различать случаи унипотентных групп, алгебраич. торов и полупростых групп. Для унипотентных групп всегда Т. ч. равно 1. Если T — алгебраич. K-тор, то

$$\tau(T)=\frac{[H^1(K,\ \hat{T})]}{[Ш(T)]},$$

где $[H^1(K,\ \hat{T})]$ и $[Ш(T)]$ — порядки группы одномерных когомологий Галуа модуля рациональных характеров $\hat{T}$ тора T и его группы Шафаревича — Тейта соответственно. На основании этой формулы построен пример тора, у к-рого $\tau(T)$ не является целым [8].

Для вычисления Т. ч. полупростых групп над числовым полем получена редукция к односвязным группам [9]: пусть G — полупростая K-группа, $\pi:\tilde{G}\to G$ — универсальное K-определенное накрытие, $F=\operatorname{Ker}\pi$ — фундаментальная группа для G и $\hat{F}$ — ее группа характеров; тогда

$$\tau(G)=\tau(\tilde{G})\,\frac{h^0(\hat{F})}{i^1(\hat{F})},$$

где $h^0(\hat{F})=[H^0(K,\ \hat{F})]$, $i^1(\hat{F})$ — порядок ядра канонич. отображения

$$H^1(K,\ \hat{F})\longrightarrow\prod\nolimits_{v\in V}H^1(K_v,\ \hat{F}).$$

Существует гипотеза, что для всех односвязных групп Т. ч. равно единице (гипотеза Вейля). Это доказано для большинства типов простых групп над числовыми полями ([3], [4], [7]), а также для групп Шевалле над числовыми полями (см. [2]) и над функциональными глобальными полями [6].

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Вейль А., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 3—74; [4] его же, там же, 1969, т. 13, № 6, с. 18—98; [5] Платонов В. П., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 3, с. 3—54; [6] Harder G., «Ann. Math.», 1974, v. 100, p. 249—306; [7] Mars J. G. M., там же, 1969, v. 89, p. 557—74; [8] Ono T., там же, 1963, v. 78, p. 47—73; [9] его же, там же, 1965, v. 82, p. 88—111.

А. С. Рапинчук.

ТАНГЕНС — одна из тригонометрических функций:

$$y=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

другие обозначения: tan, T, t. Область определения — вся числовая ось, за исключением точек, абсциссы к-рых $\pi/2+n\pi$, $n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$. Т.— функция неограниченная нечетная периодическая (с периодом π). Т. и котангенс связаны соотношением

$$\operatorname{tg}x=1/\operatorname{ctg}x.$$

Функция, обратная Т., наз. арктангенсом. Производная Т.:

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Интеграл от Т.:

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+c.$$

Т. разлагается в ряд

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots,\quad|x|>\frac{\pi}{2}.$$

Т. комплексного аргумента z — мероморфная функция, нули к-рой находятся в точках $z=k\pi$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

Ю. А. Горьков.

ТАНГЕНС АМПЛИТУДЫ — отношение двух основных эллиптич. функций Якоби:

$$\operatorname{sc}u=\operatorname{tg}\operatorname{am}u=\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}u}.$$

См. *Якоби эллиптические функции.*

Е. Д. Соломенцев.

ТАНГЕНС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ — см. *Гиперболические функции.*

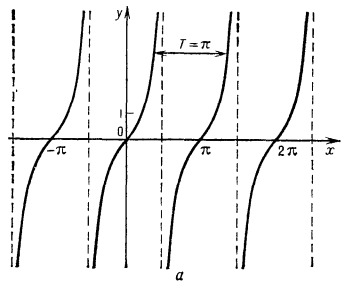
ТАНГЕНСОВ ФОРМУЛА — формула, устанавливающая зависимость между длинами двух сторон плоского треугольника и тангенсами полусуммы и полуразности противолежащих им углов. Т. ф. имеет вид:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+b}{2}}.$$

Т. ф. иногда наз. формулой Региомонтана, по имени ученого, установившего эту формулу во 2-й пол. 15 в.

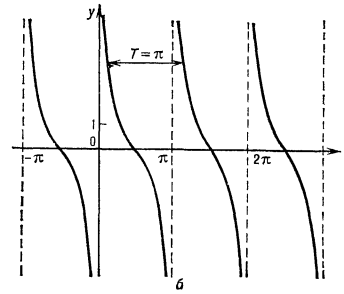
А. Б. Иванов.

ТАНГЕНСОИДА — график функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. *а*). Т.— периодич. кривая с периодом $T=\pi$ и асимптотами $x=(k+1/2)\pi$. При изменении x от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ y монотонно растет от $-\infty$ до $+\infty$; таким образом, Т. состоит из бесконечного числа отдельных конгруэнтных кривых, получаемых одна из другой сдвигом по оси Ox на $k\pi$. Пересечения с осью Ox: 0, $(k\pi, 0)$, они же — точки перегиба с углом наклона $\pi/4$ к оси Ox.



а

Т., зеркально отраженная относительно оси Ox и сдвинутая влево на отрезок $\pi/2$ (рис. *б*), является графиком функции $y=\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg}(\pi/2+x)$; асимптоты $x=k\pi$, пересечения с осью Ox: $[(k+1/2)\pi, 0]$, они же — точки перегиба с углом наклона $-\pi/4$ к оси Ox.



б

Ю. А. Горьков.

ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ — название для коэффициентов в уравнении прямой, к-рые рассматриваются как координаты. Для уравнения прямой $ux+vy+1=0$ коэффициенты u и v наз. неоднородными Т. к.; для однородного уравнения прямой $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ коэффициенты u_1, u_2, u_3 наз. однородными Т. к. Уравнение, связывающее Т. к. касательной к кривой, наз. тангенциальным уравнением этой кривой. Тангенциальное уравнение алгебраич. кривой является алгебраическим. Тангенциальное уравнение кривой двойственно уравнению кривой в точечных координатах. Степень тангенциального уравнения наз. классом кривой.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-2.

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ, теоремы тауберова типа,— теоремы, устанавливающие условия, определяющие множество рядов (или последовательностей), на к-ром для двух данных *суммирования методов* A и B происходит включение $A\subset B$. Наиболее часто в теории суммирования рассматривается случай, когда метод B тождествен сходимости. В Т. т., относящихся к этим случаям, устанавливаются условия на ряд (последовательность), при к-рых из суммируемости ряда данным методом следует его сходимость. Назв. теорем восходит к А. Тауберу [1], впервые доказавшему две теоремы такого типа для *Абеля метода суммирования*:

1) если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

суммируем методом Абеля к сумме S и $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, то ряд сходится к S;

2) для того чтобы из суммируемости ряда $(*)$ методом Абеля к сумме S следовала сходимость этого ряда к сумме S, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n} ka_k = o(n).$$

Теорема 1) была позднее усилена, а именно, было показано, что условие $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ можно заменить на $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$. Условия, к-рые накладываются на ряд в этих случаях, помимо его суммируемости, наз. тауберовыми условиями. Эти условия могут выражаться в различных формах. Наиболее распространенными для рядов $(*)$ являются условия вида:

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),\quad a_n=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad a_n>-\frac{H}{n},\quad a_n<\frac{H}{n},$$

H — постоянная,

$$\sum_{k=0}^{n} ka_k = o(n),$$

а также их обобщения, где натуральный параметр n заменен переменным τ_n. В Т. т. к таким условиям, помимо приведенных выше, относятся, напр., следующие: если ряд $(*)$ суммируем методом Бореля к сумме S и $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, то ряд сходится к S.

Для каждого регулярного матричного метода суммирования существуют числа $\tau_n\geqslant 0$, такие, что $\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n=\infty$ и условие $a_n=o(\tau_n)$ является тауберовым для этого метода (т. е. из суммируемости ряда этим методом и условия $a_n=o(\tau_n)$ следует сходимость ряда).

Тауберовы условия могут выражаться через оценки частичных сумм S_n ряда или оценки разности S_n-S_m при определенных соотношениях между n и m. Примерами Т. т. с такими условиями являются следующие: если ряд $(*)$ с частичными суммами S_n суммируем методом Бореля к сумме S и

$$\varlimsup_{m\to\infty}(S_n-S_m)\geqslant 0,\quad n>m,$$

$\frac{m-n}{\sqrt{m}}\to 0$, то ряд сходится к S; если ряд $(*)$ суммируем методом Абеля к сумме S и его частичные суммы S_n удовлетворяют условию $S_n=O(1)$, то он суммируем к S методом Чезаро $(C, 1)$.

Тауберовым условием может служить лакунарность ряда: $a_n=0$ при $n=n_k$; условие в этом случае выражается через свойства последовательности $\{n_k\}$.

Кроме обычной суммируемости, в теории суммирования рассматриваются Т. т. для специальных видов суммируемости (абсолютной, сильной, суммируемости со скоростью и др.).

Лит.: [1] Tauber A., «Monats. Math. und Physik», 1897, Bd 8, S. 273—77; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Widder D. V., The Laplace transform., Princeton — L., 1941; [4] Pitt H., Tauberian theorem's, L.—[a. o.], 1958; [5] Peyerimhoff A., Lectures on summability, B., 1969; [6] Zeller K., Beekmann W., Theorie der Limitierungsverfahren, B.—Hdlb.— N. Y., 1970; [7] Кангро Г. Ф., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70. *И. И. Волков.*

ТЕЙЛОРА МНОГОЧЛЕН степени n для функции f n раз дифференцируемой при $x=x_0$ — многочлен вида

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Значения Т. м. и его производных до порядка n включительно в точке $x=x_0$ совпадают со значениями функции и ее соответствующих производных в той же точке:

$$f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0),\quad k=0, 1, \ldots, n.$$

Т. м. является многочленом наилучшего приближения функции f при $x\to x_0$ в том смысле, что

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n),\quad x\longrightarrow x_0, \qquad (*)$$

и если к.-л. многочлен $Q_n(x)$ степени, не превышающей n, обладает тем свойством, что

$$f(x)-Q_n(x)=o((x-x_0)^m),\quad x\longrightarrow x_0,$$

где $m\geqslant n$, то он совпадает с Т. м. $P_n(x)$. Иначе говоря, многочлен, обладающий свойством $(*)$, единствен.

Если хотя бы одна из производных $f^{(k)}(x)$, $k=0, 1, \ldots, n$, не равна нулю в точке x_0, то Т. м. является главной частью *Тейлора формулы.* *Л. Д. Кудрявцев.*

ТЕЙЛОРА РЯД — степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (1)$$

где числовая функция f определена в нек-рой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Частными суммами Т. р. являются *Тейлора многочлены*.

Если x_0 — комплексное число, функция f определена в нек-рой окрестности точки x_0 во множестве комплексных чисел и дифференцируема в точке x_0, то существует окрестность этой точки, на к-рой функция f является суммой своего Т. р. (1) (см. *Степенной ряд*). Если же x_0 — действительное число, функция f определена в нек-рой окрестности точки x_0 во множестве действительных чисел и имеет в точке x_0 производные всех порядков, то функция f может ни в какой окрестности точки x_0 не быть суммой своего Т. р. Напр., функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0, \end{cases} \qquad (2)$$

бесконечно дифференцируема на всей действительной оси, не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки $x=0$, а все коэффициенты ее Т. р. в этой точке равны нулю.

Если функция раскладывается в нек-рой окрестности данной точки в степенной ряд, то такой ряд единствен и является ее Т. р. в этой точке. Однако один и тот же степенной ряд может являться Т. р. для разных действительных функций. Так, степенной ряд, у к-рого все коэффициенты равны нулю, является как Т. р. функции, тождественно равной нулю на всей действительной оси, так и Т. р. функции (2) в точке $x=0$.

Достаточным условием сходимости Т. р. (1) к действительной функции f на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$ является ограниченность в совокупности всех ее производных на этом интервале.

Т. р. обобщается на случай отображения подмножеств линейных нормированных пространств в подобные же пространства, в частности на числовые функции нескольких переменных и функции матричного аргумента.

Ряд (1) был опубликован Б. Тейлором (B. Taylor) в 1715; ряд, сводящийся к ряду (1) простым преобразованием, был опубликован И. Бернулли (I. Bernoulli) в 1694.

Лит.: [1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, М., 1979; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983. *Л. Д. Кудрявцев.*

ТЕЙЛОРА ФОРМУЛА — представление функции в виде суммы ее многочлена Тейлора степени n ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) и остаточного члена. Если действительная функция f одного переменного имеет n производных в точке x_0, то ее Т. ф. имеет вид

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),$$

где

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

— *Тейлора многочлен*, а остаточный член $r_n(x)$ может быть записан в форме Пеано

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0.$$

Если функция f дифференцируема $n+1$ раз в нек-рой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0, то остаточный член в этой окрестности может быть записан в форме Шлёмильха — Роша

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!\,p}(1-\theta)^{n-p+1}(x-x_0)^{n+1},$$

где $p=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$, частным видом к-рой являются форма Лагранжа

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

и форма Коши

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$
$$0<\theta<1,\quad x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta).$$

Если производная порядка $n+1$ функции f интегрируема на отрезке с концами в точках x и x_0, то остаточный член можно записать в интегральной форме

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Т. ф. со всеми указанными формами записи ее остаточного члена обобщается на случай функций нескольких переменных. Т. ф. справедлива и для отображений подмножеств нормированных пространств в подобные же пространства, причем в этом случае остаточный член может быть записан в форме Пеано и интегральной форме.

Т. ф. позволяет изучение ряда свойств определенное число раз дифференцируемой функции свести к существенно более простой задаче изучения этих свойств у соответствующего многочлена Тейлора — на этом и основаны разнообразные и многочисленные применения Т. ф., напр. для вычисления пределов функций, исследования их экстремумов, точек перегиба, интервалов выпуклости и вогнутости, сходимости рядов и интегралов, оценки скорости их сходимости или расходимости.

Лит.: [1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, М., 1979; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983. *Л. Д. Кудрявцев.*

ТЕЙТА ГИПОТЕЗЫ — гипотезы, описывающие связи между диофантовыми и алгебро-геометрическими свойствами алгебраич. многообразия; высказаны Дж. Тейтом (Tate J., см. [1]).

Гипотеза 1. Если поле k конечно порождено над своим простым подполем, V — гладкое проективное многообразие над k, l — простое число, отличное от характеристики поля k,

$$\rho_l^{(i)}:\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\longrightarrow \mathrm{Aut}_{Q_l}H_l^{2i}(V\otimes_k\bar{k})(i)$$

— естественное l-адическое представление и $g_l^{(i)}=\mathrm{Lie}\left(\mathrm{Im}\left(\rho_l^{(i)}\right)\right)$, то Q_l-пространство $[H_l^{2i}(V\otimes_k\bar{k})_i]$ порождается классами когомологий алгебраич. циклов коразмерности i на $V\otimes_k\bar{k}$.

Гипотеза 2. Ранг группы классов алгебраич. циклов коразмерности i на V по модулю гомологич. эквивалентности совпадает с порядком полюса функции $\Phi_{2i}(s)$ в точке $s=\dim Y+i$.

Гипотезы проверены для целого ряда частных случаев (ограничения накладываются как на поле k, так и на многообразие V).

Лит.: [1] Тэйт Дж., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 27—40. *С. Г. Танкеев.*

ТЕЙТА МОДУЛЬ — свободный Z_p-модуль $T(G)$, сопоставляемый *p-делимой группе* G, определенной над полным дискретно нормированным кольцом R характеристики 0 с полем вычетов k характеристики p. Пусть $G=\{G_\nu,\ i_\nu\}$, $\nu\geqslant 0$, а $T(G)=\varprojlim G_\nu(K)$, где $\bar{K}$ — алгебраич. замыкание поля частных K кольца R (предел берется относительно отображений $j_\nu: G_{\nu+1}\to G_\nu$ таких, что $i_\nu\circ j_\nu=p$). Тогда $T(G)=Z_p^h$, где h — высота группы G, $T(G)$ обладает естественной структурой $G(\bar{K}/K)$-модуля. Функтор $G\longrightarrow T(G)$ позволяет сводить ряд вопросов о группе G к более простым вопросам о $G(\bar{K}/K)$-модулях.

Аналогично определяется Т. м. для абелева многообразия. Пусть A — абелево многообразие, определенное над k и A_{p^n} — группа точек порядка p^n в $A(\bar{k})$. Тогда $T_p(A)$ определяется как $\varprojlim A_{p^n}$. Модулем Тейта кривой X наз. Т. м. якобиева многообразия этой кривой.

Конструкция модуля $T_p(X)$ обобщается на случай числовых полей. Пусть k — поле алгебраич. чисел и k_∞ — нек-рое Z_p-расширение поля k (расширение с группой Галуа изоморфной Z_p). Для промежуточного поля k_n степени p^n над k пусть $\mathrm{Cl}(k_n)_p$ есть p-компонента группы классов идеалов поля k_n. Тогда $T_p(k_\infty)=\varprojlim \mathrm{Cl}(k_n)_p$, где предел берется относительно норменных отображений $\mathrm{Cl}(k_m)_p \to \mathrm{Cl}(k_n)_p$ для $m>n$. Модуль $T_p(k_\infty)$ характеризуется своими инвариантами Ивасавы λ, μ, ν, к-рые определяются из условия

$$|\mathrm{Cl}(k_n)_p| = p^{e_n},$$

где $e_n=\lambda n+\mu p^n+\nu$ для всех достаточно больших n. Имеется предположение, что для круговых Z_p-расширений инвариант μ равен 0. Это доказано для абелевых полей [4]. Известны примеры некруговых Z_p-расширений с $\mu>0$ (см. [3]). Даже в случае, когда $\mu=0$, $T_p(k_\infty)$ не обязан быть свободным Z_p-модулем.

Лит.: [1] Тэйт Дж., «Математика», 1969, т. 13, № 2, с. 3—25; [2] Шафаревич И. Р., ζ-функция, М., 1969; [3] Iwasawa K., в сб.: Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, Tokyo, 1973, p. 1—11; [4] Ferrero B., Washington L. C., «Ann. Math.», 1979, v. 109, p. 377—95. *Л. В. Кузьмин.*

ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0. \qquad (1)$$

Этому уравнению удовлетворяет напряжение тока в проводе, рассматриваемое как функция времени t и расстояния s от нек-рой фиксированной точки провода. Здесь c — скорость света, α — емкостный, β — индуктивный коэффициенты.

Преобразованием

$$e^{1/2(\alpha+\beta)t} u(s, t) = v(x, y), \quad x = s+ct, \quad y = s-ct,$$

уравнение (1) приводится к виду

$$v_{xy} + \lambda v = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\alpha-\beta}{4c}\right)^2. \qquad (2)$$

Это уравнение принадлежит к классу гиперболич. уравнений 2-го порядка

$$v_{xy} + av_x + bv_y + cv = f,$$

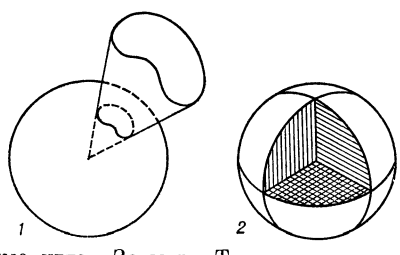
в теории к-рых важную роль играет функция Римана $R(x, y; \xi, \eta)$. Для уравнения (2) эта функция выписывается в явном виде:

$$R(x, y; \xi, \eta) = J_0\left(\sqrt{4\lambda(x-\xi)(y-\eta)}\right),$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964. *А. П. Солдатов.*

ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ — часть пространства, ограниченная одной полостью нек-рой конич. поверхности (рис.), направляющая к-рой гомеоморфна окружности. Частными случаями Т. у. являются многогранные углы. За меру Т. у. принимают отношение площади той части сферы с центром в вершине конич. поверхности, к-рая вырезается этим Т. у., к квадрату радиуса сферы. Напр., Т. у., заключающий $^1/_8$ часть пространства (октант), измеряется числом $4\pi R^2/8R^2 = \pi/2$. Единицей измерения Т. у. является *стерадиан*. *БСЭ-з.*



ТЕЛО — кольцо, в к-ром уравнения $ax=b$ и $ya=b$, где $a\neq 0$, однозначно разрешимы. В случае ассоциативного кольца достаточно потребовать существования единицы 1 и однозначной разрешимости уравнений $ax=1$ и $ya=1$ для любого $a\neq 0$. Коммутативное ассоциативное Т. является *полем*. Пример некоммутативного ассоциативного Т.— тело кватернионов, определяемое как множество матриц вида $\begin{Vmatrix} a & b \\ -b & \bar{a} \end{Vmatrix}$ над полем комплексных чисел с обычными операциями (ср. *Кватернион*). Примером неассоциативного Т. является *Кэли — Диксона алгебра*, состоящая из всех матриц того же вида над телом кватернионов. Это Т. альтернативно (см. *Альтернативные кольца и алгебры*). Всякое Т. является *алгеброй с делением* или над полем рациональных чисел, или над полем вычетов. Тело кватернионов является 4-мерной алгеброй над полем действительных чисел, а алгебра Кэли — Диксона 8-мерной. Размерность любой алгебры с делением над полем действительных чисел равна 1, 2, 4 или 8 (см. [1], а также *Топологическое кольцо*). Поля действительных и комплексных чисел и тело кватернионов и только они являются связными локально компактными ассоциативными Т. (см. [5]). Всякая конечномерная алгебра без делителей нуля есть Т. Всякое конечное ассоциативное Т. коммутативно (см. [6], [8]). Ассоциативное Т. характеризуется тем, что все ненулевые модули над ним свободны. Всякое неассоциативное альтернативное Т. конечномерно [3]. Сходный результат верен для тел Мальцева [7] (см. *Мальцева алгебра*) и йордановых Т. [4] (см. *Йорданова алгебра*). В отличие от коммутативного случая, не всякое ассоциативное кольцо без делителей нуля вложимо в Т. (см. *Вложение кольца*).

Лит.: [1] Адамс Д. Ф., «Математика», 1961, т. 5, № 4, с. 3—86; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [3] Жевлаков К. А. и др., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978; [4] Зельманов Е. И., «Алгебра и логика», 1979, т. 18, № 3, с. 286—310; [5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [6] Скорняков Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983; [7] Филиппов В. Т., «Алгебра и логика», 1976, т. 15, № 2, с. 235—42; [8] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972. *Л. А. Скорняков.*

ТЕНЗОР на векторном пространстве V над полем k — элемент t векторного пространства

$$T^{p,q}(V) = \left(\bigotimes^p V\right) \otimes \left(\bigotimes^q V^*\right),$$

где $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$ — пространство, сопряженное с V. Говорят, что тензор t является p раз контравариантным и q раз ковариантным или что t имеет тип (p, q). Число p наз. контравариантной валентностью, q — ковариантной валентностью, а число $p+q$ — общей валентностью тензора t. Пространство $T^{0,0}(V)$ отождествляется с k. Тензоры типа $(p, 0)$ наз. контравариантными, типа $(0, q)$ — ковариантными, а остальные — смешанными.

Примеры Т. 1) Вектор пространства V (Т. типа $(1, 0)$).

2) Ковектор пространства V (Т. типа $(0, 1)$).

3) Каждый ковариантный Т.

$$t = \sum_{i=1}^{s} h_{i1} \otimes \ldots \otimes h_{iq},$$

где $h_{ij} \in V^*$, определяет q-линейную форму $\hat{t}$ на V по формуле

$$\hat{t}(x_1, \ldots, x_q) = \sum_{i=1}^{s} h_{i1}(x_1) \ldots h_{iq}(x_q);$$

отображение $t \longmapsto \hat{t}$ пространства $T^{0,q}$ в пространство $L^q(V)$ всех q-линейных форм на V линейно и инъективно; если $\dim V < \infty$, то это отображение является изоморфизмом, так что любая q-линейная форма отвечает нек-рому Т. типа $(0, q)$.

4) Аналогично, каждый контравариантный Т. из $T^{p,0}(V)$ определяет нек-рую p-линейную форму на V^*, а если V конечномерно, то верно и обратное.

5) Каждый Т.

$$t = \sum_{i=1}^{s} x_i \otimes h_i \in T^{1,1}(V),$$

где $x_i \in V$, $h_i \in V^*$, определяет линейное преобразование $\hat{t}$ пространства V, заданное формулой

$$\hat{t}(y) = \sum_{i=1}^{s} h_i(y)\, x_i;$$

если $\dim V < \infty$, то любое линейное преобразование пространства V определяется Т. типа (1, 1).

6) Аналогично, любой Т. типа (1, 2) определяет в V билинейную операцию, т. е. структуру k-алгебры; при этом, если $\dim V < \infty$, то любая структура k-алгебры в V определяется нек-рым Т. типа (1, 2), к-рый наз. структурным тензором алгебры.

Пусть V конечномерно и $v_1, \ldots, v_n$ — его базис, $v^1, \ldots, v^n$ — сопряженный базис пространства V^*. Тогда Т.

$$v^{i_1 \ldots i_q}_{i_1 \ldots i_p} = v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_q}$$

составляют базис пространства $T^{p,q}(V)$. Координаты $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ тензора $t \in T^{p,q}(V)$ в этом базисе наз. также к о о р д и н а т а м и т е н з о р а t в б а з и с е $v_1, \ldots, v_n$ пространства V. Напр., координаты вектора и ковектора совпадают с их обычными координатами в базисах (v_i) и (v^j), координаты Т. типа (0, 2) совпадают с элементами матрицы соответствующей билинейной формы, координаты Т. типа (1, 1) — с элементами матрицы соответствующего линейного преобразования, координаты структурного Т. алгебры — с ее структурными константами. Если $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ — другой базис пространства V, $\tilde{v}_j = a^i_j v_i$, $\|b^i_j\| = (\|a^i_j\|^{\mathrm{T}})^{-1}$, то координаты $\tilde{t}^{i_1, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q}$ тензора t в этом базисе определяются по формулам

$$\tilde{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = b^{i_1}_{k_1} \ldots b^{i_p}_{k_p} a^{l_1}_{j_1} \ldots a^{l_q}_{j_q} t^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}. \qquad (1)$$

Здесь, как это часто делается в тензорном исчислении, применимо п р а в и л о с у м м и р о в а н и я Э й н ш т е й н а: по каждой паре одинаковых индексов, один из к-рых — верхний, а другой — нижний, подразумевается суммирование от 1 до n. Обратно, если система n^{p+q} элементов поля k, зависящая от базиса пространства V, изменяется при переходе от базиса к базису по формулам (1), то эта система является набором координат нек-рого Т. типа (p, q).

В векторном пространстве $T^{p,q}(V)$ определены операции сложения Т. и умножения Т. на скаляр из k. При этих операциях соответствующие координаты Т. складываются или умножаются на скаляр. Определена также операция умножения Т. разных типов, к-рая вводится следующим образом. Имеет место естественный изоморфизм векторных пространств

$$T^{p,q}(V) \otimes T^{r,s}(V) \cong T^{p+r,\ q+s}(V),$$

переводящий

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q) \otimes$$
$$\otimes (x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_r \otimes h'_1 \otimes \ldots \otimes h'_s)$$

в

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_r \otimes$$
$$\otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q \otimes h'_1 \otimes \ldots \otimes h'_s.$$

Поэтому для любых $t \in T^{p,q}(V)$ и $u \in T^{r,s}(V)$ элемент $v = t \otimes u$ может рассматриваться как Т. типа $(p+r, q+s)$, к-рый и наз. п р о и з в е д е н и е м т е н з о р о в t и u. Координаты произведения вычисляются по формуле

$$v^{i_1 \ldots i_{p+r}}_{j_1 \ldots j_{q+s}} = t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} u^{i_{p+1} \ldots i_{p+r}}_{i_{q+1} \ldots i_{q+s}}.$$

Пусть $p > 0$, $q > 0$ и пусть фиксированы числа α и β, где $1 \leqslant \alpha \leqslant p$, $1 \leqslant \beta \leqslant q$. Тогда определено линейное отображение $Y^\alpha_\beta : T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q-1}(V)$ такое, что

$$Y^\alpha_\beta (x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q) =$$
$$= h_\beta(x_\alpha)\, x_1 \otimes \ldots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \ldots \otimes x_p \otimes$$
$$\otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_{\beta-1} \otimes h_{\beta+1} \otimes \ldots \otimes h_q.$$

Оно наз. с в е р т ы в а н и е м (или с в е р т к о й) по α-му контравариантному и β-му ковариантному индексам. В координатах свертка записывается формулами

$$(Y^\alpha_\beta t)^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = t^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i i_{\alpha+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{\beta-1} i j_{\beta+1} \ldots j_q}.$$

Напр., свертка $Y^1_1 t$ Т. типа (1, 1) есть след соответствующего линейного преобразования.

Аналогично определяются Т. на произвольном унитарном модуле V над коммутативно-ассоциативным кольцом с единицей. Перечисленные выше примеры и свойства Т. переносятся с соответствующими изменениями на этот случай, причем иногда надо предполагать, что V — свободный или конечно порожденный свободный модуль.

Пусть в конечномерном векторном пространстве над полем k фиксирована невырожденная билинейная форма g (напр., V — евклидово или псевдоевклидово пространство над $\mathbb{R}$); форму g называют в этом случае м е т р и ч е с к и м т е н з о р о м. Метрический Т. определяет изоморфизм $\gamma : V \to V^*$ по формуле

$$\gamma(x)(y) = g(x, y), \quad x, y \in V.$$

Пусть $p > 0$ и пусть фиксирован индекс α, $1 \leqslant \alpha \leqslant p$. Тогда формула

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q \longmapsto$$
$$\longmapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \ldots \otimes x_p \otimes$$
$$\otimes \gamma(x_\alpha) \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q$$

определяет изоморфизм $\gamma^\alpha : T^{p,q}(V) \to T^{p-1,\ q+1}(V)$, называемый о п у с к а н и е м α-го контравариантного индекса. Иначе,

$$\gamma^\alpha(t) = Y^\alpha_1 (g \otimes t).$$

В координатах опускание индекса имеет вид

$$\gamma^\alpha(t)^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{q+1}} = g_{i j_1} t^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i i_{\alpha+1} \ldots i_{p-1}}_{i_2 \ldots j_{q+1}}$$

Аналогично определяется изоморфизм п о д ъ е м а β-го ковариантного индекса ($1 \leqslant \beta \leqslant q$):

$$\gamma_\beta : x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q \longmapsto$$
$$\longmapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes \gamma^{-1}(h_\beta) \otimes$$
$$\otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_{\beta-1} \otimes h_{\beta+1} \otimes \ldots \otimes h_q,$$

отображающий $T^{p,q}(V)$ на $T^{p+1,\ q-1}(V)$. В координатах подъем индекса записывается формулой

$$\gamma_\beta(t)^{i_1 \ldots i_{p+1}}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = g^{i i_{p+1}} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{\beta-1} i j_\beta \ldots j_{q-1}},$$

где $\|g^{kl}\|=(\|g_{ij}\|^{\top})^{-1}$. В частности, подъем сначала 1-го, а потом и оставшегося ковариантного индекса метрич. тензора g приводит к Т. типа (2, 0) с координатами g^{kl} (контравариантный метрический тензор). Иногда опущенный (поднятый) индекс не передвигают на первое (последнее) место, а пишут на том же месте в нижней (верхней) группе индексов, ставя на образовавшемся пустом месте точку. Напр., для $t\in T^{2,0}(V)$ координаты Т. $\gamma^2(t)$ записывают в виде $t^{i}_{j\cdot}=g_{kj}t^{ik}$.

Любое линейное отображение $f: V\to W$ векторных пространств над k естественным образом определяет линейные отображения

$$T^{p,0}(f)=\bigotimes^{p} f: T^{p,0}(V)\longrightarrow T^{p,0}(W)$$

и

$$T^{q,0}(f^*)=\bigotimes^{q} f^*: T^{0,q}(W)\longrightarrow T^{0,q}(V).$$

Если f — изоморфизм, то определяется также линейное отображение

$$T^{p,q}(f): T^{p,q}(V)\longrightarrow T^{p,q}(W),$$

причем $T^{0,q}(f)=T^{q,0}(f^*)^{-1}$. Соответствие $f\mapsto T^{p,q}(f)$ обладает функторными свойствами. В частности, оно определяет линейное представление $a\mapsto T^{p,q}(a)$ группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве $T^{p,q}(V)$ (тензорное представление).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [3] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980; [4] Постников М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979; [5] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Онищик.*

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА — 1) Раздел тензорного исчисления, в к-ром изучаются алгебраич. операции над *тензорами*.

2) Т. а. унитарного модуля V над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей — алгебра $T(V)$ над A, модуль к-рой имеет вид

$$T(V)=\bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{p,0}(V)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}\bigotimes^{p} V,$$

а умножение определяется при помощи умножения *тензоров*. Наряду с контравариантной Т. а., рассматривают также ковариантную Т. а.

$$T(V^*)=\bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{0,p}(V)$$

и смешанную Т. а.

$$\hat{T}(V)=\bigoplus_{p,\,q=0}^{\infty} T^{p,q}(V).$$

Если модуль V свободен и конечно порожден, то $T(V^*)$ естественно изоморфна алгебре всех *полилинейных форм* на V. Любой гомоморфизм A-модулей $V\to W$ естественным образом определяет гомоморфизм Т. а. $T(V)\to T(W)$.

Т. а. $T(V)$ ассоциативна, но, вообще говоря, не коммутативна. Ее единицей является единица кольца $A=T^0(V)$. Любое A-линейное отображение модуля V в ассоциативную A-алгебру B с единицей единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебр $T(V)\to B$, переводящего единицу в единицу. Если V — свободный модуль с базисом $(v_i)_{i\in I}$, то $T(V)$ есть *свободная ассоциативная алгебра* с системой образующих $(v_i)_{i\in I}$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980. *А. Л. Онищик.*

ТЕНЗОРНАЯ ПЛОТНОСТЬ, псевдотензор,— геометрический объект, описываемый в системе координат $x=(x^1, \ldots, x^n)$ компонентами $a^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, $1\leqslant i_\nu, j_\mu\leqslant n$, в количестве n^{p+q}, изменяющимися при замене координат $x\to y=(y^1, \ldots, y^n)$ по правилу:

$$a'^{\,i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\Delta^{-\varkappa}a^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdot\frac{\partial y^{i_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{\alpha_p}}\times$$
$$\times\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{j_1}}\cdot\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial y^{j_2}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_p}}{\partial y^{j_p}},$$

где $\Delta=\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right)$. Число $\varkappa$ наз. весом Т. п. При $\varkappa=0$ Т. п. является *тензором*. Такие понятия, как тип, валентность, ковариантность, контравариантность и т. п., вводятся по аналогии с соответствующими тензорными понятиями. Т. п. типа (1, 0) и (0, 1) наз. векторными плотностями, Т. п. типа (0, 0) — скалярными плотностями.

Л. П. Купцов.

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — традиционное название раздела математики, изучающего *тензоры* и тензорные поля (см. *Тензорное расслоение*). Т. и. разделяется на *тензорную алгебру* (входящую в качестве основной части в *полилинейную алгебру*) и *тензорный анализ*, изучающий дифференциальные операторы на алгебре тензорных полей.

Т. и. является важной составной частью аппарата дифференциальной геометрии. В этой связи оно впервые систематически было развито Г. Риччи (G. Ricci) и Т. Леви-Чивитой (T. Levi-Civita) (см. [1]); его часто называли «исчислением Риччи».

Термин «тензор» еще с сер. 19 в. употребляется в механике при описании упругих деформаций тел (см. *Деформаций тензор*, *Напряжений тензор*). С нач. 20 в. аппарат Т. и. систематически используется в релятивистской физике (см. [2]).

Лит.: [1] Ricci G., Levi-Civita T., «Math. Ann.», 1901, Bd 54, S.125—201; [2] Einstein A., Grassmann M., «Z. Math. und Physik», 1914, Bd 62, S. 225—61. *А. Л. Онищик.*

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — 1) Т. п. унитарных модулей V_1 и V_2 над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей — A-модуль $V_1\otimes_A V_2$ вместе с билинейным отображением

$$(x_1, x_2)\mapsto x_1\otimes x_2\in V_1\otimes_A V_2,$$

универсальным в следующем смысле: для любого билинейного отображения β: $V_1\times V_2\to W$, где W — произвольный A-модуль, существует единственное линейное отображение $b: V_1\otimes_A V_2\to W$ такое, что

$$\beta(x_1, x_2)=b(x_1\otimes x_2),\quad x_1\in V_1,\ x_2\in V_2.$$

Т. п. определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Оно всегда существует и может быть построено как фактормодуль свободного A-модуля F, порожденного множеством $V_1\times V_2$, по подмодулю R, порожденному элементами вида

$$(x_1+y, x_2)-(x_1, x_2)-(y, x_2),$$
$$(x_1, x_2+z)-(x_1, x_2)-(x_1, z),$$
$$(cx_1, x_2)-c(x_1, x_2),$$
$$(x_1, cx_2)-c(x_1, x_2),$$
$$x_1, y\in V_1,\ x_2, z\in V_2,\ c\in A;$$

при этом $x_1\otimes x_2=(x_1, x_2)+R$. Если отказаться от коммутативности кольца A, то близкая конструкция позволяет сопоставить правому A-модулю V_1 и левому A-модулю V_2 абелеву группу $V_1\otimes_A V_2$, также называемую Т. п. этих модулей [1]. В дальнейшем A предполагается коммутативным.

Т. п. обладает следующими свойствами:

$$A\otimes V^i\cong V,$$
$$V_1\otimes_A V_2\cong V_2\otimes_A V_1,$$
$$(V_1\otimes_A V_2)\otimes_A V_3\cong V_1\otimes_A(V_2\otimes_A V_3),$$
$$(\oplus_{i\in I}V_i)\otimes_A W\cong\oplus_{i\in I}(V_i\otimes_A W)$$

для любых A-модулей V, V_i, W.

Если $(x_i)_{i\in I}$ и $(y_j)_{j\in J}$ — базисы модулей V_1 и V_2, то $(x_i\otimes y_j)_{(i,\,j)\in I\times J}$ — базис модуля $V_1\otimes_A V_2$. В частности,

$$\dim(V_1\otimes_A V_2)=\dim V_1\cdot\dim V_2,$$

если V_i — свободные конечно порожденные модули (напр., конечномерные векторные пространства над полем A). Т. п. циклич. A-модулей вычисляется по формуле

$$(A/I)\otimes_A(A/J)\cong A/(I+J),$$

где I, J — идеалы в A.

Определяется также Т. п. любого (не обязательно конечного) семейства A-модулей. Т. п.

$$\overset{p}{\otimes}V=\underbrace{V\otimes_A\ldots\otimes_A V}_{p\text{ раз}}$$

наз. p-й тензорной степенью A-модуля V; его элементы — это контравариантные *тензоры* валентности p на V.

Любым двум гомоморфизмам A-модулей $\alpha_i: V_i\to W_i$, $i=1, 2$, сопоставляется их Т. п. $\alpha_1\otimes\alpha_2$, являющееся гомоморфизмом A-модулей $V_1\otimes_A V_2\to W_1\otimes_A W_2$ и определяемое формулой

$$(\alpha_1\otimes\alpha_2)(x_1\otimes x_2)=\alpha(x_1)\otimes\alpha_2(x_2),\quad x_i\in V_i.$$

Эта операция также распространяется на любые семейства гомоморфизмов и обладает функторными свойствами (см. *Модуль*). Она определяет гомоморфизм A-модулей

$$\mathrm{Hom}_A(V_1, W_1)\otimes_A\mathrm{Hom}_A(V_2, W_2)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(V_1\otimes V_2, W_1\otimes W_2),$$

к-рый является изоморфизмом, если все V_i, W_i свободны и конечно порождены.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Каш Ф., Модули и кольца, пер. с нем., М., 1981; [3] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980. *А. Л. Онищик.*

2) Т. п. алгебр C_1 и C_2 над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей — алгебра $C_1\otimes_A C_2$ над A, к-рая получается, если ввести в Т. п. A-модулей $C_1\otimes_A C_2$ умножение по формуле

$$(x_1\otimes x_2)(y_1\otimes y_2)=(x_1y_1)\otimes(x_2y_2),\quad x_i,\ y_i\in C_i.$$

Определение распространяется на случай любого семейства сомножителей. Т. п. $C_1\otimes_A C_2$ ассоциативно, коммутативно или содержит единицу, если этим свойством обладают обе алгебры C_i. Если C_1 и C_2 — алгебры с единицами над полем A, то $\tilde C_1=C_1\otimes 1$ и $\tilde C_2=C_2\otimes 1$ — подалгебры в $C_1\otimes_A C_2$, изоморфные C_1 и C_2 и поэлементно перестановочные. Обратно, пусть C — алгебра с единицей над полем A, C_1, C_2 — ее подалгебры, содержащие единицу и такие, что $x_1x_2=x_2x_1$ для любых $x_i\in C_i$. Тогда существует гомоморфизм A-алгебр $\varphi: C_1\otimes_A C_2\to C$ такой, что $\varphi(x_1\otimes x_2)=x_1x_2$, $x_i\in C_i$. Для того чтобы φ был изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы в C_1 существовал базис над A, являющийся базисом правого C_2-модуля C.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962. *А. Л. Онищик.*

3) Т. п., кронекерово произведение, матриц $A=\|\alpha_{ij}\|$ и B — матрица

$$A\otimes B=\begin{Vmatrix}\alpha_{11}B & \ldots & \alpha_{1n}B\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{m1}B & \ldots & \alpha_{mn}B\end{Vmatrix}$$

Здесь A есть $(m\times n)$-матрица, B есть $(p\times q)$-матрица, а $A\otimes B$ есть $(mp\times nq)$-матрица над коммутативно-ассоциативным кольцом k с единицей.

Свойства Т. п. матриц:

$$(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B,$$
$$A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2,$$
$$\alpha(A\otimes B)=\alpha A\otimes B=A\otimes\alpha B,$$

где $\alpha\in k$,

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD.$$

Если $m=n$ и $p=q$, то

$$\det(A\otimes B)=(\det A)^p(\det B)^n.$$

Пусть k — поле, $m=n$ и $p=q$. Тогда $A\otimes B$ подобна $B\otimes A$ и $\det(A\otimes E_p-E_n\otimes B)$, где E_n — единичная матрица, совпадает с результантом характеристич. многочленов матриц A и B.

Если $\alpha: V\to V'$, $\beta: W\to W'$ — гомоморфизмы унитарных свободных конечно порожденных k-модулей и A, B — их матрицы в нек-рых базисах, то $A\otimes B$ является матрицей гомоморфизма $\alpha\otimes\beta: V\otimes W\to V'\otimes W'$ в базисах, состоящих из Т. п. базисных векторов.

Лит.: [1] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ., М., 1963; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962, гл. 3. *Д. А. Супруненко.*

4) Т. п. представлений π_1 и π_2 группы G в векторных пространствах E_1 и E_2 соответственно — представление $\pi_1\otimes\pi_2$ группы G в векторном пространстве $E_1\otimes E_2$, однозначно определенное условием:

$$(\pi_1\otimes\pi_2)(\xi_1\otimes\xi_2)=\pi_1(g)\,\xi_1\otimes\pi_2(g)\,\xi_2$$

для всех $\xi_1\in E_1$, $\xi_2\in E_2$, $g\in G$. Если π_1 и π_2 — непрерывные *унитарные представления* топологич. группы G в гильбертовых пространствах E_1 и E_2 соответственно, то операторы $(\pi_1\otimes\pi_2)(g)$, $g\in G$, в векторном пространстве $E_1\otimes E_2$ допускают однозначное продолжение по непрерывности до непрерывных линейных операторов $(\pi_1\overline{\otimes}\pi_2)(g)$, $g\in G$, в гильбертовом пространстве $E_1\overline{\otimes}E_2$ (пополнении пространства $E_1\otimes E_2$ относительно скалярного произведения, определяемого формулой $(\xi_1\otimes\xi_2, \eta_1\otimes\eta_2)=(\xi_1, \eta_1)(\xi_2, \eta_2)$) и отображение $\pi_1\otimes\pi_2: g\to(\pi_1\otimes\pi_2)g$, $g\in G$ является непрерывным унитарным представлением группы G в гильбертовом пространстве $E_1\overline{\otimes}E_2$, называемым тензорным произведением унитарных представлений π_1 и π_2. Представления $\pi_1\otimes\pi_2$ и $\pi_2\otimes\pi_1$ эквивалентны (унитарно, если π_1 и π_2 унитарны). Операция Т. п. может быть определена и для непрерывных представлений топологич. групп в топологич. векторных пространствах общего вида. *А. И. Штерн.*

5) Т. п. векторных расслоений E и F над топологическим пространством X — векторное расслоение $E\otimes F$ над X, слоем к-рого в точке $x\in X$ является Т. п. слоев $E_x\otimes F_x$. Т. п. можно определить как расслоение, функции перехода к-рого являются Т. п. функций перехода расслоений E и F в одном и том же тривиализирующем покрытии (см. *Тензорное произведение* матриц).

Лит.: [1] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967. *А. Л. Онищик.*

ТЕНЗОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ типа (p, q) над дифференцируемом многообразии M — векторное расслоение $T^{p,q}(M)$ над M, ассоциированное с расслоением касательных реперов и имеющее в каче-

стве стандартного слоя пространство $T^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *тензоров* типа (p, q) на $\mathbb{R}^n$, в к-ром группа $GL(n, \mathbb{R})$ действует при помощи тензорного представления. Напр., $T^{1,0}(M)$ совпадает с *касательным расслоением* $T(M)$ над M, а $T^{0,1}(M)$ — с кокасательным расслоением $T(M)^*$. В общем случае Т. р. изоморфно тензорному произведению касательных и кокасательных расслоений:

$$T^{p,q}(M) \cong \overset{p}{\otimes} T(M) \otimes \overset{q}{\otimes} T(M)^*.$$

Сечения Т. р. типа (p, q) наз. тензорными полями типа (p, q) и являются основным объектом исследования дифференциальной геометрии. Напр., риманова структура на M — это гладкое сечение расслоения $T^{0,2}(M)$, значения к-рого являются положительно определенными симметрич. формами. Гладкие сечения расслоения $T^{p,q}(M)$ образуют модуль $D^{p,q}(M)$ над алгеброй $F^\infty(M)=D^{0,0}(M)$ гладких функций на M. Если M — паракомпактное хаусдорфово многообразие, то

$$D^{p,q}(M) \cong \overset{p}{\otimes} D^1(M) \otimes \overset{q}{\otimes} D^1(M)^*,$$

где $D^1(M)=D^{1,0}(M)$ — модуль гладких векторных полей, $D^1(M)^*=D^{0,1}(M)$ — модуль пфаффовых дифференциальных форм, а тензорные произведения берутся над $F^\infty(M)$. В классической дифференциальной геометрии тензорные поля иногда наз. просто тензорами на M.

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, т. 1, пер. с англ., М., 1981; [2] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964. *А. Л. Онищик.*

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ — обобщение *векторного анализа*, раздел *тензорного исчисления*, изучающий дифференциальные операторы, действующие на алгебре тензорных полей $D(M)$ дифференцируемого многообразия M. Рассматриваются также операторы, действующие на более общие, чем тензорные поля, геометрич. объекты: тензорные плотности, дифференциальные формы со значениями в векторном расслоении и т. д.

Наибольший интерес представляют операторы, действие к-рых не выводит за пределы алгебры $D(M)$.

1) *Ковариантная производная* вдоль векторного поля X — линейное отображение ∇_X пространства векторных полей $D^1(M)$ многообразия M, зависящее от векторного поля X и удовлетворяющее условиям:

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad \nabla_X(fZ) = f\nabla_X Z + (Xf)Y,$$

где $X, Y, Z \in D'(M)$, f, g — гладкие функции на M. Определяемые этим оператором *связность* Γ и *параллельное перенесение* позволяют распространить действие ковариантной производной до линейного отображения алгебры $D(M)$ в себя; при этом отображение ∇_X есть дифференцирование, сохраняет тип тензорного поля и перестановочно со сверткой.

В локальных координатах $u^1, u^2, \ldots, u^n$ ковариантная производная тензора с компонентами $T\left(T^{i_1\ldots i_l}_{j_1\ldots j_m}\right)$ относительно вектора $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}$ определяется так:

$$\nabla_X T = \xi^s\left(\frac{\partial T^{i_1\ldots i_l}_{j_1\ldots j_m}}{\partial u^s} + \Gamma^{i_1}_{ks}T^{k\ldots i_l}_{j_1\ldots j_m} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - \Gamma^k_{j_1 s}T^{i_1\ldots i_l}_{k\ldots j_m} - \ldots\right),$$

Γ^i_{ks} — объект связности Γ.

2) *Ли производная* вдоль векторного поля X — отображение L_X пространства $D'(M)$, определяемое формулой $L_X : Y \to [X, Y]$, где $[X, Y]$ — коммутатор векторных полей X, Y. Этот оператор также однозначно продолжается до дифференцирования $D(M)$, сохраняет тип тензоров и перестановочен со сверткой. В локальных координатах производная Ли тензора $T\left(T^{i_1\ldots i_l}_{j_1\ldots j_m}\right)$ выражается так:

$$L_X T = \xi^k\frac{\partial T^{i_1\ldots i_l}_{j_1\ldots j_m}}{\partial u^k} + T^{i_1\ldots i_l}_{k\ldots j_m}\frac{\partial \xi^k}{\partial u^{i_1}} + \ldots$$
$$\ldots - T^{k\ldots i_l}_{j_1\ldots j_m}\frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial u^k} - \ldots.$$

3) Внешний дифференциал (внешняя производная) — линейный оператор d, сопоставляющий внешней *дифференциальной форме* (кососимметричному ковариантному тензору) степени p форму такого же вида и степени $p+1$, удовлетворяющий условиям:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2, \qquad d(d\omega) = 0,$$

где $\wedge$ — символ внешнего произведения, r — степень ω_1. В локальных координатах внешняя производная тензора $\omega(\omega_{i_1\ldots i_p})$ выражается так:

$$d\omega = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^k\frac{\partial \omega_{i_1\ldots \hat{i}_k \ldots i_{p+1}}}{\partial u^{i_k}}.$$

Оператор d — обобщение оператора rot.

4) *Кривизны тензор* симметричного невырожденного дважды ковариантного тензора g_{ij} представляет собой действие нек-рого нелинейного оператора R:

$$g_{ij} \longrightarrow R^s_{mlk} = \frac{\partial \Gamma^s_{km}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^s_{kl}}{\partial u^m} + \sum\nolimits_p \left(\Gamma^s_{lp}\Gamma^p_{km} - \Gamma^s_{mp}\Gamma^p_{kl}\right),$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial u^s} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s}\right).$$

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Схоутен Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; [3] Мак-Коннел А.-Д., Введение в тензорный анализ, пер. с англ., М., 1963; [4] Сокольников И. С., Тензорный анализ, пер. с англ., М., 1971. *К. М. Белов.*

ТЕОРЕМА — математическое утверждение, истинность к-рого установлена путем *доказательства*.

Понятие Т. развивалось и уточнялось вместе с понятием математич. доказательства. При использовании *аксиоматического метода* Т. рассматриваемой теории определяются как высказывания, выводимые чисто логич. путем из нек-рых заранее выбранных и фиксированных высказываний, называемых аксиомами. Поскольку аксиомы предполагаются истинными, то истинными должны быть и Т. Дальнейшее уточнение понятий доказательства и Т. связано с предпринятым в математич. логике исследованием понятия *логического следствия*, в результате чего для широкого класса математич. теорий процесс логич. вывода удалось свести к преобразованию формул, т. е. математич. утверждений, записанных на подходящем формализованном языке, по точно сформулированным правилам (*вывода правилам*), относящимся лишь к форме (а не к содержанию) предложений. В возникающих таким образом формальных теориях доказательством наз. конечная последовательность формул, каждая из к-рых либо является аксиомой, либо получается из нек-рых предыдущих формул этой последовательности по одному из правил вывода. Т. наз. формула, являющаяся последней формулой в нек-ром доказательстве.

Такое уточнение понятия Т. позволило получить, пользуясь строгими математич. методами, ряд важных

результатов о математич. теориях. В частности, было установлено, что аксиоматич. теории, представляющие многие существенные разделы математики (напр., арифметику), неполны, т. е. существуют предложения, истинность или ложность к-рых нельзя установить чисто логич. путем на основе аксиом. Эти теории, как правило, неразрешимы, т. е. не существует единого метода (алгоритма), позволяющего установить, является ли Т. произвольное данное высказывание. *В. Е. Плиско.*

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВАЯ ФУНКЦИЯ — то же, что *арифметическая функция*.

ТЕОРИЯ ф о р м а л ь н а я — то же, что *формальная система*. См. также *Аксиоматический метод*.

***K*-ТЕОРИЯ** — раздел *алгебраической топологии*, изучающий свойства векторных расслоений алгебраич. и топологич. методами. В отличие от *алгебраической K-теории*, иногда наз. т о п о л о г и ч е с к о й K - т е о р и е й. В расширенном смысле термин «K-теория» употребляется для обозначения области математики, включающей в себя алгебраич. K-т. и топологич. K-т. и характеризующейся специфич. алгебраич. и топологич. методами исследования, называемыми методами K-т. В узком смысле K-т.— *обобщенная теория когомологий*, порожденная категорией *векторных расслоений*.

Источником K-т. являются векторные косые произведения (расслоения), изучаемые в алгебраич. топологии, и их многочисленные гомотопич. и алгебраич. свойства. Наиболее важные свойства расслоений и связанные с ними понятия, используемые в K-т.,— это свойства *характеристических классов* расслоений, *классифицирующие пространства*, алгебраич. операции с расслоениями (прямые суммы, тензорные произведения, внешние степени), прообраз расслоения. Вторым источником K-т. является связь с алгебраич. K-т., к-рая заключается в том, что пространство непрерывных сечений векторного расслоения можно рассматривать как модуль над алгеброй непрерывных функций, к-рый оказывается *проективным модулем*.

По аналогии с K-функторами в алгебраич. K-т. были определены группы $K(X)$ как *Гротендика группы* категории векторных расслоений с базой X. Используя понятие *индуцированного расслоения*, определенные группы $K(X)$ дополняются до определения функтора из категории топологич. пространств в категорию абелевых групп. Обычно K-функтор изучается не во всей категории топологич. пространств, а в меньших подкатегориях. Наиболее употребительной является категория *клеточных пространств* (комплексов). Определение K-функтора распространяется на категории пунктированных топологич. пространств и пар топологич. пространств и дополняется группами $K^i(X, A)$, $i \leqslant 0$, полагая

$$K^i(X, A) = K(X \times D^{-i},\ X \times S^{-i-1} \cup A \times D^{-i}),$$

где D^{-i} есть $-i$-мерный диск, а S^{-i-1} — его граница. Совокупность функторов K^i, $i \leqslant 0$, удовлетворяет аксиомам обобщенной теории когомологий, к-рые следует видоизменить с учетом неравенства $i < 0$.

Различают K-т., построенную по категории вещественных векторных расслоений (в е щ е с т в е н н а я K - т е о р и я), и K-т., построенную по категории комплексных векторных расслоений (к о м п л е к с н а я K - т е о р и я). Изучаются и др. варианты K-т. с учетом дополнительных структур в векторных расслоениях, напр. эквивариантная K-т.

Важным свойством групп $K(X)$ при построении обобщенной теории когомологий является периодичность Ботта в комплексной K-т. Она позволяет, в частности, снять ограничение $i \leqslant 0$ и превратить функторы K^i в $\mathbb{Z}_2$-градуированную обобщенную теорию когомологий. Основное же значение периодичности Ботта заключается в широких вычислительных возможностях построенной K-т.

К K-т. применимы вычислительные методы обобщенной теории когомологий, в частности метод *спектральных последовательностей*, позволивший вычислить группы $K(X)$ для многих классических конечномерных и бесконечномерных пространств. Напр., если $X = \mathbb{C}P^n$ — комплексное проективное пространство, то

$$K(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[u]/\{u^{n+1}\},$$

где $u = [\eta] - 1$, а η — одномерное расслоение Хопфа.

Для вещественной K-т. с помощью *Ботта теоремы периодичности* строится $\mathbb{Z}_8$-градуированная обобщенная теория когомологий. Применяя дополнительные алгебраич. структуры в векторных расслоениях, построены более общие теории когомологий, органически включающие в себя комплексную вещественную и симплектич. K-т.

В 60-х гг. с помощью K-т. были переосмыслены многие задачи как в топологии, так и в др. разделах математики. Наиболее важные результаты в K-т. связаны с систематич. изучением характеристич. классов и *когомологических операций*, в терминах к-рых были доказаны теоремы целочисленности для мультипликативных родов (аналоги *Римана — Роха теоремы*), даны простые и прозрачные решения классич. задач, связанные с алгебрами с делением и векторными полями на сферах.

Методы топологич. K-т. дали толчок для развития других разделов топологии, напр. теории бордизмов. Важное значение для развития дифференциальной топологии имело доказательство гипотезы Адамса об описании J-функтора в терминах когомологич. операций K-т. (см. [2]).

Наиболее впечатляющим является использование методов K-т. в проблеме вычисления индекса эллиптич. операторов. С помощью геометрич. конструкций векторных расслоений были разумно обобщены понятия дифференциальных и *псевдодифференциальных операторов*, их символов, *Соболева пространств*, эллиптич. операторов и их индексов и получена формула Атьи — Зингера [3]

$$\operatorname{ind} \sigma(D) = \langle \operatorname{ch} \sigma \cdot T(X),\ [X] \rangle,$$

описывающая индекс эллиптич. оператора на компактном замкнутом многообразии X с символом σ в терминах *Тодда класса* $T(X)$ и *Чжэня характера* оператора $\sigma(D)$. Как следствие из формулы Атьи — Зингера получаются частные формулы для различных классов операторов, имеющих важное значение в геометрии, топологии и др. разделах математики. Напр., формула Хирцебруха выражает *сигнатуру* ориентированного компактного замкнутого многообразия через характеристич. *Понтрягина числа* этого многообразия. Сама формула Хирцебруха и ее обобщения на неодносвязные многообразия применяется в дифференциальной топологии в задачах классификации гладких структур многообразий.

В 70-х гг. появились обобщения K-т., связанные с применением в ней функциональных методов и приспособлением K-т. к различным задачам топологии, геометрии, теории дифференциальных уравнений. Одно из обобщений заключается в замене категории векторных расслоений на категорию *локально тривиальных расслоений*, слоем к-рых является конечно порожденные модули, проективные над нек-рой C^*-*алгеброй* A, а структурные группы суть группы автоморфизмов этих модулей. С помощью этого класса расслоений построены нетривиальные когомологич. инварианты бесконечномерных представлений бесконечных дискретных групп π. Если дискретная группа π является фундаментальной группой компактного многообразия, допус-

кающего риманову метрику неположительной кривизны двумерной, то характеристич. числа вида

$$\tau_x(M)=\langle L(M)x,\ [M]\rangle,$$

— т. н. высшие сигнатуры, являются гомотопич. инвариантами (здесь x — произвольный рациональный класс Понтрягина — Хирцебруха многообразия M с фундаментальной группой π).

В расширенном смысле методы K-т. оказали большое влияние на развитие идей дифференциальной топологии. С помощью соединения алгебраич. и топологич. K-т. в дифференциальной топологии были решены задачи о классификации гладких и кусочно линейных структур на многообразиях, о гомотопич. и топологич. инвариантности характеристич. классов Понтрягина и др. Методы K-т. имеют широкое применение в функциональном анализе, в частности в теории *банаховых алгебр*.

Лит.: [1] Атья М., Хирцебрух Ф., «Математика», 1962, т. 6, №2, с. 3—39; [2] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975; [3] Atiyah M., Singer I., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 69, p. 422—33; [4] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [5] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [6] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [7] Каруби М., K-теория, пер. с англ., М., 1981. *А. С. Мищенко.*

ТЁПЛИЦА МАТРИЦА, T-матрица,— бесконечная матрица $\|a_{nk}\|$, n, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяющая условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\leqslant M,\quad n=1, 2, \ldots,$$

и M не зависит от n;

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk}=0,\ n=1, 2, \ldots;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}=1.$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными, чтобы *матричный метод суммирования*, определенный преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в последовательность $\{\sigma_n\}$ посредством матрицы $\|a_{nk}\|$:

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}s_k,$$

был регулярным (см. *Регулярные методы суммирования*). Необходимость и достаточность этих условий для регулярности метода была доказана О. Тёплицем [1] для треугольных матриц.

Лит.: [1] Toeplitz O., «Prace matematyczno-fizyczne», 1911, Bd 22, S. 113—19; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960. *И. И. Волков.*

ТЁПЛИЦЕВА ФОРМА ИНДЕФИНИТНАЯ — квадратичная форма, определенная на пространстве Ф финитных последовательностей $x=\{\xi_p\}_{-\infty}^{\infty}$ выражением

$$(x, x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_{p-q}\xi_p\overline{\xi}_q,$$

причем последовательность $c=\{c_p\}_{-\infty}^{\infty}$, $c_0=\overline{c}_0$, такова, что, начиная с нек-рой размерности N, форма (x, x) на каждом подпространстве

$$\Phi^N\subset\Phi,\ \Phi^N:\{\xi_p;\ \xi_p=0,\ |p|>N\}$$

приводится к канонич. виду, содержащему $\varkappa$ положительных квадратов. С помощью Т. ф. и. в пространстве Ф вводится индефинитное скалярное произведение; после факторизации по изотропному подпространству и пополнения Ф превращается в *Понтрягина пространство*. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.*

ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ УРАВНЕНИЕ — однородное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}=0.$$

Это уравнение является простейшим представителем *параболического типа уравнений*. При $n=3$ оно описывает процесс распространения тепла в твердом теле. К основным корректно поставленным задачам для Т. у. относятся первая краевая задача (в цилиндрич. области) и задача Коши — Дирихле (в полупространстве). Решение последней задачи выписывается в явном виде:

$$u(x, t)=(2a\sqrt{\pi t})^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right)\varphi(\xi)\,d\xi,\quad t>0,$$

где $\varphi(\xi)$ — заданная непрерывная равномерно ограниченная в $\mathbb{R}^n$ функция.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981. *А. П. Солдатов.*

ТЕРМ — языковое выражение, призванное обозначать объекты. Напр., выражения 1, $0+1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ являются различными Т., обозначающими один и тот же объект. Т. могут содержать *свободные переменные* (параметры), фиксация значений к-рых однозначно определяет в соответствии с семантич. правилами языка нек-рый объект — значение Т. при данных значениях его свободных переменных. Так, напр., если f — переменная, значениями к-рой являются интегрируемые действительные функции, а x, a, b — переменные по действительным числам, то выражение $\int_a^b f(x)\,dx$ является Т. с тремя параметрами a, b и f, обозначающим при каждом значении параметров вполне определенное действительное число (переменная x является в этом Т. связанной). Синтаксически Т. характеризуются тем, что их можно подставлять вместо переменных в другие выражения языка — Т. и формулы, получая при этом Т. и формулы соответственно.

В *формализованных языках* имеются формальные, не зависящие от семантики языка правила построения Т. и выделения в них свободных переменных; для многосортных языков имеются также правила, определяющие сорт возникающих Т. *В. Н. Гришин.*

ТЕРМОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, связанные с исследованием наиболее общих свойств макроскопич. систем, находящихся в состоянии термодинамич. равновесия, и процессов перехода между этими состояниями.

Математич. аппарат макроскопич. термодинамики исходит из т. н. начал термодинамики. Согласно нулевому началу, термодинамич. система должна иметь единственное в термодинамич. смысле устойчивое равновесное состояние, определяемое фиксацией внешних условий, в к-рые помещена система. Первое начало — закон сохранения и превращения энергии — для квазистатического бесконечно малого изменения параметров состояния системы (т. е. для достаточно медленного перехода из одного равновесного состояния в другое) связывает тепловой эффект этого процесса δQ с изменением внутренней энергии системы E и величиной произведенной системой работой δW. Если в качестве наглядного и достаточно простого примера выбрать систему типа газа с фиксированным числом частиц, то его состояние можно зафиксировать тремя параметрами, задав, к примеру, его температуру θ, объем V и число частиц N (возможны и другие варианты). Тогда работа, связанная с процессом расширения, $\delta W=pdV$, где p — давление газа, и первое начало определит баланс энергии

$$\delta Q=dE+\delta W=dE+pdV. \qquad (1)$$

Из второго начала термодинамики для квазистатич.

процессов — факта существования энтропии как однозначной функции термодинамич. состояния такой, что ее полный дифференциал

$$dS = \frac{1}{\theta}\,\delta Q, \qquad (2)$$

следует система уравнений для удельной энергии $\varepsilon = E/N$ как функции θ и удельного объема $v = V/N$:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}\right)_v &= c_v(\theta, v); \\ \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)_\theta &= \theta\,\frac{\partial p(\theta, v)}{\partial \theta} - p(\theta, v), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

определяющих ее с точностью до константы $\varepsilon = \varepsilon(\theta, v) + \varepsilon_0$, а всю внутреннюю энергию — с точностью до аддитивной константы $E = N\varepsilon(\theta, v) + N\varepsilon_0$, и система уравнений для удельной энтропии

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_v = \frac{1}{\theta}\,c_v(\theta, v); \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_\theta = \frac{\partial p(\theta, v)}{\partial \theta}, \qquad (4)$$

определяющих $s = s(\theta, v) + s_0$ с точностью до энтропийной константы (полная энтропия $S(\theta, V, N) = Ns(\theta, v) + Ns_0$ — с точностью до аддитивной константы Ns_0).

Остальные термодинамич. характеристики системы, термодинамич. потенциалы и т. д. определяются уже с помощью полученных решений с применением математич. операций не сложнее операций дифференцирования.

Для получения решений уравнений (3) и (4) термодинамич. система должна быть задана. Эта конкретизация системы обычно включает задание уравнений состояния (в приведенном упрощенном случае — одного) $p = p(\theta, v)$ и калорич. уравнения состояния — теплоемкости $c_v = c_v(\theta, v)$, к-рые определяют макроскопич. реакцию системы по отношению к изменению внешних параметров (в приведенном случае — объема) и по отношению к ее нагреванию. Константу ε_0 можно отнести в счет выбора начала отсчета энергии. Энтропийная константа, необходимая при решении ряда конкретных проблем, определяется с помощью третьего начала термодинамики, к-рое в радикальной формулировке Планка выглядит как дополнительное условие к системе уравнений (4):

$$\lim s|_{\theta \to 0} = 0. \qquad (5)$$

Приведенную выше постановку задачи можно назвать прямой. Возможны различные варианты обратных ее постановок.

При исследовании низкотемпературных проблем и в ряде других задач используется и иная постановка: согласно первым уравнениям для ε и s и третьему началу, следует:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon(\theta, v) &= \varepsilon_0(v) = \int_0^\theta c_v(\theta', v)\,d\theta'; \\ s(\theta, v) &= \int_0^\theta \frac{1}{\theta'}\,c_v(\theta', v)\,d\theta'. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Для реализации этих расчетов необходимо задание калорич. уравнения, т. е. $c_v(\theta, v)$, и удельной энергии основного состояния системы $\varepsilon_0(v) = E_0/N$. Как правило, эта величина непосредственно не измеряется, она может быть задана для каких-либо определенных моделей или косвенно определена с помощью упомянутых выше уравнений состояния.

Учет наличия внешних полей (электростатического, магнитного и т. д.) можно включить в указанную схему (увеличится общее число уравнений типа (3) и (4)), но его проще всего произвести с помощью подсчета изменения свободной энергии $F = E - \theta S$ при включении поля a от нуля до заданной величины. Реакция системы на это включение должна быть задана как соответствующее уравнение состояния $A = A(\theta, a)$ такое, что работа системы при квазистатич. изменении поля на da будет равна $\delta W = A(\theta, a)da$. Так как, согласно (1) и (2),

$$dF = d(E - \theta E) = -S\,d\theta + \delta W, \qquad (7)$$

то искомая величина (опущены все переменные, кроме θ и a)

$$\Delta F = F(\theta, a) - F(\theta, 0) = -\int_0^a A(\theta, a')\,da'. \qquad (8)$$

Изменение термодинамич. характеристик, связанное с включением поля a, определяется с помощью соответствующего дифференцирования величины (8) и несложных алгебраич. операций.

Ввиду того что задание термодинамич. системы с помощью удобных формул для c_v, p, A и т. д. возможно только для упрощенных моделей, расчет реальных термодинамич. эффектов (т. е. решение задач технич. термодинамики) производится с помощью численных методов, специальных вспомогательных таблиц и т. д.

Проводились исследования особенностей термодинамич. систем вблизи критич. точки (или фазового перехода 2-го рода ввиду его определенного подобия критич. явлениям). Поведение ряда термодинамич. характеристик вблизи этой точки характеризуют степенями безразмерного отклонения температуры от критической: $(|\theta - \theta_0|/\theta_0)^k$, параметры k наз. критич. индексами, для к-рых методами макроскопич. термодинамики (иногда с привлечением общих схем равновесной статистич. механики) устанавливается ряд универсальных соотношений (обычно в виде неравенств) (3).

Математич. проблемы термодинамич. теории явлений переноса несложны (см. [1], [4]). Это — исследование системы линейных соотношений, связывающих потоки $\dot{\zeta}_l$ с отклонениями макроскопич. величин ζ_l от равновесных значений. Коэффициенты при ζ_l подчинены определенным условиям симметрии и выражаются через реальные коэффициенты переноса. Если же к этим уравнениям отнестись как к временны́м уравнениям для $\zeta_l(t)$ (в достаточно огрубленной шкале времени), то решение этой системы (лишь в редких случаях возможное в общем виде) определит в варианте полуфеноменологич. теории характер релаксации системы к равновесному состоянию.

Лит.: [1] Базаров И. П., Термодинамика, 3 изд., М., 1983; [2] Кубо Р., Термодинамика, пер. с англ., М., 1970; [3] Стенли Г., Фазовые переходы и критические явления, пер. с англ., М., 1973; [4] де Гроот С., Мазур П., Неравновесная термодинамика, пер. с англ., М., 1964. *И. А. Квасников.*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ — любая из четырех функций, определенных на множестве состояний макроскопич. (термодинамич.) системы: энергия, тепловая функция (или энтальпия), свободная энергия Гельмгольца и свободная энергия Гиббса (иногда наз. термодинамич. потенциалом в узком смысле).

При формальном построении термодинамики состояния (однокомпонентной) термодинамич. системы описываются любой из пар термодинамич. параметров (s, v), (s, p), (T, v), (T, p), где s — удельная энтропия системы, T — ее абсолютная температура, p — давление и v — удельный объем. Каждой из этих пар удобно приписать свой Т. п.: паре (s, v) — энергию $E = E(s, v)$, паре (s, p) — тепловую функцию $W = W(s, p)$, паре (T, v) — свободную энергию Гельмгольца $F = F(T, v)$ и, наконец, паре (T, p) — свободную энергию Гиббса $\Phi = \Phi(T, p)$.

При этом если выбрана какая-нибудь пара параметров, описывающих состояния системы, то два других параметра выражаются как частные производные соответствующего Т. п. (отсюда и название). Параметры s, T и p, v являются сопряженными в том смысле, что каждый из них выражается как частная производная по другому (напр., при выборе пары (s, v) с потенциалом $E(s, v)$ параметры T и p):

$$T = \frac{\partial E}{\partial s}, \quad p = -\frac{\partial E}{\partial v}. \qquad (1)$$

Переход от одной пары параметров с ее потенциалом к другой паре с соответствующим потенциалом задается с помощью *Лежандра преобразования*. Так, при переходе от пары (s, v) к паре (T, v) потенциал $F(T, v)$ этой пары равен

$$F(T, v) = E(s(T), v) - s(T)\,T,$$

где $s(T)$ находится из уравнения (1), т. е. $F(T, v)$ с точностью до знака совпадает с преобразованием Лежандра функции $E(s, v)$ как функции переменной s.

При содержательном построении термодинамики с помощью равновесных гиббсовских ансамблей Т. п. могут быть выражены с помощью термодинамич. предела, деленного на объем логарифма статистич. суммы (и его производных) какого-нибудь из гиббсовских ансамблей. Напр., свободная энергия Гельмгольца равна

$$F(T, v) = \lim_{N \to \infty,\ \frac{|\Lambda|}{N} \to v} |\Lambda|^{-1} \ln Z(T, N, \Lambda),$$

где $Z(T, N, \Lambda)$ — *статистическая сумма* малого канонич. ансамбля для системы из N частиц, заключенных в области Λ ($|\Lambda|$ — объем этой области Λ), при фиксированном значении температуры T (см. [3]).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая механика, 2 изд., М., 1964 (Теоретич. физика, т. 5), [2] Гельфанд И. М., Фомин В. С., Вариационное исчисление, М., 1961; [3] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971. *Р. А. Минлос.*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД — основной прием статистич. физики, заключающийся в том, что для изучения большой (но конечной) физич. системы ее аппроксимируют нек-рой бесконечной идеализированной системой. Так, напр., систему, состоящую из N частиц (молекул), заполняющих ограниченную область Λ пространства $\mathbb{R}^3$, при большом N и большой (сравнительно с размерами молекул) области Λ заменяют системой из бесконечного числа тех же молекул, заполняющих все пространство, так что при этом свойства и характеристики конечной системы (характер динамики, свойства равновесных ансамблей и т. д.) асимптотически (по N и по Λ) близки к аналогичным свойствам и характеристикам предельной системы.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1970; [2] Гиббсовские состояния в статистической физике, пер. с англ., М., 1978; [3] Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 1, с. 133—90. *Р. А. Минлос.*

ТЕРЦИАРНЫЙ ИДЕАЛ — идеал I кольца R, к-рый нельзя представить в виде пересечения строго больших чем I правого частного $r(I, A)$ и идеала B. Все неприводимые идеалы терциарны. В нётеровых кольцах терциарность совпадает с примарностью (см. *Аддитивная теория идеалов*, *Примарный идеал*, *Примарное разложение*).

Пусть кольцо R удовлетворяет условию максимальности для левых и правых частных идеалов и каждый идеал разложим в пересечение конечного числа неприводимых идеалов. Тогда для каждого идеала Q существует терциарный радикал $\mathrm{ter}(Q)$ — наибольший среди таких идеалов T в R, что для любого идеала B

$$r(Q, T) \cap B = Q \Rightarrow B = Q.$$

Как и для примарных идеалов, для Т. и. справедливы теорема пересечения, теорема существования и теорема единственности.

Анализ свойств правых и левых частных (идеалов кольца, подмодулей модуля и др.) приводят к системам с частными, в к-рых естественным образом вводится общее понятие S-примарности и S-примарного радикала. Это позволяет сформулировать в качестве аксиом «теоремы пересечения», «существования» и «единственности». При таком подходе терциарность является единственной примарностью, для к-рой справедливы все эти три теоремы, т. е. является единственным «хорошим» обобщением классич. примарности (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», 1967, т. 31, № 5, с. 1057—90; [2] Riley J. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 105, № 2, p. 177—201. *В. А. Андрунакиевич.*

ТЕСТ в кибернетике — одно из важнейших средств логич. анализа информации. Аппарат Т. первоначально был использован в задаче контроля работы электрич. схем. Позже на основе Т. были разработаны эффективные алгоритмы *распознавания образов*. Тестовый подход успешно применяется во многих областях математики. Основные задачи с Т. могут быть сформулированы следующим образом.

1. Дана прямоугольная таблица, содержащая s строк и m столбцов.

	f_1	f_2		f_j		f_m
e_1						
e_s						

Строки характеризуются вопросами (признаками) $e_1, \ldots, e_s$ из нек-рого множества E, столбцы — объектами (образами) $f_1, \ldots, f_m$ из множества F. В клетке, лежащей на пересечении i-й строки и j-го столбца, находится ответ $f_j(e_i)$ (значение i-го признака для j-го образа), принадлежащий нек-рому множеству G. Таким образом, поскольку $e_{i_1} \neq e_{i_2}$ при $i_1 \neq i_2$, можно рассматривать j-й столбец $(1 \leqslant j \leqslant m)$ как столбец, задающий функцию $f_j(x)$. Естественно считать, что столбцы таблицы попарно различны. Так как природа множеств E и G существенного значения не имеет, то в дальнейшем предполагается $E = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ и $G = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. В нек-рых случаях на множествах E и G задается частичный порядок $\leqslant$. Иногда столбцам приписываются вероятности $p_1, \ldots, p_m$ $(\Sigma_i p_i = 1)$.

2. Задается цель логич. анализа таблицы. Для этого фиксируется нек-рое подмножество $\mathfrak{N}$ пар (i, j), $i \neq j$, номеров столбцов. В частности, если множество F разбито на классы, то $(i, j) \in \mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда f_i и f_j принадлежат одному классу, $i \neq j$. Подмножество $\mathfrak{N}$ можно интерпретировать как отношение или как нек-рое свойство.

Имеется два специальных случая: 1) $\mathfrak{N} = \{(1, j)\}$, $j = 2, \ldots, m$ и f_1 — выделенная функция (этот случай связан с задачей о проверке), 2) $\mathfrak{N} = \{(i, j)\}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, относится к задаче о диагностике (полного различения).

Цель логич. анализа можно сформулировать следующим образом: указать процедуру, к-рая для любых i и j таких, что $(i, j) \in \mathfrak{N}$, позволяла бы отличить образ f_i от образа f_j. Если $\mathfrak{N}$ соответствует разбиению F на классы, то задача эквивалентна задаче об отнесении произвольно заданной функции f из F соответствующему классу. Ниже в основном говорится об этой задаче. Сформулированный вопрос решается тривиально, если полностью известна таблица и все известно о функции f. В реальных задачах получение информации о функции f возможно, но при определенных затратах. Кроме того, для обширного класса задач вся таблица либо не известна, либо настолько велика, что мы не в состоянии с ней оперировать. Поэтому ограничиваются ее нек-рым фрагментом — т. н. представительной выборкой, и задачу ставят в эвристич. варианте.

3. Указываются допустимые средства решения задачи. Пусть загадана нек-рая функция f из F. Требуется путем задавания вопросов, называя нек-рые строки $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$, по ответам $f(e_{i_1}), \ldots, f(e_{i_r})$ узнать, к какому классу принадлежит f. Данный опрос может осуществляться либо при помощи т. н. безусловного эксперимента (см. *Эксперименты с авто-*

матами), при к-ром задаются сразу все вопросы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ и затем анализируют ответы на них, т. е. $f(e_{i_1}), \ldots, f(e_{i_r})$, либо при помощи более общей процедуры т. н. условного эксперимента, при к-ром вопросы задаются по очереди и каждый последующий вопрос задается в зависимости от предыдущих вопросов и ответов (а при наличии частичного порядка $\leqslant$ и с учетом $\leqslant$). Условный эксперимент можно изображать в виде ориентированного дерева, у к-рого вершинам приписаны вопросы, ребрам — ответы, а ветвям — результаты эксперимента. Для следующей таблицы на рис. 1 приведены три эксперимента $\mathcal{Э}_1$, $\mathcal{Э}_2$, $\mathcal{Э}_3$.

	f_1	f_2	f_3	f_4
e_1	0	0	1	1
e_2	0	1	0	0
e_3	0	0	0	1

Система T вопросов и необходимая для нее информация (ответы), позволяющая распознать свойство $\mathfrak{N}$, наз. тестом исходной таблицы.

В случае безусловных экспериментов обычно под тестом T понимают такую совокупность вопросов

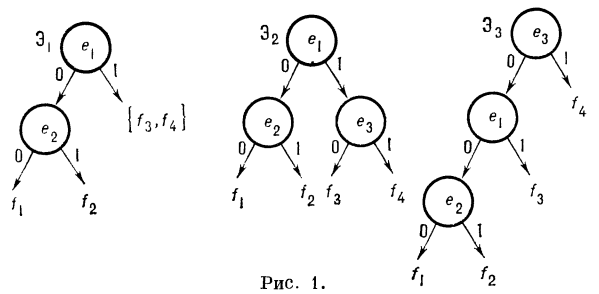


Рис. 1.

$\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\}$, что для любых (i, j) из $\mathfrak{N}$ найдется $e \in T$ и $f_i(e) \neq f_j(e)$ (условие распознавания $\mathfrak{N}$). Для многозначных (и не всюду определенных) таблиц вместо предиката $\neq$ можно использовать другие предикаты.

В случае условных экспериментов тестом T является ориентированное дерево, получающееся из условного эксперимента $\mathcal{Э}$ путем удаления всех концевых ребер и позволяющее распознать свойство $\mathfrak{N}$. Так, в данном выше примере для диагностич. задачи $\{e_1, e_2, e_3\}$ будет безусловным тестом; эксперименты $\mathcal{Э}_2$ и $\mathcal{Э}_3$ порождают условные тесты T_2 и T_3, а эксперимент $\mathcal{Э}_1$ не приводит к условному тесту.

Для любого $\mathfrak{N}$ множество $T_0 = \{e_1, \ldots, e_s\}$ является безусловным тестом (тривиальным Т.). Если таблица имеет большие размеры, тривиальный Т. приводит к очень трудоемкой процедуре логич. анализа. Поэтому возникает вопрос о построении более простых Т. Для этого уточняется понятие сложности $l(T)$ теста T. Ниже приведены нек-рые варианты определения сложности для безусловных Т:

$l_1(T) = r$, здесь $l_1(T)$ характеризует «кратность» Т., то есть число элементов в T.;

$$l_2(T) = \sum_{j=1}^{r} l(e_{i_j}),$$

данная мера отражает «время» тестирования при последовательной «прогонке» элементов, если $l(e_{i_j})$ трактовать как время реализации e_{i_j};

$$l_3(T) = \max l(e_{i_j}),$$

здесь $l_3(T)$ характеризует время тестирования при параллельной «прогонке» элементов.

Похожие характеристики сложности вводятся и для условных Т., исходя из соответствующего дерева и отражающих число ветвей дерева, суммарную длину дерева (число ребер дерева) и максимальную длину ветви. Если столбцы таблицы встречаются с вероятностями $p_1, \ldots, p_m$, то естественно в качестве меры сложности T взять величину $\sum_{i=1}^{m} l_i p_i$, где l_i — длина ветви дерева, ведущей к f_i. Тест для данной таблицы, цели контроля $\mathfrak{N}$ и указанных средств контроля и меры сложности наз. минимальным, если он имеет минимальную сложность. Построение минимальных Т. является центральной задачей теории Т. Осмысленность этой задачи можно продемонстрировать на примере безусловных Т. (и когда множества E и G не частично упорядочены). Для каждой таблицы существует тест T такой, что $l_1(T) \leqslant \min(s, m-1)$, и можно указать таблицы, на к-рых оценка достигается. В то же время при $m = m(s)$ и $s \to \infty$ для почти всех таблиц

$$\log_2 m \leqslant l_1(T_{\min}) \leqslant 2 \log_2 m,$$

т. е. минимальный тест $T_{\min}$ в широком диапазоне изменения параметров проще вышеуказанного.

Для построения минимальных Т. существует переборный алгоритм. Напр., для безусловных Т.— просмотр подмножеств множества $\{e_1, \ldots, e_s\}$, для условных Т.— просмотр деревьев с ограниченным ветвлением и ограниченным числом ярусов. Однако эти алгоритмы очень трудоемки. Оказывается, что построение минимальных Т. связано с построением т. н. тупиковых Т. Понятие тупиковости позволяет выделить из множества всех Т. те, к-рые в определенном смысле не имеют избыточности. Для безусловных Т. (без $\leqslant$) тест T относительно $\mathfrak{N}$ исходной таблицы наз. тупиковым, если любое его собственное подмножество T', $T' \subseteq T$, не является Т. относительно $\mathfrak{N}$. Понятие тупиковости может быть сформулировано в терминах разбиений множества $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Пусть R_T — разбиение столбцов таблицы, при к-ром два столбца принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они совпадают на строчках из T. Тест T будет тупиковым, если для любых двух подмножеств T' и T'' множества T таких, что $T'' \subseteq T'$ и $T'' \neq T'$, найдется пара $(i, j) \in \mathfrak{N}$, для к-рой $f_i \equiv f_j$ на T'', но $f_i \not\equiv f_j$ на T', т. е. разбиение $R_{T'}$ является подразбиением разбиения $R_{T''}$ относительно $\mathfrak{N}$. Для тупиковых тестов T имеет место $l_1(T) \leqslant m-1$. С другой стороны, из любого Т. путем выбрасывания нек-рых элементов можно получить тупиковый Т.

Для условных Т. (без $\leqslant$) тупиковость Т. означает, что каждый следующий элемент e выбирается так, чтобы хотя бы для одной пары $(i, j) \in \mathfrak{N}$ на предыдущем шаге f_i и f_j находились в одной компоненте разбиения, а $f_i(e) \neq f_j(e)$, т. е. теперь f_i и f_j попадают в разные компоненты разбиения.

В примере тест $T = \{e_1, e_2, e_3\}$ является безусловным тупиковым Т., а T_2 и T_3 — условными тупиковыми Т. Тест T_2 дает нек-рую «экономию» времени по сравнению с безусловным тестом T, поскольку для каждой диагностич. ситуации он требует только двух элементов, а T_3— трех. Обобщая этот пример, легко построить пример таблицы, для к-рой минимальный безусловный тест будет иметь длину $m-1$, а максимальная длина ветви условного Т. будет равна $\log_2 m$. Здесь получается наибольшее преимущество, к-рое могут давать условные Т. по сравнению с безусловными.

В случае когда на множествах E и G задан частичный порядок $\leqslant$, определение тупиковости усложняется. Такая попытка известна для таблиц из автоматных функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$, связанных с диагностикой автоматов (см. также *Эксперименты с автоматами*). Здесь элементы из E и G — слова в алфавитах A и B, а отношение $x \leqslant y$ означает, что слово x является началом слова y. При подаче на вход автомата слова $e = a_1$,

. . ., a_t фактически на вход подают также и все слова $e'=a_1 . . . a_{t'}$, где $t' \leqslant t$ (все начала e). Поэтому избыточность может быть заложена в самом элементе e. Более точно, элемент $e=a_1 . . . a_t$ наз. неприводимым, если для любого v, $v=1, 2, . . ., t-2$, при переходе от слова $a_1 . . . a_v$ к слову $a_1 . . . a_{v+1}$ либо происходит разбиение одной из пар $(i, j) \in \mathfrak{N}$, к-рая принадлежала одной компоненте разбиения $R_{(a_1 . . . a_v)}$, либо осуществляется специальная подготовка к такому разбиению путем перехода в новое состояние системы $(f_1, . . ., f_m)$ и при $v=t-1$ обязательно происходит разбиение. Оказывается, что каждое слово путем выбрасывания отдельных кусков может быть преобразовано в неприводимое и осуществляющее то же разбиение, что и исходное. Понятие безусловного тупикового Т. здесь пополняется дополнительным требованием, чтобы все элементы из T были неприводимыми. Понятие условного тупикового Т. включает в себя дополнительно два требования: 1) если на очередном шаге выбран элемент e_v, то элемент e_{v+1}, выбираемый на следующем шаге, должен следовать за e_v, $e_v \leqslant e_{v+1}$, и 2) элементы, соответствующие концевым вершинам дерева T, должны быть неприводимыми.

В теории Т. рассматриваются следующие вопросы: построение эффективных алгоритмов для нахождения различных типов Т.; изучение сложности Т. для отдельных классов таблиц; оценка числа тупиковых Т.; классификация Т. и таблиц; исследование влияния дополнительной информации о структуре таблиц на сложность и эффективность построения Т.

Целый ряд диагностич. задач приводится к табличной форме.

1) Поиск неисправностей в электрич. схемах (см. *Надежность и контроль управляющих систем*). Здесь контролируется схема Σ, реализующая булеву функцию $f(x_1, . . ., x_n)$. Множество E состоит из всех наборов $(\alpha_1, . . ., \alpha_n)$, $s=2^n$, $G=\{0, 1\}$, а F состоит из булевых функций $\{f_1, . . ., f_m\}$, характеризующих исправные и неисправные состояния схемы.

2) Контроль автоматов. Здесь таблица, вообще говоря, имеет бесконечное число строк (множество входных слов бесконечно). Однако для контроля нужны только те слова, к-рые являются началами неприводимых слов, а их длины ограничены константой, зависящей от m и числа состояний для $f_1, . . ., f_m$. Получается конечная таблица.

3) Диагностич. задачи медицины. При изучении диагностики определенных классов заболеваний появляется таблица, строки к-рой соответствуют симптомам, а столбцы — характерным для данных классов заболеваний набором значений признаков. Если признаки проявляются дискретным образом (напр., нормальна ли температура, нормально ли кровяное давление и т. п.), то получают таблицу вышеуказанного типа, причем если набор признаков достаточно богат, то все столбцы попарно различны.

4) Распознавание геометрич. образов. Пусть на прямоугольном дискретном табло возможно появление двух символов 0 и 1. Каждый из них может иметь по нескольку реализаций, отличающихся друг от друга своими размерами и положением (рис. 2). Требуется путем задавания вопросов о состоянии конкретных ячеек табло (заштрихована клетка или нет) узнать, какой из символов записан на нем. Здесь $e_1, . . ., e_s$ — номера клеток, $G=\{0, 1\}$, $f_1, . . ., f_m$ — все образы 0 и 1. Значение $f_i(e)$ равно 1, если клетка e для образа f_i заштрихована, и равно 0 в противном случае.

5) Игровые задачи. Известная игра «морской бой» состоит фактически в распознавании расположения «кораблей» противника путем последовательного выбора клеток, при этом партнер сообщает каждый раз о результате такого выбора. Здесь может быть составлена таблица, столбцы к-рой характеризуют варианты расположения «кораблей» (строится, как и в задаче распознавания 0 и 1). В качестве средств решения этой задачи оказываются условные Т.

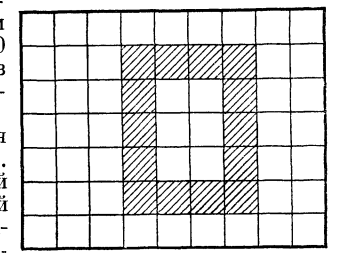


Рис. 2.

6) Минимизация булевых функций. Сводится к специальной тестовой задаче, в к-рой таблица описывает покрытие множества N_f (вершин, в к-рых $f=1$) т. н. максимальными гранями (соответствующими простым импликантам для f).

К тестовым задачам сводятся многие *комбинаторные задачи*, напр. задача о коммивояжере, задача о рюкзаке, а также нек-рые задачи поиска экстремума.

Т. позволяют проанализировать логич. связи между признаками и ввести меру важности признаков. Напр., можно считать, что важность признака определяется как отношение числа тупиковых Т., в к-рые данный признак входит, к числу всех тупиковых Т. Установление меры важности признаков полезно в решении прикладных задач для построения эвристич. алгоритмов. Этот подход успешно используется в решении диагностич. задач геологии, экономики, медицины и т. п.

Лит.: [1] Яблонский С. В., Чегис И. А., «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, в. 4, с. 182—84; [2] Соловьев Н. А., Тесты, Новосиб., 1978; [3] Дмитриев А. Н., Журавлев Ю. И., Кренделев Ф. П., «Дискретный анализ», 1966, № 7, с. 3—15. *С. В. Яблонский.*

ТЕСТОВАЯ СТАТИСТИКА — статистика *статистического критерия.*

ТЕТА-РЯД, θ-ряд,— функциональный ряд, применяемый для представления *автоморфных форм* и *автоморфных функций.*

Пусть D — область комплексного пространства $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$; Г — дискретная группа автоморфизмов области D. Если группа Г конечна, то из любой мероморфной в D функции $H(z)$, $z=(z_1, . . ., z_p)$, можно получить автоморфную функцию

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} H(\gamma(z)).$$

Для бесконечных групп необходимы множители сходимости, что и приводит к Т.-р. Тета-рядом Пуанкаре, или просто рядом Пуанкаре, ассоциированным с группой Г, наз. ряд вида

$$\theta_m(z)=\sum\nolimits^{*}_{\gamma \in \Gamma} J^m_\gamma(z)\, H(\gamma(z)), \qquad (1)$$

где $J_\gamma(z)=d\gamma(z)/dz$ — якобиан отображения $z \to \gamma(z)$, m — целое действительное число, называемое весом или порядком; звездочка означает, что суммирование выполняется только по тем $\gamma \in \Gamma$, к-рые доставляют различные члены ряда. При отображении $z \to \alpha(z)$, $\alpha \in \Gamma$, функция $\theta_m(z)$ преобразуется по закону $\theta_m(\alpha(z))=J^{-m}_\alpha(z)\theta_m(z)$ и, следовательно, представляет собой автоморфную функцию веса m, ассоциированную с группой Г. Отношение двух Т.-р. одинакового веса дает автоморфную функцию.

Т.-р. частного вида

$$E_m(z)=\sum\nolimits^{*}_{\gamma \in \Gamma} J^m_\gamma(z)$$

наз. тета-рядами Эйзенштейна или просто рядами Эйзенштейна, ассоциированными с группой Г.

А. Пуанкаре (H. Poincaré) в серии работ 80-х гг. 19 в. развил теорию Т.-р. в связи с изучением автоморфных функций одного комплексного переменного. Пусть Γ — дискретная фуксова группа дробно-линейных преобразований

$$\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc=1,$$

отображающая единичную окружность на себя, $D=\{z;\ |z|<1\}$ — единичный круг. Ряды Пуанкаре в этом случае имеют вид

$$\theta_m(z)=\sum\nolimits^{*}_{\gamma\in\Gamma}(cz+d)^{-2m}H\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad (2)$$

где H, напр.,— ограниченная голоморфная функция в D. В предположении, что Γ действует свободно на D и фактор $X=D/\Gamma$ компактен, доказано, что ряд (2) сходится абсолютно и равномерно внутри D при $m\geqslant 2$. При высказанных условиях на H и Γ это утверждение верно и для рядов (1) в случае, когда D — ограниченная область в $\mathbb{C}^p$. Для нек-рых фуксовых групп ряды (2) сходятся и при $m=1$.

Название «тета-ряды» употребляется и применительно к разложениям в ряды *тета-функций*, служащих для представления эллиптич. функций (см. *Якоби эллиптические функции*) и *абелевых функций*.

Лит.: [1] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.—Л., 1936, гл. 5; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 9; [3] Fricke R., Klein F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, Lpz., 1897—1912. *Е. Д. Соломенцев.*

ТЕТА-ФУНКЦИЯ, θ-функция, одного комплексного переменного — квазидвоякопериодическая *целая функция* комплексного переменного z, т. е. функция $\theta(z)$, имеющая, кроме периода ω, еще квазипериод $\omega\tau$, $\operatorname{Im}\tau>0$, при прибавлении к-рого к значению аргумента значение функции умножается на нек-рый мультипликатор. Иначе говоря, имеют место тождества по z:

$$\theta(z+\omega)=\theta(z),\qquad \theta(z+\omega\tau)=\varphi(z)\theta(z).$$

Как периодическая целая функция, Т.-ф. всегда представима рядом

$$\theta(z)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}}c_n\exp\left(\frac{2\pi i n}{\omega}z\right), \qquad (1)$$

в к-ром подбор коэффициентов c_n должен обеспечивать сходимость. Ряды (1) наз. тета-рядами (по причине первоначальных обозначений). Возможны и иные представления Т.-ф., напр. в виде бесконечного произведения.

В приложениях обычно ограничиваются мультипликаторами вида

$$\varphi(z)=q\exp(-2\pi ikz),$$

где k— натуральное число, называемое порядком или весом Т.-ф., q — числовой множитель. Сходимость обеспечивается, напр., коэффициентами вида

$$c_n=\exp(an^2+2bn+c),\quad \operatorname{Re}a<0.$$

Во многих вопросах удобны Т.-ф., удовлетворяющие условиям

$$\theta(z+1)=\theta(z),$$
$$\theta(z+\tau)=\exp(-2\pi ikz)\cdot\theta(z). \qquad (2)$$

Все Т.-ф. вида (2) одного и того же порядка k составляют векторное пространство размерности k. Базис этого пространства можно записать в виде

$$\theta_r(z)=\sum\nolimits_{s\in\mathbb{Z}}\exp[\pi i\tau s(k(s-1)+2r)+$$
$$+2\pi i(ks+r)z],\quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1.$$

Отдельные примеры Т.-ф. встречаются уже в работах Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1713), Л. Эйлера (L. Euler), в теории теплопроводности Ж. Фурье (J. Fourier). К. Якоби (C. Jacobi) подверг Т.-ф. систематич. исследованию, выделил четыре специальные Т.-ф., к-рые и положил в основу своей теории эллиптич. функций (см. *Якоби эллиптические функции*).

Т.-ф. нескольких комплексных переменных возникают как естественное обобщение Т.-ф. одного комплексного переменного. Они строятся следующим образом. Пусть $z=(z_1,\ \ldots,\ z_p)$ — матрица-строка p комплексных переменных, $p\geqslant 1$; e_μ есть μ-я строка единичной матрицы E порядка p; $n=(n_1,\ \ldots,\ n_p)$ — целочисленная матрица-строка; $A=\|a_{\mu\nu}\|$ —симметрич. матрица порядка p, составленная из комплексных чисел и такая, что матрица $\operatorname{Im}A=\|\operatorname{Im}a_{\mu\nu}\|$ порождает положительно определенную квадратичную форму $n\operatorname{Im}An^{\top}$ (здесь $n^{\top}$— транспонированная матрица n). Кратный тета-ряд

$$\theta(z)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^p}\exp[\pi i(nAn^{\top}+2nz^{\top})] \qquad (3)$$

сходится абсолютно и равномерно на компактах из $\mathbb{C}^p$ и определяет, следовательно, целую трансцендентную функцию p комплексных переменных $z_1,\ \ldots,\ z_p$, называемую тета-функцией порядка 1. Различные элементы матрицы A наз. модулями, или параметрами Т.-ф. $\theta(z)$; число модулей равно $p(p+1)/2$. Т.-ф. $\theta(z)$ 1-го порядка удовлетворяет следующим основным тождествам по z:

$$\left.\begin{aligned}&\theta(z+e_\mu)=\theta(z),\\&\theta(z+e_\mu A)=\exp[-\pi i(a_{\mu\mu}+2z_\mu)]\cdot\theta(z),\\&2(1+\delta_{\mu\nu})\pi i\frac{\partial\theta}{\partial a_{\mu\nu}}=\frac{\partial^2\theta}{\partial z_\mu\,\partial z_\nu},\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $\mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ p$; $\delta_{\mu\nu}=1$ при $\mu=\nu$ и $\delta_{\mu\nu}=0$ при $\mu\neq\nu$. Матрица $S=(E,\ A)$ размера $p\times 2p$ является системой модулей, или системой периодов и квазипериодов, Т.-ф. $\theta(z)$. Если $m=(m_1,\ \ldots,\ m_p)$, $m'=(m'_1,\ \ldots,\ m'_p)$ — произвольные целочисленные матрицы-строки, то в более общем виде свойства периодичности Т.-ф. можно записать так:

$$\theta(z+m'+mA)=$$
$$=\exp[-\pi i(mAm)^{\top}+2m(z+m')^{\top}]\cdot\theta(z).$$

Пусть $\gamma=(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_p)$, $\gamma'=(\gamma'_1,\ \ldots,\ \gamma'_p)$ — произвольные комплексные матрицы-строки, $\Gamma=\|\gamma'_\gamma\|$ — матрица размера $2\times p$. Тогда формула

$$\theta_\Gamma(z)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^p}\exp[\pi i(n+\gamma)A(n+\gamma)^{\top}+$$
$$+2(n+\gamma)(z+\gamma')^{\top}]=\exp[\pi i(\gamma A\gamma^{\top}+$$
$$+2\gamma(z+\gamma')^{\top})]\cdot\theta(z+\gamma'+\gamma A)$$

определяет Т.-ф. 1-го порядка с характеристикой (общего вида) Γ; в этой терминологии Т.-ф. (3) имеет характеристику 0. Матрица Γ иначе наз. периодич. характеристикой матрицы $\gamma'+\gamma A$. Всегда $\theta_{-\Gamma}(-z)=\theta_\Gamma(z)$. Свойства (4) для Т.-ф. с характеристикой Γ обобщаются в виде

$$\left.\begin{aligned}&\theta_\Gamma(z+e_\mu)=\exp(2\pi i\gamma_\mu)\cdot\theta_\Gamma(z),\\&\theta_\Gamma(z+e_\mu A)=\exp[-\pi i(a_{\mu\mu}+2(z_\mu-\gamma'_\mu))]\cdot\theta_\Gamma(z).\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Характеристика наз. нормальной, если $0\leqslant\gamma_i$, $\gamma'_i<1$, $i=1,\ \ldots,\ p$.

Наиболее употребительны дробные характеристики, когда все γ_i, γ'_i — неотрицательные правильные рациональные дроби с общим знаменателем δ. Наиболее важный и простой случай — полуцелые, или половинные, характеристики, когда $\delta=2$. Полуцелые характеристики $H=\|{}^{h}_{h'}\|$

можно считать составленными из чисел 0 и 1 (обычно под «тета-характеристиками» подразумевают именно такие характеристики). Для Т.-ф. с тета-характеристикой H формулы (5) принимают вид

$$\theta_H(z+e_\mu)=(-1)^{h'_\mu}\cdot\theta_H(z),$$

$$\theta_H(z+e_\mu A)=(-1)^{h'_\mu}\exp[-\pi i(a_{\mu\mu}+2z_\mu)]\cdot\theta_H(z).$$

Тета-характеристика H наз. четной или нечетной в соответствии с тем, четна или нечетна Т.-ф. $\theta_H(z)$. Другими словами, тета-характеристика H четная или нечетная в зависимости от того, четное или нечетное число $h'h^\top$, поскольку

$$\theta_H(-z)=(-1)^{h'h^\top}\cdot\theta_H(z).$$

Всего различных тета-характеристик 2^{2p}, из них $2^{p-1}(2^p+1)$ четных и $2^{p-1}(2^p-1)$ нечетных. Т.-ф. $\theta_H(z)$ обращается в нуль в тех точках $(g'+gA)/2$, тета-характеристики к-рых $G=\|{}^{g}_{g'}\|$ в сумме с H составляют нечетную тета-характеристику. К. Якоби в своей теории эллиптич. функций использовал именно Т.-ф. с полуцелыми характеристиками, только периоды у него равнялись πi, а не 1.

Пусть k — натуральное число. Целая трансцендентная функция $\theta_\Gamma(z)$ наз. Т.-ф. порядка k с характеристикой Γ, если для нее выполняются тождества

$$\theta_\Gamma(z+e_\mu)=\exp(2\pi i\gamma_\mu)\cdot\theta_\Gamma(z),$$

$$\theta_\Gamma(z+e_\mu A)=\exp[-\pi i(ka_{\mu\mu}+2kz_\mu-2\gamma'_\mu)]\cdot\theta_\Gamma(z).$$

Напр., произведение k Т.-ф. 1-го порядка есть Т.-ф. порядка k.

При помощи этих Т.-ф. 1-го порядка с полуцелыми характеристиками строятся мероморфные абелевы функции с $2p$ периодами. Периоды произвольной абелевой функции от p комплексных переменных удовлетворяют соотношениям Римана — Фробениуса, к-рые обеспечивают сходимость рядов, определяющих Т.-ф. с соответствующей системой модулей. А согласно теореме, сформулированной К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) и доказанной А. Пуанкаре (H. Poincaré), абелева функция может быть представлена в виде отношения целых Т.-ф. с соответствующей системой модулей. Для решения *Якоби проблемы обращения* абелевых интегралов строятся специальные *Римана тета-функции*, аргументом к-рых является система точек $w_1, \ldots, w_p$ на римановой поверхности.

См. также *Тета-ряд*.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948, гл. 9; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 2, гл. 2; [3] Krazer A., Lehrbuch der Theta-funktionen, Lpz., 1903; [4] Conforto F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, B., 1956.

Е. Д. Соломенцев.

ТЕТРАЦИКЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ точки на плоскости — четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4, подчиненные равенствам $\sigma x_i=k_iS_i$, $i=1, 2, 3, 4$, где S_i — *степень точки* относительно данных четырех окружностей, k_i — произвольно заданные постоянные, σ — множитель пропорциональности. Т. к. связаны соотношением 2-й степени, к-рое приводится к виду $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$, если исходные окружности взять ортогональными (из них три обязательно имеют действительные радиусы ρ_i, $i=1, 2, 3$, и одна — мнимый ρ_4), а числа k_i равными $1/\rho_i$, $i=1, 2, 3$, и $k_4=1/i\rho_4$. Если в плоскости ввести декартовы координаты ξ, η, а в качестве трех действительных кругов взять $\xi=0$, $\eta=0$ (круги, проходящие через бесконечно удаленную точку плоскости), круг $\xi^2+\eta^2=1$ и мнимый круг $\xi^2+\eta^2=-1$, то тогда Т. к. точки на плоскости выразятся через декартовы координаты следующим образом:

$$\sigma(x_1)=\xi,\ \sigma x_2=\eta,\ \sigma x_3=\frac{1-(\xi^2+\eta^2)}{2},\ \sigma x_4=\frac{1+(\xi^2+\eta^2)}{2}.$$

Можно ввести Т. к. и для круга на плоскости. При указанном специальном выборе четырех основных кругов круг с центром в точке (ξ_0, η_0) и радиусом R_0 имеет Т. к. y_i, $i=1, 2, 3, 4$, определенные формулами

$$\sigma y_1=\xi_0,\ \sigma y_2=\eta_0,\ \sigma y_3=\frac{1-(\xi_0^2+\eta_0^2-R_0^2)}{2},$$

$$\sigma y_4=\frac{1+(\xi_0^2+\eta_0^2-R_0^2)}{2}.$$

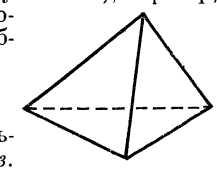
Т. к. точек и кругов на плоскости можно ввести с помощью *стереографической проекции*. При этом Т. к. точки на плоскости — однородные координаты соответствующей при стереографич. проектировании точки на сфере. Т. к. круга на плоскости — однородные координаты точки пространства, являющейся полюсом плоскости круга на сфере, соответствующего в стереографич. проекции кругу на плоскости, относительно этой сферы.

Обобщением Т. к. на случай трехмерного пространства являются *пентасферические координаты*.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1939; [2] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова.

ТЕТРАЭДР — один из пяти типов правильных многогранников. Т. имеет 4 грани (треугольные), 6 ребер, 4 вершины (в каждой вершине сходится 3 ребра). Если a — длина ребра Т., то его объем



$$v=a^3\sqrt{2}/12\approx 0{,}1179a^3.$$

Т. является правильной треугольной пирамидой. *БСЭ-3.*

ТЕТРАЭДРА ПРОСТРАНСТВО — трехмерное пространство, являющееся пространством орбит действия бинарной группы тетраэдра на трехмерной сфере. Эта группа определяется образующими R, S и соотношениями $R^2=S^3=(RS)^3=E$. *М. И. Войцеховский.*

ТЕТРАЭДРАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ точки P в трехмерном пространстве — числа x_1, x_2, x_3, x_4, пропорциональные (с заданным коэффициентом пропорциональности) расстояниям от точки P до граней фиксированного тетраэдра. Аналогично вводятся общие Т. к. для любой размерности. Двумерный аналог Т. к. наз. треугольными координатами. См. также *Барицентрические координаты*.

Д. Д. Соколов.

ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ в области B — функция $f(z)$, аналитическая в нек-рой области B плоскости z, содержащей отрезки вещественной оси, если она вещественна на этих отрезках и $\operatorname{Im} f(z)\cdot\operatorname{Im} z>0$ при $\operatorname{Im} z\neq 0$. Основной класс Т. в. ф.— класс T функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n,$$

регулярных и типично вещественных в круге $|z|<1$ (см. [1]). Из определения класса T следует, что c_n, $n\geqslant 2$, вещественны. Класс T содержит класс S_r функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n$$

с вещественными коэффициентами c_n, регулярных и однолистных в $|z|<1$. Если $f\in T$, то

$$\varphi(z)=\frac{1-z^2}{z}f(z)\in C_r,$$

и, обратно, если $\varphi\in C_r$, то

$$f(z)=\frac{z}{1-z^2}\varphi(z)\in T,$$

где C_r — класс функций

$$\varphi(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n,$$

регулярных в $|z|<1$, $\mathrm{Re}\,\varphi(z)>0$ в $|z|<1$, и таких, что α_n, $n\geqslant 1$, вещественны.

Пусть M_1 — класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на $[-1, 1]$ и таких, что $\alpha(1)-\alpha(-1)=1$. Класс T представим в $|z|<1$ интегралом Стилтьеса (см. [2]):

$$f(z)=\int_{-1}^{1} s(z, t)\,d\alpha(t),$$
$$s(z, t)=z(1-2tz+z^2)^{-1},\ \alpha(t)\in M_1, \qquad (1)$$

в том смысле, что для каждой функции $f\in T$ найдется функция $\alpha\in M_1$ такая, что справедлива формула (1), и, обратно, какую бы $\alpha\in M_1$ ни взять, формула (1) определяет нек-рую функцию $f\in T$; $s(z, t)\in S_r$ при любом фиксированном $t\in[-1, 1]$. Наибольшей областью, в к-рой все функции класса T однолистны, является $\{|z+i|<\sqrt{2}\}\cap\{|z-i|<\sqrt{2}\}$. Исходя из представления (1) на классе T был получен ряд теорем искажения и вращения (см. *Искажения теоремы*, *Вращения теоремы*). Для класса T справедливы точные оценки:

$$-n\leqslant c_n\leqslant n,\ \text{если } n \text{ четно}, \qquad (2)$$

$$k_n=\min_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\leqslant c_n\leqslant n, \qquad (3)$$

$$\text{если } n \text{ нечетно } \left(k_n\sim-\frac{2}{3\pi}\,n\right),$$

знак равенства в (2) слева достигается только для $s(z, -1)$, справа — только для $s(z, 1)$, в (3) слева — только для функций $f(z)=\lambda s(z, t_n)+(1-\lambda)s(z, -t_n)$ при нек-ром $t_n\in[-1, 1]$, справа — только для $f(z)=\lambda s(z, 1)+(1-\lambda)s(z, -1)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

На классе T найдены области значений систем $\{c_2, c_3, \ldots, c_n\}$, $\{f(z)\}$, $\{f(z), c_2, c_3, \ldots, c_n\}$, $n\geqslant 2$ (см. [3], с. 589—90).

Лит.: [1] Rogosinski W., «Math. Z.», 1932, Bd 35, S. 93—121; [2] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1950, т. 27, № 2, с. 201—18; [3] его же, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, с. 523—626.

Е. Г. Голузина.

ТИПОВ ТЕОРИЯ — формальная теория 1-го порядка (см. *Формальная система*), один из вариантов к-рой — простая теория типов — описан ниже. Термин «Т. т.» не имеет жестко зафиксированного значения. Им обозначают формальные теории, отличающиеся следующими особенностями. Во-первых, наличием в формальной системе языкового средства для выражения отношения, передаваемого словами: «кортеж $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ принадлежит y», или «y выполняется на $x_1, \ldots, x_n$»; пусть $y(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает выражение, стоящее в кавычках. Во-вторых, расчленением предметной области на слои, или типы, образующие иерархию типов (не обязательно линейную и не обязательно счетную), и наличием теоретико-типовых аксиом свертывания (или их эквивалентов). Если переменные, пробегающие по объектам типа σ, обозначить через x^σ, y^σ, z^σ, ..., то теоретико-типовые аксиомы свертывания имеют вид

$$\exists y^\rho\,\forall x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}\,(y^\rho(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})\leftrightarrow\varphi(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})), \qquad (*)$$

где $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ — формула рассматриваемой системы со свободными переменными $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, а тип ρ переменной y^ρ должен находиться (и в этом суть теоретико-типовых систем) на более высоком уровне иерархии типов, чем типы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Обычно тип ρ определен однозначно по типам $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Он обозначается через $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Таким образом, в теоретико-типовых системах свойство y и объекты, к-рые этим свойством обладают: $x_1, \ldots, x_n$, принадлежат разным слоям. Часто добавляют аксиому объемности, отождествляющую равнообъемные свойства. В последнем случае теоретико-типовую систему следует рассматривать как теоретико-множественную систему, поскольку соблюдается принцип: «множества полностью определены своими элементами».

Теоретико-типовые системы были введены Б. Расселом (B. Russell) в связи с открытием противоречий в теории множеств. Разнесение множества и его элементов по разным слоям соответствует тому взгляду на *антиномии*, согласно к-рому противоречия объясняются непредикативным характером определения. При этом определение какого-нибудь объекта наз. непредикативным, если этот объект участвует в своем определении, или, что то же, если осмысленность определения предполагает уже существование этого объекта. Так, в аксиоме свертывания (*), рассматриваемой как определение объекта y, непредикативность полностью не устранена, так как в формуле $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ могут встречаться кванторы по переменным, пробегающим ту область, к-рой принадлежит объект y. Поэтому рассматривают также предикативные теоретико-типовые системы, в к-рых производится дальнейшее расчленение предметных областей. В таких системах y в аксиоме (*) должен принадлежать области, отличной от областей пробегания связанных переменных в формуле $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$.

Рассматривают теоретико-типовые системы, в к-рых типы упорядочены как нек-рый начальный отрезок ординальных чисел или как множество целых (отрицательных и положительных) чисел, а также системы, в к-рых формулы сами являются объектами определенного типа, и системы, допускающие выражения бесконечной длины (или средства, заменяющие такие выражения, напр. кванторы по типовым индексам). Логики второго и высших порядков можно рассматривать как теоретико-типовые системы.

Простая теория типов (п. т. т.). Язык п. т. т. содержит: для каждого натурального числа $n\geqslant 0$ переменные n-го типа $x_0^n, x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots$; двуместный предикатный символ $\in$; логические связки и кванторы $\supset$, $\vee$, $\&$, $\neg$, $\forall$, $\exists$; скобки (,).

Формулы п. т. т. строятся согласно обычному индуктивному определению формул: выражения вида $(x_i^n\in x_j^{n+1})$ суть формулы; если φ и ψ — формула, а v — переменная, то $(\varphi\supset\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\&\psi)$, $\neg\varphi$, $\forall v\varphi$, $\exists v\varphi$ — формулы. Запись $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ используется как сокращение для $((\varphi\supset\psi)\&(\psi\supset\varphi))$.

Нелогические аксиомы п. т. т.

А1. Аксиомы свертывания:

$$\exists y\forall x\,(x\in y\leftrightarrow\varphi),$$

где x, y — переменные типов n и $n+1$ соответственно, а φ — произвольная формула языка п. т. т., не содержащая свободно y.

А2. Аксиомы объемности:

$$\forall t\,(t\in x\leftrightarrow t\in y)\subset\forall z\,(x\in z\supset y\in z),$$

где t, x, y, z — переменные типов n, $n+1$, $n+1$, $n+2$ соответственно.

А3. Аксиома бесконечности:

$$\exists x\,(\exists w\,(w\in x)\ \&\ \forall u\in x\exists v\in x$$
$$(u\subseteq v\ \&\ \exists t\,(t\in v\ \&\ \neg\,t\in u))),$$

где x — переменная типа 2. Типы остальных переменных однозначно восстанавливаются. Здесь записи $\forall u\in x\varphi$, $\exists v\in x\varphi$ обозначают формулы $\forall u\,(u\in x\supset\varphi)$ и $\exists v\,(v\in x\&\varphi)$ соответственно, а выражение $u\subseteq v$ является сокращением для $\forall z\,(z\in u\supset z\in v)$.

Логические аксиомы и правила вывода — это аксиомы и правила вывода классич. исчисления предикатов, сформулированные для рассматриваемого языка. Указанные аксиомы и правила вывода определяют класс выводимых формул или теорем п. т. т. Этот класс можно определить семантически.

Математич. структура $M=(V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots; \in_M)$, где $\in_M \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(M_n \times M_{n+1})$ наз. моделью п. т. т., если в ней выполняются все нелогич. аксиомы п. т. т. Из теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов вытекает, что класс теорем п. т. т. совпадает с классом формул, истинных во всех моделях п. т. т. Простая теория типов — достаточно сильная теория. В нее можно погрузить арифметику и анализ (т. е. арифметику 2-го порядка), рассматривать начальные ординальные числа $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, где n — любое наперед заданное натуральное число. Она имеет простую интуитивную теоретико-множественную модель. В качестве V_0 можно взять любое бесконечное множество, а каждый следующий слой V_{n+1} состоит из всех подмножеств предыдущего слоя. Отношение $\in_M$ естественное. Наличие теоретико-множественной модели можно использовать для формального доказательства *непротиворечивости* п. т. т. в рамках достаточно мощной аксиоматич. теории. Такое доказательство непротиворечивости можно провести, напр., в рамках системы Цермело, получающейся из системы Цермело — Френкеля ZF опусканием схемы аксиом подстановки, но сохранением схемы аксиом выделения.

Лит.: [1] Whitehead A., Russel B., Principia mathematica, Camb., 1910 (2 ed., 1925); [2] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Справочная книга по математической логике, ч. 4, гл. 4, 6, М., 1983; [4] Такеути Г., Теория доказательств, пер. с англ., М., 1978. *В. Н. Гришин.*

ТИТСА РАССЛОЕНИЕ — голоморфное расслоение компактного связного однородного комплексного пространства X над однородным проективным рациональным многообразием D, универсальное в классе всех таких расслоений. Универсальность в данном случае означает, что проекция $\pi'\colon X \to D'$ любого расслоения из этого класса представляется в виде $\pi' = \varphi \circ \pi$, где $\pi\colon X \to D$ — проекция Т. р., а $\varphi\colon D \to D'$ нек-рое голоморфное расслаивающее отображение.

Явное построение Т. р. проводится следующим образом. Пусть G — связная комплексная группа Ли, голоморфно и транзитивно действующая на X, а U — стационарная подгруппа нек-рой точки из X. Нормализатор P связной компоненты единицы группы U является параболич. подгруппой в G, т. е. содержит максимальную связную разрешимую подгруппу (см. [1], [2]). База D Т. р. определяется как факторпространство $D=G/P$, а проекция $\pi\colon X \to D$ задается вложением подгруппы $U \subset P$. Указанная конструкция принадлежит Ж. Титсу (см. [1]), там же доказана универсальность данного расслоения.

Слой Т. р. комплексно параллелизуем. Если пространство X односвязно, то этот слой является комплексным тором. Если X допускает транзитивную группу G, совпадающую со своим коммутантом, то Т. р. совпадает с расслоением мероморфной редукции (см. [3]). Это означает, что все мероморфные функции на X постоянны на слоях Т. р. В случае когда комплексное компактное однородное пространство X является кэлеровым, слоем Т. р. будет комплексный тор (а именно, *Альбанезе многообразие* пространства X), а само расслоение аналитически тривиально [2]. Таким образом, компактное кэлерово однородное пространство есть произведение проективного рационального однородного многообразия на комплексный тор.

Лит.: [1] Tits J., «Comment. math. helv.», 1962, v. 37, p. 111—20; [2] Borel A., Remmert R., «Math. Ann.», 1962, Bd 145, S. 429—39; [3] Грауэрт Г., Реммерт Р., в сб.: Комплексные пространства, пер. с нем., М., 1965, с. 190—204. *Д. Н. Ахиезер.*

ТИТСА СИСТЕМА — совокупность (G, B, N, S), где G — группа, B и N — ее подгруппы, S — подмножество в $N/(B \cap N)$, причем выполнены следующие условия: (1) множество $B \cup N$ порождает группу G; (2) $T = B \cap N$ — нормальная подгруппа группы N; (3) множество S порождает группу $W = N/T$ и состоит из элементов порядка 2; (4) $sBw \subset BwB \cup BswB$ для любых $s \in S$, $w \in W$; (5) $sBs \not\subset B$ при $s \in S$. Группа W, называемая группой Вейля системы Титса (G, B, N, S), является *Кокстера группой* относительно системы образующих S. Соответствие $w \mapsto BwB$ является биекцией множества W на множество двойных смежных классов группы G по B.

Примеры. 1) $G = GL_n(k)$, где k — любое поле, B — подгруппа верхних треугольных матриц, N — подгруппа мономиальных матриц (так что T — подгруппа диагональных матриц и $W = S_n$), S — множество транспозиций $(i\ i+1)$, где $i = 1, 2, \ldots n-1$.

2) Более общо, пусть G — связная редуктивная алгебраич. группа над k, T — максимальный среди ее торов, диагонализируемых над k, N — его нормализатор, Z — его централизатор, R — система корней группы G относительно T, $W = N/Z$ — ее группа Вейля и S — множество отражений, соответствующих простым корням. Далее, пусть U — унипотентная подгруппа группы G, порожденная корневыми подгруппами, отвечающими положительным корням, и $P = UZ$. Тогда четверка $(G(k), P(k), N(k), S)$ является Т. с.

3) Пусть $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$, где $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, B — подгруппа, состоящая из матриц $\|a_{ij}\| \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ (где $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел), у к-рых $a_{ij} \in p\mathbb{Z}_p$ при $i > j$, и N — подгруппа мономиальных матриц. Тогда существует такое подмножество $S \subset W = N/(B \cap N)$, что четверка (G, B, N, S) является Т. с. Группа W при этом является бесконечной группой Кокстера типа $\tilde{A}_{n-1}$. Аналогично определяются Т. с. с группами Вейля аффинного типа, соответствующие другим связным редуктивным группам над локальными полями.

При нек-рых условиях можно утверждать, что группа G, обладающая Т. с., проста. Напр., для этого достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: (1) группа B разрешима и не содержится ни в какой собственной нормальной подгруппе группы G; (2) группа G совпадает со своим коммутантом; (3) группа Кокстера W неразложима; (4) группа B не содержит никакой нетривиальной нормальной подгруппы группы G. Таким путем доказывается простота *Шевалле групп* (в частности, конечных).

Лит.: [1] Tits J., Buildings of spherical type and finite BN-pairs, B.— N. Y., 1974; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, гл. IV, пер. с франц., М., 1972. *Э. Б. Винберг.*

ТИТЧМАРША ПРОБЛЕМА — проблема отыскания асимптотики выражения

$$Q(n) = \sum_{p \leqslant n} \tau(p - l), \qquad (1)$$

где $\tau(m)$ — число делителей m, l — заданное число, отличное от нуля, p пробегает все простые числа. Аналогом этой проблемы является проблема нахождения асимптотики выражения

$$S(n) = \sum_{p \leqslant n-1} \tau(n - p). \qquad (2)$$

Т. п. была поставлена Э. Титчмаршем (E. Titchmarsh, 1930) и решена им (см. [1]) условно в предположении справедливости расширенной *Римана гипотезы*.

Дисперсионный метод, разработанный Ю. В. Линником, позволяет найти асимптотику для (1) и (2):

$$Q(n) = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4} \prod_{p \mid l} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1}\, n + O\left(n (\ln n)^{-1+\varepsilon}\right);$$

формула для $S(n)$ аналогична.

Теорема Виноградова — Бомбьери о распределении простых чисел в арифметич. прогрессиях в среднем также приводит к решению Т. п. При этом предположение о справедливости расширенной гипотезы Римана заменяется фактически теоремами типа *большого решета*.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, [Л.], 1961; [2] Бредихин Б. М., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2, с. 89—130; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967. *Б. М. Бредихин.*

ТИХОНОВА ТЕОРЕМА о бикомпактности произведения: топологич. произведение любого множества *бикомпактных пространств* бикомпактно. Это одна из основных теорем общей топологии; установлена А. Н. Тихоновым в 1929. Она играет весьма существенную и часто ключевую роль в построении практически всех разделов общей топологии и во многих ее применениях. В частности, Т. т. имеет основное значение для построения *бикомпактных расширений* вполне регулярных T_1-пространств (т. е. тихоновских пространств). С ее помощью строится расширение Стоуна — Чеха произвольного тихоновского пространства. Т. т. позволяет указать стандартные бикомпактные пространства — обобщенные канторовы дисконтинуумы D^τ, являющиеся произведениями дискретных двоеточий в количестве τ и тихоновские кубы I^τ — произведения τ экземпляров обычного отрезка I числовой прямой. В качестве τ здесь может фигурировать любой кардинал. Значение обобщенных канторовых дисконтинуумов D^τ и тихоновских кубов I^τ связано прежде всего с тем, что они являются универсальными объектами: каждый нульмерный бикомпакт гомеоморфен замкнутому подпространству нек-рого D^τ и каждый бикомпакт гомеоморфен замкнутому подпространству нек-рого I^τ.

Т. т. применяется при доказательстве непустоты предела обратного спектра из бикомпактных пространств, при построении теории абсолютов, в теории бикомпактных групп. Если же иметь в виду опосредованные ее применения, то почти вся общая топология попадает в сферу действия этой Т. т. Так же трудно перечислить прямые и опосредованные применения Т. т. в других областях математики. Практически они встречаются всюду, где важную роль играет понятие компактности,— в частности в функциональном анализе (банаховы пространства в слабой топологии, меры на топологич. пространствах), в общей теории оптимального управления и т. д.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *А. В. Архангельский.*

ТИХОНОВСКИЙ КУБ — топологич. произведение τ экземпляров обычного отрезка I действительной прямой, где τ — произвольный кардинал; обозначается I^τ. Т. к. введен А. Н. Тихоновым в 1929. Если $\tau=n$ — натуральное число, то Т. к. I^τ есть единичный куб в n-мерном евклидовом пространстве, топология к-рого порождена метрикой скалярного произведения. Если $\tau=\aleph_0$ — мощность натурального ряда, то куб I^τ гомеоморфен *гильбертову кирпичу*. При $\tau_1\neq\tau_2$. Т. к. I^{τ_1} и I^{τ_2} не гомеоморфны между собой: если τ — бесконечный кардинал, то τ есть вес пространства I^τ, а если $\tau=n$ — натуральное число, то n — размерность пространства I^n. Два свойства Т. к. I^τ особенно важны: бикомпактность каждого из них, независимо от τ, и их универсальность по отношению ко вполне регулярным T_1-пространствам веса не большего, чем τ: каждое такое пространство гомеоморфно нек-рому подпространству пространства I^τ. Бикомпактные хаусдорфовы пространства, вес к-рых не превосходит τ, гомеоморфны замкнутым подпространствам тихоновского куба I^τ. Таким образом, всего двух операций — операции топологич. произведения и операции перехода к замкнутому подпространству — достаточно для того, чтобы получить из одного стандартного и весьма простого топологич. пространства — отрезка — любой бикомпакт. Примечательным следствием бикомпактности Т. к. является бикомпактность единичного шара в сопряженном к банахову пространству, наделенном слабой топологией сопряженного. Универсальность Т. к. и простота определения делает их важными стандартными объектами общей топологии. Однако топологич. строение Т. к. далеко не тривиально. В частности, куб $I^\mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — мощность континуума, сепарабелен, хотя состоит из $2^\mathfrak{c}$ точек; вес его равен $\mathfrak{c}$. Неожиданный факт: число Суслина каждого Т. к. I^τ счетно, независимо от τ, т. е. каждое семейство попарно непересекающихся открытых множеств в I^τ счетно. Хотя в Т. к. есть много сходящихся последовательностей, этих последних не хватает для того, чтобы описать прямо оператор замыкания в Т. к. *А. В. Архангельский.*

ТИХОНОВСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ семейства топологических пространств — то же что *топологическое произведение* семейства топологич. пространств. Понятие Т. п. введено А. Н. Тихоновым (1929).

ТИХОНОВСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром каждое конечное множество замкнуто и для всякого замкнутого множества P и любой не принадлежащей P точки x найдется непрерывная вещественная функция f на всем пространстве, к-рая принимает значение 0 в точке x и значение 1 во всех точках множества P. Класс Т. п. совпадает с классом вполне регулярных T_1-пространств. В Т. п. любые две различные точки отделимы непересекающимися окрестностями — т. е. выполняется аксиома отделимости Хаусдорфа, но не всякое Т. п. нормально. А. Н. Тихонов (1929) охарактеризовал Т. п., как подпространства бикомпактных хаусдорфовых пространств.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *А. В. Архангельский.*

ТКАНЕЙ ГЕОМЕТРИЯ — раздел дифференциальной геометрии, в к-ром изучаются нек-рые семейства линий и поверхностей — т. н. ткани (плоские, пространственные, многомерные).

Плоской p-тканью наз. область плоскости, в к-рой заданы p (обычно $p\geqslant 3$) семейств достаточно гладких линий со свойствами: 1) через каждую точку области проходит точно по одной линии каждого семейства; 2) линии разных семейств имеют не более одной общей точки. Пример: три семейства прямых, параллельных сторонам равностороннего треугольника, образуют 3-ткань (регулярную, или правильную ткань).

Основным предметом изучения в Т. г. являются свойства, инвариантные при дифференциально топологич. преобразованиях. Ткани наз. эквивалентными, если они (локально или глобально) диффеоморфны. При $p=2$ ткань диффеоморфна ткани, образованной двумя семействами параллельных прямых (такие ткани наз. *сетями*). При $p=3$ ткань уже в общем случае недиффеоморфна ни трем семействам параллельных прямых (т. е. не является шестиугольной тканью), ни трем семействам прямых вообще (т. е. не является спрямляемой тканью). Условие шестиугольности ткани в геометрич. форме состоит в выполнении *замыкания условия*. Условие спрямляемости ткани не может быть записано в обозримом виде; его исследованием занимаются в связи с проблемами номографии.

Пространственные криволинейные ткани образуются p семействами кривых в

пространстве при условии, что через каждую точку области проходит одна кривая каждого семейства. Уже при $p=2$ такие ткани не все диффеоморфны. Выделяются ткани четырехугольные, линии которых образуют сети на поверхностях однопараметрического семейства.

Пространственные поверхностные ткани образуются p семействами поверхностей при условии, что через каждую точку проходит по одной поверхности каждого семейства, а три поверхности разных семейств имеют не более одной общей точки. Для таких тканей и их многомерных аналогов также вводится понятие спрямляемости, т. е. диффеоморфности ткани, образованной семействами плоскостей (гиперплоскостей). 4-ткань наз. октаэдрической тканью, если она диффеоморфна ткани, образованной четырьмя семействами плоскостей, параллельных граням правильного октаэдра. 4-ткань наз. шестиугольной, если 3-ткани, высекаемые поверхностями любых трех семейств на поверхностях четвертого,— шестиугольные.

Многомерные ткани образованы p семействами подмногообразий многомерного пространства. Напр., три семейства r-мерных подмногообразий $2r$-мерного пространства образуют 3-ткань, если через каждую точку проходит по одному подмногообразию каждого семейства, а многообразия двух разных семейств имеют не более одной общей точки.

Т. г. рассматривает также проективно-дифференциальные, аффинно-дифференциальные и др. свойства тканей в связи с геометрией несущего ткань многообразия. Рассматриваются ткани, образованные *геодезическими линиями*, линиями, связанными с *Дарбу тензором*, и т. д.

Определение линии третьего семейства линиями двух других (в случае плоской 3-ткани) может рассматриваться как алгебраич. операция квазигруппового типа. В связи с этим возникло понятие абстрактной ткани, или алгебраич. сети (см. *Квазигруппа*).

Лит.: [1] Бляшке В., Введение в геометрию тканей, пер. с нем., М., 1959; [2] Рыжков В. В., Белоусов В. Д., в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, 1971, М., 1972, с. 159—88; [3] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963. *В. В. Рыжков.*

ТОДДА КЛАСС — *характеристический класс* комплексного расслоения ξ, равный

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j),$$

где $\{T_j\}$ — мультипликативная последовательность, отвечающая степенному ряду $\frac{t}{1-e^{-t}}$, c_i — *Чжэня классы*.

Введен Дж. Тоддом [1].

Лит.: [1] Todd J., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1937, v. 43, p. 190—225; [2] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973.
М. И. Войцеховский.

ТОЖДЕСТВА ПРОБЛЕМА — *алгоритмическая проблема* распознавания равенства (тождества) слов в алгебраич. системе (*группе*, *подгруппе* и др.) с заданной образующей и определяющими соотношениями.

ТОЖДЕСТВЕННАЯ ИСТИННОСТЬ, логическая истинность, общезначимость,— свойство формул языка исчисления предикатов, означающее истинность формулы во всех ее интерпретациях и при всех допустимых значениях ее свободных переменных. Так, для формул, содержащих только один двуместный предикатный символ ρ и переменные одного сорта (т. е. такие переменные, к-рые при интерпретации должны иметь одну и ту же область пробегания), интерпретациями служат пары (M, R), где M — произвольное непустое множество, а $R \subseteq M \times M$ — произвольное двуместное отношение на M. Допустимыми значениями свободных переменных являются произвольные элементы из M. Истинность формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ при значениях $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 0$) переменных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно определяется индуктивным образом по построению формулы в соответствии с подразумеваемым логич. смыслом входящих в формулу логич. связок и кванторов и при условии, что связанные переменные пробегают множество M, а предикатный символ ρ обозначает отношение R.

Пусть даны формула φ и набор $\bar{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ переменных, содержащий все свободные переменные формулы φ, и пусть $|\varphi; \bar{x}|$ обозначает множество всех наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов из M, для к-рых формула φ истинна в (M, R). Множества вида $|\varphi; \bar{x}|$ можно индуктивно определить следующим образом (при этом считаем, что логич. символами формул φ являются $\wedge$, $\neg$, $\exists$):

$$|\varphi; \bar{x}| = \{(a_1, \ldots, a_n) : (a_i, a_j) \in R\},$$

если φ имеет вид $\rho(x_i, x_j)$;

$$|\varphi_1 \wedge \varphi_2; \bar{x}| = |\varphi_1; \bar{x}| \cap |\varphi_2; \bar{x}|;$$
$$|\neg\varphi; \bar{x}| = M^n - |\varphi; \bar{x}|;$$
$$|\exists y \varphi; \bar{x}| = \mathrm{пр}_{n+1} |\varphi; \bar{x}y|,$$

где $\cap$, $-$, $\mathrm{пр}_{n+1}$ обозначают соответственно пересечение, разность и проекцию вдоль $(n+1)$-й координаты (т. е. образ относительно отображения $(a_1 \ldots a_n a_{n+1}) \mapsto (a_1 \ldots a_n)$) множеств.

Тождественная истинность формулы φ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ означает тогда, что для любой интерпретации (M, R) всякий кортеж $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов из M принадлежит множеству $|\varphi; x_1 \ldots x_n|$. При $n=0$ множество $|\varphi; \bar{x}|$ либо пусто, либо одноэлементно. Формула

$$\exists y \forall x \rho(x, y) \supset \forall x \exists y \rho(x, y)$$

является тождественно истинной. Обратная же импликация не является тождественно истинной формулой.

В случае когда интерпретация фиксирована, тождественно истинными наз. иногда формулы, истинные в данной интерпретации при любых значениях ее свободных переменных.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975. *В. Н. Гришин.*

ТОЛЕРАНТНОСТЬ — бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ на множестве A, обладающее свойствами рефлексивности и симметричности, т. е. удовлетворяющее условиям aRa для всех $a \in A$ и aRb влечет за собой bRa для любых $a, b \in A$. Т. R на универсальной алгебре $A=\{A, \Omega\}$ наз. совместимой, если она является подалгеброй прямого квадрата $A \times A$, т. е. если для любой n-арной операции ω условие $a_i R b_i$, $i=1, \ldots, n$, влечет за собой $(a_1, \ldots, a_n\omega) R (b_1, \ldots, b_n\omega)$. Таким образом, Т. является естественным обобщением понятия *эквивалентности*, а совместимая Т.— обобщением *конгруэнции*. Любая совместимая Т. решетки с относительными дополнениями является конгруэнцией [1]. Упорядоченное включением множество $\mathrm{LT}(A)$ всех совместимых Т. на универсальной алгебре A является алгебраич. решеткой, содержащей решетку $\mathrm{Con}(A)$ всех конгруэнций в качестве подмножества (но не обязательно в качестве подрешетки). О свойствах решеток $\mathrm{LT}(A)$ и $\mathrm{Con}(A)$ см. [2], [3].

Лит.: [1] Chajda I., Niederle J., Zelinka B., «Czechosl. Math. J.», 1976, v. 26, № 2, p. 304—11; [2] Schmidt E. T., Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen, B., 1969; [3] Гретцер Г., Общая теория решеток, пер. с англ., М., 1982. *Т. С. Фофанова.*

ТОЛЕРАНТНЫЙ ИНТЕРВАЛ — случайный интервал, построенный по независимым одинаково распределенным случайным величинам, функция распределения

к-рых $F(x)$ неизвестна, и содержащий с заданной вероятностью γ по крайней мере долю p ($0<p<1$) вероятностной меры dF.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения к-рого $F(x)$ неизвестна, и пусть $T_1=T_1(X_1, \ldots, X_n)$ и $T_2=T_2(X_1, \ldots, X_n)$ — такие статистики, что для заранее фиксированного числа p ($0<p<1$) событие $\{F(T_2)-F(T_1)>p\}$ имеет заданную вероятность γ, т. е.

$$\mathsf{P}\left\{\int_{T_1}^{T_2} dF(x)\geqslant p\right\}=\gamma. \qquad (1)$$

В таком случае, случайный интервал (T_1, T_2) наз. γ-т о л е р а н т н ы м и н т е р в а л о м для функции распределения $F(x)$, его границы T_1 и T_2 — т о л е р а н т н ы м и п р е д е л а м и, а вероятность γ — к о э ф ф и ц и е н т о м д о в е р и я. Из (1) следует, что односторонние толерантные пределы T_1 и T_2 представляют собой не что иное, как обычные односторонние доверительные пределы с коэффициентом доверия γ для квантилей $x_{1-p}=F^{-1}(1-p)$ и $x_p=F^{-1}(p)$ соответственно, т. е.

$$\mathsf{P}\{x_{1-p}\in[T_1, +\infty)\}=\gamma,$$
$$\mathsf{P}\{x_p\in(-\infty, T_2]\}=\gamma.$$

П р и м е р. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному $N(a, \sigma^2)$ закону, параметры к-рого a и σ^2 неизвестны. В этом случае в качестве толерантных пределов T_1 и T_2 естественно выбрать функции, зависящие от достаточной статистики $(\overline{X}, S^2)$, где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n),\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

Именно, полагают $T_1=\overline{X}-kS$ и $T_2=\overline{X}+kS$, где константа k, называемая толерантным множителем, определяется как решение уравнения

$$\mathsf{P}\left\{\Phi\left(\frac{\overline{X}+kS-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\overline{X}-kS-a}{\sigma}\right)\geqslant p\right\}=\gamma,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, при этом $k=k(n, \gamma, p)$ не зависит от неизвестных параметров a и σ^2. Построенный таким образом Т. и. обладает следующим свойством: с доверительной вероятностью γ в интервале $(\overline{X}-kS, \overline{X}+kS)$ содержится не менее чем доля p вероятностной массы нормального распределения, к-рому подчиняются наблюдения $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

В предположении существования плотности вероятности $f(x)=F'(x)$, вероятность события $\{F(T_2)-F(T_1)\geqslant p\}$ не зависит от $F(x)$ тогда и только тогда, когда толерантные пределы T_1 и T_2 суть порядковые статистики. Именно этот факт положен в основу общего метода построения непараметрических или, как их еще называют, свободных от распределения Т. и. Пусть $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ — вектор порядковых статистик, построенный по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и пусть

$$T_1=X_{(nr)},\ T_2=X_{(ns)},\ 1\leqslant r<s\leqslant n.$$

В силу того, что случайная величина $F(X_{(ns)})-F(X_{(nr)})$ подчиняется бета-распределению с параметрами $s-r$ и $n-s+r+1$, вероятность события $\{F(X_{(ns)})-F(X_{(nr)})\geqslant p\}$ выражается интегралом $I_{1-p}(n-s+r+1, s-r)$, где $I_x(a, b)$ — неполная бета-функция и, следовательно, в этом случае вместо (1) имеет место соотношение

$$I_{1-p}(n-s+r+1, s-r)=\gamma, \qquad (2)$$

к-рое и позволяет по заданным γ, p и n определять номера r и s порядковых статистик $X_{(nr)}$ и $X_{(ns)}$, являющихся толерантными пределами искомого Т. и. Кроме того, соотношение (2) позволяет по заданным γ, p, r и s определять необходимый объем n выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ при к-ром (2) справедливо. При решении подобных задач пользуются статистич. таблицами.

Лит.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Д э й в и д Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [4] M u r p h y R. B., «Ann. Math. Statistics», 1948, v. 19, p. 581—89; [5] S o m e r v i l l e P. N., там же, 1958, v. 29, p. 599—601; [6] S c h e f f é H., T u k e y J. W., там же, 1945, v. 16, p. 187—192; [7] F r a s e r D. A. S., Non parametric methods in statistics, N. Y.— L., 1957; [8] W a l d A., W o l f o w i t z J., «Ann. Math. Statistics», 1946, v. 17, p. 208—15; [9] R o b b i n s H., там же, 1944, v. 15, p. 214—16. *М. С. Никулин.*

ТОМА ИЗОМОРФИЗМ — изоморфизм между (обобщенными) (ко)гомологиями базы векторного (сферического) расслоения ξ и (ко)гомологиями его *Тома пространства* $T(\xi)$.

Пусть n-мерное векторное расслоение ξ над конечным клеточным пространством X ориентируемо в некоторой мультипликативной *обобщенной теории когомологий* E^*, т. е. существует *Тома класс* $u\in\tilde{E}^*(T\xi)$. Объект $\tilde{E}^*(T\xi)$ является $E^*(X)$-модулем, а гомоморфизм $\varphi: E^i(X)\to\tilde{E}^{i+n}(T\xi)$ умножения на класс Тома является изоморфизмом, к-рый и наз. и з о м о р ф и з м о м Т о м а (или и з о м о р ф и з м о м Т о м а — Д о л ь д а).

Двойственным образом определяется изоморфизм $E_i(X)\to\tilde{E}_{i+n}(T\xi)$.

В случае когда E^* есть классич. теория когомологий H^*, эти изоморфизмы указаны в [1], а для произвольной теории E^* они установлены в [2]. Кроме того, если ξ не является ориентируемым в целочисленной теории когомологий H^*, то имеет место изоморфизм $H^k(X)\cong\cong H^{k+n}(T\xi; \{\mathbb{Z}\})$, где справа стоит группа когомологий с коэффициентами в локальной системе групп $\{\mathbb{Z}\}$. Более общо, если ξ неориентируемо в теории когомологий E^*, то имеется изоморфизм, обобщающий как вышеописанный Т. и., так и изоморфизм Тома — Дольда для E^*-ориентированных расслоений [3].

Лит.: [1] Т о м Р., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 293—351; [2] Д о л ь д А., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 8—14; [3] Р у д я к Ю. Б., «Докл. АН СССР», 1980, т. 255, № 6, с. 1323—25. *Ю. Б. Рудяк.*

ТОМА КАТАСТРОФЫ — *особенности дифференцируемых отображений*, классификация к-рых была анонсирована Р. Томом [1] при рассмотрении им градиентных динамич. систем и аналогичная списку *критических точек* коразмерности $\leqslant 4$ дифференцируемых функций. Исходная формулировка результата Тома: 4-параметрические семейства функций в типичном случае устойчивы и с точностью до знака и замены переменных задаются в окрестности критич. точки одним из семи выражений (см. табл.).

Обозначение	Коразмерность	Коранг	Росток	Универсальная деформация	Название
A_2	1	1	x^3+y^2	ux	Складка
A_3	2	1	x^4+y^2	$ux+vx^2$	Сборка
A_4	3	1	x^5+y^2	$ux+vx^2+ux^3$	Ласточкин хвост
D_4^-	3	2	x^3+xy^2	$ux+vx^2+wy$	Гиперболич. омбилика
D_4^+	3	2	x^3-xy^2	$ux+vx^2+wy$	Эллиптич. омбилика
A_5	4	2	x^6+y^2	$ux+vx^2+wx^3+tx^4$	Бабочка
D_5	4	2	x^4+xy^2	$ux+vx^2+wx^3+ty$	Параболич. омбилика

Ростки, отвечающие Т. к., являются конечно определенными (точнее, 6-определенными: в подходящих координатах они записываются как многочлены от двух переменных степени $\leqslant 6$).

Коразмерность codim служит мерой сложности критич. точек; любое достаточно малое возмущение функции f с codim-r приводит к функции, имеющей не более r критич. точки. К о р а з м е р н о с т ь ю о с о б е н н о с т и (т. е. ростка f, для к-рого $f(0)=Df(0)=0$) наз. число $\dim \mathfrak{m}/\langle \partial f\rangle$, где $\mathfrak{m}=\{f : f(0)=0\}$, $\langle \partial f\rangle$ — идеал, порожденный ростками $\partial f/\partial x^i$. Напр., если $f=x^N$, то $\langle \partial f\rangle=\langle x^{N-1}\rangle$, и базисом $\mathfrak{m}/\langle \partial f\rangle$ служат смежные классы элементов $x, x^2, \ldots, x^{N-2}$, так что codim=2. Имеет место неравенство $\operatorname{codim} f \geqslant \frac{c(c+1)}{2}$, где c — коранг гессиана $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j(0)$; отсюда, в частности, если $r\leqslant 4$, то $c\leqslant 2$.

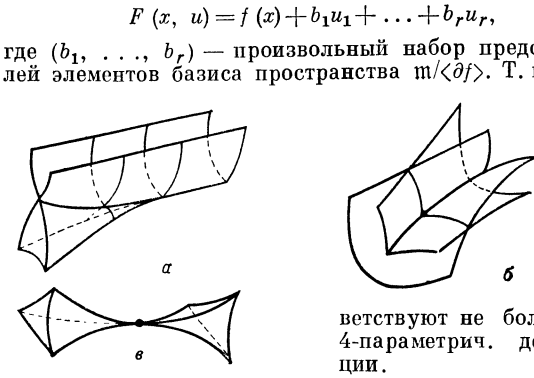
Конечная определенность (достаточность) ростка, грубо говоря, означает, что он определяется с точностью до гладких замен координат своей *струей*. Точнее, росток f наз. k-о п р е д е л е н н ы м, если каждый ряда Тейлора до членов порядка $\leqslant k$), что и f, правоэквивалентен f (см. [2]). Для конечной определенности ростка необходима и достаточна конечность его коразмерности. В частности, если codim=r, то f является $(r+2)$-определенным (отсюда 6-определенности при $r\leqslant 4$).

Т. к., в отличие от случая *общего положения*, являются вырожденными особенностями (т. е. гессиан в них вырожден), и от них можно, как указывалось, избавиться малым возмущением. Однако для многих практически важных случаев, равно как и в теоретич. плане, представляет интерес не индивидуальный объект, а семейство таковых, зависящее от нескольких «управляющих» параметров. Вырожденные особенности, устранимые при каждом фиксированном значении параметров, могут оказаться неустранимыми для всего семейства (устойчивость Т. к. можно рассматривать и в таком смысле). Но тогда естественным объектом изучения является не сама особенность, а семейство (деформация особенности), в к-ром она становится неустранимой (или распадается, «бифурцирует») при изменении параметров. Оказывается, во многих случаях изучение всевозможных деформаций можно свести к изучению одной единственной, в нек-ром смысле самой большой, все остальные получаются из нее. Такие д е ф о р м а ц и и наз. в е р с а л ь н ы м и, а они, в свою очередь, получаются из универсальной (миниверсальной) деформации, к-рая характеризуется наименьшим возможным значением размерности пространства параметров. Важнейшим результатом здесь представляется т е о р е м а М а з е р а: особенность f обладает универсальной деформацией F тогда и только тогда, когда коразмерность f конечна.

Деформация $F(x, u)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^r$, ростка $f(x)$, $F(x, 0)=f(x)$ определяется формулой

$$F(x, u)=f(x)+b_1u_1+\ldots+b_ru_r,$$

где $(b_1, \ldots, b_r)$ — произвольный набор представителей элементов базиса пространства $\mathfrak{m}/\langle \partial f\rangle$. Т. к. соответствуют не более чем 4-параметрич. деформации.



В приложениях важно т. н. б и ф у р к а ц и о н н о е м н о ж е с т в о $D_f=\Delta_f\cap\Sigma_f$, где $\Delta f=\{(x, u)\in\Sigma_f\}$, d^2f вырождено (о с о б о е м н о ж е с т в о), а $\Sigma_f=\{(x, u)\in\mathbb{R}^n\times U|_{d_xf=0}\}$ (м н о ж е с т в о к а т а с т р о ф), т. к. оно лежит в пространстве управления и, следовательно, «наблюдаемо», и все «скачки», «катастрофы» происходят и на нем. На рис. 1*а*, *б*, *в* изображены случаи, соответствующие codim-3.

Лит.: [1] T h o m R., «Topology», 1969, v. 8, p. 313—35; [2] Б р ё к е р Т., Л а н д е р Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [3] П о с т о н Т., С т ю а р т И., Теория катастроф и ее приложения, пер. с англ., М., 1980.

М. И. Войцеховский.

ТОМА КЛАСС — элемент в группе (обобщенных) когомологий *Тома пространства*, порождающий ее как модуль над кольцом когомологий базы. Для мультипликативной *обобщенной теории когомологий* E^* пусть $\gamma_n\in\tilde{E}^n(S^n)$ — элемент, являющийся образом единицы $1\in E^0(S^0)$ при n-кратном изоморфизме *надстройки* $\tilde{E}^0(S^0)\cong\tilde{E}^n(S^n)$. Пусть ξ — векторное n-мерное расслоение над линейно связным конечным клеточным пространством X, и пусть $j : S^n\to T(\xi)$ — соответствующее включение в пространство Тома. Элемент $u\in\tilde{E}^n(T\xi)$ наз. к л а с с о м Т о м а (или о р и е н т а ц и е й) расслоения ξ, если $j^*u=\gamma_n$. Расслоение может и не обладать Т. к. Расслоение, обладающее (в E^*) Т. к., наз. E-о р и е н т и р у е м ы м, а расслоение с фиксированным Т. к.— E-о р и е н т и р о в а н н ы м. Количество Т. к. E-ориентируемого расслоения над X равно количеству элементов группы $\tilde{E}^0(X)$. Гомоморфизм умножения на Т. к. задает *Тома изоморфизм*.

Ю. Б. Рудяк.

ТОМА ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство, сопоставляемое векторному (или сферическому) расслоению.

Пусть ξ — векторное расслоение над клеточным пространством X. Пусть в нем выбрана риманова метрика и рассматривается ассоциированное с ξ расслоение $D(\xi)$ на замкнутые единичные диски. В $D(\xi)$ содержится подрасслоение $S(\xi)$ на единичные сферы; факторпространство $D(\xi)/S(\xi)$ есть пространство Тома расслоения ξ, обозначаемое $T(\xi)$. Для компактной базы X Т. п. можно описать также как одноточечную компактификацию тотального пространства расслоения ξ. Кроме того, Т. п. является *конусом* проекции $S(\xi)\to X$, и можно таким образом определять Т. п. любого сферич. расслоения. Конечно, Т. п. определены и для любых расслоений со слоем $\mathbb{R}^n$.

Пусть O_k — группа ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^k$. Над ее *классифицирующим пространством* BO_k имеется k-мерное векторное расслоение γ_k, ассоциированное с универсальным O_k-расслоением. Т. п. $T\gamma_k$ часто обозначается через MO_k или TBO_k и наз. п р о с т р а н с т в о м Т о м а группы O_k. Аналогично вводятся Т. п. MU_k, MS_{p_k} и т. д., где U_k и S_{p_k} соответственно — унитарная и симплектическая группы.

Роль Т. п. состоит в том, что они позволяют сводить ряд геометрич. задач к задачам гомотопич. топологии и, следовательно, к алгебраич. задачам. Так, задача вычисления групп *бордизмов* сводится к задаче вычисления гомотопич. групп Т. п. MO_k, MSO_k и т. д. (см. [1], [2], а также *Кобордизм*); задача классификации гладких многообразий сводится к исследованию гомотопич. свойств Т. п. *нормального расслоения* (см. [3]); задача реализации циклов подмногообразиями (см. *Стинрода задача*) сводится к изучению когомологий Т. п. MSO_k и MO_k, и т. д. (см. также *Трансверсальное отображение*, *Трубчатая окрестность*).

Конструкция Т. п. естественна на категории расслоений: любой морфизм (векторных) расслоений $f : \xi\to\eta$ индуцирует непрерывное отображение $T(f) : T(\xi)\to T(\eta)$. В частности, Т. п. n-мерного расслоения над

точкой есть S^n, и потому для любого n-мерного векторного расслоения ξ над X и любой точкой $x \in X$ имеется включение $j_x : S^n \to T(\xi)$ (индуцированное включением слоя над x). Если X линейно связно, то все такие включения гомотопны, и можно говорить об отображении $j : S^n \to T(\xi)$, единственном с точностью до гомотопности.

Для векторных расслоений ξ и η над X и Y соответственно определено расслоение $\xi \times \eta$ над $X \times Y$. При этом $T(\xi \times \eta) = T(\xi) \wedge T(\eta)$ (см. [4]). В частности, для тривиального расслоения θ^n имеет место $T(\xi \oplus \theta^n) = S^n T(\xi)$, где S — оператор *надстройки*, так что $T(\theta^n) = S^n(X \cup pt)$. Это обстоятельство позволяет конструировать всевозможные спектры пространств Тома.

Для мультипликативной *обобщенной теории когомологий* E имеется спаривание

$$E^*(D(\xi)) \otimes E^*(D(\xi), S(\xi)) \to E^*(D(\xi), S(\xi)).$$

Возникает спаривание

$$E^*(X) \otimes \tilde{E}^*(T\xi) \to \tilde{E}^*(T\xi),$$

так что $\tilde{E}^*(T\xi)$ является $E^*(X)$-модулем, и это используется при построении *Тома изоморфизма*.

Важной и часто используемой является следующая теорема двойственности Атьи (см. [4], [5]): если M — гладкое многообразие с краем ∂M (возможно пустым) и ν — его нормальное расслоение, то Т. п. $T(\nu)$ находится в S-двойственности к $M/\partial M$.

Лит.: [1] Том Р., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 293—351; [2] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [3] Браудер В., Перестройки односвязных многообразий, пер. с англ., М., 1983; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Атья М., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 48—69. *Ю. Б. Рудяк.*

ТОМА СПЕКТР — *спектр пространств*, эквивалентный спектру, ассоциированному с нек-рой структурной серией (см. B, φ-*структура*).

Пусть (B_n, φ_n, g_n) — нек-рая структурная серия, и пусть ξ_n — расслоение над B_n, индуцированное отображением $\varphi_n : B_n \to BO_n$. Пусть $T\xi_n$ — *Тома пространство* расслоения ξ_n. Отображение g_n индуцирует отображение $S_n : ST\xi_n \to T\xi_{n+1}$, где S — *надстройка*, а $ST\xi_n = T(\xi_n \oplus \theta)$ (θ — одномерное тривиальное расслоение). Получается спектр пространств $\{T\xi_n\} = T(B, \varphi, g)$, ассоциированный со структурной серией (B_n, φ_n, g_n), и спектром Тома наз. любой спектр, (гомотопически) эквивалентный спектру вида $T(B, \varphi, g)$. Он представляет теорию (B, φ)-кобордизмов. Так, серии классич. групп Ли O_k, SO_k, U_k, Sp_k приводят к Т. с. TBO, $TBSO$, TBU, $TBSp$.

Пусть β_n — группа кос Артина из n нитей. Гомоморфизм $\beta_n \to S_n \subset O_n$, где S_n — симметрическая группа, задает отображение $B\beta_n \to BO_n$ так, что возникает структурная серия (β_n канонически вкладывается в β_{n+1}). Соответствующий Т. с. эквивалентен спектру Эйленберга — Маклейна $K(\mathbb{Z}/2) = \{K(\mathbb{Z}/2, n)\}$, так что $K(\mathbb{Z}/2)$ есть Т. с. (см. [1], [2]). Аналогично, $K(\mathbb{Z})$ есть Т. с., но уже сферич. расслоения. *Ю. Б. Рудяк.*

ТОМПСОНА ПОДГРУППА — характеристич. подгруппа *p-группы*, порожденная всеми абелевыми подгруппами максимального порядка. Введена Дж. Томпсоном [1].

Лит.: [1] Thompson J. G., «J. Algebra», 1969, v. 13; [2] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968. *Н. Н. Вильямс.*

ТОНЕЛЛИ ПЛОСКАЯ ВАРИАЦИЯ — числовая характеристика функции двух переменных, с помощью к-рой определяется класс функций, имеющих ограниченную вариацию в смысле Тонелли. Пусть функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $D = [a, b] \times [c, d]$. Предполагается, что функции

$$V_f^1(x) \equiv \operatorname*{Var}_{c \leqslant y \leqslant d} f(x, y)$$

и

$$V_f^2(y) \equiv \operatorname*{Var}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x, y)$$

измеримы по Лебегу (первая — на отрезке $[a, b]$, вторая — на $[c, d]$). Если

$$T(f, D) \equiv \int_a^b V_f^1(x)\,dx + \int_c^d V_f^2(y)\,dy < \infty,$$

то говорят, что функция $f(x, y)$ имеет ограниченную (конечную) плоскую вариацию Тонелли на прямоугольнике D, а класс всех таких функций обозначают $T(D)$. Это определение предложено Л. Тонелли (см. [1], [2]). Однако для непрерывных функций $f(x, y)$ другая характеристика класса $T(D)$ (в терминах *Банаха индикатрисы*) содержится в более ранней работе С. Банаха [4]. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике D, то для того чтобы поверхность $z = f(x, y)$ имела конечную площадь, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ принадлежала классу $T(D)$.

Лит.: [1] Tonelli L., «C. r. Acad. sci.», 1926, t. 182, p. 1198—1200; [2] его же, «Atti Accad. Naz. Lincei», 1926, t. 3, p. 357—63; [3] Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955, с. 13; [4] Banach S., «Fundam. Math.», 1925, t. 7, p. 225—36; [5] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949, с. 268. *Б. И. Голубов.*

ТОНЕЛЛИ ТЕОРЕМА о конечности площади непрерывной поверхности, заданной явным уравнением: пусть действительно-значная функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $D_0 = [a, b] \times [c, d]$; тогда:

а) для того чтобы непрерывная поверхность $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D_0$ имела конечную площадь, равную $S(F, D_0)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ имела конечную *Тонелли плоскую вариацию* на D_0;

б) если имеет место утверждение а), то

$$S(F, D_0) \geqslant \iint_{D_0} \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\,dy \equiv L(f, D_0),$$

причем площадь

$$S(D) \equiv S(F, D),\ D = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subset D_0,$$

является непрерывной аддитивной функцией прямоугольника $D \subset D_0$, и почти для всех точек $(x, y) \in D_0$ справедливо равенство

$$S'(x, y) \equiv \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2};$$

в) для того чтобы имело место равенство $S(F, D_0) = L(F, D_0)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x, y)$ была абсолютно непрерывной на D_0, а для этого необходимо и достаточно, чтобы площадь $S(F, D)$ была абсолютно непрерывной функцией прямоугольника $D \subset D_0$.

Эта теорема доказана Л. Тонелли (см. [1] — [3], а также [4]), а утверждение а) даже для поверхностей, заданных параметрически, установлено С. Банахом [5] (в несколько иной терминологии).

Лит.: [1] Tonelli L., «C. r. Acad. sci.», 1926, t. 182, p. 1198—1200; [2] его же, «Atti Accad. Naz. Lincei», 1926, t. 3, p. 357—63, 445—50, 633—58; [3] его же, там же, 1927, t. 5, p. 313—18; [4] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949, с. 268; [5] Banach S., «Fundam. Math.», 1925, v. 7, p. 225—37. *Б. И. Голубов.*

ТОНКАЯ ТОПОЛОГИЯ в теории потенциала — слабейшая из топологий, в к-рых непрерывны все локально супергармонич. функции, заданные на пространстве $\mathbb{R}^n$. Объекты, относящиеся к Т. т., отмечаются дополнительными словами «тонкий», «тонко» и т. п.

Понятие Т. т. тесно связано с понятием разреженного множества (см. *Разреженность множества*). Т. т. сильнее обычной евклидовой топологии $\mathbb{R}^n$, т. е. всякое евклидово открытое множество является тонко откры-

тым. Тонкая окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — это множество $V(x_0)$ такое, что $x_0 \in V(x_0)$ и дополнение $CV(x_0)$ является разреженным множеством в точке x_0. Тонко открытые множества — это прообразы при отображении супергармонич. функциями расширенной числовой оси $\overline{\mathbb{R}}$ и интервалов вида $(a, +\infty]$, $[-\infty, b)$, (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$. Всякая супергармонич. функция на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ тонко непрерывна на E. Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}^n$ было разреженным в точке $x_0 \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы x_0 была тонко изолированной точкой E.

Пусть x_0 — тонко предельная точка E, т. е. E не разрежено в точке x_0, и числовая функция f определена на E. Число λ наз. тонким пределом функции f в точке x_0, если для любой окрестности $U(\lambda)$ точки λ в $\overline{\mathbb{R}}$ найдется тонкая окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$x \in E \cap V(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(\lambda).$$

Если λ — тонкий предел f в x_0, то найдется тонкая окрестность $V(x_0)$ такая, что λ будет обычным пределом в x_0 сужения $f|E \cap V(x_0)$ (теорема Картана).

Пусть E — замкнутое множество, разреженное в точке x_0, $f > 0$ — супергармонич. функция, определенная на CE в окрестности x_0; тогда f имеет тонкий предел $\lambda > 0$ в точке x_0.

Т. т. строится и в аксиоматич. теории потенциала (см. [3]).

Лит.: [1] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [3] Brelot M., Lectures on potential theory, Bombay, 1960. *Е. Д. Соломенцев.*

ТОНКИЙ ПУЧОК — пучок абелевых групп $\mathcal{F}$ на паракомпактном пространстве X, пучок эндоморфизмов к-рого есть *мягкий пучок*. Пучок $\mathcal{F}$ является Т. п. тогда и только тогда, когда для любых замкнутых подмножеств A, $B \subset X$ таких, что $A \cap B = \varnothing$, существует эндоморфизм $h : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, тождественный над A и равный 0 над B, или когда для любого открытого покрытия $(U_i)_{i \in I}$ пространства X существует такое локально конечное семейство $(h_i)_{i \in I}$ эндоморфизмов пучка $\mathcal{F}$, что $\operatorname{supp} h_i \subset U_i$ $(i \in I)$ и $\sum_{i \in I} h_i$ — тождественный эндоморфизм. Всякий Т. п. является мягким, а если $\mathcal{F}$ — пучок колец с единицами, то верно и обратное. Если $\mathcal{F}$ — Т. п., а $\mathcal{L}$ — любой пучок абелевых групп на X, то $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}$ — также Т. п. Примером Т. п. служит пучок ростков непрерывных (или дифференцируемых класса C^k) сечений произвольного (соответственно дифференцируемого) векторного расслоения над паракомпактным пространством (соответственно паракомпактным дифференцируемым многообразием).

Лит.: [1] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [2] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976. *А. Л. Онищик.*

ТОНКОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество A области $D \subset \mathbb{C}^n$ такое, что для каждой точки $z \in D$ существует открытый полидиск $\Delta(z, r) \subset D$ и функция f, голоморфная и не равная тождественно нулю, но обращающаяся в нуль на $X \cap \Delta(z, r)$. *М. И. Войцеховский.*

ТОПОЛОГИЗИРОВАННАЯ КАТЕГОРИЯ — категория, снабженная топологией Гротендика. Пусть C — категория с расслоенными произведениями. Задать топологию Гротендика в C значит задать для каждого объекта $X \in C$ множество $\operatorname{Cov}(X)$ семейств морфизмов $(X_i \to X)_{i \in I}$, называемых покрытиями, причем должны выполняться следующие условия:

1) $(X \xrightarrow{\mathrm{id}} X)$ — покрытие объекта X;

2) если $(X_i \to X)$ — покрытие X, то получаемое из него заменой базы $Y \to X$ семейство $(X_i \times_X Y \to Y)$ является покрытием объекта Y;

3) если $(X_i \to X)$ — покрытие X, а $(X_{ij} \to X_i)$ покрытия X_i, то $(X_{ij} \to X)$ — покрытие X.

Если в C прямые суммы определены, то семейство $(X_i \to X)$ можно заменить одним морфизмом $\coprod_i X_i \to X$ (для простоты в дальнейшем это предполагается).

Категория открытых подмножеств U топологич. пространства T является Т. к., если в качестве $\operatorname{Cov}(U)$ брать семейства $(V_i \subset U)$ такие, что $\bigcup_i V_i = U$. Менее тривиальный пример доставляет *этальная топология* схем: пусть X — схема, C — категория схем, этальных над X; морфизм $Y \to Z$ в C считается покрытием, если он сюръективен.

Наличие покрытий позволяет говорить о пучках на Т. к. и их когомологиях. Контравариантный функтор F из C в категорию множеств наз. пучком множеств, если для любого покрытия $X' \to X$ выполнено условие

$$F(X) = \{s' \in F(X'),\ p_1^*(s') = p_2^*(s')\},$$

где p_1, p_2 — две проекции $X' \times_X X'$ на X'. Канонической топологией в категории C наз. наиболее тонкая топология, в к-рой все представимые функторы являются пучками. Если же выполнено обратное — любой пучок относительно канонич. топологии представим, то категория C наз. топосом. С каждым предпучком множеств можно связать ассоциированный с ним пучок множеств; определяются операции прямого и обратного образа пучков и т. д. Аналогично определяется пучок групп, абелевых групп, модулей и т. д. Категория пучков абелевых групп на Т. к. является *Гротендика категорией*, что позволяет определить когомологии пучков $H^i(X, F)$ как производные функторы для функтора $F \mapsto F(X)$ (см. *Когомологии*) и перенести на них обычный формализм.

См. также *Гомотопический тип* топологизированной категории.

Лит.: [1] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 1—3, B.— Hdlb.— N. Y., 1972—73; [2] Cohomologie étale, B.— Hdlb.— N. Y., 1977. *В. И. Данилов.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — 1) *Универсальная алгебра*, являющаяся топологич. пространством, в к-ром непрерывны все сигнатурные операции.

2) Алгебра (в смысле «операторное кольцо») A над топологич. полем или коммутативным кольцом R, являющаяся топологич. пространством, операции сложения и умножения в к-ром, а также отображение $R \times A \to A$ $((r, a) \to ra)$, непрерывны. Пример Т. а. над полем комплексных чисел — *банаховы алгебры*.

3) Раздел алгебры, к-рый занимается изучением топологич. алгебраич. систем, то есть групп, полугрупп, колец, решеток, векторных пространств, модулей и др., наделенных топологиями, в к-рых рассматриваемые алгебраич. операции непрерывны.

Понятие *топологической группы* возникло в связи с рассмотрением групп непрерывных преобразований. Так, во 2-й пол. 19 в. С. Ли (S. Lie) и его школа создали развитую теорию важного класса топологич. групп — групп дифференцируемых преобразований многообразий в себя, получивших впоследствии название *Ли групп*. Изучение общих топологич. групп началось в 20-е гг. 20 в. (см. [1], [2]). С нач. 30-х гг. топологич. группы, кольца и поля подверглись уже систематич. изучению.

А. Н. Колмогоровым [3] был развит аксиоматич. подход к исследованию топологических проективных геометрий. Их классификация существенно зависела от описания *локально компактных тел*. Полное описание связных локально компактных тел было дано в 1932 Л. С. Понтрягиным (см. [4], гл. 4).

Многочисленные проблемы анализа привели к общему определению *банахова пространства* (см. также [5]), что создало предпосылку для систематич. изуче-

ния топологич. модулей над топологич. кольцами и банаховых алгебр (см. [6], [7]).

Основными разделами Т. а. в настоящее время являются: топологич. группы и их обобщения (в частности, *топологические полугруппы* и квазигруппы), *топологические кольца* (в частности, *топологические поля* и тела) и *топологические модули* над ними (в частности, *топологические векторные пространства*), топологич. решетки (в частности, топологические проективные плоскости), топологические универсальные алгебры (см. [5], [8], [10], [11]).

В Т. а. можно выделить следующие направления исследований: существование топологий в алгебраич. системах (группах, кольцах и др.), превращающих их в топологич. алгебраич. системы с различными свойствами; вопросы продолжения топологий на расширения алгебраич. систем и возможности вложения в топологич. алгебраич. системы определенных классов; свойства топологии топологич. алгебраич. систем, в частности возможность задания топологий метрикой или нормой; строение различных классов топологич. алгебраич. систем (включая теорию радикалов топологич. алгебраич. систем); свободные топологич. алгебраич. системы; вопросы двойственности топологич. алгебраич. систем.

Лит.: [1] Schreier O., «Hamb. Abh.», 1926, Bd 4, S. 15—32; [2] Leja F., «Fund. Math.», 1927, t. 9, p. 37—44; [3] Колмогоров А. Н., «Ann. Math.», 1932, v. 33, p. 175—76; [4] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [5] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [6] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960; [7] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [8] Арнаутов В. И., Водинчар М. И., Михалев А. В., Введение в теорию топологических колец и модулей, Кишинев, 1981; [9] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 2, с. 3—41; [10] Скорняков Л. А., «Труды Московского математического об-ва», 1954, т. 3, с. 347—73; [11] Мальцев А. И., Избранные труды, т. 1—2, М., 1976. *В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА — множество G, на к-ром заданы две структуры — группы и топологич. пространства, согласованные условием непрерывности групповых операций. А именно, отображение $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ прямого произведения $G\times G$ в G должно быть непрерывным. Подгруппа H Т. г. G является Т. г. в индуцированной топологии. Факторпространство G/H смежных классов снабжается фактортопологией относительно канонич. отображения группы G на G/H. Если H — нормальный делитель Т. г. G, то G/H (факторгруппа группы G по H) — Т. г.

Примеры Т. г.: Векторная группа $\mathbb{R}^n$ — прямое произведение n экземпляров аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел с естественной топологией; окружность $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — факторгруппа группы $\mathbb{R}$ по подгруппе целых чисел $\mathbb{Z}$; каждая *Ли группа*; произвольная абстрактная группа, снабженная дискретной топологией; произвольное топологическое векторное пространство.

Как правило, пространства Т. г. предполагаются хаусдорфовыми. Факторпространство G/H хаусдорфово тогда и только тогда, когда подгруппа H замкнута в G (в дальнейшем все рассматриваемые подгруппы будут предполагаться замкнутыми). Факторпространство G/H смежных классов регулярно. Однако существуют Т. г., пространства к-рых не являются нормальными (см. [7]).

Т. г. наз. связной, вполне несвязной, компактной, локально компактной и т. п., если соответствующим свойством обладает ее топологич. пространство. Связная компонента единицы G° Т. г. G является нормальным делителем в G; G° — наибольшая связная замкнутая подгруппа G. Факторгруппа G/G° вполне несвязна. Локально компактная вполне несвязная группа обладает открытой компактной подгруппой. Если G — компактная вполне несвязная группа, то в каждой ее окрестности единицы содержится открытая нормальная в G подгруппа. Отсюда вытекает совпадение класса компактных вполне несвязных групп с классом *проконечных групп*, к-рые играют важную роль в теории Галуа, появляясь там в качестве групп Галуа бесконечных расширений полей, снабженных топологией Крулля.

На всякой Т. г. естественным образом определяется структура равномерного пространства. А именно, левая групповая равномерная структура на Т. г. G задается совокупностью множеств

$$L(U)=\{(x, y)\in G\times G \mid x^{-1}y\in U\},$$

где U пробегает систему окрестностей единицы группы G; правая равномерная структура определяется симметрично. Топология получающегося равномерного пространства совпадает с исходной топологией группы. Существование равномерной структуры на Т. г. позволяет ввести и использовать понятия равномерной непрерывности (напр., для действительнозначных функций на Т. г.), последовательности Коши, полноты и пополнения. Локально компактная Т. г. полна в своей равномерной структуре. Следствием этого является тот факт, что локально компактная подгруппа хаусдорфовой Т. г. всегда замкнута. Существуют, однако, Т. г., к-рые даже не вкладываются в полные группы.

На каждой локально компактной Т. г. G существует нетривиальная мера μ, инвариантная относительно левых сдвигов (т. е. такая, что для любого измеримого по μ подмножества $A\subseteq G$ и каждого элемента $x\in G$ подмножество xA измеримо и $\mu(xA)=\mu(A)$). Такая мера наз. *Хаара мерой*; она единственна с точностью до постоянного множителя.

Если Т. г. G компактна, то мера Хаара инвариантна также относительно правых сдвигов. Кроме того, в этом случае постоянный множитель можно подобрать так, чтобы $\mu(G)=1$; это позволяет рассматривать соответствующий интеграл $\int f(x)d\mu(x)$ как среднее значение функции $f(x)$ на G. Важнейшие применения меры Хаара относятся к теории непрерывных представлений. Интегрирование по мере Хаара позволило перенести на компактные группы значительную часть теории представлений конечных групп (напр., соотношения ортогональности для характеров или для матричных коэффициентов), а также *Петера — Вейля теорему*, полученную первоначально для групп Ли. Следствием этой теоремы является тот факт, что каждая компактная группа G обладает полной системой конечномерных унитарных представлений (другими словами, для любого отличного от единицы элемента $x\in G$ найдется такое представление ρ, что $\rho(x)\neq E$). Существуют локально компактные группы, не имеющие нетривиальных конечномерных представлений.

Содержательные результаты о строении Т. г. известны по существу лишь для локально компактных групп. В случае локально компактных абелевых групп имеет место следующая основная структурная теорема: каждая локально компактная абелева группа G представима в виде прямого произведения $G=\mathbb{R}^n\times H$, где H — группа, обладающая открытой компактной подгруппой K. Этот результат является следствием теории двойственности для локально компактных абелевых групп (см. *Понтрягина двойственность*). С помощью этой теоремы исследование строения группы G в известном смысле сводится к вопросам о строении дискретных групп H/K и $\hat{K}$, где $\hat{K}$ — группа характеров компактной группы K, т. е. к вопросам абстрактной теории групп.

Определяющую роль в построении теории Т. г. сыграла пятая проблема Гильберта. Сфор-

мулированная в 1900 как проблема о локальных группах преобразований, эта проблема была в процессе развития теории Т. г. переосмыслена. Общепринятой стала следующая ее формулировка: является ли всякая локально евклидова Т. г. группой Ли? (Т. г. наз. локально евклидовой, если она обладает окрестностью единицы, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, т. е. является топологич. многообразием.) Пятая проблема Гильберта была решена в 1952 (см. [6]). Существенным моментом явилось доказательство следующего критерия лиевости: локально компактная группа G является группой Ли тогда и только тогда, когда G — группа без малых подгрупп (т. е. существует окрестность единицы G, не содержащая нетривиальных подгрупп). Было показано также, что локально компактная группа G с компактной факторгруппой G/G_0 является проективным пределом групп Ли (или, эквивалентно, в каждой окрестности единицы группы G содержится нормальный делитель N с факторгруппой G/N, являющейся группой Ли). Каждая окрестность единицы произвольной локально компактной группы содержит открытое подмножество вида $K\times L$, где K — компактная подгруппа, L — связная локальная группа Ли.

Проективная лиевость локально компактных групп G с компактными факторгруппами G/G_0 позволила перенести на такие группы ряд результатов, известных ранее для групп Ли (см. [8]). Напр., каждая компактная подгруппа из G содержится в нек-рой максимальной компактной подгруппе; любые две максимальные компактные подгруппы группы G сопряжены. Далее, если K — одна из максимальных компактных подгрупп в G, то существует такое множество однопараметрич. подгрупп $L_i\cong\mathbb{R}$, $i=1, \ldots, n$, что отображение, переводящее набор $(k, l_1, \ldots, l_n)$ в произведение $kl_1\ldots l_n$, является гомеоморфизмом группы $K\times L_1\times\ldots\times L_n$ на G.

После решения пятой проблемы Гильберта на первый план выдвинулась задача более детального изучения строения локально компактных групп, обладающих теми или иными дополнительными свойствами. Были исследованы классы групп, выделяемые нек-рыми условиями конечности, такими, напр., как условие конечности специального ранга, различные варианты условий максимальности и минимальности для подгрупп и т. п. (см. [5]). Была построена теория локально нильпотентных локально компактных групп. Большую часть полученных при этом результатов удалось позднее перенести на более широкий класс локально проективно нильпотентных групп [9].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [2] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с англ., М., 1950; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1, М., 1975; [5] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 123—60; [6] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 2, с. 3—41; [7] Граев М. И., там же, 1950, т. 5, в. 2, с. 3—56; [8] Платонов В. П., «Сибирский матем. ж.», 1966, т. 7, № 4, с. 854—877; [9] его же, «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 1, с. 38—58.

О. В. Мельников.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА — раздел теории *динамических систем*, изучающий *топологические динамические системы*. Основное содержание относится к тому случаю, когда *фазовое пространство* — метрич. компакт, а время пробегает $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$ (что и подразумевается ниже).

Возникновение Т. д. (20—30-е гг. 20 в.) связано с тем, что обсуждение ряда понятий, связанных с предельным поведением траекторий (напр., *предельное множество*, *центр* топологической динамической системы) и «повторяемостью» движений, целесообразно провести в общем контексте Т. д., хотя сами эти понятия по большей части возникли при исследовании более конкретных объектов — дифференцируемых динамич. систем. Из различных свойств «повторяемости» выделяют (в порядке возрастания общности): периодичность, почти-периодичность (в смысле Бора), рекуррентность (в смысле Биркгофа, см. *Минимальное множество*, 2)), *устойчивость по Пуассону*, неблуждаемость (см. *Блуждающая точка)*, *цепную рекуррентность*. Любая траектория со временем неограниченно приближается к множеству, образованному «повторяющимися» траекториями; с этой точки зрения вполне оправдано особое внимание, уделяемое последним.

В 60-х гг. изучение минимальных множеств и их расширений привело к значительному развитию Т. д. уже как самостоятельного направления (это было связано прежде всего с *дистальными динамическими системами*). Однако надо иметь в виду, что изучение предельного поведения траекторий не сводится к одному лишь изучению минимальных множеств.

До кон. 60-х гг. к Т. д. относили преимущественно те вопросы, к-рые перечислены выше (см. также след. абзац и [1], [6], [11], [13]—[15] в статье *Динамическая система*). Однако в ряде случаев оказывается нужным уделять внимание и «неповторяющимся» траекториям. [Так, нередко представляют интерес *сепаратрисы* (в частности, они могут описывать волны нек-рого специального типа), независимо от того, обладают ли они хотя бы цепной рекуррентностью. *Градиентные динамические системы*, отвечающие функциям с невырожденными критич. точками, используются при изучении многообразий, между тем как множество «повторяющихся» траекторий в этом случае устроено тривиально.] Поэтому позднее исследовалось поведение траекторий вне множества «повторяющихся» движений, а также рассматривались компактные инвариантные множества, являющиеся изолированными или локально максимальными — в нек-рой окрестности U такого множества нет бо́льших инвариантных множеств. Среди лежащих в нем траекторий могут быть и «неповторяющиеся». Для таких множеств вводятся нек-рые аналоги *Морса индекса* (уже не числа, а объекты более сложной природы) и устанавливаются соотношения, обобщающие *Морса неравенства* (равно как и соответствующие результаты для *Морса — Смейла систем*); обсуждается также поведение этих множеств при непрерывном изменении системы. (Поскольку дальнейшая судьба траекторий, покидающих U, нас в этих вопросах не интересует, то можно, а иногда и нужно, рассматривать «локальные динамич. системы», в к-рых «движение» точки может быть определено не для всех значений времени. Точные формулировки являются довольно громоздкими. См. [1].)

К Т. д. относятся или, по крайней мере, непосредственно примыкают вопросы об *инвариантных мерах*, *топологической энтропии*, асимптотич. циклах (см. [2], [3]) и о том, к какому классу в смысле *дескриптивной теории множеств* принадлежат те или иные подмножества фазового пространства, естественно выделяющиеся по своим свойствам (см. [4], [5]). В Т. д., как и вообще в теории динамич. систем, обсуждается вопрос о тех свойствах динамич. систем, к-рые в каком-то смысле являются «типичными» (см. [9], [10] в статье *Общее положение* и [3] в статье *Цепная рекуррентность*, а также [6], [7]). (Правда, собственно к Т. д. относится только «типичность» в C^0-топологии, тогда как для дифференцируемых динамич. систем адекватной является C^r-топология, $r\geqslant 1$, на соответственно уменьшенном множестве систем.) В рамках Т. д. обсуждались взаимосвязи между *устойчивостью по Ляпунову* и различными родственными понятиями.

Приложения Т. д. к исследованию конкретных динамич. систем или классов таковых в значительной степени связано с использованием понятий и результатов

Т. д. в теории дифференцируемых динамич. систем (отчасти и в *эргодической теории*), причем и при таких применениях Т. д. нередко приходится рассматривать системы, фазовые пространства к-рых не являются многообразиями. (Так происходит, когда Т. д. применяется к ограничению динамич. системы на инвариантном множестве, не являющемся многообразием, а также при использовании *символической динамики*; обе эти причины могут сочетаться.) С сер. 60-х гг. 20 в. и особенно в нач. 80-х гг. большое внимание уделялось каскадам, получающимся при итерировании непрерывного отображения S отрезка или окружности; здесь многое не зависит от гладкости S и не связано с инвариантными мерами, т. е. относится к «чистой» Т. д.

Т. д. была привлечена (см. [8]) для единообразного вывода ряда теоретико-числовых результатов (хотя наиболее глубокие из них требуют обращения к эргодич. теории). Наконец, хотя определение топологич. потока воспроизводит нек-рые из свойств *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений, иногда Т. д. косвенным образом применяется и при исследовании нек-рых неавтономных систем (при этом система рассматривается вместе с континуумом других систем, получающихся из нее нек-рым предельным переходом, и возникает конструкция, аналогичная *косому произведению*, 2), см. [9]).

Лит.: [1] Conley Ch., Isolated invariant sets and the Morse index, Providence, 1978; [2] Schwartzman S., «Ann. Math.», 1957, v. 66, № 2, p. 270—84; [3] Phodes F., «J. London Math. Soc.», 1973, v. 6, pt. 2, p. 247—55; [4] Шарковский А. Н., «Укр. матем. ж.», 1965, т. 17, № 3, с. 104—11; № 5, с. 80—95; 1966, т. 18, № 2, с. 60—83; 1968, т. 20, № 1, с. 136—142; [5] его же, «Доповіді АН УРСР», 1966, № 7, с. 866—70; [6] Добрынский В. А., в кн.: Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, К., 1973, с. 43—53; [7] Palis J., Pugh Ch., Shub M., Sullivan D., в кн.: Dynamical systems — Warwick, 1974, B.— Hadlb.— N. Y., 1975, p. 241—50; [8] Furstenberg H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1981, v. 5, № 3, p. 211—34; [9] Миллионщиков В. М., в кн.: Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. Доклады советских математиков, М., 1972, с. 207—11. *Д. В. Аносов.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — тройка (W, G, F), где W — топологич. пространство, G — топологич. группа, F — непрерывное отображение $G\times W\to W$, определяющее левое действие G на W: если $w\in W$, e — единица группы G и $g, h\in G$, то (при мультипликативной записи операций в G) $F(e,w)=w$,

$$F(gh,\ w)=F(g,\ F(h,\ w)), \qquad (1)$$

(иными словами, если обозначить преобразование $w\mapsto F(g, w)$ через T_g, то $T_{gh}=T_gT_h$). Вместо левого действия часто рассматривается правое действие; в этом случае аргументы F удобнее записывать в другом порядке (считая F отображением $W\times G\to W$), а (1) заменяется условием

$$F(w,\ gh)=F(F(w,\ g),\ h). \qquad (2)$$

Вместо $F(g, w)$ или $F(w, g)$ часто пишется просто gw или wg; тогда (1) и (2) записываются в виде

$$(gh)\,w=g\,(hw),\ \ w\,(gh)=(wg)\,h.$$

Если G коммутативна, различие между правым и левым действием несущественно. Наиболее важные случаи — $G=\mathbb{Z}$ (аддитивная группа целых чисел с дискретной топологией; в этом случае говорят о (топологическом) каскаде) и $G=\mathbb{R}$ (в этом случае говорят о (топологическом) потоке); в узком смысле слова под Т. д. с. понимаются именно эти два случая. Иногда G считается не группой, а полугруппой; впрочем, в основном рассматривается только полугруппа неотрицательных целых чисел (т. е. речь идет об итерациях нек-рого непрерывного отображения $T: W\to W$) и (реже) неотрицательных действительных чисел.

Термин «Т. д. с.» (обычно без первого прилагательного) принят в *топологической динамике*, тогда как в топологии тот же объект наз. непрерывной группой преобразований. Различие названий отчасти оправдано тем, что в этих двух дисциплинах различны изучаемые свойства и ограничения, налагаемые при этом на изучаемый объект. Так, значительная часть относящихся сюда результатов топологии посвящена компактным G, тогда как в топологич. динамике G обычно считается локально компактной, но никогда не компактной, и интерес представляет предельное поведение траекторий $F(g, w)$ при $g\to\infty$ (т. е. вне сколь угодно больших компактных частей G), к-рое даже в аналитич. случае может быть весьма сложным. В теории алгебраич. групп преобразований (см. *Алгебраическая группа преобразований*) компактности G не предполагают, но зато там имеется очень сильное условие регулярности F как отображения алгебраич. многообразий (причем основное поле обычно предполагается алгебраически замкнутым, так что в классич. ситуации речь идёт о регулярности «во всей комплексной области»). В сочетании со связностью (а обычно также и с редуктивностью) G это позволяет, как и в случае компактных G, получить значительную информацию о возможных типах взаимного примыкания *орбит* и, в частности, исключить возможность различных явлений, связанных со сложным предельным поведением траекторий.

Термин «Т. д. с.» предпочтительнее, чем употребляемое иногда выражение «непрерывная динамич. система (поток, каскад)», ибо «непрерывность» может означать также: а) метрич. непрерывность — см. *Непрерывный поток* 1); б) что $G=\mathbb{R}$. (Когда Т. д. с. понимается в узком смысле слова, то говорят, что поток — это случай непрерывного времени, а каскад — дискретного; соответственно иногда говорят о непрерывной и дискретной динамич. системе.) *Д. В. Аносов.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — множество, наделенное алгебраич. структурой полугруппы и структурой хаусдорфова топологич. пространства, причем полугрупповая операция непрерывна в заданной топологии. Любая полугруппа становится Т. п., если рассматривать на ней *дискретную топологию*. Существуют полугруппы, допускающие лишь дискретную топологизацию. Любое хаусдорфово топологич. пространство может быть превращено в Т. п., напр. заданием левосингулярного или нулевого умножения.

Сформировалось несколько относительно самостоятельных направлений в теории Т. п.: общая теория компактных полугрупп (термин «компактность» употребляется в смысле *бикомпактность*), гомотопич. свойства Т. п., изучение полугрупп на конкретных топологич. пространствах, гармонич. анализ на Т. п., полугруппы непрерывных преобразований топологич. пространств. Началось изучение Т. п., связанное с рассмотрением системы всех замкнутых подполугрупп.

Естественный класс Т. п., включающий компактные и дискретные полугруппы, составляют локально компактные полугруппы. Однако многие свойства, справедливые в классах компактных и дискретных полугрупп, перестают быть верными для произвольных локально компактных полугрупп, поэтому, как правило, накладываются дополнительные ограничения топологич. или алгебраич. характера. Важным условием такого рода является слабая равномерность: локально компактная полугруппа S наз. слабо равномерной, если для любых $a, b\in S$ (один из этих элементов может быть пустым символом) и любых подмножеств Y, $W\subseteq S$, где W — открытое подмножество с компактным замыканием $\overline{W}$, причем $\overline{aYb}\subseteq W$ или $\overline{aYb}\subseteq S\setminus\overline{W}$, найдутся окрестности $V(a)$, $V(b)$ элементов a и b такие, что $V(a)YV(b)\subseteq W$ или соответственно $V(a)YV(b)\subseteq S\setminus\overline{W}$. Класс слабо равномерных полугрупп вклю-

чает в себя компактные полугруппы, дискретные полугруппы, локально компактные группы. Если локально компактная полугруппа S есть группа, то операция взятия обратного элемента непрерывна, т. е. S — топологич. группа. В локально компактной инверсной полугруппе операция взятия инверсного элемента (см. *Регулярный элемент*) непрерывна тогда и только тогда, когда S слабо равномерна. В слабо равномерной полугруппе максимальные подгруппы замкнуты; в произвольной локально компактной полугруппе это свойство может не выполняться.

Произвольная компактная полугруппа S содержит замкнутое ядро $M(S)$ (см. *Ядро полугруппы*), являющееся вполне простой полугруппой; в частности, S имеет идемпотенты. Структура компактных вполне простых (вполне 0-простых) полугрупп описывается теоремой, аналогичной теореме Риса о дискретных вполне простых (вполне 0-простых) полугруппах (см. *Рисовская полугруппа матричного типа*). Аналог теоремы Риса справедлив для слабо равномерных полугрупп, но уже не верен для локально компактных полугрупп [10].

Полугруппа S наз. нитью, если на S можно задать линейный порядок, превращающий S в связную Т. п. относительно порядковой (интервальной) топологии. Полугруппа S с нулем 0 и единицей e наз. стандартной нитью (или I-полугруппой), если S — нить, причем 0 и e наименьший и наибольший элементы в S. Имеется полное описание стандартных нитей [2]. Компактная полугруппа S с единицей e наз. неприводимой, если она связна и не содержит собственной связной замкнутой подполугруппы T такой, что $e\in T$ и $T\cap M(S)\neq\varnothing$. Связные компактные полугруппы с единицей содержат неприводимые полугруппы в качестве замкнутых подполугрупп. Имеется следующее описание неприводимых полугрупп: неприводимая полугруппа S коммутативна, *Грина отношение эквивалентности* $\mathcal{H}$ — замкнутая конгруэнция на S, а $S/\mathcal{H}$ — стандартная нить.

«Минимальными блоками» Т. п. являются замыкания моногенных подполугрупп, называемые монотетическими полугруппами. Для компактной монотетич. полугруппы S ядро $M(S)$ есть компактная монотетич. группа. Компактные монотетические полугруппы полностью описаны [9]. Слабо равномерные монотетич. полугруппы либо компактны, либо дискретны. Не известны (1984) примеры не компактных и не дискретных локально компактных монотетич. полугрупп.

Характером коммутативной Т. п. S с единицей наз. ненулевой непрерывный гомоморфизм в мультипликативную полугруппу комплексных чисел, модуль к-рых $\leqslant 1$. Множество всех характеров S^* образует коммутативную Т. п. с единицей относительно поточечного умножения (см. *Характер* полугруппы) и *бикомпактно открытой топологии*. Говорят, что для коммутативной Т. п. с единицей справедлива теорема двойственности (Понтрягина), если канонич. гомоморфизм S в полугруппу характеров полугруппы S^* является топологич. изоморфизмом «на». Теорема двойственности справедлива для коммутативной компактной полугруппы S с единицей тогда и только тогда, когда S инверсная полугруппа и ее подполугруппа идемпотентов образует *вполне несвязное пространство*. Найдены необходимые и достаточные условия справедливости теоремы двойственности для коммутативных локально компактных полугрупп [12], одним из необходимых условий является слабая равномерность полугруппы.

Важный подкласс коммутативных компактных полугрупп составляют компактные полурешетки (см. *Идемпотентов полугруппа*). Компактная полурешетка допускает единственную, с точностью до гомеоморфизма, топологизацию. Описание нек-рых типов Т. п. сводится к метрич. полугруппам. Метрика d на Т. п. S наз. инвариантной, если $d(ax, ay)\leqslant d(x, y)$ и $d(xa, ya)\leqslant d(x, y)$ для любых $a, x, y\in S$. Т. п. наз. метрической, если на S существует инвариантная метрика, порождающая топологию на S. Каждая компактная полугруппа является проективным пределом компактных метрич. полугрупп. Каждая вполне несвязная компактная полугруппа является проективным пределом конечных полугрупп.

Рассматриваются нек-рые обобщения Т. п.: полугруппы, пространство к-рых не обязательно хаусдорфово, полутопологические полугруппы, т. е. топологич. пространства, на к-рых определена ассоциативная бинарная операция, причем все левые и правые внутренние сдвиги являются непрерывными преобразованиями.

Лит.: [1] Paalman-de Miranda A., Topological semigroups, Amst., 1964; [2] Hofmann K., Mostert P., Elements of compact semigroups, Columbus (Ohio), 1966; [3] Berglund J., Hofmann K., Compact semitopological semigroups and weakly almost periodic functions, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [4] Hofmann K., Mislove M., Stralka A., The Pontryagin duality of compact 0-dimensional semilattices and its applications, B.— Hdlb.— N. Y., 1974; [5] Hofmann K., Stralka A., The algebraic theory of compact Lawson semilattices. Applications of Galois connections to compact semilattices, Warsz., 1976; [6] Hofmann K., «Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver.», 1976, Bd 78, p. 9—59; [7] Wallace A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 61, p. 95—112; [8] Williamson J., «J. Lond. Math. Soc.», 1967, v. 42, p. 1—41; [9] Hewitt E., «Duke Math. J.», 1956, v. 23, № 3, p. 447—57; [10] Sneperman L. B., «Sem. Forum», 1981, v. 23, p. 261—73; [11] Дэй Д., в кн.: Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975, с. 259—83; [12] Шнеперман Л. Б., «Матем. сб.», 1968, т. 77, № 4, с. 508—32.

Б. П. Танана, Л. Н. Шеврин.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА, топология открытая, соответственно, замкнутая — совокупность $\mathfrak{G}$, соответственно, $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X, обладающая следующими свойствами:

1. Множество X, равно как и пустое множество $\varnothing$, являются элементами совокупности $\mathfrak{G}$, соответственно, $\mathfrak{F}$.

$2_{\mathfrak{G}}$, соответственно, $2_{\mathfrak{F}}$. Пересечение, соответственно, объединение, конечного числа и объединение, соответственно, пересечение любого числа элементов совокупности $\mathfrak{G}$, соответственно, $\mathfrak{F}$, является элементом той же совокупности.

После того как введена или определена топология, или Т. с., в данном множестве X, оно именуется топологическим пространством, его элементы наз. точками, а элементы совокупности $\mathfrak{G}$, соответственно, $\mathfrak{F}$, наз. открытыми, соответственно, замкнутыми, множествами полученного топологич. пространства.

Если определена какая-нибудь из совокупностей $\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X, обладающая свойством 1 и, соответственно, свойством $2_{\mathfrak{G}}$ или $2_{\mathfrak{F}}$, другая совокупность может быть определена двойственным образом как состоящая из дополнений к элементам первой. *П. С. Александров.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ — свойство, определяемое для *топологической динамической системы* $\{T_t\}$, обычно для потока или каскада (время t пробегает все действительные или целые числа). Оно заключается в существовании траектории $\{T_t w_0\}$, имеющей все фазовое пространство W своим ω-*предельным множеством*. (Эквивалентное свойство заключается в существовании положительной полутраектории $\{T_t w_0,\ t\geqslant 0\}$, всюду плотной в W.) Такую траекторию (полутраекторию) наз. топологически транзитивной.

С Т. т. тесно связано свойство транзитивности областей: для любых непустых открытых множеств $U, V\subset W$ имеется $t>0$, для к-рого $T_t U\cap V\neq\varnothing$. Именно, из Т. т. следует транзитивность областей, а

если W — полное сепарабельное метрич. пространство, то из транзитивности областей следует (см. [1], [2]) Т. т. (и при этом множество топологич. транзитивных траекторий имеет мощность континуума). Поэтому при том же предположении о W свойство Т. т. симметрично относительно направления времени: если существует траектория $\{T_t w_0\}$, имеющая все W своим α-*предельным множеством*, то имеет место транзитивность областей и Т. т.

Часто под Т. т. понимается существование траектории $\{T_t w_0\}$, всюду плотной в W. (Различие между приведенными определениями существенно, когда точки этой траектории образуют в W открытое множество; в противном случае она сама для себя является ω-предельной или α-предельной, а потому и все W является ее ω-предельным или α-предельным множеством.) Последнее определение годится и для более общих групп преобразований [3]. Определения и часть результатов можно перенести также и на случай необратимых преобразований и полугрупп, хотя обычно в топологич. динамике таковыми не занимаются.

Лит.: [1] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.—Л., 1941; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [3] Gottschalk W., Hedlund G. A., Topological dynamics, Providence, 1955.

Д. В. Аносов.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение между топологич. пространствами; топологич. пространства X и Y наз. топологически эквивалентными, если они гомеоморфны, т. е. если существует гомеоморфизм пространства X на пространство Y. Т. э. является рефлексивным, симметричным и транзитивным бинарным отношением на классе всех топологич. пространств. В соответствии с этим совокупность всех топологич. пространств разбивается отношением Т. э. на попарно не пересекающиеся классы Т. э. Свойства топологич. пространств, сохраняемые отношением Т. э., т.е. сохраняемые произвольными гомеоморфизмами, наз. топологич. инвариантами. Примеры: прямая и интервал (без концов) топологически эквивалентны; прямая и замкнутый интервал, т. е. отрезок, топологически не эквивалентны. Любые два треугольника топологически эквивалентны, однако класс Т. э., содержащий все треугольники, ими не исчерпывается — он содержит, например, еще и все круги. Важным расширением отношения Т. э. является отношение гомотопической эквивалентности (см. *Гомотопический тип*).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948.

А. В. Архангельский.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ — понятие *топологической динамики* и *эргодической теории*, аналогичное метрич. *энтропии* динамич. систем (введена в [1]). Для открытого покрытия $\mathfrak{A}$ компакта X через $H(\mathfrak{A})$ обозначается логарифм (обычно двоичный) наименьшего числа элементов покрытия, к-рые все еще покрывают X. Если $S: X \to X$ — непрерывное отображение, то существует предел

$$h(S, \mathfrak{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathfrak{A} \vee S^{-1}\mathfrak{A} \vee \ldots \vee S^{-n+1}\mathfrak{A}),$$

где $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ — покрытие, элементы к-рого суть непустые пересечения элементов покрытий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Т. э. $h_{\text{top}}(S)$ определяют как верхнюю грань $h(S, \mathfrak{A})$ по всевозможным $\mathfrak{A}$. Эквивалентное определение в метризуемом случае: пусть для метрики ρ через $K_\varepsilon(X, \rho)$ обозначено наибольшее число точек X, попарные расстояния между к-рыми больше ε; тогда

$$h_{\text{top}}(S) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg K_\varepsilon(X, \rho_n),$$

где $\rho_n(x, y) = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \rho(S^i x, S^i y)$ (см. [2] — [4]).

Оказывается, что

$$h_{\text{top}}(S^n) = n h_{\text{top}}(S),$$

а если S — гомеоморфизм, то $h_{\text{top}}(S^{-1}) = h_{\text{top}}(S)$. Поэтому Т. э. *каскада* $\{S^n\}$ естественно считать $h_{\text{top}}(S)$. Для топологич. *потока* $\{S_t\}$ оказывается, что

$$h_{\text{top}}(S_t) = |t| h_{\text{top}}(S_1),$$

поэтому Т. э. потока естественно считать $h_{\text{top}}(S_1)$. Несколько иначе определяется Т. э. для других групп преобразований (она уже не сводится к Т. э. одного из преобразований, входящих в группу; см [7]).

Т. э. $h_{\text{top}}(S)$ совпадает с верхней гранью метрич. энтропий $h_\mu(S)$ по всевозможным нормированным борелевским инвариантным мерам μ (см. [2], [5]—[7]). Это — частный случай вариационного принципа, устанавливающего топологич. интерпретацию величины

$$\sup_\mu \left[h_\mu(S) + \int f d\mu \right]$$

с фиксированной непрерывной функцией f (см. [4], [8], [9]). Т. э. дает характеристику «сложности» или «разнообразия» движений в динамич. системе (см. [10], [3], [4]); с ней также связана в нек-рых случаях асимптотика (при $T\to\infty$) числа *периодических траекторий* (периода $\leqslant T$; см. [3], [4], [11]—[13]). «Гипотеза об энтропии», доказанная лишь частично (1982), утверждает, что Т. э. диффеоморфизма S замкнутого многообразия W не меньше логарифма спектрального радиуса линейного преобразования, индуцируемого S в гомологиях $H_*(W; \mathbb{R})$ (см. [14], [15]).

Лит.: [1] Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 114, p. 309—319; [2] Динабург Е. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 2, с. 324—66; [3] Алексеев В. М., Символическая динамика, в кн.: Одиннадцатая математическая школа, К., 1976; [4] Боуэн Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [5] Goodman T. N. T., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1971, v. 3, № 2, p. 176—80; [6] Goodwyn L. W., «Amer. J. Math.», 1972, v. 94, № 2, p. 366—68; [7] Тагизаде А. Т., «Докл. АН Азерб. ССР», 1978, т. 34, № 6, с. 18—22, № 8, с. 11—14; [8] Степин А. М., Тагизаде А. Т., «Докл. АН СССР», 1980, т. 254, № 3, с. 545—49; [9] Moulin Ollagnier J., Pinchon D., «Studia math.», 1982, т. 72, fasc. 2, p. 151—59; [10] Брудно А. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1982, т. 44, с. 124—49; [11] Кушниренко А. Г., Каток А. Б., Алексеев В. М., в кн.: Девятая летняя математическая школа, 2 изд., К., 1976, с. 50—341; [12] Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [13] Katok A., «Publs. math. Inst. hautes étud. sci.», 1980, № 51, p. 137—73; [14] Гладкие динамические системы, пер. с англ., М., 1977; [15] Fried D., Shub M., «Publs. math. Inst. hautes étud. sci.», 1979, № 50, p. 203—14; [16] Denker M., Grillenberger Chr., Sigmund K., Ergodic theory on compact spaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1976.

Д. В. Аносов.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ — произвольное свойство *топологического пространства*.

Если множество X снабжено какой-либо структурой, однозначно порождающей нек-рую топологию и следовательно превращающей X в топологич. пространство, то под Т. и. множества X понимается свойство именно топологич. пространства, порожденного данной в X структурой. Так, напр., говорят о *связности* метрич. пространства или об односвязности данного дифференцируемого многообразия, имея в виду соответствующие свойства топологич. пространства, топология к-рого порождается данной на множестве X метрич. или дифференциально геометрич. структурой.

Уже в самый первый период развития топологии, наряду с простейшими Т. и. как, напр., связность, компактность и др., большое внимание привлекли к себе т. н. числовые инварианты, в начале определявшиеся главным образом для полиэдров; таковы в первую очередь были *размерность* и *Betти числа*. Для замкнутых поверхностей еще раньше рассматривался *род поверхности*, сразу же выражающийся через

первое число Бетти. Затем большое значение приобрели Т. и., являющиеся группами, а впоследствии и др. алгебраич. структурами. Таковы, напр., группы Бетти или *гомологии группы* различных размерностей, рангами к-рых и являются числа Бетти; *фундаментальная группа*, обобщением к-рой для любых размерностей явились *гомотопические группы*, а также пересечений кольцо многообразий, вскоре замененное гораздо более общим и удобным для применений когомологич. кольцом Александера — Колмогорова, определенным не только для полиэдров, но и для чрезвычайно широкого класса топологич. пространств, и др.

В случае полиэдров важные Т. и. часто, и даже преимущественно, определялись как свойства симплициальных комплексов, являющихся триангуляциями данного полиэдра. Такие определения требовали последующего доказательства т. н. теорем инвариантности, утверждавших, что соответствующее свойство не меняется при переходе от одной какой-нибудь триангуляции данного полиэдра к любой триангуляции того же или гомеоморфного ему полиэдра.

П. С. Александров.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ (левый) — абелева топологич. группа A, являющаяся модулем над топологич. кольцом R, при этом требуется, чтобы отображение умножения $R\times A\to A$, переводящее (r, a) в ra, было непрерывно. Аналогичным образом определяются правые Т. м. Любой подмодуль B Т. м. A сам является Т. м. Если модуль A отделим и B замкнут в A, то A/B — отделимый модуль. Прямое произведение топологич. модулей является Т. м. Пополнение $\hat{A}$ модуля A как абелевой топологич. группы можно наделить естественной структурой Т. м. над пополнением $\hat{R}$ кольца R.

Топологическим G-модулем, где G — нек-рая топологич. группа, наз. топологич. абелева группа A, являющаяся G-модулем, причем требуется, чтобы отображение умножения $G\times A\to A$ было непрерывно.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [2] его же, Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

Л. В. Кузьмин.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО над топологическим полем (т. п.), K — векторное пространство E над K, наделенное топологией, согласующейся со структурой векторного пространства, т. е. удовлетворяющей следующим аксиомам: 1) отображение $(x_1, x_2)\mapsto x_1+x_2$, $E\times E\to E$ непрерывно; 2) отображение $(k, x)\mapsto kx$, $K\times E\to E$ непрерывно (при этом предполагается, что произведения $E\times E$ и $K\times E$ наделены произведениями соответствующих топологий). Совершенно аналогично можно определить топологическое левое и правое векторные пространства над (не обязательно коммутативным) топологич. телом. Для обозначения Т. в. п. E с топологией τ иногда будет использоваться символ (E, τ); с другой стороны, упоминание о поле K часто будет опускаться.

Т. в. п. E_1 и E_2 над одним и тем же т. п. наз. изоморфными, если существует непрерывное линейное взаимно однозначное отображение E_1 на E_2, обратное к к-рому также непрерывно. Размерностью Т. в. п. (E, τ) наз. размерность векторного пространства E.

Способы задания топологии Т. в. п. и ее свойства. Пусть (E, τ) — Т. в. п. над т. п. K. Топология τ инвариантна относительно сдвигов (т. е. для каждого $a\in E$ отображение $x\mapsto x+a$ представляет собой гомеоморфизм E на себя); поэтому топология τ однозначно определяется *базой* (базисом, фундаментальной системой) окрестностей всякой фиксированной точки (в частности, нуля). Топология τ согласуется со структурой аддитивной группы пространства E, и справедливы следующие предложения. 1. Для того чтобы E было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $x\in E$, $x\neq 0$ существовала окрестность нуля, не содержащая x. 2. Если E отделимо, то оно вполне регулярно. 3. В E существует единственная равномерная структура, обладающая следующими свойствами: а) она инвариантна относительно сдвигов (т. е. для нее все сдвиги представляют собой равномерно непрерывные отображения); б) ассоциированная с ней топология совпадает с исходной топологией пространства E. Множество в Т. в. п. наз. полным, если оно полно относительно равномерной структуры, о к-рой только что шла речь. Т. о., Т. в. п. E полно, если всякий *Коши фильтр* в E сходится. Для всякого Т. в. п. E существует полное Т. в. п. над тем же полем, содержащее E в качестве всюду плотного подмножества и индуцирующее на E исходные линейную структуру и топологию; оно наз. пополнением пространства E. Всякое отделимое Т. в. п. обладает отделимым пополнением, единственным с точностью до изоморфизма, оставляющего неподвижными элементы пространства E.

Всюду далее предполагается, если не оговорено противное, что K — недискретное нормированное поле, наделенное топологией, определяемой *нормой*. Если E — векторное пространство над K, то множество $Q\subset E$ называется закругленным (или уравновешенным), если $kQ\subset Q$ при $k\in K$, $|k|\leqslant 1$. Если A и B — два подмножества в E, то говорят, что A поглощает B, если существует такое положительное число r, что $kA\supset B$ при $k\in K$, $|k|>r$. Подмножество пространства E наз. поглощающим (или радиальным), если оно поглощает каждое одноточечное множество. Во всяком Т. в. п. E над K существует база $\mathcal{U}$ замкнутых окрестностей нуля со следующими свойствами: 1) для всякого множества $V\in\mathcal{U}$ существует $W\in\mathcal{U}$ такое, что $W+W\subset V$; 2) каждое $V\in\mathcal{U}$ — закругленное поглощающее множество; 3) если $V\in\mathcal{U}$, то и $kV\in\mathcal{U}$ для всякого $k\in K$, $k\neq 0$. С другой стороны, пусть τ — топология в векторном пространстве E над K, инвариантная относительно сдвигов и обладающая базой окрестностей нуля, имеющей свойства (1) и (2), а также следующее свойство: 3а) существует такое $k\in K$, $0<|k|<1$, что, если $V\in\mathcal{U}$, то и $kV\in\mathcal{U}$. Тогда E, наделенное топологией τ, — Т. в. п. над K (в том случае, когда норма в поле K архимедова, (3а) является следствием остальных требований, наложенных на (E, τ)). Всякий базис фильтра $\mathcal{U}$ в векторном пространстве E над K, обладающий свойствами (1), (2), (3а), а в случае поля с архимедовой нормой — хотя бы свойствами (1) и (2), — является фундаментальной системой окрестностей нуля (не обязательно замкнутых) нек-рой однозначно определяемой топологии τ в E, согласующейся со структурой векторного пространства в E. Т. в. п. E над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и его топология наз. локально выпуклыми, если E обладает базой окрестностей нуля, состоящей из выпуклых множеств (иногда в определение локально выпуклого пространства включается еще требование его отделимости).

Примеры. 1. Всякое т. п. K может рассматриваться как (одномерное) Т. в. п. над K; рассматриваемое таким образом, оно будет обозначаться символом K_0; 2. Пусть I — нек-рое непустое множество и K_0^I — векторное пространство над K, представляющее собой произведение I экземпляров векторного пространства K_0, наделенное топологией, являющейся произведением топологий сомножителей. Тогда K_0^I — Т. в. п. 3. Если топология т. п. K дискретна, то всякое векторное пространство E над K, наделенное топологией,

согласующейся со структурой его аддитивной группы и инвариантной относительно операций умножения на ненулевые элементы из K, является Т. в. п. (этим условиям удовлетворяет, в частности, дискретная топология в E). Т. в. п. над полями с дискретной топологией наз. топологическими векторными группами. 4. Пусть E — векторное пространство над т. п. K, $\mathcal{P}$ — нек-рое множество полунорм на E. Шаром радиуса $r>0$ по *полунорме* p на E наз. множество $\{x\in E, p(x)<r\}$. Множество пересечений всевозможных конечных семейств шаров [всевозможных (положительных) радиусов] по (всевозможным) полунормам, принадлежащим множеству $\mathcal{P}$, образует базис окрестностей нуля нек-рой топологии $\tau_{\mathcal{P}}$ в E, согласующейся со структурой векторного пространства; говорят, что эта топология задается, или определяется семейством полунорм $\mathcal{P}$. Если $K=\mathbb{R}$ или $K=\mathbb{C}$, то топология $\tau_{\mathcal{P}}$ локально выпукла; обратно, топология всякого *локально выпуклого пространства* (л. в. п.) E может быть задана нек-рым множеством полунорм — например, множеством калибровочных функций (функционалов Минковского) произвольной предбазы окрестностей нуля в E, состоящей из закругленных выпуклых множеств.

Подмножество Т. в. п. наз. ограниченным, если оно поглощается всякой окрестностью нуля.

Т. в. п. наз. нормируемым, если его топология может быть задана одной нормой. Для того чтобы Т. в. п. над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ было нормируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимым и обладало выпуклой ограниченной окрестностью нуля (теорема Колмогорова).

5. Пусть n — натуральное число, I_n — множество, содержащее n элементов и $K_0^n=K_0^{I_n}$. Топология в K_0^n определяется нормой $\|x\|=\sum_{i=1}^n|x_i|$, где символ $|\cdot|$ обозначает норму в K. Если поле K полно, то всякое n-мерное Т. в. п. над K изоморфно пространству K_0^n (при $n=1$ это верно и без предположения полноты K). Если поле K локально компактно, то для того, чтобы отделимое Т. в. п. над K было конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало предкомпактной окрестностью нуля (теорема Тихонова).

Т. в. п. наз. метризуемым, если его топология может быть задана нек-рой *метрикой* (среди таких метрик всегда существует метрика, инвариантная относительно сдвигов). Для метризуемости Т. в. п. необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимым и обладало счетной базой окрестностей нуля.

6. Пусть (E, τ) — Т. в. п., E_1 — векторное подпространство векторного пространства E, τ_1 — топология, индуцированная в E_1 топологией E. Топология τ_1 согласуется со структурой векторного пространства E_1; Т. в. п. (E_1, τ_1) наз. топологическим векторным подпространством Т. в. п. (E, τ). Если $\mathcal{U}$ — база (соответственно, предбаза) окрестностей нуля в (E, τ), то множество $\{V\cap E_1 : V\in\mathcal{U}\}$ образует базу (соответственно, предбазу) окрестностей нуля в (E_1, τ_1). Если (E, τ) отделимо (соответственно, метризуемо, локально выпукло), то и (E_1, τ_1) таково же. Если топология τ задается нек-рым множеством полунорм, то топология τ_1 определяется сужениями этих полунорм на E_1.

7. Пусть (E, τ) и E_1 — те же, что в предыдущем пункте, и $E|E_1$ — факторпространство векторного пространства E по его подпространству E_1. Фактортопология τ_2 в $E|E_1$ согласуется со структурой векторного пространства в $E|E_1$; Т. в. п. $(E|E_1, \tau_2)$ наз. топологическим векторным факторпространством Т. в. п. (E, τ) по E_1. (По определению фактортопологии, множество $V\subset E|E_1$ открыто в τ_2 в точности тогда, когда его прообраз относительно канонич. отображения $E\to E|E_1$ открыт в (E, τ). Если $\mathcal{U}$ — база окрестностей нуля в E, то множество образов ее элементов относительно канонич. отображения $E\to E|E_1$ образуют базу окрестностей нуля в $(E|E_1, \tau_2)$ (для предбаз это, вообще говоря, не так). Для того чтобы Т. в. п. $(E|E_1, \tau_2)$ было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы подпространство E_1 было замкнуто в (E, τ). Если $\{\overline{0}\}$ — замыкание одноточечного множества $\{0\}$ в (E, τ), то (отделимое) топологич. векторное факторпространство $E/\{\overline{0}\}$ наз. отделимым Т. в. п., ассоциированным с Т. в. п. E; конечно, если само E отделимо, то ассоциированное с ним отделимое Т. в. п. ему изоморфно. Если E локально выпукло (соответственно, если E метризуемо, а E_1 замкнуто; если E метризуемо и полно), то $E|E_1$ локально выпукло (соответственно, метризуемо; полно); однако E может быть полным (неметризуемым) без того, чтобы (даже отделимое и метризуемое) его топологическое векторное факторпространство было полно (см. ниже).

8. Пусть $\mathcal{F}$ — векторное пространство всех измеримых по Лебегу действительных функций на $[0, 1]$, μ_l — мера Лебега на этом отрезке и для каждого $n\in\mathbb{Z}_+$

$$V_n=\left\{f\in\mathcal{F},\ \mu_l\left\{t\in[0,\ 1]\,|\,f\ (t)\,|>\frac{1}{n+1}\right\}<\frac{1}{n+1}\right\}.$$

Множество $\mathcal{U}=\{V_n : n\in N\}$ образует базис фильтра в $\mathcal{F}$, обладающий (определенными выше) свойствами (1) и (2); пусть τ — согласующаяся со структурой векторного пространства топология в $\mathcal{F}$, для к-рой $\mathcal{U}$ является базой окрестностей нуля, и $\mathcal{F}_0$ — ассоциированное с $(\mathcal{F}, \tau)$ отделимое Т. в. п. (само $(\mathcal{F}, \tau)$ неотделимо). Т. в. п. $\mathcal{F}_0$ метризуемо, но не локально выпукло; его можно отождествить — как векторное пространство — с пространством классов μ_l-эквивалентных μ_l-измеримых действительных функций на $[0, 1]$; сходимость последовательностей в пространстве $(\mathcal{F}, \tau)$ (соответственно, в пространстве $\mathcal{F}_0$) совпадает со сходимостью по мере (в первом случае — индивидуальных функций, а во втором — классов μ_l-эквивалентности таких функций).

Всюду далее предполагается, что $K=\mathbb{R}$ или $K=\mathbb{C}$.

9. Пусть $S=S(\mathbb{R}^n)$ — векторное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций φ, определенных на $\mathbb{R}^n$, принимающих значения в K и удовлетворяющих следующему условию [далее $t=(t_1, \ldots, t_n)\in\mathbb{R}^n$]: для всех k, $r\in\mathbb{Z}_+$

$$p_{rk}(\varphi)\equiv\max\,(1+\|t\|^r)\,\|\varphi^{(k)}(t)\|<\infty,$$

где

$$\|t\|=\left(\sum|t_i|^2\right)^{1/2},$$

$$\|\varphi^{(k)}(t)\|=\max\left\{\left|\frac{\partial^k\varphi(t)}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_n^{k_n}}\right| : k_1+\ldots+k_n=k\right\}.$$

Наделенное топологией τ_S, задаваемой семейством норм p_{rk}, определяемых предыдущим равенством, S становится полным метризуемым локально выпуклым пространством (такие пространства наз. пространствами Фреше). Пространство (S_i, τ_S) играет важную роль в теории *обобщенных функций*. Интересно, что на S не существует никакой нормы, превращающей S в банахово пространство, в топологии к-рого каждая из функций $\varphi\mapsto\varphi(t)$, $S\to K(t\in\mathbb{R})$ непрерывна (в частности, л. в. п. (S, τ_S) ненормируемо).

Некоторые методы построения Т. в. п. 1. Проективные топологии. Пусть E — векторное пространство и для каждого α из нек-рого множества $\mathfrak{A}$ индексов g_α — линейное отображение E в Т. в. п. E_α; тогда в E среди всех топологий, для к-рых непрерывны все отображения g_α, существует самая слабая

топология τ (она является верхней гранью семейства топологий $\{g_\alpha^{-1}(\tau_\alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$, где для каждого α τ_α — топология в E_α). Топология τ наз. проективной топологией — а наделенное ею пространство E — проективным пределом семейства пространств E_α относительно отображений g_α; топология τ_α согласуется со структурой векторного пространства в E, а если все пространства E локально выпуклы, то таково же и (E, τ). (Иногда термин «проективный предел» используется для обозначения несколько более специальной конструкции, а не как синоним термина «пространство, наделенное проективной топологией»,— см. *Локально выпуклое пространство.*) Примеры проективных пределов: а) произведение семейства векторных пространств $\{E_\alpha\}$, наделенное проективной топологией относительно отображений g_α, представляющих собой соответствующие проекции — отсюда и термин «проективный предел»; б) пусть E — векторное пространство и $\{\tau_\alpha\}$ — семейство топологий в E, согласующихся со структурой векторного пространства; пространство E, наделенное верхней гранью топологий семейства $\{\tau_\alpha\}$,— это проективный предел семейства Т. в. п. $\{(E, \tau_\alpha)\}$ относительно отображений, каждое из к-рых совпадает с тождественным отображением $E \to E$; в) топологич. векторное подпространство E_1 Т. в. п. E — это проективный предел одноэлементного семейства $\{E\}$ относительно отображения, представляющего собой канонич. вложение $E_1 \to E$; г) произвольное л. в. п. представляет собой проективный предел нек-рого семейства *банаховых пространств*.

2. Индуктивные топологии. Пусть E — векторное пространство и для каждого α из нек-рого множества $\mathfrak{A}$ индексов g_α — линейное отображение Т. в. п. E_α в E. Тогда в E существуют: а) сильнейшая среди всех топологий, для к-рых каждое из отображений g_α непрерывно; б) сильнейшая среди всех топологий, согласующихся со структурой векторного пространства, для к-рых эти же отображения непрерывны; в) сильнейшая среди всех локально выпуклых топологий, для к-рых все отображения g_α непрерывны (даже в том случае, когда все E_α — л. в. п., эти три топологии могут быть различными). Если все E_α — л. в. п., то пространство E, наделенное топологией, определенной в пункте в), наз. индуктивным пределом семейства $\{E_\alpha\}$ л. в. п. относительно отображений g_α, а сама эта топология — индуктивной топологией (того же семейства л. в. п. относительно тех же отображений). Термин «индуктивный предел» также используется в различных смыслах; здесь приведено самое широкое из встречающихся в литературе его определений. Индуктивная топология является и проективной как верхняя грань нек-рого множества топологий. Примеры индуктивных пределов. 1) Локально выпуклая прямая сумма семейства $\{E_\alpha\}$ л. в. п. Это — алгебраич. прямая сумма E семейства векторных пространств $\{E_\alpha\}$, наделенная индуктивной топологией семейства л. в. п. $\{E_\alpha\}$ относительно отображений g_α, представляющих собой канонич. вложения пространств E_α в E. 2) Пусть E — векторное пространство и $\{\tau_\alpha\}$ семейство локально выпуклых топологий в E, согласующихся со структурой векторного пространства, и τ — их нижняя грань в классе локально выпуклых топологий. Л. в. п. (E, τ) — это индуктивный предел семейства л. в. п. $\{E_\alpha\}$ относительно отображений, каждое из к-рых совпадает с тождественным отображением $E_\alpha \to E$. 3) Пусть E — л. в. п., E_1 — его векторное подпространство. Топологич. векторное факторпространство $E|E_1$ представляет собой индуктивный предел одноэлементного семейства $\{E\}$ относительно канонич. отображения $E \to E|E_1$. 4) Л. в. п. наз. борнологическим, если всякое его линейное отображение в произвольное банахово пространство, переводящее каждое ограниченное множество в ограниченное, непрерывно. Л. в. п. является борнологическим в том и только в том случае, если оно представляет собой индуктивный предел нек-рого семейства нормируемых л. в. п. 5) Пусть Ω — непустое открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и для каждого компакта $K \subset \Omega$ D_K — топологическое векторное подпространство пространства $(S(\mathbb{R}^n), \tau_S)$, образованное — как векторное пространство — всеми функциями из $S(\mathbb{R}^n)$, обращающимися в нуль вне K. Пусть $D(\Omega)$ — векторное пространство $\bigcup \{D_K : K \subset \Omega\}$, наделенное индуктивной топологией семейства л. в. п. $\{D_K : K \subset \Omega\}$ относительно канонич. вложений $D_K \to D_\Omega$. Л. в. п. $D(\Omega)$ (также играющее важную роль в теории обобщенных функций) полно, сепарабельно, неметризуемо; оно финально компактно и потому паракомпактно и, следовательно, нормально. Л. в. п. $D(\Omega)$ обладает неполным метризуемым факторпространством [11].

3. Пространства отображений. Пусть E — Т. в. п., T — нек-рое множество, σ — множество нек-рых подмножеств T, направленное по включению, то есть обладающее следующим свойством: для всех B_1, $B_2 \in \sigma$ существует $B_3 \in \sigma$, $B_3 \supset B_1 \cup B_2$; L — нек-рое векторное пространство отображений T в E (с естественными алгебраич. операциями) и $\mathcal{U}$ — база окрестностей нуля в E. Для $B \in \sigma$ и $V \in \mathcal{U}$ пусть $v_{B;\,V} = \{g \in L,\ g(B) \subset V\}$; множество $\{v_{B;\,V} : B \in \sigma,\ V \in \mathcal{U}\}$ является базой окрестностей нуля (роль к-рого играет отображение $f \in L$, переводящее все T в нуль пространства E), единственной инвариантной относительно сдвигов топологии в L, наз. топологией равномерной сходимости на множествах из σ или, короче, σ-топологией. Эта топология согласуется со структурой векторного пространства в L в том и только в том случае, если, каковы бы ни были $B \in \sigma$ и $f \in L$, множество $f(B)$ ограничено в E. Так будет, в частности, если σ — это множество всех конечных подмножеств множества T; в этом случае σ — топология в L наз. топологией поточечной сходимости. Эта топология является проективной топологией (в L) семейства $\{E_t : t \in T\}$, элементы к-рого представляют собой различные экземпляры пространства K_0 относительно отображений $L \to E_t$, $g \mapsto g(t)$. Пространство L, наделенное σ-топологией, будет обозначаться символом L_σ; если E — Т. в. п., причем все отображения, являющиеся элементами пространства L, линейны и непрерывны, а все множества, являющиеся элементами σ, ограничены в T, то L_σ — также Т. в. п.; если к тому же E — л. в. п., то и L_σ — л. в. п. Векторное пространство всех линейных непрерывных отображений Т. в. п. E_1 в E_2 обозначается символом $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. В частности, пусть E — л. в. п. Пространством, (топологически) сопряженным к E, наз. векторное пространство E' всех линейных непрерывных функционалов на E; таким образом, $E' = \mathcal{L}(E, K)$. Наделенное топологией сходимости на множестве β всех ограниченных подмножеств л. в. п. E, оно наз. сильным сопряженным (а его топология — сильной топологией) и обозначается символом E'_β. Топология поточечной сходимости в E' наз. также слабой топологией; общепринятое обозначение для пространства E', наделенного слабой топологией,— E'_σ. Топология произвольного л. в. п. может рассматриваться как топология сходимости на нек-ром множестве подмножеств сопряженного пространства.

4. Тензорные произведения. Пусть E_1 и E_2 л. в. п., $E_1 \otimes E_2$ — их алгебраич. *тензорное произведение* и b — канонич. билинейное отображение тополо-

гич. произведения $E_1\times E_2$ в $E_1\otimes E_2$. Проективной (соответственно, индуктивной) топологией в $E_1\otimes E_2$ наз. самая сильная среди всех локально выпуклых топологий в $E_1\otimes E_2$, для к-рых отображение b непрерывно (соответственно, раздельно непрерывно). Хотя эта терминология не вполне последовательна, она является общепринятой. Л.в. п., получающееся в результате наделения векторного пространства $E_1\otimes E_2$ проективной (соответственно, индуктивной) топологией, обозначается символом $E_1\otimes_\pi E_2$ ($E_1\otimes_i E_2$), а его пополнение — символом $E_1\widehat{\otimes}_\pi E_2$ ($E_1\widehat{\otimes}_i E_2$). Пространства $E_1\otimes_\pi E_2$ и $E_1\otimes_i E_2$ наз. локально выпуклыми тензорными произведениями соответствующих л. в. п., а их пополнения — полными локально выпуклыми тензорными произведениями. Существуют — помимо введенных — и другие локально выпуклые тензорные произведения; они получаются путем наделения алгебраического тензорного произведения топологиями, отличными от описанных. Многие свойства тензорных произведений упрощаются, когда одно из пространств-сомножителей — *ядерное пространство.*

Примеры. Л. в. п. $S(\mathbb{R}^n)\widehat{\otimes}_\pi S(\mathbb{R}^k)$, $S(\mathbb{R}^n)\widehat{\otimes}_i S(\mathbb{R}^k)$ и $S(\mathbb{R}^{n+k})$ канонически изоморфны (изоморфизм первых двух л. в. п. является следствием того, что всякое раздельно непрерывное билинейное отображение произведения пространств Фреше в произвольное л. в. п. непрерывно). Л. в. п. $D(\mathbb{R}^n)\widehat{\otimes}_i D(\mathbb{R}^k)$ и $D(\mathbb{R}^{n+k})$ также канонически изоморфны; векторные пространства $D(\mathbb{R}^n)\widehat{\otimes}_\pi D(\mathbb{R}^k)$ и $D(\mathbb{R}^{n+k})$ канонически изоморфны, хотя топологии в них не совпадают [8], [9].

Двойственность. Важную роль при исследовании л. в. п. играет использование двойственности между л. в. п. и его сопряженным. В частности, нек-рые свойства л. в. п. зависят лишь от объема сопряженного пространства. Так, если E — л. в. п., и E' — его сопряженное, то для всех локально выпуклых топологий в E, согласующихся с двойственностью между E и E', ограниченные множества — одни и те же и замкнутые выпуклые множества также одни и те же.

Теория двойственности оказывается полезной при исследовании полных пространств. Так, л. в. п. (соответственно, метризуемое л. в. п.) E полно в том и только в том случае, если всякое гиперподпространство (соответственно, выпуклое подмножество) его сопряженного E', обладающее замкнутыми в топологии $\sigma(E', E)$ пересечениями с полярами всех окрестностей нуля пространства E, само замкнуто в этой топологии (теоремы Банаха-Гротендика и Крейна-Шмульяна).

В связи с этим вводятся следующие определения. Л. в. п. наз. B_r-полным (соответственно, совершенно полным, гиперполным, пространством Крейна—Шмульяна), если всякое всюду плотное линейное подпространство (соответственно, линейное подпространство, абсолютно выпуклое подмножество, выпуклое подмножество) пространства $(E', \sigma(E', E))$, обладающее замкнутыми пересечениями с полярами всех окрестностей нуля из E, само является замкнутым. Эти классы пространств играют важную роль в обобщениях теорем Банаха о замкнутом графике и открытом отображении (см. ниже). Полные метризуемые л. в. п. и сильные сопряженные к рефлексивным (см. ниже) метризуемым л. в. п. входят в каждый из этих классов; в то же время пространства D и D' не входят ни в один из них. Классы гиперполных пространств и пространств Крейна — Шмульяна не совпадают, однако до сих пор (1984) не известно, совпадают или нет классы B_r-полных и гиперполных пространств.

С помощью теории двойственности доказываются также следующие предложения о компактных подмножествах л. в. п. 1) Пусть E — л. в. п. и H — подмножество E, замкнутая выпуклая оболочка которого полна в топологии Макки. Если всякая последовательность элементов из H обладает в E предельной точкой, то H относительно компактно (теорема Эберлейна). 2) Пусть E — метризуемое л. в. п., $\{x_n\}$ — последовательность в E, всякая подпоследовательность к-рой обладает в $(E, \sigma(E, E'))$ предельной точкой. Тогда из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (теорема Шмульяна). 3) Пусть B — компактное подмножество в отделимом л. в. п. E и C — замкнутая выпуклая оболочка B. Тогда C компактно в том и только в том случае, когда оно полно в топологии Макки (теорема Крейна).

Л. в. п. E наз. полурефлексивным (соответственно, рефлексивным), если канонич. вложение $x\mapsto[g\mapsto g(x)]$, $E\to(E'_\beta)'_\beta$ представляет собой изоморфизм векторных пространств (соответственно, изоморфизм Т. в. п.). Для того чтобы л. в. п. E было полурефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы всякое его ограниченное подмножество было относительно компактно в топологии $\sigma(E, E')$; для того чтобы оно было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было полурефлексивным и *бочечным пространством.*

Отображения Т. в. п. 1. Теоремы о замкнутом графике и открытом отображении. Линейное отображение Т. в. п. E_1 в Т. в. п. E_2 наз. топологическим гомоморфизмом, если оно переводит всякое открытое в E_1 множество в множество, открытое в $f(E_1)$ (в топологии, индуцированной топологией пространства E_2). График отображения $f: E_1\to E_2$ наз. множество $\{(x, f(x): x\in E_1\}\subset E_1\times E_2$.

Пусть $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — два класса Т. в. п. Говорят, что для пары $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ справедлива теорема о замкнутом графике (соответственно, о гомоморфизме), если для всех $E_1\in\mathscr{E}_1$, $E_2\in\mathscr{E}_2$ всякое линейное отображение $f: E_1\to E_2$, обладающее замкнутым в Т. в. п. $E_1\times E_2$ графиком, непрерывно (соответственно, если всякое непрерывное линейное отображение E_2 на E_1 является топологич. гомоморфизмом). Если $\mathscr{E}$ — класс всех полных метризуемых Т. в. п., то для пары $(\mathscr{E}, \mathscr{E})$ справедливы как теорема о замкнутом графике, так и теорема о гомоморфизме (теорема Банаха). Этот результат усилен: пусть $\mathscr{E}_1$ — класс всех отделимых л. в. п., являющихся индуктивными пределами семейств банаховых пространств, а $\mathscr{E}_2$ — наименьший класс л. в. п., содержащий все полные метризуемые л. в. п. и замкнутый относительно образования проективных и индуктивных пределов счетных семейств входящих в него пространств. Тогда для пары $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ справедливы теоремы о замкнутом графике и гомоморфизме (теорема Райкова) [все встречающиеся в функциональном анализе сепарабельные л. в. п. в их неослабленной топологии входят сразу в оба эти класса]. Фактически сформулированное утверждение доказано для нек-рого, более широкого, чем $\mathscr{E}_2$, класса $\mathscr{E}'_2$ Т. в. п. и для многозначных линейных отображений; описан [7] еще один класс $\mathscr{E}''_2\supset\mathscr{E}'_2$ Т. в. п., к-рый может играть в сформулированном утверждении роль класса $\mathscr{E}_2$ — т. н. пространства с сетью.

Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_\mathscr{P}$, $\mathscr{E}^r_\mathscr{P}$, соответственно,— классы всех бочечных, всех совершенно полных и всех B_r-полных л. в. п. Тогда для пары $(\mathscr{E}, \mathscr{E}^r_\mathscr{P})$ справедлива теорема о замкнутом графике, а для пары $(\mathscr{E}, \mathscr{E}_\mathscr{P})$ — теорема о гомоморфизме.

2. Теоремы о неподвижных точках. а) Пусть E — отделимое л. в. п., K — его непустое выпуклое компактное подмножество и f — отображение множества K в множество его непустых выпуклых замкнутых подмножеств. Пусть для каждого $x\in K$ и каждой окрестности $\mathcal{U}$ множества $f(x)$ существует такая окрестность $\mathcal{V}$ точки x, что $f(\mathcal{V}\cap K)\subset\mathcal{U}$ (это свойство отображения f наз. его полунепрерывностью сверху). Тогда существует точка $z\in K$ такая, что $z\in f(z)$ — «неподвижная точка» отображения f (теорема Фаня — обобщение теоремы Шаудера — Тихонова). б) Пусть E — отделимое Т. в. п., K — его непустое компактное выпуклое подмножество и Γ — некоторое множество попарно коммутирующих непрерывных отображений множества K в K, обладающее следующим свойством: если x, $z\in K$, α, $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha, \beta>0$, $\alpha+\beta=1$, то $g(\alpha x+\beta z)=\alpha g(x)+\beta g(z)$. Тогда существует точка $z_0\in K$ такая, что $g(z_0)=z_0$ для всех $g\in\Gamma$ (теорема Маркова — Какутани).

3. Важное значение в теории ЛВП имеют также *Хана — Банаха теорема* и *Банаха — Штейнхауза теорема*.

Ряд интересных результатов получен в теории мер, принимающих значения в л. в. п. и (особенно) в связанной с теорией случайных процессов теории числовых цилиндрич. мер, определенных на л. в. п.

Возник и продолжает развиваться математич. анализ (в широком смысле) на Т. в. п.— т. н. бесконечномерный анализ. Являясь продолжением классич. анализа, он в то же время качественно отличается от него как постановками задач и результатами, так и методами. Бесконечномерный анализ включает теорию дифференцируемых отображений Т. в. п. и дифференцируемых мер на Т. в. п.; теорию обобщенных функций и мер (распределений) на Т. в. п.; теорию дифференциальных уравнений — как относительно функций вещественного аргумента, принимающих значения в Т. в. п., так и относительно числовых функций и мер (возможно, обобщенных), определенных на Т. в. п. На языке бесконечномерного анализа весьма естественно формулируются основные задачи физики бесконечномерных систем — квантовой теории поля, статистич. механики, гидродинамики,— а также нек-рые математич. задачи, первоначально возникшие вне бесконечномерного анализа.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [4] Эдвардс Р.-Э., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [5] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [6] его же, Операторные идеалы, пер. с англ., М., 1982; [7] Wilde M. de, Closed graph theorems and webbed spaces, L., 1978; [8] Schwartz L., Théorie des distributions, [2 éd.], P., 1957; nouv. éd., P., 1973; его же, Théorie des distributions à valeurs victorielles, Chartres, 1959; [9] Шавгулидзе Е. Т., «Функц. анализ и его прил.», 1977, т. 11, в. 1, с. 91—92; [10] Смолянов О. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 3, с. 682—96; [11] его же, Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения, М., 1979.

О. Г. Смолянов.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО — кольцо R, являющееся топологич. пространством, причем требуется, чтобы отображения

$$(x, y)\to x-y \text{ и } (x, y)\to xy$$

были непрерывны. Т. к. R наз. отделимым, если оно отделимо как топологич. пространство. В этом случае пространство R хаусдорфово. Любое подкольцо M Т. к. R, а также факторкольцо R/J по идеалу J являются Т. к. Если R отделимо и идеал J замкнут, то R/J — отделимое Т. к. Замыкание $\bar{M}$ подкольца M в R также является Т. к. Прямое произведение топологич. колец — Т. к.

Гомоморфизм топологич. колец — это гомоморфизм колец, являющийся непрерывным отображением. Если $f: R_1\to R_2$— такой гомоморфизм, причем f — эпиморфизм и открытое отображение, то R_2 как Т. к. изоморфно кольцу $R_1/\mathrm{Ker}\, f$. Примеры Т. к. доставляют банаховы алгебры. Важный тип Т. к. определяется тем условием, что в качестве фундаментальной системы окрестностей нуля можно выбрать некоторое множество идеалов. Например, с любым идеалом $\mathfrak{m}$ коммутативного кольца R связана $\mathfrak{m}$-адическая топология, в к-рой множества $\mathfrak{m}^n$ для всех натуральных n образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология отделима, если выполнено условие

$$\bigcap_n \mathfrak{m}^n=0.$$

Для Т. к. R определено его пополнение $\hat{R}$, являющееся полным Т. к., причем отделимое кольцо R вкладывается в $\hat{R}$, к-рое тоже отделимо, как всюду плотное подмножество. Аддитивная группа кольца $\hat{R}$ совпадает с пополнением аддитивной группы кольца R как абелевой топологич. группы.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [2] его же, Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979.

Л. В. Кузьмин.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПОЛЕ — топологическое кольцо K, являющееся полем, причем дополнительно требуется, чтобы отображение $a\to a^{-1}$ было непрерывно на $K\setminus\{0\}$. Любое подполе P Т. п. K и замыкание $\bar{P}$ поля P в K снова являются Т. п.

Связные локально компактные Т. п. исчерпываются полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ (см. *Локально компактное тело*). Каждое нормированное поле является Т. п. относительно топологии, порождаемой нормой (см. *Нормирование, Абсолютное значение*). Если существуют два вещественных нормирования u и v поля P, каждое из к-рых превращает P в полное Т. п., и топологии τ_u и τ_v, порождаемые u и v, различны, то поле P алгебраически замкнуто. Поле $\mathbb{C}$ — единственное вещественно нормированное расширение поля $\mathbb{R}$.

На каждом поле бесконечной мощности τ существует ровно 2^{2^τ} различных топологий, превращающих его в Т. п. Топология Т. п. либо антидискретна, либо вполне регулярна. Построены Т. п., топология к-рого не нормальна, и Т. п., топология к-рого нормальна, но не наследственно нормальна. Т. п. либо связно, либо вполне несвязно. Существует связное Т. п. любой конечной характеристики. Неизвестно (1983), можно ли каждое Т. п. вложить в связное Т. п. в качестве подполя. В отличие от топологич. колец и линейных топологич. пространств, не каждое вполне регулярное топологич. пространство можно вложить в качестве подпространства в Т. п. Так, напр., псевдокомпактное (в частности, бикомпактное) подпространство Т.п. всегда метризуемо. Однако каждое вполне регулярное пространство, допускающее взаимно однозначное непрерывное отображение на метрич. пространство, вкладывается в нек-рое Т. п. в качестве подпространства. Если в Т. п. P есть хоть одно счетное незамкнутое множество, то существует более слабая метризуемая топология на поле P, превращающая его в Т. п.

Для Т. п. K определено его пополнение $\tilde{K}$ — полное топологич. кольцо, в к-рое K вкладывается как всюду плотное подполе. Кольцо $\tilde{K}$ может иметь делители нуля. Однако пополнение всякого вещественно нормированного Т. п. есть вещественно нормированное Т. п.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Więsław W., Topological fields, Wrocław, 1982; [3] Шахматов Д. Б., «Докл. АН СССР», 1983, т. 271, № 6, с. 1332—36.

Д. Б. Шахматов.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, тихоновское произведение, семейства топологических пространств $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ — топологич. пространство $(X, \mathcal{T})$, где X — декартово произведение (т. е. полное прямое произведение) множеств X_α по $\alpha \in A$ и $\mathcal{T}$ — слабейшая (т. е. наименьшая) топология на множестве X такая, что все отображения естественного проектирования $\pi_\alpha : (X, \mathcal{T}) \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ непрерывны. Топология $\mathcal{T}$ наз. при этом топологией произведения, а Т. п. $(X, \mathcal{T})$ наз. также топологич. произведением семейства пространств $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$.

Стандартной базой топологич. пространства $(X, \mathcal{T})$ служит семейство всех множеств вида $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольный конечный набор элементов индексирующего множества A, а U_{α_i} — любой элемент топологии $\mathcal{T}_{\alpha_i}$, $i=1, \ldots, n$.

В частности, если семейство $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ состоит из двух пространств X и Y, то базу топологии произведения $Z=X\times Y$ образуют множества вида $U\times V$, где U — произвольное открытое множество в X, а V — произвольное открытое множество в Y. Аналогично описывается база топологии произведения любого конечного упорядоченного множества топологич. пространств. Примеры Т. п.: плоскость — произведение двух прямых, n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ — произведение n прямых, тор — произведение двух окружностей.

Первоначальные попытки определения Т. п. бесконечного множества топологич. пространств относились к случаю метризуемых сомножителей. Соответственно, топологию произведения пытались указать в терминах сходимости обычных (счетных) последовательностей. Когда семейство сомножителей несчетно, получить на этом пути тот же результат, что и выше, было невозможно, так как оператор замыкания в Т. п. несчетного множества неодноточечных метризуемых пространств не может быть описан на языке сходящихся последовательностей или сведен к замыканиям счетных множеств.

Определение Т. п. произвольного бесконечного множества топологич. пространств было дано А. Н. Тихоновым (1925). Он же доказал, что Т. п. бикомпактных пространств всегда является бикомпактным пространством.

Операция Т. п. является одним из главных средств формирования новых топологич. объектов из уже имеющихся. С ее помощью конструируется ряд основных стандартных объектов общей топологии — в частности, *тихоновские кубы* I^τ, определяемые как топологич. произведение семейства мощности τ отрезков числовой прямой. По теореме Тихонова, все тихоновские кубы бикомпактны. А. Н. Тихонов доказал, что всякое вполне регулярное T_1-пространство гомеоморфно подпространству нек-рого куба I^τ.

Кроме кубов I^τ важную роль в топологии играют пространства D^τ и F^τ, являющиеся соответственно произведениями τ штук пространств, состоящих из двух изолированных точек (простых двоеточий D) и двухточечных пространств с одной изолированной точкой (связных двоеточий F). Всякий компакт есть непрерывный образ канторова совершенного множества, т. е. пространства, гомеоморфного произведению счетного числа простых двоеточий D; всякое индуктивно нульмерное пространство, т. е. T_0-пространство, в к-ром открыто-замкнутые множества образуют базу, гомеоморфно подмножеству нек-рого канторова дисконтинуума D^τ; всякое T_0-пространство гомеоморфно подмножеству пространства F^τ.

В связи с силой и ролью операции Т. п. центральное место в проблематике общей топологии занимают вопросы поведения топологич. свойств при операции Т. п. Устойчивы относительно операции Т. п. классы хаусдорфовых пространств, регулярных пространств и вполне регулярных пространств. Но произведение нормального пространства на отрезок может быть не нормальным пространством, не устойчивым относительно операции Т. п., даже в случае конечного числа сомножителей, такие важные топологич. свойства, как линделёфовость и паракомпактность.

Важную роль в общей топологии и ее приложениях (в частности, к построению моделей теории множеств) играет теорема: число Суслина Т. п. любого множества сепарабельных топологич. пространств счетно. В частности, счетно число Суслина любого тихоновского куба.

Операция Т. п. порождает, путем выделения во всем Т. п. определенных подпространств, весьма полезные операции Σ-произведения и σ-произведения. К совершенно иной топологии на декартовом произведении множеств X_α приводит операция ящичного произведения топологий $\mathcal{T}_\alpha$.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [3] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

А. В. Архангельский, В. В. Федорчук.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — совокупность двух объектов: множества X, состоящего из элементов произвольной природы, наз. точками данного пространства, и из введенной в это множество топологической структуры, или топологии, все равно — открытой или замкнутой (одна переходит в другую, если заменить множества, составляющие данную топологию, их дополнениями). Если не сказано противное, под топологией $\mathcal{T}$ будет пониматься открытая топология. Логически самый простой способ определения топологии в данном множестве X заключается в непосредственном указании тех подмножеств множества X, к-рые составляют эту топологию. Но часто проще определять не все множества, являющиеся элементами данной топологии, а только нек-рые множества этих элементов (т. е. *базу* данной топологии), достаточные для того, чтобы все остальные элементы топологии получались как объединения (в случае открытой топологии) или пересечения (в случае замкнутой) множеств, к-рые составляют базу. Так, напр., обычная топология числовой прямой получается, если определить в качестве базы ее открытой топологии множество всех интервалов (можно ограничиться даже одними интервалами с рациональными концами). Остальные открытые множества суть объединения интервалов.

Имея в виду базу открытой и, соответственно, замкнутой топологии, часто говорят об открытой, соответственно, замкнутой базе данного Т. п., причем открытые базы рассматриваются чаще замкнутых, поэтому если говорят просто о базе Т. п., то всегда имеют в виду его открытую базу. Наименьшее кардинальное число (в нетривиальных случаях бесконечное), являющееся мощностью какой-либо базы данного Т. п., наз. его *весом*. После мощности множества всех точек пространства вес является важнейшим т. н. кардинальнозначным инвариантом пространства. Особенно важны пространства, имеющие счетную базу; напр., числовая прямая есть такое пространство. Аналогично, счетная база евклидова n-мерного пространства получается, если взять т. н. рациональные (открытые) шары, т. е. шары, радиус к-рых и координаты центра к-рых суть рациональные числа. Часто приходится определять тем или иным стандартным (естественным) способом топологию во

множестве, снабженном какой-либо другой структурой. Так, говорят об естественной топологии метрич. пространства или об естественной (интервальной) топологии упорядоченного множества. Первая имеет своей базой множество всех открытых шаров данного метрич. пространства, вторая — открытые интервалы данного линейно упорядоченного множества.

Т. п. наз. м е т р и з у е м ы м, если во множестве X его точек можно ввести метрику ρ, порождающую топологию данного Т. п. Метризуемые пространства образуют один из важнейших классов Т. п., и к центральным проблемам общей топологии принадлежали в течение нескольких десятилетий общая и специальная проблемы метризации, т. е. проблемы нахождения необходимых и достаточных условий для того, чтобы Т. п. или Т. п. того или иного специального класса было метризуемым. Эти условия составляют содержание общих или специальных метризационных теорем.

Всякое подмножество X_0 множества X всех точек данного Т. п. X, $\mathfrak{G}$ естественно превращается в Т. п. (подпространство пространства X, $\mathfrak{G}$) с топологией, элементы к-рой суть всевозможные множества вида $X_0 \cap \Gamma$, где Γ — любой элемент топологии $\mathfrak{G}$. Пусть дана (открытая) топология $\mathfrak{G}$ в множестве X, превращающая это множество в Т. п. X, $\mathfrak{G}$. Т. к. топология есть множество нек-рых подмножеств множества X, то между различными топологиями в одном и том же множестве X естественно устанавливается отношение (частичного) порядка (по включению), т. е. топология $\mathfrak{G}_2$ больше (или равна) топологии $\mathfrak{G}_1$, если $\mathfrak{G}_1$ есть подмножество множества $\mathfrak{G}_2$, т. е. каждое множество, открытое в топологии $\mathfrak{G}_1$, будет открытым и в топологии $\mathfrak{G}_2$. Если в пределах данного рассуждения речь идет об одной и той же топологии в данном множестве X, то обыкновенно Т. п. X, $\mathfrak{G}$ обозначается просто X. Из понятия топологии выводятся и все остальные основные топологич. понятия. Прежде всего замкнутые множества определяются как дополнения к открытым. Далее, о к р е с т н о с т ь ю точки x в данном пространстве X наз. всякое открытое множество, содержащее точку x. Понятие окрестности позволяет сразу же определить и понятие т о ч к и п р и к о с н о в е н и я для любого множества $M \subset X$ как такой точки, любая окрестность к-рой имеет непустое пересечение с множеством M. Из этого определения следует, что любая точка самого множества M является точкой прикосновения этого множества. Множество всех точек прикосновения множества M наз. з а м ы к а н и е м множества M и обозначается $[M]$. Переход от любого множества M к его замыканию наз. о п е р а ц и е й з а м ы к а н и я в данном Т. п. Свойства этой операции: 1) $M \subset [M]$, причем $M=[M]$ тогда и только тогда, когда M замкнуто, т. е. его дополнение открыто; 2) $[M_1 \cup M_2]=[M_1] \cup [M_2]$; 3) $[[M]]=[M]$. Замыкание любого множества есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество M; другими словами, $[M]$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее множество M.

Операция замыкания и ее основные свойства 1), 2), 3) получены, исходя из основного (в нашем изложении) понятия топологии или топологич. структуры, введенной в данное множество X. Можно было бы, наоборот, считать основным топологич. понятием понятие замыкания, т. е. считать, что в абстрактно данном множестве X для каждого подмножества M определено подмножество $[M]$, наз. замыканием множества, так что выполнены свойства 1), 2), 3) (наз. в этом случае а к с и о м а м и з а м ы к а н и я, или а к с и о м а м и К у р а т о в с к о г о) и 4) $\varnothing=[\varnothing]$. На основе так введенного понятия замыкания замкнутые множества определятся как множества, совпадающие со своими замыканиями, а открытые множества — как множества, дополнительные к замкнутым; таким образом получается в точности топология в нашем первоначальном смысле, а операция замыкания, к к-рой она приводит, совпадает с той, к-рая была дана априори. Именно этот путь и был избран К. Куратовским (K. Kuratowski, 1922) для построения понятия Т. п. В 1925 П. С. Александровым были введены открытые топологич. структуры. Оба подхода приводят к одному и тому же классу Т. п., в настоящее время являющемуся общепринятым.

С понятием Т. п. тесно связано понятие непрерывного отображения одного пространства в другое. Отображение $f: X \to Y$ Т. п. X в Т. п. Y н е п р е р ы в н о в т о ч к е $x \in X$, если для любой окрестности O_y точки $y=f(x) \in Y$ в пространстве Y существует такая окрестность O_x точки x в X, что $f(O_x) \subset O_y$ (у с л о в и е К о ш и). При этом, не изменяя содержания определения, можно брать окрестности O_y и O_x из любых открытых баз соответственно пространств Y и X. В частности, для метрич. пространств это определение непрерывности переходит в обычное известное из курсов математич. анализа определение. Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно в каждой точке $x \in X$, то оно наз. н е п р е р ы в н ы м о т о б р а ж е н и е м пространства X в пространство Y. Для непрерывности отображения $f: X \to Y$ каждое из следующих условий необходимо и достаточно. 1) Если x есть точка прикосновения какого-либо множества $M \subset X$, то $f(x)$ есть точка прикосновения множества $f(M)$ в Y. 2) Полный прообраз $f^{-1}(\Gamma)$ всякого открытого в Y множества Γ есть открытое множество в X. Аналогично для замкнутых множеств.

Если дано (непрерывное) отображение f Т. п. X в Т. п. Y и X_0 есть подпространство пространства X, то в силу отображения f пространство X_0 отображается в Y и это отображение (наз. о г р а н и ч е н и е м о т о б р а ж е н и я $f: X \to Y$ на подпространство X_0) также непрерывно.

Важный частный случай непрерывных отображений образуют т. н. ф а к т о р н ы е о т о б р а ж е н и я, характеризующиеся каждым из следующих эквивалентных между собой условий. Множество $B \subset Y$ открыто (замкнуто) в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(B)$ обладает тем же свойством в X. Если непрерывное отображение f пространства X на пространство Y взаимно однозначно, то определено и обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$, но это отображение может не быть непрерывным. Если же оно непрерывно, то каждое из отображений f, f^{-1} взаимно однозначно отображает топологию одного из пространств X, Y на топологию другого пространства. Тогда каждое из двух взаимно однозначных отображений f и f^{-1} наз. т о п о л о г и ч е с к и м о т о б р а ж е н и е м, или г о м е о м о р ф и з м о м. Два пространства X и Y, из к-рых одно может быть гомеоморфно отображено на другое, наз. г о м е о м о р ф н ы м и или т о п о л о г и ч е с к и э к в и в а л е н т н ы м и между собою.

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ наз. н е п р и в о д и м ы м, если при этом отображении никакое отличное от всего X замкнутое множество M не отображается на все Y.

Конкретное изучение Т. п. связано прежде всего с выделением из общего класса этих пространств подклассов, характеризующихся теми или иными дополнительными условиями или аксиомами, кроме первоначальных аксиом, определяющих топологию пространства. Эти дополнительные аксиомы бывают разной природы. Прежде всего это группа т. н. а к с и о м о т д е л и м о с т и. Первой аксиомой отделимости была а к с и о м а Х а у с д о р ф а, заключающаяся в требовании, чтобы любые две различные точки про-

странства были отделимы посредством окрестностей, т. е. содержались в дизъюнктных открытых множествах (совокупность двух или более множеств дизъюнктна или состоит из дизъюнктных множеств, если эти множества попарно не имеют общих элементов). Аксиома отделимости Хаусдорфа иначе наз. аксиомой T_2, а удовлетворяющие ей Т. п. наз. хаусдорфовыми или T_2-пространствами. Определив эти пространства, Ф. Хаусдорф (F. Hausdorff) в 1914 впервые открыл достаточно широкий и в то же время достаточно богатый свойствами класс Т. п. и тем удовлетворил уже вполне назревшую к тому времени потребность математики. Дальнейшее развитие общей топологии исходит именно из хаусдорфовых пространств. Ослаблением аксиомы T_2 является аксиома T_1, требующая, чтобы каждая из любых двух точек Т. п. имела окрестность, не содержащую вторую точку. Это требование равносильно требованию замкнутости в данном пространстве всякого множества, состоящего из конечного числа точек. Пространства, удовлетворяющие этому требованию, наз. T_1-пространствами. Еще более широкий класс Т. п. образуют T_0-пространства, т. е. пространства, в к-рых выполнена аксиома T_0 (аксиома Колмогорова): из любых двух точек этого пространства по крайней мере одна имеет окрестность, не содержащую другую точку. T_0-пространства могут состоять из конечного числа и даже из двух точек, если одна точка образует замкнутое множество, но не открытое, а другая, наоборот, образует открытое, но не замкнутое множество (связное двоеточие).

Аксиома T_3 требует, чтобы произвольная точка пространства и произвольное, не содержащее эту точку замкнутое множество были отделимы окрестностями, т. е. содержались соответственно в двух дизъюнктных открытых множествах. Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_3, наз. T_3-пространствами. T_3-пространство может не удовлетворять аксиоме T_1, таково, напр., связное двоеточие. T_0-пространства, удовлетворяющие аксиоме T_1, наз. регулярными; все они — хаусдорфовы пространства. Т. п. наз. T_4-пространством, если в нем всякие два дизъюнктные замкнутые множества имеют дизъюнктные окрестности. T_4-пространства, являющиеся в то же время T_1-пространствами, наз. нормальными, все они регулярны и подавно хаусдорфовы. Всякое множество X_0 точек Т. п. X, $\mathfrak{G}$ получает топологию, однозначно определенную топологией $\mathfrak{G}$, и таким образом становится топологич. подпространством пространства X, $\mathfrak{G}$. При этом всякое подпространство пространства, удовлетворяющего аксиоме T_i, $i=0, 1, 2, 3$, также удовлетворяет аксиоме T_i, т. е. аксиомы T_i наследуются всеми подпространствами данного пространства. Аксиома T_4 этим свойством не обладает: существуют нормальные пространства X, не все (даже открытые в X) подпространства к-рых нормальны. Однако если X_0 — замкнутое множество в нормальном пространстве X, то подпространство X_0 нормально.

До сих пор отделимость точек и множеств понималась в смысле наличия у них дизъюнктных окрестностей. Однако в современной топологии имеет значение и т. н. функциональная отделимость, впервые введенная П. С. Урысоном в 1924. Два множества A и B в Т. п. наз. функционально отделимыми, если существует определенная на всем пространстве X действительная непрерывная и ограниченная на всем X функция f, принимающая во всех точках множества A значение 0 и во всех точках множества B значение 1. В нормальном пространстве всякие два дизъюнктные замкнутые множества функционально отделимы (лемма Урысона). Обратно, из функциональной отделимости двух любых множеств следует и их отделимость посредством окрестностей. В частности, из функциональной отделимости точки и множества следует их отделимость посредством окрестностей в данном пространстве. Но если пространство регулярно и, значит, всякая точка и всякое не содержащее ее замкнутое множество имеют дизъюнктные окрестности, то отсюда еще не следует, что они функционально отделимы. Таким образом, более сильным, чем свойство регулярности, является свойство полной регулярности пространства, заключающееся в том, что всякая точка и всякое не содержащее ее замкнутое множество в этом пространстве функционально отделимы. Среди удовлетворяющих этому условию (или вполне регулярных) пространств наиболее важны вполне регулярные T_1-пространства, наз. тихоновскими пространствами. В частности, пространство всякой топологич. группы является вполне регулярным, но может не быть нормальным.

Наряду с аксиомами отделимости для всей теории Т. п. имеют значение т. н. условия типа компактности. Они основаны на рассмотрении (открытых) покрытий. Семейство Σ (открытых) множеств данного Т. п. наз. покрытием этого пространства X, если каждая точка $x \in X$ содержится хотя бы в одном множестве — элементе семейства Σ. Если каждый элемент покрытия α' является подмножеством хотя бы одного элемента покрытия α, то говорят, что α' вписано в α, или что α' мельче α, или, наконец, что α' следует за α в частично упорядоченном множестве покрытий данного пространства. Частным случаем следования покрытия α' за α является случай, когда α' содержится в α (т. е. каждый элемент покрытия α' есть и элемент покрытия α). То или иное условие типа компактности предполагает, что даны два класса (открытых) покрытий пространства X: класс $\mathfrak{A}$ и класс $\mathfrak{B}$ так, что $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, т. е. каждое покрытие класса $\mathfrak{B}$ есть и покрытие класса $\mathfrak{A}$. Условие $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-компактности состоит в том, что за каждым покрытием класса $\mathfrak{A}$ следует покрытие класса $\mathfrak{B}$. Важнейшее среди всех условий этого типа получается, если $\mathfrak{A}$ есть класс всех открытых покрытий пространства, а $\mathfrak{B}$ — подкласс конечных покрытий, т. е. покрытий, состоящих из конечного числа элементов. Это условие наз. условием бикомпактности; оно эквивалентно т. н. условию Бореля — Лебега: для каждого открытого покрытия α пространства X существует конечное покрытие α' пространства X, содержащееся в α. Хаусдорфовы пространства, удовлетворяющие условию бикомпактности, наз. бикомпактами. Метризуемые бикомпакты (бикомпакты со счетной базой) наз. компактами. В настоящее время получила распространение другая терминология, согласно к-рой бикомпакты наз. компактными Т. п., причем метризуемый случай терминологически не выделяется.

Если за $\mathfrak{A}$ принять класс счетных открытых покрытий, сохраняя в качестве $\mathfrak{B}$ подкласс конечных покрытий, то соответствующая $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-компактность наз. счетной компактностью. Для метризуемых пространств, а также для хаусдорфовых пространств со счетной базой условия бикомпактности и счетной компактности эквивалентны между собой. Если за $\mathfrak{A}$ взять класс всех открытых покрытий, а за $\mathfrak{B}$ — класс счетных покрытий, то получается условие финальной компактности. При формулировке этого условия можно потребовать (как и в случае бикомпактности), чтобы покрытие $\alpha' \in \mathfrak{B}$ не только следовало за покрытием α, но и содержалось в нем.

Важный класс пространств, наз. локально бикомпактными, определяется требованием, чтобы

каждая точка x данного пространства X имела окрестность O_x, замыкание к-рой в пространстве X есть бикомпактное подпространство. Всякое локально бикомпактное хаусдорфово пространство и только такое пространство может рассматриваться как открытое множество нек-рого бикомпакта $\overline{X}$, причем $\overline{X}$ получается из X присоединением одной только точки $\overline{x}$, и топология бикомпакта $\overline{X}$ однозначно определена последним требованием и топологией пространства X; бикомпакт $\overline{X}$ наз. одноточечным, или александровским, бикомпактным расширением пространства X.

Важнейшим после условия бикомпактности условием типа компактности является условие паракомпактности, требующее, чтобы за всяким открытым покрытием α данного пространства X следовало локально конечное открытое покрытие α' (семейство множеств Т. п. наз. локально конечным в нем, если каждая точка его обладает окрестностью, к-рая может иметь общие точки лишь с конечным числом множеств семейства). Здесь уже нельзя требовать, чтобы α' содержалось в α. Все метризуемые пространства являются паракомпактными хаусдорфовыми пространствами.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [3] Куратовский К., Топология, т. 1, [пер. с англ.], М., 1966; [4] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973. *П. С. Александров.*

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ локально выпуклых пространств E_1 и E_2 — локально выпуклое пространство, обладающее свойством универсальности по отношению к заданным на $E_1\times E_2$ билинейным операторам с нек-рым условием непрерывности. Точнее, пусть $\mathscr{K}$ — нек-рый класс локально выпуклых пространств и для каждого $F\in\mathscr{K}$ задано подмножество $T(F)$ множества раздельно непрерывных билинейных операторов из $E_1\times E_2$ в F. Тогда Т. т. п. E_1 и E_2 (относительно класса $T(F)$) наз. локально выпуклое пространство $E_1\widetilde{\otimes}E_2\in\mathscr{K}$ вместе с оператором $B\in T(E_1\widetilde{\otimes}E_2)$, обладающее следующим свойством: для любого $S\in T(F)$, $F\in\mathscr{K}$, существует единственный непрерывный линейный оператор $R: E_1\widetilde{\otimes}E_2\to F$ такой, что $R\circ B=S$. Таким образом, если ситуация позволяет говорить о функторе $T: \mathscr{K}\to$ $\to$Set s, то $E_1\widetilde{\otimes}E_2$ определено как представляющий объект этого функтора.

Во всех известных (1985) примерах $\mathscr{K}$ содержит поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а $T(\mathbb{C})$ содержит все билинейные функционалы вида $f\circ g: f\in E_1^*$, $g\in E_1^*$, переводящие (x, y) в $f(x)\,g(y)$. В этом случае, если Т. т. п. существует, то в $E_1\widetilde{\otimes}E_2$ есть плотное подпространство, к-рое можно отождествить с пространством $E_1\otimes E_2$ алгебраического *тензорного произведения*; при этом $B(x, y)=x\otimes y$.

Если $\mathscr{K}$ состоит из всех раздельно (соответственно, совместно) непрерывных билинейных операторов, то Т. т. п. наз. индуктивным (соответственно, проективным). Наиболее важно проективное Т. т. п. Пусть $\{p_i\}$ — определяющие семейства полунорм в E_i, $i=1, 2$; через π обозначается топология в $E_1\otimes E_2$, определенная семейством полунорм

$$\{p_1\widehat{\otimes}p_2\}: p_1\widehat{\otimes}p_2(u)=$$
$$=\inf\left\{\sum\nolimits_{k=1}^{n} p_1(x_k)\,p_2(x_k): \sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k\otimes y_k=u\right\}.$$

Тогда если $\mathscr{K}$ — класс всех, соответственно, всех полных локально выпуклых пространств, то проективное Т. т. п. E_1 и E_2 существует и его локально выпуклое пространство есть $E_1\otimes E_2$ с топологией π, соответственно, его *пополнение*. Если E_i — банаховы пространства с нормами p_i, $i=1, 2$, то $p_1\widehat{\otimes}p_2$ — норма в $E_1\otimes E_2$, пополнение по к-рой обозначается через $E_1\widehat{\otimes}E_2$. Элементы $E_1\otimes E_2$ имеют для каждого $\varepsilon>0$ представление

$$u=\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} x_k\otimes y_k,$$

где

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} p_1(x_k)\,p_2(y_k)\leqslant p_1\widehat{\otimes}p_2(u)+\varepsilon.$$

Если снабдить $E_1\otimes E_2$ более слабой, чем π, топологией с помощью семейства полунорм $p_1\otimes p_2$:

$$p_1\otimes p_2(u)=\sup_{f,\,g\in V\times W}|(f\otimes g)\check{(}u)|,$$

где V и W — поляры единичных шаров относительно p_1 и p_2, то возникает Т. т. п., иногда наз. слабым. Локально выпуклые пространства E_1, обладающие тем свойством, что для любого E_2 обе топологии в $E_1\otimes E_2$ совпадают, образуют важный класс *ядерных пространств*.

Проективное Т. т. п. связано с понятием свойства аппроксимации: локально выпуклое пространство E_1 обладает свойством аппроксимации, если для каждого предкомпактного множества $K\subset E_1$ и окрестности нуля U существует непрерывный оператор конечного ранга $\varphi: E_1\to E_1$ такой, что для всех $x\in K$ $x-\varphi(x)\subset U$. Все ядерные пространства обладают свойством аппроксимации. Банахово пространство E_1 обладает свойством аппроксимации тогда и только тогда, когда для любого банахова пространства E_2 оператор $\tau: [E_1\widehat{\otimes}E_2]\to(E_1^*\widehat{\otimes}E_2^*)^*$, однозначно определенный равенством $[\tau(x\otimes y)]\,(f\otimes g)=f(x)g(y)$, имеет нулевое ядро. Построено [3] сепарабельное банахово пространство без свойства аппроксимации (и тем самым доказано существование банаховых пространств без базиса Шаудера, поскольку последние всегда имеют свойство аппроксимации,— т. е. отрицательно решена т. н. «проблема базиса» С. Банаха).

Лит.: [1] Grothendieck A., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1955, № 16, pt 1, p. 1—193, pt 2, p. 1—140; [2] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [3] Enflo P., «Acta Math.», 1973, t. 130, № 3—4, p. 309—317. *А. Я. Хелемский.*

ТОПОЛОГИЯ — раздел математики, имеющий своим назначением выяснение и исследование, в рамках математики, идеи непрерывности. Интуитивно идея непрерывности выражает коренные свойства пространства и времени и имеет, следовательно, фундаментальное значение для познания. Соответственно, Т., в к-рой понятие непрерывности получает математич. воплощение, естественно вплетается почти во все разделы математики. В соединении с алгеброй Т. составляет общую основу математики и содействует ее единству.

Предметом топологии является исследование свойств фигур и их взаимного расположения, сохраняющихся *гомеоморфизмами*, т. е. взаимно однозначными и непрерывными в обе стороны отображениями. Следовательно, Т. можно квалифицировать как разновидность геометрии. Важной чертой этой геометрии является необычайная широта класса геометрич. объектов, попадающих в сферу действия ее законов.

Вызвана эта широта тем, что центральное понятие Т.— понятие гомеоморфизма не требует для своего определения никаких классич. геометрич. понятий типа расстояния, прямолинейности, линейности, гладкости и т. д. Понятие гомеоморфизма и лежащее в его основе понятие непрерывного отображения предполагают только, что точки и множества точек рассматриваемой фигуры могут находиться в нек-ром интуитивно ясном отношении близости, отличном, вообще говоря, от простого отношения принадлежности.

Под «фигурой» в Т. понимается любое множество точек, в к-ром задано отношение близости между точками и нек-рыми подмножествами, удовлетворяющее определенным аксиомам. Такие фигуры наз. *топологическими пространствами*. Практически всякая фигура в смысле какой-либо другой геометрии (аффинной, проективной, дифференциальной и т. д.) может естественно рассматриваться и как топологич. пространство. В этом смысле Т. является наиболее общей геометрией; однако многие свойства фигур, к-рые изучаются в других геометриях, сознательно игнорируются Т.

Главной задачей Т. является выделение и изучение топологич. свойств пространств, или *топологических инвариантов*. К числу важнейших топологич. инвариантов относятся, напр., *связность*, *компактность*, *размерность*, *вес*, *фундаментальная группа*, *гомологий группы* и др.

Кроме того, большое внимание в Т. уделяется свойствам типа расположения одной фигуры в другой, одного топологич. пространства в другом, сохраняющимся при гомеоморфизмах объемлющего пространства на себя. Проблематика этого рода началась с *Жордана теоремы*. В развитие этих идей были получены законы двойственности Александера и их обобщения, *узлов теория*.

При общем подходе естественно считать центральным объектом исследования в Т. тройку (X, f, Y), где f — непрерывное отображение топологич. пространства X в топологич. пространство Y,— этим охватываются две постановки основной задачи Т., указанные выше. Главным средством сравнения троек становятся, в духе теории категорий, их непрерывные гомоморфизмы.

Конкретный запас топологич. пространств, или, лучше сказать, типов топологич. пространств, с к-рыми имеет дело современная Т., формировался под воздействием разных областей математики в соответствии с их весьма непохожими потребностями. Этим объясняется большая априорная разнородность мира топологич. пространств.

К числу наиболее важных классов топологич. пространств, сформировавшихся из требований, предъявленных к Т. математикой в целом, относятся, в частности, следующие: *многообразия* (гладкие, кусочно-линейные, топологические и др.) — локально эти топологич. пространства устроены, как евклидово пространство; *полиэдры* — эти пространства правильным образом «скроены» из элементарных фигур, подобных отрезку, треугольнику, тетраэдру и т. д. (стоящее за понятием полиэдра понятие симплициального комплекса является важным техническим средством исследования полиэдров и многообразий); подпространства евклидова пространства (раздел топологии, посвященный их изучению и расположению в пространстве, наз. обычно геометрич. Т.); пространства функций (так, пространства непрерывных функций (отображений) в топологии поточечной сходимости или в бикомпактно открытой топологии, *банаховы пространства* в слабой топологии — топологич. объекты этого рода играют фундаментальную роль в функциональном анализе и его приложениях).

Ряд важных классов топологич. пространств был выделен аксиоматически — путем фиксации того или иного важного свойства конкретных топологич. объектов. Так, лемма Гейне — Бореля о том, что из любого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие, легла в основу определения абстрактного понятия *бикомпактности* (*компактности*) и отвечающего ему класса *бикомпактных пространств* (компактных пространств). Наличие естественных *метрик* на конкретных множествах явилось отправной точкой для абстрактного определения *метрического пространства* и *метризуемого пространства*. Интуитивно ясная идея отделимости (см. *Отделимости аксиома*) точек и множеств окрестностями нашла выражение в Т. через определения классов *хаусдорфовых пространств*, *нормальных пространств*, *регулярных пространств* и *вполне регулярных пространств* и др. Важен класс *паракомпактных пространств*, отражающий, в частности, идею безграничной делимости пространства.

Исследование всех названных классов пространств объединено общей идеей гомеоморфизма и порожденным ею понятием топологич. инварианта. Так как понятие гомеоморфизма имеет ярко выраженную теоретико-множественную природу, теоретико-множественные методы и конструкции того или иного уровня сложности или общности применяются при исследовании каждого из названных и других классов топологич. пространств. Ряд этих методов имеет общий характер и значение для топологии в целом. В то же время исследование топологич. объектов в пределах какого-либо фиксированного класса пространств требует особых, специфич. методов, обладающих более узким, но и более изощренным действием. Эти методы придают областям топологии, попадающим в сферу их действия, столь яркую и различную окраску, что иногда говорят о распадении Т. на ряд самостоятельных и малосвязанных дисциплин (напр., *алгебраическая топология*, *общая топология*, *дифференциальная топология*, геометрич. топология). Однако Т. объединена изначально своими исходными концепциями и это единство подтверждено в процессе развития Т. общим значением для всех разделов Т., ряда основных конструкций, принципов и понятий — таких, как понятие *факторпространства*, операция *топологического произведения*, идея функциональной отделимости, топологич. аппроксимации и топологич. расширения, принципы, связанные с компактностью, и др.

Топологич. объекты, сформировавшиеся под непосредственным воздействием других областей, часто обладают следующей важной чертой: их Т. порождается нек-рой другой, более жесткой математической структурой, связанной естественно с самой природой рассматриваемого объекта. В связи с этим возникают следующие взаимосвязанные вопросы фундаментального характера:

1) Как связаны инварианты данной «внешней» структуры (комбинаторной, дифференциальной, алгебраической и др.) с топологич. инвариантами порожденной этой структурой топологии?

2) Какие инварианты данной «внешней» структуры являются инвариантами порожденной ею топологии — т. е. топологич. инвариантами?

3) Как много, с точностью до изоморфизма, существует различных «внешних» структур данного типа, порождающих заданную топологию? Прежде всего важно выяснить, есть ли хоть одна такая структура, и особенное значение имеет случай, когда такая структура единственна (с точностью до изоморфизма),— тогда вся она (а следовательно, и все ее характеристики) оказываются (топологич.) инвариантом рассматриваемой Т.

Эти общие вопросы приобретают важное конкретное содержание, напр., в *топологии многообразий*.

Аналогичный в принципе характер имеют вопросы о соотношениях между метрич. и топологич. инвариантами и о существовании метрики, задающей данную Т. (проблема метризации).

В случае более общих пространств возникает вопрос о соотношении между инвариантами равномерной и порожденной ею топологич. структуры. Исследование равномерных инвариантов и их соотношений с топологич. инвариантами составляют предмет равномерной Т. (см. *Равномерное пространство*). Другая тесно

связанная с Т. структура — структура близости. Понятие *близости пространства* основано на отношении близости между подмножествами пространства — в отличие от понятия топологич. пространства.

В зависимости от широты класса исследуемых топологич. пространств меняется характер постановки основной задачи Т. Так, ограничиваясь узким классом пространств, ставят задачу различить их между собой в терминах топологич. инвариантов с точностью до гомеоморфизмов. Задача эта выглядит вполне естественной, напр., в рамках класса топологич. многообразий — но даже и здесь она оказывается чрезвычайно трудной и заведомо алгоритмически неразрешимой. Сложность задачи различения многообразий с точностью до гомеоморфизма приводит к необходимости рассмотреть более широкое, чем гомеоморфность, отношение гомотопич. эквивалентности топологич. пространств. В основе этого отношения лежит понятие *гомотопии* одного непрерывного отображения в другое, имеющее чисто теоретико-множественную природу.

Хотя методы алгебраич. Т. играют исключительно важную роль в топологич. исследовании, существенную роль здесь исполняют и чисто теоретико-множественные конструкции. Это связано с тем, напр., что отношение гомотопич. эквивалентности, примененное к многообразиям, выводит за пределы класса многообразий. При этом получаются более простые топологич. объекты, рассматривать к-рые в технич. отношении весьма полезно. Методы теории гомотопий требуют осуществления теоретико-множественных конструкций типа различных «выметаний», приклеивания одного топологич. пространства к другому вдоль произвольного непрерывного отображения и т. д. Это приводит к понятиям *клеточного разбиения* и *клеточного пространства*; последние и составляют, по-видимому, тот максимально широкий класс пространств, к-рый включает все дифференцируемые многообразия, полиэдры и допускает достаточно полное исследование методами алгебраич. Т.

Для более широких классов пространств — таких, как класс бикомпактов, класс всех паракомпактов или класс всех метризуемых пространств,— ставить проблему различения пространств с точностью до гомеоморфизма посредством обозримой системы вычислимых топологич. инвариантов не представляется возможным ввиду ее интуитивной неразрешимости. На передний план в качестве основной задачи Т. выдвигается здесь задача сравнения не отдельных топологич. пространств, а целых классов топологич. пространств, к-рые, особенно при аксиоматич. подходе, обычно соответствуют отдельным топологич. инвариантам или их комбинациям. При таком подходе основной вопрос Т. превращается в задачу систематич. сравнения топологич. инвариантов. На этом пути удается построить систематическую и развитую классификацию топологич. пространств.

Два метода выступают на первый план в решении этой задачи. Во-первых, метод взаимной классификации пространств и отображений. Речь идет об исследовании поведения топологич. инвариантов при разного типа непрерывных отображениях и о том, когда топологич. пространство из одного данного класса можно представить как образ пространства из другого данного класса при непрерывном отображении того или иного типа. Эта задача тем более важна и естественна, что часто топологич. пространства бывают даны уже будучи связанными нек-рыми непрерывными отображениями — напр., когда новое пространство строится как факторпространство нек-рого исходного топологич. пространства.

Второй метод сравнения заключается в применении кардинальных, или кардинальнозначных, топологич. инвариантов, наз. также *мощностными характеристиками*. Значениями кардинальных инвариантов являются бесконечные кардинальные числа, что дает возможность их сравнивать, пользуясь операциями и законами кардинальных чисел. Это направление Т. выходит на глубокие положения теории множеств — такие, как аксиома Мартина, континуум-гипотеза. На языке кардинальных инвариантов формулируется гипотеза Суслина, неразрешимость к-рой в рамках системы аксиом Цермело — Френкеля теории множеств доказана. Вот характерное рассуждение с кардинальными инвариантами. Для метризуемых пространств плотность и вес совпадают. Значит, если вес и плотность для данного пространства различимы, то оно не метризуемо. В теории кардинальных инвариантов получено много тонких и неожиданных результатов.

Несмотря на отмеченную выше специфику, к-рую приобретают топологич. задачи и методы в зависимости от того, какой класс топологич. пространств выбран для изучения, ряд основных задач, определяющих развитие Т., формулируется общим образом для всех ее разделов и решается на основе нек-рых общих принципов и методов.

К этим задачам относятся, в частности, следующие: 1) Построение системы топологич. инвариантов на основе Т. или внешних структур, ее порождающих. В этом случае возникает задача нахождения этих инвариантов для отдельных пространств и классов пространств.

2) Исследование поведения топологич. инвариантов при основных операциях над топологич. пространствами, в частности при переходе к подпространству.

3) Исследование поведения топологич. инвариантов при разного типа непрерывных отображениях (в частности, вложениях).

4) Исследование соотношений между топологич. свойствами пространств и их дополнений в нек-ром объемлющем пространстве. Многие результаты геометрич. Т., теоремы двойственности, результаты, связывающие свойства топологич. пространств и их наростов в бикомпактных хаусдорфовых расширениях хорошо иллюстрируют это направление.

К числу общих методов, применяемых в решении большинства задач Т. во всех ее разделах, относятся, в частности, следующие:

1) Метод *покрытий*. Этот метод дает результат при решении проблемы метризации, при определении и исследовании паракомпактных пространств, при определении и исследовании основных объектов комбинаторной Т.— симплициальных и клеточных комплексов. На методе покрытий, в частности на понятии нерва покрытия, основана аппроксимация топологич. пространств полиэдрами. На основе открытых покрытий и отвечающих им разбиений единицы доказываются теоремы о погружениях многообразий в евклидово пространство.

2) Метод *функторов*. Он заключается в сопоставлении топологич. пространствам алгебраич. и алгебротопологич. объектов, обладающих правильным — функториальным — поведением и допускающих вычисление. *Гомологий группа*, *когомологий кольцо*, *К-функтор*, связанный с понятием векторного расслоения над топологич. пространством, обобщающим понятие касательного многообразия,— важные примеры функторов. На применении таких функторов основан алгебраич. метод в Т.

3) Метод *спектров*. Суть его заключается в представлении более сложно устроенных пространств в качестве предела обратного спектра из пространств более простых (напр., полиэдров), при этом изучается связь между топологич. инвариантами элементов спектра и

предельного пространства. В понятии спектра реализуется определенным образом идея топологич. аппроксимации топологич. пространства более простыми или более удобными для изучения объектами.

На этом методе основано построение теории гомологий для широких классов пространств, построение примеров сложных топологич. пространств с заданными комбинациями свойств.

4) Метод *непрерывных отображений*: вложения, отображения пространств из одного класса на пространства из другого класса, исследование поведения топологич. инвариантов при этом составляют основу этого метода. Важную роль здесь играет решение задачи о непрерывном продолжении отображения, заданного на части пространства, на все пространство. Решение задачи продолжения существенно зависит от гомотопич. свойств пространств, и в теории гомотопии она занимает центральное место. С этой задачей связаны, в частности, теория *препятствий*, теория *ретрактов*.

5) *Аксиоматический метод*. Он дает наиболее широкие и естественные рамки для выяснения взаимосоотношений между топологич. инвариантами и для определения новых топологич. инвариантов и классов топологич. пространств «внутри» самой топологии в соответствии с необходимостью сделать эту классификацию систематической и гармоничной. При этом фиксируют топологич. инвариант, определяя его в терминах самой Т., и отвлекаются обычно от конкретных способов, к-рыми будут заданы пространства рассматриваемого класса, и от того, как вычислять этот топологич. инвариант. Так возникает класс бикомпактов, класс всех континуумов и т. д.

Применения Т. обладают двойной спецификой — определяемой тем, какой раздел Т. применяется и где он применяется. Очевидно, применения Т. возможны всюду, где присутствует идея непрерывности.

Несмотря на чрезвычайное разнообразие конкретных приложений Т. в конкретных ситуациях, являющееся следствием высказанных выше положений, можно указать ряд общих принципов и концепций, на к-рых эти применения более всего основаны. Так, теория многообразий имеет самые прямые применения в механике и теории дифференциальных уравнений; теория гомологии вышла из рамок топологии и развилась в важную самостоятельную дисциплину — *гомологическую алгебру*, получила приложения в алгебраич. геометрии, теории банаховых алгебр и др. Алгебраич. трактовку и связанные с этим применения получили понятия: многообразия; K-функтора, вышедшего из дифференциальной топологии; теория *кобордизмов*, имеющая важное значение в развитии дифференциальной Т. и получившая применения в алгебраич. геометрии (*Римана — Роха теорема*), в теории эллиптич. операторов (*индекса формулы*) и др. Важны применения степени отображения — в частности, на нем основано доказательство т. н. основной теоремы алгебры многочленов. Перенесение гомологич. и гомотопич. понятий и методов на бесконечномерные функциональные пространства оказало существенное влияние на анализ — в частности, в связи с теоремами существования решений для дифференциальных уравнений с частными производными. Для многих применений Т. важны разнообразные теоремы о неподвижных точках непрерывных отображений. Эти теоремы имеют смешанную теоретико-множественную и алгебраич. природу; применения их носят качественный характер; они направлены не на вычисление тех или иных объектов, а на доказательство их существования; то же назначение имеет ряд важных принципов, основанных на соединении топологич. и линейной структур. Среди них — теорема Крейна—Мильмана о крайних точках выпуклого компакта, теорема Банаха — Штейнхауза, теорема о замкнутом графике, теорема Алаоглу о компактности шара в слабой топологии, теорема Эберлейна — Шмульяна о компактах, лежащих в банаховых пространствах, в слабой топологии и др.

Есть ряд топологич. принципов и концепций «чисто» теоретико-множественного характера. Среди них: понятие бикомпактности (компактности); теорема Тихонова о бикомпактности топологич. произведения бикомпактных пространств, теорема о замкнутости всякого бикомпактного множества в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве, характеризующая бикомпактность множества как его абсолютную замкнутость, теорема Стоуна — Вейерштрасса и др. Полнота и связанные с ней принципы: теорема о неподвижной точке сжатого отображения, теорема Бэра о непустоте пересечения счетного семейства всюду плотных открытых множеств и др. Топологическая размерность, наряду с понятиями компактности и полноты, несомненно относится к числу важных общематематич. понятий.

В ряде конструкций функционального анализа, теории потенциала и др. существенную роль играют понятия расширения топологич. пространства и границы (алгебра функций, граница Шилова, граница Мартина, граница Шоке).

Природа топологич. динамики требует довольно широкого привлечения теоретико-множественных понятий и конструкций Т. Только это дает естественные рамки для обсуждения и анализа таких понятий, как предельное множество траектории, почти периодичность, минимальное множество, устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону, неблуждающая точка и т. д. Особенно важную роль играет здесь снова компактность.

Понятия и методы Т., особенно теоретико-множественные, естественно входят в топологич. алгебру. Применяя топологич. методы, здесь следует иметь в виду, что в присутствии согласованной с Т. той или иной алгебраич. структурой соотношения между топологич. инвариантами сильно меняются: многие известные соотношения упрощаются и появляются новые глубокие соотношения.

Теоретико-множественные конструкции Т. имеют много важных применений в математич. логике.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [2] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975; [3] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [4] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [5] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [6] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1968; [7] Новиков С. П., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 5, с. 217—32; [8] Александров П. С., там же, 1964, т. 19, в. 6, с. 3—46; [9] Александров П. С., Федорчук В. В., там же, 1978, т. 33, в. 3, с. 3—48; [10] Куратовский К., Топология, т. 1—2, пер. с англ., М., 1966—69; [11] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973; [12] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [13] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [14] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 5, с. 29—84; [15] Топология, БСЭ-3, т. 26, с. 86—92; [16] Геометрия, БСЭ-3, т. 6, с. 307—13; [17] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970.

А. В. Архангельский.

ТОПОЛОГИЯ ВЛОЖЕНИЙ, топологические вложения,— раздел топологии, в к-ром изучаются локальные топологич. свойства расположений замкнутых подмножеств евклидова пространства или многообразия.

Теория Т. в. возникла в работах А.Шёнфлиса (A.Schoenflies), Л. Антуана (L. Antoine), П. С. Урысона и Дж. Александера (J. Alexander). Вложения в E^3 были изучены в 50-х гг. В частности, было доказано, что любое Т. в. поверхности в E^3 аппроксимируется полиэдральным вложением. Систематическое исследование Т. в. в E^n при $n>3$ началось после решения *Шёнфлиса гипотезы*. В основном оно происходило в духе накопления

фактов и решения большого числа задач частного характера. Были также выяснены связи методов теории Т. в. и геометрич. *топологии многообразий*. Примерно к сер. 70-х гг. теория Т. в. сформировалась в самостоятельное направление со своей тематикой, методами и задачами. С ее помощью был решен ряд принципиальных задач геометрич. топологии многообразий: доказано существование некомбинаторной триангуляции сфер размерности $\geqslant 5$, получена характеризация топологич. многообразий и классифицированы односвязные четырехмерные многообразия.

Топологическим вложением пространства X (как правило, многообразия, полиэдра или компакта) в евклидово пространство E^n наз. произвольный гомеоморфизм $f: X \to E^n$ пространства X на подмножество $f(X) \subset E^n$. Иногда под Т. в. понимают просто включение $X \subset E^n$. Два вложения $f_1, f_2 : X \to E^n$ наз. эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $h : E^n \to E^n$, что $h \circ f_1 = f_2$. Если h является изотопией, то вложения наз. изотопными.

Простейшие примеры неэквивалентных вложений получаются с помощью узлов (см. *Узлов теория*), гораздо труднее построить неэквивалентные вложения нульмерных компактов или отрезков в E^3 (см. *Дикий узел*). Канторово множество на прямолинейном отрезке, лежащем в E^3, и дикий нульмерный компакт Антуана в E^3 неэквивалентны.

Тот факт, что основные задачи теории Т. в. сконцентрированы на локальных свойствах, объясняется существованием т. н. диких вложений, для к-рых нарушается регулярность локальной структуры. Исследование глобальных свойств ручных (локально плоских) вложений, как правило, в Т. в. не включается.

Следующие четыре теоремы можно считать основными в теории Т. в.

Теорема 1 (характеризации). Вложение $X \subset E^n$ является ручным тогда и только тогда, когда дополнение $Y = E^n \setminus X$ обладает свойством $1\text{—}ULC$ (для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждое δ-отображение $S^1 \to Y$ ε-гомотопно нулю в Y).

Теорема 2 (о близких вложениях). Любые два близких ручных вложения изотопны посредством малой изотопии.

Теорема 3 (о вложениях в тривиальной области размерностей). Если $2 \dim X + 2 \leqslant n$, то любые два ручных вложения изотопны.

Теорема 4 (об аппроксимации). Любое вложение аппроксимируется ручным.

Эти теоремы, за исключением теоремы 3, доказаны лишь при определенных размерностных ограничениях, различных для многообразий, полиэдров и компактов.

Вложение многообразия X в E^n наз. ручным (или локально плоским), если для любой точки $x \in X$ существует такая окрестность $U(x)$ в E^n, что пара $(U(x), U(x) \cap X)$ гомеоморфна стандартной паре (E^n, E^r) при гомеоморфизме, переводящем точку в начало координат.

Теорема 1 справедлива в этом случае при $n \neq 4$ и $r \neq n-2$ (при $r = n-2$ и $n \geqslant 5$ ответ также известен: надо чтобы дополнение $Y = E^n \setminus X$ было, грубо говоря, локально гомотопически эквивалентно окружности).

Теорема 2 верна при $r \neq n-2$ и $n \geqslant 5$ (прибавление малого узелка показывает, что при $r = n-2$ теорема 2 заведомо неверна; условия изотопности близких вложений при $r = n-2$ известны). Кроме того, для случая, когда X является сферой S^r, доказано, что при $r \neq n-2$ любое ручное вложение $S^r \to E^n$ изотопно стандартному (при $r = n-2$ и $n \neq 4$ для этого необходимо и достаточно, чтобы дополнение $E^n \setminus S^{n-2}$ было гомотопически эквивалентно окружности).

Теорема 4 верна при $r \neq n-2$ и $n \neq 4$ (причем при $r = n-2$ и $n \geqslant 6$ эта теорема — как показывают соответствующие контрпримеры — заведомо неверна).

Вложение полиэдра X в E^n наз. ручным, если оно эквивалентно кусочно линейному вложению. В этом случае теоремы 1,2 и 4 верны при $\dim X \leqslant n-3$.

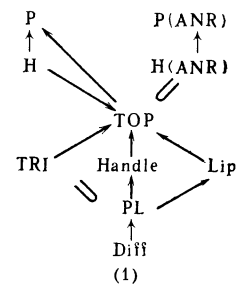
Вложение r-мерного компакта X в E^n наз. ручным, если изотопией его можно снять с любого прямолинейного полиэдра $P \subset E^n$ размерности $\leqslant n-r-1$. В этом случае теорема 1 верна при $r \leqslant n-3$ и $n \neq 4$, теорема 2, вообще говоря, неверна (при $2r+2 > n$), а теорема 4 верна для любого r.

Лит.: [1] Келдыш Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966; [2] Чернавский А. В., «Докл. АН СССР», 1968, т. 181, № 2, с. 290—93; [3] его же, «Матем. сб.», 1973, т. 91, № 2, с. 279—86; [4] Daverman R., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, № 2, p. 410—13; [5] Chapman T., «Topology», 1979, v. 18, p. 339—48; [6] Ancel F., Cannon J., «Ann. Math.», 1979, v. 109, p. 61—86; [7] Bryant J., Seebeck C., «Quart. J. Math.», 1968, v. 19, № 75, p. 257—74; [8] Edwards R., «Gen. Top. and Appl.», 1975, v. 5, № 2, p. 147—80; [9] Miller R., «Ann. Math.», 1972, v. 95, № 3, p. 406—16; [10] Bryant J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 170, p. 85—95; [11] Edwards R., в кн.: Geometric topology, v. 438, B.— [a. o.], 1975, p. 195—211; [12] Штанько М. А., «Матем. сб.», 1973, т. 90, № 4, с. 625—36.

М. А. Штанько.

ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ — часть теории многообразий, посвященная в основном исследованию взаимоотношений между различными их типами.

Главнейшие типы конечномерных многообразий и взаимоотношения между ними можно изобразить схемой (1), в которой Diff — категория дифференцируемых (гладких) многообразий; PL — категория кусочно линейных (комбинаторных) многообразий; TRI — категория топологических многообразий, являющихся полиэдрами; Handle — категория топологических многообразий, допускающих топологическое разложение на ручки; Lip — категория липшицевых многообразий (с липшицевыми отображениями перехода между локальными картами); TOP — категория топологич. многообразий (хаусдорфовых и со счетной базой); H — категория полиэдральных гомологич. многообразий без края (полиэдров, край звезды каждой вершины к-рых имеет гомологии сферы соответствующей размерности); H(ANR) — категория обобщенных многообразий (конечномерных абсолютных окрестностных ретрактов X, к-рые являются гомологич. многообразиями без края, т. е. обладают тем свойством, что для любой точки $x \in X$ группа $H^*(X, X \setminus x; \mathbb{Z})$ изоморфна группе $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0, \mathbb{Z})$); P(ANR) — категория пространств Пуанкаре (конечномерных абсолютных окрестностных ретрактов X, для которых существует такое число n и такой элемент $\mu \in H_n(X)$, что $H_r(X, \mathbb{Z}) = 0$ при $r \geqslant n+1$, и отображение $\cap \mu H^r(X) \to H_{n-r}(X)$ при всех r является изоморфизмом); P — категория полиэдров Пуанкаре (подкатегория предыдущей категории, состоящая из полиэдров).



(1)

Стрелки схемы (1), кроме трех нижних и стрелок H→TOP→P, изображают функторы структуры забывания. Стрелка Diff→PL изображает теорему Уайтхеда о триангулируемости гладких многообразий. В размерностях <8 эта стрелка обратима (любое PL-многообразие сглаживаемо), но в размерностях $\geqslant 8$ существуют несглаживаемые PL-многообразия и даже PL-многообразия, гомотопически неэквивалентные никакому гладкому многообразию. Вложение PL⊂TRI также необратимо в том же сильном смысле (существуют полиэдральные многообразия размерности $\geqslant 5$, гомотопически неэквивалентные никакому PL-многообразию). При этом уже для сферы S^n, $n \geqslant 5$, существуют триангуляции, в к-рых она не является PL-многообразием.

Стрелка PL→Handle изображает тот факт, что любое PL-многообразие допускает разложение на ручки. Стрелка PL→Lip изображает теорему о существовании на произвольном PL-многообразии липшицевой структуры.

Стрелка Handle→TOP обратима при $n\neq 4$ и необратима при $n=4$ (любое топологическое многообразие размерности $n\neq 4$ допускает разложение на ручки, и существуют четырехмерные топологич. многообразия, для к-рых это не так).

Аналогично, при $n\neq 4$ обратима стрелка Lip→TOP (и притом единственным образом).

Вопрос об обратимости стрелки TRI→TOP составляет классическую нерешенную задачу о триангулируемости произвольных топологич. многообразий.

Стрелка H→P необратима в сильном смысле (существуют полиэдры Пуанкаре, гомотопически неэквивалентные никакому гомологич. многообразию).

Стрелка H→TOP изображает теорему о гомотопической эквивалентности любого гомологич. многообразия размерности $\geqslant 5$ топологич. многообразию.

Стрелка TOP→P изображает теорему Кёрби — Зибенмана о гомотопич. эквивалентности любого топологич. многообразия полиэдру.

Вложение TOP$\subset$H(ANR) изображает тот факт, что любое топологич. многообразие является ANR. Обобщенное многообразие $X\in$H(ANR) размерности $\geqslant 5$ тогда и только тогда принадлежит образу этого вложения, когда X обладает свойством р а з д в и ж к и д и с к о в (для любого $\varepsilon>0$ и любых отображений $f_1, f_2 : B^2\to X$, где B^2 — двумерный диск, существуют такие отображения $g_1, g_2 : B^2\to X$, что $\rho(f_i, g_i)<\varepsilon$ и $g_1(B^2)\bigcap g_2(B^2)=\varnothing$).

Аналогичный вопрос для стрелок Diff→PL→TOP→P решается с помощью теории стационарных расслоений (соответственно векторных, кусочно линейных, топологических и сферических), т. е. на основе рассмотрения гомотопических классов отображений многообразия X в соответствующие классифицирующие пространства BO, BPL, BTOP, BG.

Существуют сквозные канонич. отображения

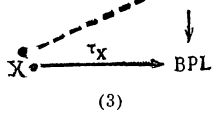
$$\mathrm{BO}\to\mathrm{BPL}\to\mathrm{BTOP}\to\mathrm{BG}, \qquad (2)$$

гомотопич. слои к рых и их композиций обозначаются соответственно символами

PL/O, TOP/O, G/O, TOP/PL, G/PL, G/TOP.

Для каждого многообразия X любой из категорий Diff, PL, TOP, P существует нормальное стационарное расслоение, т. е. канонич. отображение τ_X многообразия X в соответствующее классифицирующее пространство.

При переходе от «узкой» категории многообразий к более «широкой», напр. от гладких к кусочно линейным, отображения τ_X компонируются с соответствующими отображениями (2). Поэтому, напр., для PL-многообразия X только тогда существует PL-гомеоморфное ему гладкое многообразие (как говорят, многообразие X сглаживаемо), когда разрешима задача поднятия (3), гомотопич. препятствия к разрешимости к-рой лежат в группах $H^{i+1}(X, \pi_i(\mathrm{PL/O}))$. При этом оказывается, что разрешимость задачи (3) не только необходима, но и достаточна для сглаживания PL-многообразия X (и все неэквивалентные сглаживания находятся в биективном соответствии с множеством $[X,\mathrm{PL/O}]$ гомотопич. классов отображений $X\to\mathrm{PL/O}$).



(3)

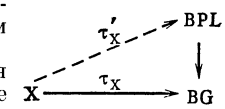
То же самое (с заменой PL/O на TOP/O) справедливо и для сглаживания топологич. многообразий X размерности $\geqslant 5$, а также (с заменой PL/O на TOP/PL) — для их PL-триангулирований.

Гомотопическая группа $\Gamma_k=\pi_k(\mathrm{PL/O})$ изоморфна группе классов ориентированно диффеоморфных гладких многообразий, получающихся склеиванием краев двух k-мерных шаров. Эта группа конечна для всех k (а при $k\leqslant 6$ даже тривиальна). Поэтому число неэквивалентных сглаживаний произвольного PL-многообразия X конечно и оценивается сверху числом

$$\mathrm{ord}\sum\nolimits_k H^k(X,\ \pi_k(\mathrm{TOP/O})).$$

Гомотопич. группа $\pi_k(\mathrm{TOP/PL})$ равна нулю, за исключением группы $\pi_3(\mathrm{TOP/PL})=\mathbb{Z}/2$. Поэтому существование PL-триангуляции топологич. многообразия X размерности $\geqslant 5$ определяется равенством нулю нек-рого класса когомологий $\Delta(X)\in H^4(X, \mathbb{Z}/2)$, а множество неэквивалентных PL-триангуляций многообразия X находится в биективном соответствии с группой $H^3(X, \mathbb{Z}/2)$.

Группа $\pi_k(\mathrm{TOP/O})$ совпадает с группой Γ_k при $k\neq 3$ и отличается от Γ_k при $k=3$ на группу $\mathbb{Z}/2$. Число неэквивалентных сглаживаний топологического многообразия X размерности $\geqslant 5$ конечно и оценивается сверху числом $\mathrm{ord}\,\Sigma_k H^k(X, \pi_k(\mathrm{TOP/O}))$.



(4)

Аналогичные результаты для полиэдров Пуанкаре места не имеют. Конечно, существование поднятия, напр., в диаграмме (4) является необходимым условием для существования PL-многообразия, гомотопически эквивалентного полиэдру Пуанкаре X, но, вообще говоря, оно обеспечивает (при $n\geqslant 5$) лишь существование такого PL-многообразия M и такого отображения $f : M\to X$ степени 1, что $\tau_M=f\circ\tau'_X$. Превращение этого многообразия в многообразие, гомотопически эквивалентное X, требует техники хирургии (перестроек), первоначально развитой С. П. Новиковым для случая, когда X является односвязным гладким многообразием размерности $\geqslant 5$. Для односвязного X эта техника обобщается на рассматриваемый случай, так что для односвязного полиэдра Пуанкаре X гомотопически эквивалентное ему PL-многообразие размерности $\geqslant 5$ существует тогда и только тогда, когда существует поднятие (4). В задаче существования топологич. или гладких многообразий, гомотопически эквивалентных (даже односвязному) полиэдру Пуанкаре, ситуация оказывается значительно более сложной.

Лит.: [1] Н о в и к о в С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, №. 1, с. 207—46; [2] M a d s e n I., M i l g r a m R., «Ann. Math. Stud.», 1979, № 92; [3] L a t o u r F., «Sem. Bourbaki», № 515, 1979, t. 710, p. 169—86; [4] F r e e d m a n M., «J. Diff. Geom.», 1982, v. 17, p. 357—453; [5] Q u i n n F., там же, p. 503—21; [6] М а н д е л ь б а у м Р., Четырехмерная топология, пер. с англ., М., 1981; [7] L a s h o f R., «Proc. Symp. in pure Math.», 1971, v. 22, p. 131—64; [8] E d w a r d s R., «Notices Amer. Math. Soc.», 1977, v. 24, № 7, p. A 649; [9] Q u i n n F., «Abstracts Amer. Math. Soc.», 1980, v. 1, № 7, p. 613—614; [10] C a n n o n J., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 5, p. 832—66; [11] S p i v a k M., «Topology», 1967, v. 6, p. 77—101.

М. А. Штанько.

ТОПОС — категория, эквивалентная категории пучков множеств на нек-рой *топологизированной категории*. Другое определение: Т.— это такая категория C, что любой пучок в канонич. топологии на C представим. Для объектов Т. (являющихся пучками множеств) определены обычные конструкции в категории множеств. По этой причине Т. могут служить нестандартными моделями теории множеств. При этом удобнее пользоваться более общим определением: э л е м е н т а р н ы й т о п о с — это категория C с произведениями и финальным объектом 1, контравариантным функтором $\mathcal{P} : C\to C$ (при этом $\mathcal{P}(X)$ для $X\in C$ понимается как множество частей X) и мономорфизмами $\Sigma_X\to X\times\mathcal{P}(X)$, где Σ — график отношения принадлежности. Множество $\mathcal{P}(1)$ служит естественной областью значений логич. высказываний в топосе C.

Лит.: Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 1—3, B. — [e. a.], 1972—73; [2] Cohomologie étale, B.— [e. a.], 1977; [3] Cartier P., в кн.: Séminaire Bourbaki, v. 1977/1978, B.— [e. a.], 1979. *В. И. Данилов.*

ТОР — тело, полученное от вращения замкнутого круга вокруг оси, лежащей в плоскости этого круга и его не пересекающей. Центр круга описывает окружность, наз. осевой окружностью Т., ее центр наз. центром Т. Плоскость осевой окружности Т. наз. экваториальной плоскостью Т., а лежащие на Т. границы кругов, получающихся из данного круга его вращением,— меридианами Т.

Поверхность Т., радиус-вектор к-рой в декартовых координатах евклидова пространства E^3 имеет вид

$$r=a\sin uk+l\,(1+\varepsilon\cos u)\,(i\cos v+j\sin v)$$

(здесь (u, v) — внутренние координаты, a — радиус вращающейся окружности, l — радиус осевой окружности, $\varepsilon=a/l$ — эксцентриситет), часто также наз. тором. Ее линейный элемент

$$ds^2=a^2du^2+l^2\,(1+\varepsilon\cos u)^2\,dv^2,$$

а кривизна $K=\frac{\cos u}{al\,(1+\varepsilon\cos u)}$. Т.— частный случай *вращения поверхности* и *каналовой поверхности*.

С топологич. точки зрения Т.— произведение двух окружностей и потому Т.— двумерное замкнутое многообразие рода нуль. Если это произведение метрическое, то его можно реализовать в E^4 или в эллиптич. пространстве $\mathcal{E}^3$ в виде поверхности Клиффорда; ее уравнением в E^4, напр., будет

$$x_1^2+x_2^2=a^2,\ x_3^2+x_4^2=b^2.$$

Естественное обобщение Т.— многомерный тор — топологическое произведение нескольких экземпляров окружности S, т. е. многообразия всех комплексных чисел, равных по модулю единице. Естественная гладкость на S определяет на Т. структуру гладкого многообразия, а естественная мультипликативная структура на S индуцирует на Т. структуру связной компактной коммутативной вещественной группы Ли. Последние группы играют важную роль в теории групп Ли, и их также называют торами (см. *Ли компактная группа*, *Максимальный тор*, *Картана подгруппа*). Четномерный Т. допускает комплексную структуру; при выполнении нек-рых условий такая структура превращает Т. в *абелево многообразие* (см. также *Комплексный тор*). В структурной теории алгебраич. групп у Т., как у вещественной группы Ли, имеется важный аналог — *алгебраический тор* (см. также *Алгебраическая группа*, *Линейная алгебраическая группа*). Алгебраич. тор сам не является Т. (в случае основного поля комплексных чисел), но обладает подгруппой, к-рая является Т. и на к-рую он стягивается (как топологич. пространство). Точнее, алгебраич. тор, как группа Ли, изоморфен произведению нек-рого Т. и нескольких экземпляров мультипликативной группы положительных действительных чисел. *М. И. Войцеховский, В. Л. Попов.*

ТОРЕЛЛИ ТЕОРЕМА обобщения — теорема, утверждающая, что структура Ходжа (матрица периодов) в когомологиях $H^*(X, \mathbb{C})$ алгебраического или кэлерова многообразия X полностью характеризует поляризованное многообразие X.

Классич. Т. т. относится к случаю кривых (см. [1], [2]) и утверждает, что кривая определяется с точностью до изоморфизма своими периодами. Пусть X — кривая рода g, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ — базис $H_1(X, \mathbb{Z})$, а $\omega_1, \ldots, \omega_g\in H^0(X, \Omega^1_X)=H^{1,0}\subset H^1(X, \mathbb{C})$ — базис *абелевых дифференциалов*, $(g\times 2g)$-матрица $\Omega=\|\pi_{ij}\|$, где $\pi_{ij}=\int_{\gamma_j}\omega_i$,— матрица периодов. Пересечение циклов $\gamma_i\gamma_j=q_{ij}$ определяет билинейную кососимметрич. форму Q в $H_1(X, \mathbb{Z})$. Пусть X и X'— две кривые. Тогда если можно выбрать базисы γ и ω, относительно к-рых матрицы периодов Ω и матрицы пересечений Q кривых совпадают, то X и X' изоморфны. Другими словами, если канонически поляризованные якобианы кривых X и X' изоморфны, то и $X\simeq X'$.

Пусть X — проективное многообразие (или, более общо, компактное кэлерово многообразие), $D=D_k$— многообразие Гриффитса, связанное с примитивными когомологиями $H^k(X, \mathbb{C})_0$ (см. *Отображение периодов*). В D лежат матрицы периодов примитивных k-форм на всех многообразиях, гомеоморфных X. Периоды зависят от выбора изоморфизма $H^k(X, \mathbb{C})_0$ в фиксированное пространство H. Имеется естественно определенная группа Γ аналитич. автоморфизмов многообразия D такая, что $M=D/\Gamma$ — аналитич. пространство и X определяет единственную точку $\Phi(X)\in M$. При этом M наз. модулярным пространством или пространством модулей структур Ходжа.

Глобальная проблема Торелли состоит в выяснении вопроса о том, когда $\Phi(X)$ однозначно определяет X с точностью до изоморфизма. В случае положительного решения проблемы соответствующее утверждение наз. (обобщенной) Т. т. Теорема Торелли справедлива очевидным образом для абелевых многообразий в случае 1-форм и в случае 2-форм (см. [3]). По существу, единственный нетривиальный случай решения глобальной проблемы Торелли (1984) — случай *К3-поверхности*. Т. т. обобщена также на случай кэлеровых К3-поверхностей.

Локальная проблема Торелли заключается в разрешении вопроса о том, когда структуры Ходжа на когомологиях разделяют точки в локальном пространстве модулей (пространстве Куранисси) для многообразия X. Пусть $\mathfrak{X}\xrightarrow{\pi}B$ — семейство поляризованных алгебраич. многообразий, $\pi^{-1}(0)=X$, а $M=D/\Gamma$ — многообразие Гриффитса, связанное с периодами примитивных k-форм на X. Отображение периодов $\Phi\colon B\to M$ сопоставляет $t\in B$ матрицу периодов k-форм на $\pi^{-1}(t)$. Это отображение голоморфно; вычислено соответствующее касательное отображение $d\Phi$ (см. [3]). Локальная проблема Торелли эквивалентна вопросу о том, когда $d\Phi$ является вложением. Рассматривая отображение, двойственное к $d\Phi$, получают когомологич. критерий справедливости локальной Т. т.: если отображение

$$\oplus_{0\leqslant r\leqslant[(k-1)/2]}H^{n-r-1}(X, \Omega^{n-k+r+1})\otimes$$
$$\otimes H^r(X, \Omega^{k-r})\xrightarrow{\mu}H^{n-1}(X, \Omega^1\otimes\Omega^n)$$

является эпиморфизмом, то периоды k-форм дают локальные модули для X. Локальная Т. т. для кривых эквивалентна тому, что квадратичные дифференциалы порождаются абелевыми дифференциалами. Теорема Нётера утверждает, что это так, если $g=2$ или $g>2$ и X негиперэллиптическая. Локальная Т. т., очевидно, справедлива в случае $k=n$, если канонич. класс тривиален. К таким многообразиям относятся абелевы многообразия, гиперповерхности степени $n+2$ в P^{n+1}, К3-поверхности. Справедливость локальной Т. т. установлена для различных классов многомерных многообразий. Для неособых гиперповерхностей степени d в P^{n+1} доказано, что отображение периодов является вложением в общей точке за исключением случая $n=2$, $d=3$ и, возможно, случаев: d делит $n+2$, $d=4$ и $n=4m$ или $d=6$ и $n=6m+1$ (см. [4]).

Лит.: [1] Torelli R., «Rend. Accad. Lincei V», 1913, v. 22, p. 98—103; [2] Weil A., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen», 1957, S. 33—53; [3] Griffiths Ph., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, p. 568—626, 805—65; [4] Donagi R., «Compos. math.», 1983, v. 50, p. 325—53. *Вал. С. Куликов.*

ТОРИЧЕСКИЙ УЗЕЛ типа (p, q) — кривая в $\mathbb{R}^3$, к-рая в цилиндрич. координатах r, z, θ задается уравнениями

$$r=2+\cos t,\ z=\sin t,\ \theta=pt/q,$$

где $t\in[0, 2\pi q]$. Здесь p и q — взаимно простые натуральные числа. Т. у. лежит на поверхности незаузленного тора $(r-2)^2+z^2=1$, пересекая меридианы тора в p точках, а параллели — в q точках. Т. у. типов $(p, 1)$ и $(1, q)$ тривиальны. Простейший нетривиальный Т. у.— трилистник (см. рис. 1), имеющий тип $(2, 3)$. Группа Т. у. типа (p, q) имеет копредставление $|a, b : a^p=b^q|$, а многочлен Александера равен

$$(t^{pq}-1)(t-1)(t^p-1)^{-1}(t^q-1)^{-1}.$$

Все Т. у. являются *Нейвирта узлами*. Род Т. у. равен $(p-1)(q-1)/2$.

Другая конструкция Т. у. использует особенность в нуле алгебраич. гиперповерхности

$$V=\{(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2,\ z_1^p+z_2^q=0\}.$$

Если p и q взаимно просты, то пересечение V с достаточно малой сферой $S^3\subset\mathbb{C}^2$ является узлом в S^3, эквивалентным Т. у. типа (p, q). В случае, когда p и q не взаимно просты, это пересечение также лежит на незаузленном торе $T^2\subset S^3$, но состоит из нескольких компонент. Получающееся зацепление наз. торическим зацеплением типа (p, q) (см. рис. 2, где $p=3$, $q=6$).

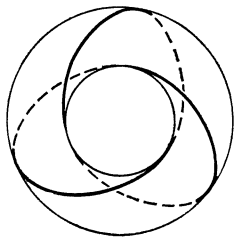


Рис. 1.

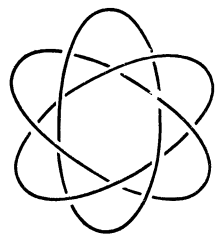


Рис. 2.

Лит.: [1] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [2] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971.

М. Ш. Фарбер.

ТОРОИДАЛЬНАЯ ГАРМОНИКА — функция точки на торе, появляющаяся при решении уравнения Лапласа методом разделения переменных в *тороидальных координатах* (σ, τ, φ). Гармонич. функция $h=h(\sigma, \tau, \varphi)$, являющаяся решением уравнения Лапласа, записывается в виде ряда

$$h=\sqrt{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\sum_{j,\,k=0}^{\infty}[A_{jk}P^{(k)}_{j-1/2}(\operatorname{ch}\tau)+$$
$$+B_{jk}Q^{(k)}_{j-1/2}(\operatorname{ch}\tau)](a_k\cos k\sigma+b_k\sin k\sigma)\times$$
$$\times(c_j\cos j\varphi+d_j\sin j\varphi),\qquad(*)$$

где $P^{(k)}_{j-1/2}$, $Q^{(k)}_{j-1/2}$ — присоединенные функции Лежандра с полуцелым индексом. Полагая здесь $\tau=\tau_0$, получают Т. г., или, иначе, поверхностную Т. г., в отличие от членов ряда $(*)$, зависящих от трех переменных (σ, τ, φ), к-рые иногда наз. пространственными Т. г.

Ряд $(*)$ используется при решении краевых задач в тороидальных координатах с учетом разложения

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}Q_{k-1/2}(\operatorname{ch}\tau)\cos k\sigma,$$

где $Q_{k-1/2}$ — функции Лежандра 2-го рода.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1—2, М., 1960.

Е. Д. Соломенцев.

ТОРОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ — числа σ, τ и φ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x=\frac{a\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\cos\varphi,\ y=\frac{a\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\sin\varphi,$$
$$z=\frac{a\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma},$$

где $-\pi\leqslant\sigma\leqslant\pi$, $0\leqslant\tau<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Координатные поверхности: $\sigma=\text{const}$ — сферы с центром $(0, 0, a\operatorname{ctg}\sigma)$ радиуса $a/|\sin\sigma|$; $\tau=\text{const}$ — торы с осевой окружностью в плоскости Oxy, центром в начале координат и радиусом $a\operatorname{cth}\tau$ и окружностью поперечного сечения радиуса $a/\operatorname{sh}\tau$, $\varphi=\text{const}$ — полуплоскости $y/x=\operatorname{tg}\varphi$. Система Т. к.— ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma=L_\tau=\frac{a^2}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2},$$
$$L_\varphi=\frac{a^2\operatorname{sh}^2\tau}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2}.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f=\frac{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^3}{a^2\operatorname{sh}\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{\operatorname{sh}\tau(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right].$$

Д. Д. Соколов.

ТОРС — то же, что *развертывающаяся поверхность*.

ТОТАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО — множество Σ линейных функционалов на векторном пространстве E, разделяющее точки E, т. е. такое, что для любого ненулевого вектора $x\in E$ найдется функционал $f\in\Sigma$ с $f(x)\neq0$.

В. И. Ломоносов.

ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка, значения к-рой суть точки во множестве значений оцениваемой величины.

Пусть по реализации $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ случайного вектора $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$, принимающего значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)^\top\in\Theta\subset\mathbb{R}^k$, надлежит оценить неизвестный параметр θ (или нек-рую функцию $g(\theta)$). Тогда любая статистика $T_n=T_n(X)$, осуществляющая отображение множества $\mathfrak{X}$ в Θ (или в множество значений функции $g(\theta)$), наз. точечной оценкой параметра θ (оцениваемой функции $g(\theta)$). Важными характеристиками Т. о. T_n являются ее математич. ожидание

$$\mathsf{E}_\theta\{T_n\}=\int_{\mathfrak{X}}T_n(x)\,dP_\theta(x)$$

и дисперсионная матрица (ковариационная матрица)

$$\mathsf{E}_\theta\{(T_n-\mathsf{E}\{T_n\})(T_n-\mathsf{E}\{T_n\})^\top\}.$$

Вектор $d(X)=T_n(X)-g(\theta)$ наз. вектором ошибок Т. о. T_n. Если

$$b(\theta)=\mathsf{E}_\theta\{d(X)\}=\mathsf{E}_\theta\{T_n\}-g(\theta)$$

— нулевой вектор при всех $\theta\in\Theta$, то говорят, что T_n является несмещенной оценкой функции $g(\theta)$ или что T_n лишена систематич. ошибки, в противном случае Т. о. T_n наз. смещенной, а вектор $b(\theta)$ — смещением или систематической ошибкой Т. о. Качество Т. о. определяется с помощью функции риска.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

М. С. Никулин.

ТОЧЕЧНАЯ РЕШЕТКА в $\mathbb{R}^n$ с базисом $[e_1, \ldots, e_n]$ — множество $\Lambda=\mathbb{Z}e_1+\ldots+\mathbb{Z}e_n$ точек $a=g_1e_1+\ldots+g_ne_n$, где $g_1, \ldots, g_n$ — целые числа.

Решетку Λ можно рассматривать как свободную абелеву группу с n образующими. Данной решетке Λ отвечает бесконечное множество базисов; их общий вид: $(e_1, \ldots, e_n)U$, где U пробегает все целые матрицы с определителем ± 1. Величина

$$d(\Lambda) = |\det(e_1, \ldots, e_n)| > 0$$

— объем параллелепипеда, построенного на векторах $e_1, \ldots, e_n$,— не зависит от выбора базиса и наз. о п р е д е л и т е л е м р е ш е т к и Λ.

Разбиение Т. р. на *Вороного типы решеток* играет важную роль в геометрии *квадратичных форм*.

А. В. Малышев.

ТОЧКА ПОЛЯ K с о з н а ч е н и я м и в п о л е L, L-з н а ч н а я т о ч к а п о л я K,— отображение $f: K \to L \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее условиям

$$f(1) = 1,$$
$$f(a+b) = f(a) + f(b),$$
$$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$$

(если выражения, стоящие в правых частях, определены), при этом считается, что

$$\infty \cdot \infty = \infty,$$
$$c + \infty = \infty + c = \infty, \ c \in L,$$
$$c \cdot \infty = \infty \cdot c = \infty, \ c \in L, \ c \neq 0,$$

а выражения $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ не определены.

Элемент a из K, для к-рого $f(a) \in L$, наз. к о н е ч н ы м в Т. п. f; множество A конечных элементов является подкольцом в K, а отображение $f: A \to L$ — гомоморфизмом колец. Кольцо A — *локальное кольцо*, его максимальный идеал $\mathfrak{m} = \{a \in K | f(a) = 0\}$.

Т. п. f определяет *нормирование* v поля K с группой значений K^*/A^* (где $K^* = K \setminus \{0\}$ и $A^* = A \setminus \mathfrak{m}$ — группы обратимых элементов поля K и кольца A соответственно). Кольцо этого нормирования совпадает с A. Обратно, любое нормирование v поля K определяет Т. п. K со значениями в поле вычетов нормирования v. При этом кольцо конечных элементов совпадает с кольцом нормирования v.

Лит.: [1] Л е н г С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

Ю. Г. Зархин.

ТОЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность

$$\longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \ldots$$

объектов абелевой категории $\mathfrak{A}$ и морфизмов α_i таких, что

$$\operatorname{Ker} \alpha_{n+1} = \operatorname{Im} \alpha_n.$$

Т. п. $0 \to A \to B \to C \to 0$ наз. к о р о т к о й и состоит из объекта B, его подобъекта A и факторобъекта C.

В. Е. Говоров.

ТОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление, являющееся мономорфизмом.

А. И. Штерн.

ТОЧНЫЙ ФУНКТОР — функтор, перестановочный с нек-рыми пределами и копределами. А именно, функтор $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ между абелевыми категориями $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ наз. т о ч н ы м, если он переводит короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

из категории $\mathfrak{A}$ в короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

категории $\mathfrak{B}$.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — неабелевы категории, то функтор $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ наз. т о ч н ы м, если он переводит коммутативные диаграммы

$$A \underset{\varepsilon_2}{\overset{\varepsilon_1}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\nu} C$$

из $\mathfrak{A}$, в к-рых $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — ядерная пара ν, а ν — коядро пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, в диаграммы с теми же свойствами в $\mathfrak{B}$.

М. Ш. Цаленко.

ТОЧНЫЙ ЭНДОМОРФИЗМ пространства Лебега (X, μ) — такой эндоморфизм T пространства (X, μ) (см. *Метрический изоморфизм*), что единственным по mod 0 *измеримым разбиением*, к-рое крупнее по mod 0 всех $T^{-n}\varepsilon$, где ε — разбиение на отдельные точки, является тривиальное разбиение, единственный элемент к-рого — все X. Эквивалентное определение: не существует измеримых разбиений ξ, инвариантных (в более старой терминологии — вполне инвариантных) относительно T (т. е. таких, что $T^{-1}\xi = \xi \bmod 0$). Примерами Т. э. являются односторонние сдвиги Бернулли и *растягивающие отображения*.

Т. э. обладают сильными эргодич. свойствами, аналогичными свойствам *К-систем* (с к-рыми формально Т. э. связаны: имеется конструкция, сопоставляющая эндоморфизму нек-рый автоморфизм,— его с т а н д а р т н о е р а с ш и р е н и е; для Т. э. последнее является K-автоморфизмом).

Лит.: [1] Р о х л и н В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 4, с. 499—530; [2] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

Д. В. Аносов.

ТРАЕКТОРИЯ в первоначальном значении термина — линия, описываемая движущейся точкой (Т. этой точки). При движении системы материальных точек каждая точка движется по своей Т. В то же время состояние всей системы изображается точкой *фазового пространства*, к-рая тоже движется по нек-рой Т. в этом пространстве. Когда необходимо подчеркнуть, что речь идет о последней Т., то говорят о *фазовой траектории*. (Для «системы», состоящей из одной материальной точки M, различие между ее «геометрической» Т. в обычном пространстве и фазовой Т. все равно сохраняется, ибо состояние не сводится к геометрич. положению M, а включает также и ее скорость.)

В более абстрактной теории *динамических систем* под Т. обычно понимают фазовую Т. (тем более что в общем случае ни в каком ином смысле говорить о Т. не приходится — «система» может не иметь физич. смысла системы материальных точек). Строго говоря, фазовая Т. может не быть линией, а сводиться к одной точке (*равновесия положению*). Наконец, абстрактной концепции динамич. системы как группы или полугруппы преобразований, уже не обязательно однопараметрической, соответствует использование термина «Т.» как синонима *орбиты* (такая Т. не обязана быть линией).

Для *каскада*, получающегося итерированием необратимого отображения S, иногда под Т. (или п о л н о й Т.) точки x понимают совокупность всех ее образов $S^n x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и всех прообразов этих образов при отображениях S^m, $m = 1, 2, \ldots$.

Д. В. Аносов.

ТРАКТРИСА — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$x = \pm a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Т. симметрична относительно оси ординат (см. рис.), ось абсцисс — асимптота. Точка $(0, a)$ — точка возврата с вертикальной касательной. Длина дуги, отсчитываемая от точки $x = 0$:

$$l = a \ln \frac{a}{y}.$$

Радиус кривизны:

$$r = a \operatorname{ctg} \frac{x}{y}.$$

Площадь, ограниченная Т. и ее асимптотой:

$$S = \pi a^2/2.$$

При вращении Т. вокруг оси абсцисс образуется *псевдосфера*. Длина касательной, т. е. отрезок от точки касания M до оси абсцисс, есть величина постоянная. Это свойство позволяет рассматривать Т. как траекторию конца отрезка длины a, когда другой его конец движется по оси абсцисс. Понятие Т. обобщается на случай, когда конец отрезка движется не по прямой, а по нек-рой заданной кривой; получающаяся при этом кривая наз. траекторией данной кривой.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ТРАНЗИТИВНАЯ ГРУППА — группа подстановок (G, X) такая, что каждый элемент $x \in X$ может быть переведен в любой элемент $y \in X$ подходящим элементом $\gamma \in G$, т. е. $x^\gamma = y$. Иными словами, все множество X образует единственную орбиту группы (G, X). Если же число орбит больше 1, то группа (G, X) наз. интранзитивной. Орбиты интранзитивной группы иногда наз. ее областями транзитивности. У интранзитивной группы (G, X) с орбитами X_i

$$X = X_1 \dot{+} \ldots \dot{+} X_s$$

ограничение действия группы на X_i транзитивно.

Пусть H — подгруппа в G и пусть

$$G = H + Hx_1 + \ldots + Hx_{s-1}$$

— разложение G на правые смежные классы по H. Пусть, далее, $X = \{Hx_i\}$. Тогда действие (G, X) определяется условием $(Hx_i)^g = Hx_ig$. Это действие транзитивно, и обратно, всякое транзитивное действие подобно вышеуказанному для подходящей подгруппы H в G.

Действие (G, X) наз. k раз транзитивным, $k \in \mathbb{N}$, если для любых двух упорядоченных множеств из k различных элементов $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$, $x_i, y_i \in X$, существует такой элемент $\gamma \in G$, что $y_i = x_i^\gamma$ для всех $i = 1, \ldots, k$; иначе говоря, (G, X) обладает лишь одной антирефлексивной k-орбитой. Для $k \geqslant 2$ k-транзитивная группа наз. кратно транзитивной. Примером дважды транзитивных групп являются группы целых линейных преобразований $x \mapsto ax + b$, $x, a, b \in K$, нек-рого поля K. Примером трижды транзитивных групп служат группы дробно-линейных преобразований проективной прямой над полем K, т. е. преобразований вида

$$x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d},\ a, b, c, d, x \in K \cup \{\infty\},$$

где $\det \left\| \begin{matrix} ab \\ cd \end{matrix} \right\| \neq 0$.

Т. г. (G, X) наз. строго k раз транзитивной, если лишь тождественная подстановка может оставлять на месте k различных элементов из Ω. Группа целых линейных и группа дробно-линейных преобразований являются примерами строго дважды и строго трижды транзитивных групп.

Конечная симметрич. группа S_n n раз транзитивна. Конечная знакопеременная группа A_n $(n-2)$ раза транзитивна. Эти две серии кратно транзитивных групп считаются тривиальными. Известны еще две 4 раза транзитивные группы M_{11} и M_{23} и две 5 раз транзитивные группы M_{12} и M_{24} (см. [3], а также *Матьё группа*). Существует гипотеза (1984), что за исключением этих четырех групп не существует нетривиальных k раз транзитивных групп для $k \geqslant 4$. Эта гипотеза доказана в предположении, что верна неоднократно анонсированная классификация конечных простых неабелевых групп [6]. Более того, при указанном предположении можно считать законченной классификацию всех кратно транзитивных групп.

Т. г. определяются также для дробных k вида $m + {}^1/_2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. А именно, группа (G, X) наз. ${}^1/_2$-транзитивной, если либо $|X| = 1$, либо все орбиты группы (G, X) имеют одинаковую длину большую 1. А для $n > 1$ группа (G, X) $n + {}^1/_2$ раз транзитивна, если фиксатор (G_x, X) $n - {}^1/_2$ раз транзитивен на X (см. [3]).

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [3] Wielandt H., Finite permutation groups, N. Y.— L., 1964; [4] Passman D., Permutation groups, N. Y.— Amst., 1968; [5] Higman D. G., Lecture on permutation representation, Giessen, 1977; [6] Cameron P. J., «Bull. London Math. Soc.», 1981, v. 13, p. 1—22.

Л. А. Калужнин.

ТРАНЗИТИВНОСТЬ — одно из важнейших свойств *бинарных отношений*. Отношение R на множестве A наз. транзитивным, если для любых a, b, $c \in A$ из условий aRb и bRc вытекает, что aRc. Отношения эквивалентности и порядка являются примерами транзитивных бинарных отношений.

Т. С. Фофанова.

ТРАНСВЕКЦИЯ, сдвиг,— линейное преобразование f (правого) векторного пространства V над телом K, обладающее свойствами

$$\mathrm{rk}(f - E) = 1 \text{ и } \mathrm{Im}(f - E) \subset \ker(f - E),$$

где E — тождественное линейное преобразование. Т. представляется в виде

$$f(x) = x + a\alpha(x),$$

где $a \in V$, $\alpha \in V^*$ и $\alpha(a) = 0$.

Все Т. векторного пространства V порождают группу $\mathrm{SL}(V)$, наз. специальной линейной или унимодулярной группой пространства V и совпадающую с коммутантом группы $\mathrm{GL}(V)$, за исключением случаев, когда $\dim V = 1$ или $\dim V = 2$ и K — поле из двух элементов. Если K — поле, то $\mathrm{SL}(V)$ — группа матриц с определителем 1. В общем случае (если только $\dim V \neq 1$) группа $\mathrm{SL}(V)$ является ядром эпиморфизма

$$\mathrm{GL}(V) \longrightarrow K^*/(K^*, K^*),$$

наз. определителем Дьёдонне.

Лит.: [1] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974.

Э. Б. Винберг.

ТРАНСВЕРСАЛЬНАЯ СИСТЕМА, трансверсальная схема, T-система,— система $T_0(m, t)$ множеств, определяемая для заданной совокупности m попарно непересекающихся конечных множеств $S_1, \ldots, S_m$, каждое из к-рых имеет мощность t. А именно: Т. с. $T_0(m, t)$ есть система из t^2 множеств $Y_1, \ldots, Y_{t^2}$ (блоков, или трансверсалей), содержащих каждое m элементов и таких, что:

1) $|Y_j \cap S_i| = 1$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, t^2$,

2) $|Y_j \cap Y_k| \leqslant 1$ при $j \neq k$.

В Т. с. любые два элемента $a \in S_i$ и $b \in S_j$, $i \neq j$, встречаются вместе ровно в одном блоке. Существование Т. с. $T_0(m, t)$ эквивалентно существованию *ортогональной таблицы* ОА (t, m).

Т. с. используются в рекурсивных методах построения *блок-схем*.

Множество из t трансверсалей в $T_0(m, t)$ наз. параллельным, если никакие две из них не пересекаются. Если Т. с. $T_0(m, t)$ содержит e (или более) параллельных множеств, то она обозначается $T_e(m, t)$.

Нек-рые из основных свойств Т. с.:

а) если существуют $T_d(m, s)$ и $T_e(m, t)$, то существует и $T_{de}(m, st)$; б) $T_t(m-1, t)$ существует тогда и только тогда, когда существует $T_0(m, t)$; в) если t и s таковы, что существуют $T_s(m, t)$ и $T_0(m, s)$, то существует $T_{s^2}(m, st)$.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Hanani H., «Ann. Math. Stat.», 1961, v. 32, № 2, p. 361—86.

В. Е. Тараканов.

ТРАНСВЕРСАЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР — дифференциальный или псевдодифференциальный оператор, перестановочный с действием нек-рой

группы Ли на многообразии, где задан оператор, и эллиптический по направлению нормалей к орбитам этой группы. Если оператор действует на сечениях векторных расслоений, то предполагается заданным также поднятие действия рассматриваемой группы G до действия в каждом из рассматриваемых расслоений, так что действие группы продолжается на сечения расслоений. Если группа G дискретна, то Т. э. о.— это обычный эллиптич. оператор, перестановочный с действием G. Если G действует на многообразии X транзитивно, то любой дифференциальный или псевдодифференциальный оператор, перестановочный с действием G, является Т. э. о. Если G и X компактны, то для Т. э. о. определяется и вычисляется индекс, являющийся обобщенной функцией на G (см. *Индекса формулы*).

Лит.: [1] Atiyah M., Elliptic operators and compact groups, B.— [a. o.], 1974. *М. А. Шубин.*

ТРАНСВЕРСАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, трансверсально регулярное отображение, — отображение, обладающее нек-рыми свойствами *общего положения*.

Пусть ξ — *векторное расслоение* над конечным *клеточным пространством* X, и пусть тотальное пространство расслоения ξ вложено как открытое подмножество в нек-рое топологич. пространство Z. Непрерывное отображение $f: M \to Z$, где M — гладкое многообразие, наз. трансверсальным к X отображением, если $V = f^{-1}(X)$ является гладким подмногообразием в M с *нормальным расслоением* ν и если при этом ограничение f на *трубчатую окрестность* подмногообразия V в M задает морфизм расслоений $\nu \to \xi$.

Напр., пусть $f: M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий, и пусть X — гладкое подмногообразие в N. Если дифференциал $df: \tau_M \to \tau_N$ (где τ — касательное расслоение) содержит в своем образе все векторы нормального к X в N расслоения ξ, то f является Т. о.

Аппроксимационная теорема: во множестве всех непрерывных отображений $M \to Z$ Т. о. образуют множество 2-й категории. В частности, любое непрерывное отображение гомотопно Т. о. Эта теорема позволяет сопоставить алгебраич. инвариантам (гомотопич. классам отображения) наглядные геометрич. образы (классы нек-рой эквивалентности многообразий, являющихся прообразами при Т. о.). Возможен и обратный переход — от геометрии к алгебре. Таким путем были вычислены, напр., различные группы *бордизмов*, классифицированы гладкие многообразия данного гомотопич. типа и т. д.

Понятие Т. о. можно перенести также в категории кусочно линейных и топологич. многообразий. При этом в кусочно линейной категории аппроксимационная теорема справедлива, а в топологич. категории этот вопрос остается (1984) открытым. Понятие Т. о. можно сформулировать и для бесконечномерных многообразий.

Лит.: [1] Том Р., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 293—351; [2] Браудер В., Перестройки односвязных многообразий, пер. с англ., М., 1983. *Ю. Б. Рудяк.*

ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ УСЛОВИЕ — необходимое условие оптимальности в вариационных задачах с подвижными концами. С помощью Т. у. определяются произвольные постоянные, от к-рых зависит решение уравнений Эйлера. Т. у. является необходимым условием обращения в нуль первой вариации функционала.

Для простейшей задачи вариационного исчисления с подвижными концами

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(t,\ x,\ \dot{x})\,dt,$$

в к-рой точка

$$(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)) = (t_1,\ x_1,\ t_2,\ x_2)$$

не фиксируется, а может принадлежать нек-рому множеству, Т. у. записывается в виде соотношения

$$\left[\left(F - \dot{x}F_{\dot{x}}\right)dt + F_{\dot{x}}\,dx\right]_1^2 = 0, \tag{1}$$

к-рое должно выполняться при любых значениях дифференциалов dt_1, dx_1, dt_2, dx_2, удовлетворяющих проварьированным граничным условиям.

Если левый и правый концы экстремали могут смещаться вдоль заданных линий $x = \varphi_1(t)$ и $x = \varphi_2(t)$, то в силу

$$dx_1 = \dot{\varphi}_1(t)\,dt_1,\quad dx_2 = \dot{\varphi}_2(t)\,dt_2$$

и независимости вариаций dt_1 и dt_2 из (1) получают

$$\left.\begin{aligned} F(t_1,\ x_1,\ \dot{x_1}) - \left[\dot{\varphi}_1(t_1) - \dot{x_1}\right]F_{\dot{x}}(t_1,\ x_1,\ \dot{x_1}) = 0,\\ F(t_2,\ x_2,\ \dot{x_2}) + \left[\dot{\varphi}_2(t_2) - \dot{x_2}\right]F_{\dot{x}}(t_2,\ x_2,\ \dot{x_2}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если уравнения линий, вдоль к-рых смещаются левый и правый концы экстремали, заданы в неявном виде: $\omega_1(t, x) = 0$ и $\omega_2(t, x) = 0$, то Т. у. (1) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{F - \dot{x}F_{\dot{x}}}{\omega_{1t}} = \frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{1x}} \text{ на левом конце},\\ \frac{F - \dot{x}F_{\dot{x}}}{\omega_{2t}} = \frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{2x}} \text{ на правом конце}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если на один из концов экстремали не наложено никаких ограничений, то на этом конце, в силу независимости соответствующих концевых вариаций dt и dx, Т. у. (1) принимает вид

$$F = 0,\ F_{\dot{x}} = 0. \tag{4}$$

Соотношения (2), (3), (4) наз. условиями трансверсальности.

Ниже приводятся Т. у. в более общем случае вариационной задачи на условный экстремум. Пусть имеется *Больца задача*, состоящая в минимизации функционала

$$\left.\begin{aligned} J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t,\ x,\ \dot{x})\,dt + g(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)),\\ f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств

$$\varphi(t,\ x,\ \dot{x}) = 0,\ \varphi: R\times R^n\times R^n \to R^m,\ m < n, \tag{6}$$

и граничных условий

$$\psi(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)) = 0,$$
$$\psi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p,\ p \leqslant 2n+2. \tag{7}$$

В этой задаче при $p < 2n+2$ концы $(t_1,\ x_1^1,\ \ldots,\ x_1^n)$ и $(t_2,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_2^n)$ экстремали не закреплены, а могут смещаться вдоль заданных гиперповерхностей $\psi_\mu = 0$, $\mu = 1, \ldots, p$.

Согласно Т. у., существуют такие постоянные (множители Лагранжа) e_μ, $\mu = 1, \ldots, p$, а также такие множители λ_0 и $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, что на концах экстремали помимо граничных условий (7) выполняется соотношение

$$\left[\left(F - \sum_{i=1}^n \dot{x}^i F_{\dot{x}^i}\right)dt + \sum_{i=1}^n F_{\dot{x}^i}\,dx^i\right]_1^2 + \\ + \lambda_0\,dg + \sum_{\mu=1}^p e_\mu\,d\psi_\mu = 0, \tag{8}$$

к-рое должно иметь место при любом выборе дифференциалов

$$dt_1,\ dx_1^i,\ dt_2,\ dx_2^i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Через F в (8) обозначено

$$F=F(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda)=\lambda_0 f(t,\ x,\ \dot{x})+ \\ +\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)\varphi_i(t,\ x,\ \dot{x}). \qquad (10)$$

В большинстве практич. задач для нормировки множителей Лагранжа полагают $\lambda_0=1$ (значение $\lambda_0=0$ соответствует анормальному случаю, см. [1]). Множители $\lambda_i(t)$, $i=1,\ \ldots,\ m$, определяются вместе с $x^i(t)$, $i=1,\ \ldots,\ m$, из решения системы дифференциальных уравнений Эйлера

$$F_{x^i}-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}^i}=0,\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (11)$$

и m уравнений вида (6):

$$\varphi_i(t,\ x,\ \dot{x})=0,\ i=1,\ \ldots,\ m.$$

Общее решение полученной системы из n дифференциальных уравнений 2-го порядка и m дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно $n+m$ неизвестных функций $x^i(t)$, $i=1,\ \ldots,\ n$ и $\lambda_i(t)$, $i=1,\ \ldots,\ m$, зависит от $2n$ произвольных постоянных. Действительно, если обозначить

$$\dot{x}^i=u_i,\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (12)$$

то получается система (11), (12) $2n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка и m конечных соотношений

$$\varphi_i(t,\ x,\ u)=0,\ i=1,\ \ldots,\ m. \qquad (13)$$

Выражая из (13) нек-рые m функций u_i через остальные (в предположении, что соответствующий функциональный определитель отличен от нуля) и подставляя их в (11), (12), получают систему $2n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка с $2n$ неизвестными функциями, общее решение к-рой зависит от $2n$ произвольных постоянных. Вместе со значениями t_1 и t_2 это дает $2n+2$ произвольных постоянных, определяющих решение вариационной задачи (5) — (7). С помощью Т. у. получают ровно столько же соотношений, позволяющих определить эти произвольные постоянные.

В задачах оптимального управления и в принципе максимума Понтрягина необходимое Т. у. записывается аналогично (8), только вместо

$$F-\sum_{i=1}^{n}\dot{x}^iF_{\dot{x}^i}\ \text{и}\ F_{\dot{x}^i}$$

в (8) следует подставлять гамильтониан H, взятый с обратным знаком, и сопряженные переменные ψ_i.

Необходимое Т. у. позволяет получать недостающие граничные условия для получения замкнутой краевой задачи, к к-рой сводится решение вариационной задачи с подвижными концами.

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ — общее название для нек-рых свойств *общего положения*, понятие линейной алгебры, дифференциальной и геометрич. топологии.

а) Два векторных подпространства A, B конечномерного векторного пространства C трансверсальны друг к другу, если A и B порождают C, т. е.

$$\dim A\cap B+\dim C=\dim A+\dim B.$$

б) В дифференцируемой ситуации два подмногообразия L, M многообразия N трансверсальны в точке $x\in L\cap M$, если касательные пространства в этой точке T_xL, T_xM порождают T_xN. Геометрически (для подмногообразий в узком смысле слова и без края) это означает, что в N можно ввести такие локальные координаты $x_1,\ \ldots,\ x_n$ в нек-рой окрестности U точки x, в терминах к-рых $L\cap U$ и $M\cap U$ представляются как трансверсальные векторные подпространства в $\mathbb{R}^n$.

Отображение $f: L\to N$ трансверсально к подмногообразию $M\subset N$ в точке $x\in f^{-1}(M)$, если образ T_xL под действием f трансверсален к $T_{f(x)}M$ в $T_{f(x)}N$. Отображения $f: L\to N$ и $g: M\to N$ трансверсальны друг к другу в точке $(x,\ y)\in L\times M$, где $f(x)=g(y)$, если образы T_xL и T_yM порождают $T_{f(x)}N$. Последние два определения тоже перефразируются [1]: говорят, что L трансверсально к M, f — к M (более старый термин: f t-регулярно вдоль M) и f — к g, если соответствующая Т. имеет место во всех точках, для к-рых о ней можно говорить. Эти понятия легко сводятся друг к другу, напр. Т. L и M эквивалентна Т. тождественных вложений L и M в N. Употребительна запись типа $L\pitchfork_x M$, $f\pitchfork M$ и т. д.

Для Т. многообразий с краем иногда целесообразно дополнительно потребовать выполнения нек-рых условий (см. [3]). Т. переносится и на бесконечномерный случай (см. [1], [2]).

Во всех этих случаях роль Т. связана с ее «типичностью» и с «хорошими» свойствами пересечения $L\cap M$, прообразов $f^{-1}(M)$ и т. п. объектов (к-рые к тому же «хорошо» деформируются, если при деформациях исходных объектов сохраняется Т.) (см. [4]).

в) В кусочно линейной и топологич. ситуациях можно определить Т. подмногообразий по аналогии с геометрич. определением в б) (особенно употребителен кусочно линейный вариант для подмногообразий дополнительной размерности, см. [5]). Вообще говоря, полной аналогии со свойствами Т. из б) не получается (см. [6], [8]), поэтому предложены более ограничительные модификации Т. (см. [7], [9]).

Наконец, говорят, что какая-то категория многообразий обладает свойством Т., если в ней любое отображение аппроксимируется трансверсальным отображением.

Лит.: [1] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [2] Бурбаки Н., Элементы математики. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [3] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [4] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979; [5] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно-линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [6] Lickorish W., Rourke C. P., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1969, v. 66, № 1, p. 13—16; [7] Rourke C., Sanderson B., «Ann. Math.», 1968, v. 87, p. 256—78; [8] Hudson J., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1969, v. 66, № 1, p. 17—20; [9] Marin A., «Ann. Math.», 1977, v. 106, № 2, p. 269—93. *Д. В. Аносов.*

ТРАНСГРЕССИЯ в расслоенном пространстве — соответствие между классами когомологий слоя и базы. Точнее, если E — связное расслоенное пространство с базой B и слоем F, A — абелева группа, то Т. в E есть соответствие

$$\tau\subset H^s(F,\ A)\times H^{s+1}(B,\ A),$$

определенное формулой

$$\tau=\{(x,\ y)\mid \delta x=q^*y\},$$

где $\delta: H^s(F,\ A)\to H^{s+1}(E,\ F,\ A)$ — кограничный гомоморфизм, а $q: H^{s+1}(B,\ A)\to H^{s+1}(E,\ F,\ A)$ — гомоморфизм, определяемый проекцией $E\to B$. Элементы из области определения $T^s(F,\ A)\subset H^s(F,\ A)$ соответствия τ наз. трансгрессивными; образом элемента $x\in T^s(F,\ A)$ при Т. наз. любой такой $y\in H^{s+1}(B,\ A)$, что $x\tau y$. Т. можно рассматривать как гомоморфизм группы $T^s(F,\ A)$ в нек-рую факторгруппу группы $H^{s+1}(B,\ A)$. Т. допускает прозрачное истолкование в терминах спектральной последовательности (H_r) расслоения E: по существу, она совпадает с дифференциалом $d_{s+1}: H_{s+1}^{0,\ s}\to H_{s+1}^{s+1,\ 0}$.

Описание трансгрессивных классов когомологий слоя весьма существенно при изучении когомологич. строения расслоения. Важную роль здесь играет теорема трансгрессии Бореля: если A — поле,

$H^n(E, A)=0$ при $n>0$, $H^*(F, A)=\Lambda P$ — внешняя алгебра над подпространством P, градуированном нечетными степенями, причем когомологии слоев образуют простой пучок над B, то P можно выбрать таким образом, чтобы $P^s=T^s(F, A)$ для любого $s>0$, при этом $H^*(B, A)$ — алгебра многочленов от образов элементов однородного базиса пространства P при Т. В частности, если G — связная группа Ли, не имеющая p-кручения, и $\mathrm{char}\, A=p$, то $H^*(G, A)=\Lambda P$, где однородные элементы пространства P имеют нечетные степени и трансгрессивны в любом главном расслоении группы G. При этом P совпадает с пространством примитивных классов когомологий.

Лит.: [1] Борель А., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 163—246; [2] Серр Ж.-П., там же, с. 9—114. *А. Л. Онищик.*

ТРАНСЛЯТИВНОСТЬ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ — свойство метода, сохраняющее суммируемость ряда после добавления к нему или удаления из него конечного числа членов. Более точно: метод суммирования A наз. транслятивным, если из суммируемости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

к сумме S следует суммируемость этим же методом ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

к сумме $S-a_0$, и наоборот. Для метода суммирования A, определенного преобразованием последовательности $\{S_n\}$ в последовательность или функцию, свойство транслятивности состоит в том, что из условия

$$A-\lim S_n=S$$

следует

$$A-\lim S_{n+1}=S,$$

и наоборот. Если метод суммирования определен регулярной матрицей $\|a_{nk}\|$, то это означает, что из

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_k=S \qquad (1)$$

всегда следует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_{k+1}=S, \qquad (2)$$

и наоборот. В случаях, когда такое заключение выполняется только в одну сторону, метод называют транслятивным справа — если из (1) следует (2), но обратное неверно, или транслятивным слева, когда из (2) следует (1), но обратное неверно.

Свойством транслятивности обладают многие распространенные методы суммирования; напр., метод Чезаро (C, k) при $k>0$, метод Рисса (R, n, k) при $k>0$, метод Абеля транслятивны, экспоненциальный метод Бореля транслятивен слева.

Лит.: [1] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977. *И. И. Волков.*

ТРАНСЛЯЦИЯ — отображение алгебраич. системы в себя, к-рое либо есть тождественное отображение, либо может быть представлено в виде произведения конечного числа *главных трансляций* (наз. также элементарными Т.). Эквивалентность на алгебраич. системе является конгруэнцией тогда и только тогда, когда она замкнута относительно всех Т. (и даже только главных Т.).

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970. *О. А. Иванова.*

ТРАНСЛЯЦИЯ ПРОГРАММ — 1) Т. п. в *программировании*, компиляция программ,— систематический процесс, который любую программу ip на входном *алгоритмическом языке* LI преобразует в некоторую программу op на объектном языке LO, при этом так, что обе программы, ip и op, реализуют одну и ту же функцию, то есть если d — входные данные программы, то $ip(d)=op(d)$.

2) Т. п. в теории *вычислимых функций* и *алгоритмов теории* — любое отображение одной *нумерации* вычислимых функций в другую, сохраняющее свойство образа и прообраза быть номером одной и той же функции (наличие эффективного транслирующего отображения наз. также сводимостью одной нумерации к другой).

В практике программирования обычно входным языком является *программирования язык*, используемый человеком, а объектным языком — язык непосредственно выполняемых машинных программ. Сама Т. п., как правило, совершается автоматически, то есть с помощью программы t на нек-ром языке реализации LR, наз. транслятором (или компилятором), то есть $t(ip)=op$. Систематич. разработка трансляторов для любого входного языка LI из нек-рого класса языков составляет содержание *автоматизации программирования*, а соответствующие средства такой разработки наз. системами построения трансляторов или трансляторами трансляторов, $tt: tt(\mathrm{LI})=t$. При этом язык реализации либо включает объектный язык, либо совпадает с ним: LO$\subseteq$LR.

Понятие Т. п. (сводимости) в теории вычислимых функций приводит к понятию главных нумераций, то есть таких, к к-рым сводятся любые другие нумерации из нек-рого класса. Доказано существование главных вычислимых нумераций у всех конкретных моделей вычислимых функций, в частности у частично рекурсивных функций и у машин Тьюринга. В свою очередь, существование главных вычислимых нумераций взаимообусловлено способностью вычислимых функций к т. н. частичным вычислениям, то есть существованием общерекурсивной функции (в программировании — частичного вычислителя, в теории вычислимых функций — s-m-n-функции) $S_n^m(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ такой, что если $U^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — универсальная функция для вычислимых функций n переменных, то для любой вычислимой функции F от $m+n$ переменных и с номером NF имеет место тождество

$$F(x_1, \ldots, x_{m+n})=U^{m+n}(NF, x_1, \ldots, x_{m+n})=$$
$$=U^n(S_n^m(NF, x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

Как видно из тождества, частичный вычислитель по программе функции $m+n$ переменных и по заданным значениям m переменных строит программу функции n переменных, получаемой из исходной связыванием m ее аргументов этими значениями. Результат работы частичного вычислителя наз. проекцией $NF_{x_1, \ldots, x_m}$ программы NF на заданные значения $x_1, \ldots, x_m$ ее m аргументов. Существование главных вычислимых нумераций (см. [1], гл. 1, § 2) и частичных вычислителей (см. [2], § 65), а также взаимной связи между ними (см. [3], § 11, теорема 3) является одной из фундаментальных сторон теории вычислимых функций.

Между задачами практич. трансляции в программировании и частичными вычислениями существует непосредственная связь (см. [4]). Пусть язык реализации LR обладает главной вычислимой нумерацией, и пусть NS — программа частичного вычислителя для LR, выраженная на этом же языке. Пусть, далее, входной язык LI задается программой NLI своей универсальной функции, выраженной на объектном подмножестве LO языка LR, то есть $NLI(ip, d)=ip(d)$. (В программи-

ровании такая программа наз. интерпретатором входного языка.) Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\forall d\ NS\ (NLI,\ ip,\ d) = op\ (d),$$
$$\forall\ ip\ NS(NS,\ NLI,\ ip) = t\ (ip),$$
$$\forall\ NLI\ NS\ (NS,\ NS,\ NLI) = tt\ (NLI),$$

то есть объектная программа — это проекция интерпретатора входного языка на входную программу; транслятор — это проекция частичного вычислителя на интерпретатор входного языка, а транслятор трансляторов — это проекция частичного вычислителя на самого себя.

Лит.: [1] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Ершов А. П., в кн.: Всесоюзная конференция. Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта и систематическое программирование, Паланга, 3—5 сент. 1980, ч. 2, Вильнюс, 1980, с. 26—55.

А. П. Ершов.

ТРАНСМИССИИ УСЛОВИЕ — условие на *псевдодифференциальный оператор* на гладком многообразии с краем, гарантирующее, что гладкие вплоть до края функции, продолженные нулем, переводятся этим оператором снова в функции, гладкие вплоть до границы. Продолжение нулем здесь делается на некоторую окрестность исходного многообразия, которое считается вложенным в более широкое многообразие без края, так что точки края становятся внутренними точками.

Если символ рассматриваемого псевдодифференциального оператора имеет в локальных координатах в окрестности границы асимптотич. разложение по положительно однородным функциям $a_\alpha(x, \xi)$ (α — порядок однородности), то Т. у. можно записать в виде следующего условия на функции a_α:

$$\partial_x^\gamma \partial_\xi^\beta [a_\alpha(x,\ \xi',\ \xi_n) -$$
$$- e^{-i\pi\alpha} a_\alpha(x, -\xi', -\xi_n)]|_{x_n=0,\ \xi'=0} = 0,$$

где γ, β — любые мультииндексы, координаты x считаются выбранными в окрестности граничной точки так, что $\{x_n=0\}$ — уравнение края, $x_n \geqslant 0$ на самом многообразии, $\xi=(\xi', \xi_n)$ — координаты, дуальные к координатам $x=(x', x_n)$.

Лит.: [1] Эскин Г. И., Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М., 1973; [2] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971, v. 126, № 1/2, p. 11—51.

М. А. Шубин.

ТРАНСПОНИРОВАННАЯ МАТРИЦА — матрица, получающаяся из данной (прямоугольной или квадратной) матрицы $A=\|a_{ik}\|$, $i=1, \ldots, m$, $k=1, \ldots, n$, после замены строк одноименными столбцами, т. е. матрица $\|a'_{ik}\|$, где $a'_{ik}=a_{ki}$, $i=1, \ldots, n$, $k=1, \ldots, m$. Число строк Т. м. равно числу столбцов матрицы A, а число столбцов — числу строк матрицы A. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, принято обозначать $A^\top$ или A'.

О. А. Иванова.

ТРАНСПОНИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ — 1) Т. у. для линейных алгебраич. систем — уравнения, имеющие *транспонированные матрицы*.

2) Т. у. для линейных *интегральных уравнений* — уравнения с ядрами $K(x, y)$ и $K(y, x)$.

Т. у. наз. также союзными, ассоциированными, присоединенными уравнениями.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА — один из наиболее важных частных случаев общей задачи *линейного программирования*. Содержательно Т. з. формулируется следующим образом.

Пусть в пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ производится некрый однородный продукт, причем объем производства этого продукта в пункте A_i составляет a_i единиц, $i=1, \ldots, m$. Произведенный в пунктах производства продукт должен быть доставлен в пункты потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причем объем потребления в пункте B_j составляет b_j единиц продукта. Предполагается, что транспортировка готовой продукции возможна из любого пункта производства в любой пункт потребления и транспортные издержки, приходящиеся на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, составляют c_{ij} денежных единиц. Задача состоит в организации такого плана перевозок, при к-ром суммарные транспортные издержки были бы минимальными.

Формально задача ставится следующим образом. Пусть x_{ij} — количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Требуется определить совокупность из mn величин x_{ij}, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ x_{ij} \geqslant 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

и обращающих в минимум линейную форму

$$L(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Группа ограничений (1) связана с тем обстоятельством, что объем вывезенного из каждого пункта производства продукта в точности равен объему произведенного в этом пункте продукта, а объем ввезенного в пункт потребления продукта в точности соответствует его потребности. При этих ограничениях необходимым и достаточным условием для разрешимости Т. з. является выполнение условия баланса

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2)$$

Специфическими для Т. з. являются следующие два обстоятельства: а) каждое из переменных x_{ij} входит в два уравнения системы (1); б) все коэффициенты при переменных x_{ij} принимают лишь два значения 0 или 1. Условия а) и б) позволили разработать для решения Т. з. алгоритмы, существенно более простые, чем *симплексный метод*, к-рый является одним из основных методов решения задач линейного программирования.

Наиболее известными из этих алгоритмов являются метод потенциалов и т. н. венгерский метод. Метод потенциалов — это метод последовательного улучшения плана (перевозок) с использованием второй теоремы двойственности для проверки оптимальности [1]. Венгерский метод — это метод последовательного построения допустимого плана, к-рый автоматически оказывается оптимальным. В основе венгерского алгоритма лежит метод чередующихся цепей [2].

Известны следующие два обобщения классич. Т. з., являющиеся отражением встречающихся на практике ситуаций. Открытая модель Т. з.— это Т. з. с нарушенным условием баланса (2), что означает либо превышение объема производства над объемом потребления, либо наоборот. Такая задача сводится к классич. Т. з. путем введения фиктивного пункта производства (или потребления) с мощностью производства (или потребления), равной разности объемов производства и потребления.

Многоиндексные транспортные задачи при сохранении общей проблемы минимизации транспортных издержек учитывают неоднородность груза (продуктов производства) и неоднородность транспортных средств.

За рубежом Т. з. иногда наз. проблемой Хичкока.

Лит.: [1] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Задачи линейного программирования транспортного типа, М., 1969;

[2] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968; [3] Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., Многогранники. Графы. Оптимизация, М., 1981. *В. К. Леонтьев.*

ТРАНСФИНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ — принцип, позволяющий утверждать суждение $A(x)$ для любого элемента x вполне упорядоченного класса E, если установлено, что для всякого $z \in E$ из истинности $A(y)$ для всех $y<z$ следует истинность $A(z)$:

$$\forall z\,(\forall y\,(y < z \longrightarrow A(y)) \longrightarrow A(z)) \longrightarrow \forall x A(x).$$

Когда E — отрезок ординалов, меньших α, эквивалентна такая формулировка: если $A(0)$, $A(\sigma) \to A(\sigma+1)$ и $A(\sigma)$ сохраняется при предельном переходе

$$(\text{т. е. } \sigma = \sup\{\sigma_i\} \wedge \forall i A(\sigma_i) \longrightarrow A(\sigma)),$$

то $A(\sigma)$ для любого $\sigma<\alpha$. Частным случаем Т. и. является *математическая индукция*. Если отношение $<$ на классе E задает фундированное дерево (т. е. дерево, все ветви к-рого обрываются), то Т. и. для такого E эквивалентна *бар-индукции*: из того, что A верно для всех концевых вершин и наследуется при движении от них к корню, следует, что A верно для корня. Эта форма важна в интуиционистской математике. Доказуемостью Т. и. до различных ординалов измеряют дедуктивную силу формальных систем.

Г. Е. Минц.

ТРАНСФИНИТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ элементов данного множества X — отображение нек-рого отрезка $[1, \beta]$ или полуинтервала $[1, \beta)$ порядковых (трансфинитных) чисел в множество X. Элементом, или членом, Т. п. $f: [1, \beta] \to X$ (соответственно Т. п. $f: [1, \beta) \to X$) наз. упорядоченная пара (α, x), $x = f(\alpha)$, $x \in X$, $\alpha \in [1, \beta]$ (соответственно $\alpha \in [1, \beta)$), которая обозначается через x_α.

Л. Д. Кудрявцев.

ТРАНСФИНИТНАЯ РЕКУРСИЯ — метод определения функций, заданных на ординалах (см. *Порядковое число*) или вообще на множествах, наделенных ординальной структурой. Определяющее уравнение Т. р. имеет вид

$$F(x) = G(x, F\restriction x), \qquad (*)$$

где $F\restriction x$ есть «кусок» определяемой функции F, ограниченный множеством предшественников x. С помощью Т. р. определяются многие важные для теории множеств функции и классы (напр., класс *конструктивных по Гёделю множеств*). Аналогия между указанной теоретико-множественной конструкцией и рекурсивными определениями числовых функций была предметом рассмотрения теории алгоритмов с самого начала ее возникновения. В частности, эта аналогия лежит в основе различных классификаций общерекурсивных функций (см. [1]).

Большое значение для ряда разделов математич. логики (теория доказательств, теория рекурсивных иерархий) имеют рекурсивные ординалы и связанная с ними модификация Т. р. (Рекурсивные ординалы представляют собой алгоритмич. аналог счетных ординалов; впоследствии были также предложены аналоги ординалов бо́льших мощностей.) В этой ситуации Т. р. наз. леммой Роджерса. При этом уравнение (*) подвергается следующей модификации: функционал G заменяется произвольной рекурсивной функцией, а вместо функции $F\restriction x$ фигурирует ее гёделев номер (т. е. код ее алгоритмич. описания, см. также *Арифметизация*).

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [3] Barwise J., Admissible sets and structures, B., 1975.

Н. В. Белякин.

ТРАНСФИНИТНОЕ ЧИСЛО — *порядковый тип* бесконечного вполне упорядоченного множества. См. также *Порядковое число*, *Кардинальное число*.

ТРАНСФИНИТНЫЙ ДИАМЕТР компактного множества — характеристика $d = d(E)$ компактного множества E на комплексной плоскости, служащая геометрич. интерпретацией *емкости* этого множества. Пусть E — компактное бесконечное множество плоскости z. Величина

$$d_n(E) = \left\{ \max_{z_k,\, z_l \in E} \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} [z_k, z_l] \right\}^{2/[n(n-1)]}, \quad (1)$$

$$n = 2, 3, \ldots,$$

где $[a, b] = |a-b|$ — евклидово расстояние между точками a, b, наз. n-м диаметром множества E. В частности, $d_2(E)$ — евклидов диаметр множества E. Точки $z_{n,1}, \ldots, z_{n,n}$ множества E, для к-рых в правой части равенства (1) реализуется максимум, наз. точками Фекете (или узлами Вандермонда) для E. Последовательность величин $d_n(E)$ невозрастающая: $d_{n+1}(E) \leqslant d_n(E)$, $n = 2, 3, \ldots$, так что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} d_n(E) = d(E).$$

Величина $d(E)$ и наз. трансфинитным диаметром множества E. Если E — конечное множество, то полагают $d(E) = 0$. Т. д. $d(E)$, *Чебышева постоянная* $\tau(E)$ и емкость множества $C(E)$ связаны равенствами

$$d(E) = \tau(E) = C(E).$$

Т. д. множества E обладает следующими свойствами: 1) если $E_1 \subset E$, то $d(E_1) \leqslant d(E)$; 2) если a — фиксированное комплексное число и $E_1 = \{w : w = az,\ z \in E\}$, то $d(E_1) = |a| d(E)$; 3) если E_ε — множество точек, находящихся на расстоянии от E, меньшем или равном ε, то $\lim_{\varepsilon \to 0} d(E_\varepsilon) = d(E)$; 4) если E^* — множество всех корней уравнения

$$Q(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k = w,$$

где $Q(z)$ — данный многочлен, w пробегает множество E, то $d(E^*) = \{d(E)\}^{1/k}$. Т. д. круга равен его радиусу; Т. д. прямолинейного отрезка равен четверти его длины.

Пусть E — ограниченный континуум, D — та из компонент дополнения E до расширенной плоскости, к-рая содержит точку ∞. Тогда Т. д. E равен *конформному радиусу* области D (относительно точки ∞).

Соответствующие понятия для множеств на гиперболич. и эллиптич. плоскостях определяются следующим образом. Пусть в качестве модели гиперболич. плоскости рассматривается круг $|z|<1$ с метрикой, определяемой линейным элементом $ds_h = |dz|/(1-|z|^2)$, и пусть E — замкнутое бесконечное множество в круге $|z|<1$. Тогда n-й гиперболический диаметр $d_{n,h}(E)$ множества E определяется равенством (1), в к-ром

$$[a, b] = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| \qquad (2)$$

— гиперболическое псевдорасстояние между точками a и b, т. е. $[a, b] = \operatorname{th} \rho_h(a, b)$, где $\rho_h(a, b)$ — гиперболич. расстояние между точками a, b круга $|z|<1$ (см. *Гиперболическая метрика*). Как и в евклидовом случае, последовательность $d_{n,h}(E)$ невозрастающая, и существует предел

$$\lim_{n \to \infty} d_{n,h}(E) = d_h(E),$$

наз. гиперболическим трансфинитным диаметром множества E. Определяя гиперболическую постоянную Чебышева $\tau_h(E)$ и гиперболическую емкость $C_h(E)$ множества E посредством гиперболич. псевдорасстояния (2) между точками круга $|z|<1$ аналогично тому, как постоянная Чебышева $\tau(E)$ и емкость $C(E)$

определяются при помощи евклидова расстояния между точками плоскости z, получают равенства

$$d_h(E)=\tau_h(E)=C_h(E).$$

Гиперболич. Т. д. инвариантен относительно полной группы гиперболич. изометрий. Если E — континуум, то имеется простая связь гиперболич. Т. д. $d_h(E)$ с конформным отображением. Именно, пусть E — континуум в круге $|z|<1$ и дополнение E до круга $|z|<1$ конформно эквивалентно круговому кольцу $r<|w|<1$, $0<r<1$. Тогда $r=d_h(E)$.

Пусть в качестве модели эллиптич. плоскости взята расширенная плоскость z с метрикой ее римановой сферы K диаметра 1, касающейся плоскости z в точке $z=0$, т. е. метрикой, определяемой линейным элементом

$$ds_e=|dz|/(1+|z|^2),$$

при этом пусть отождествлены точки z и $z^*=-1/z$, к-рым при стереографич. проекции расширенной плоскости z на сферу K соответствуют диаметрально противоположные точки на K. Пусть E — замкнутое бесконечное множество на расширенной плоскости z, $E\cap E^*=\varnothing$, где $E^*=\{-1/z : z\in E\}$. Тогда n-й эллиптический диаметр $d_{n,\,e}(E)$ множества E определяется равенством (1), в к-ром

$$[a,\ b]=\left|\frac{a-b}{1+\bar{a}b}\right| \qquad (3)$$

— эллиптическое псевдорасстояние между точками a, b множества E, т. е. $[a,\ b]=\operatorname{tg}\rho_e(a,\ b)$, где $\rho_e(a,\ b)$ ($<\pi/2$) — эллиптич. расстояние между a и b. Как и в предыдущих случаях, последовательность $d_{n,\,e}(E)$ невозрастающая, и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} d_{n,\,e}(E)=d_e(E),$$

называемый эллиптическим трансфинитным диаметром множества E. Определяя эллиптическую постоянную Чебышева $\tau_e(E)$ и эллиптическую емкость $C_e(E)$ множества E посредством эллиптич. псевдорасстояния (3), получают равенства:

$$d_e(E)=\tau_e(E)=C_e(E).$$

Эллиптич. Т. д. $d_e(E)$ инвариантен относительно группы дробно-линейных преобразований

$$z\longrightarrow\frac{pz+q}{-\bar{q}z+\bar{p}},\quad |p|^2+|q|^2=1,$$

расширенной плоскости z на себя, дополненной группой отражений относительно эллиптич. прямых. Первая из этих групп изоморфна группе вращений сферы K относительно ее центра, вторая — группе отражений сферы K относительно плоскостей, проходящих через ее центр. При данном определении эллиптич. Т. д. множества E следующим образом связан с конформным отображением. Если E — континуум на расширенной плоскости z, $E\cap E^*=\varnothing$, и дополнение $E\cup E^*$ до расширенной плоскости конформно эквивалентно круговому кольцу $r<|w|<1/r$, $0<r<1$, то $r=d_e(E)$.

Понятие Т. д. допускает обобщение для компактов E в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, связанное с *потенциала теорией*. Пусть для точек $x\in\mathbb{R}^m$

$$H(|x|)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x|} & \text{при } m=2,\\[2mm] \dfrac{1}{|x|^{m-2}} & \text{при } m\geqslant 3\end{cases}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа, и для набора точек $(x_j)_{j=1}^n\subset E$ пусть

$$\chi_n(E)=\inf\left\{\frac{2}{n(n-1)}\sum_{j,\ k=1,\ j<k}^{n}H(|x_j-x_k|):\ (x_j)_{j=1}^n\subset E\right\}.$$

Тогда при $m=2$ справедливо равенство

$$d(E)=C(E)=\exp\left(-\lim_{n\to\infty}\chi_n(E)\right),$$

а при $m\geqslant 3$ целесообразно принять (см. [4])

$$d(E)=C(E)=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\chi_n(E)}.$$

Лит.: [1] Fekete M., «Math. Z.», 1923, Bd 17, S. 228—49; [2] Pólya G., Szegö G., «J. reine und angew. Math.», 1931, Bd 165, S. 4—51; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств, пер. с англ., М., 1971; [5] Смирнов В. И., Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1964; [6] Tsuji M., Potential theory in modern function theory, Tokyo, 1959; [7] Kühnau R., Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen und der elliptischen Ebene, B., 1974. *Г. В. Кузьмина, Е. Д. Соломенцев.*

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ КРИВАЯ — плоская кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах не является алгебраическим. В отличие от алгебраич. кривых Т. к. могут иметь бесконечно много точек пересечения с прямой и бесконечно много точек перегиба. У Т. к. встречаются точки особой природы, к-рых не существует у алгебраич. кривых: точки прекращения, обладающие той особенностью, что окружность достаточно малого радиуса с центром в этой точке пересекает кривую только в одной точке; угловые точки (излома точки), в к-рых прекращаются две ветви кривой, причем каждая из них имеет в такой точке свою касательную; асимптотические точки, к к-рым непрерывно приближается ветвь кривой, делая вокруг точки бесконечное число оборотов. Нек-рые Т. к. обладают своеобразными особенностями формы (напр., имеют пунктирную ветвь из бесконечного множества изолированных точек).

Одна из попыток классифицировать Т. к. основывается на том факте, что у подавляющего большинства известных Т. к. (и у всех алгебраич. кривых) угловой коэффициент y' касательной в каждой точке кривой является корнем алгебраич. уравнения, коэффициенты к-рого представляют собой многочлены от переменных x и y. Иными словами, дифференциальные уравнения большинства известных Т. к. являются уравнениями 1-го порядка вида

$$\sum_{r=0}^{n}f_r(x,\ y)(y')^{n-r}=0,$$

где f_0, f_1, f_2, . . ., f_n — многочлены без общих множителей. Это обстоятельство позволяет объединить как все алгебраич. кривые, так и почти все Т. к. (кроме, напр., *Корню спирали*) в группу т. н. паналгебраических кривых, к-рые различаются по степени n и по рангу ν — максимальной степени многочленов f_0, f_1, f_2, . . ., f_n. Так, напр., у кривых 3-го порядка $n=1$, $\nu=2$; у *архимедовой спирали* $n=2$, $\nu=4$. Паналгебраич. кривые обладают многими свойствами, присущими алгебраич. кривым. Напр., на них могут быть обобщены понятия *гессианы* и *поляры*. О попытках дальнейшей классификации паналгебраич. кривых см. [1].

Примеры Т. к. см. *Спирали*, *Цепная линия*, *Диностратa квадратриса*, *Циклоида*, а также графики *трансцендентных функций*: показательной, логарифмической, тригонометрической и др.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ a аналитической функции $f(z)$ — точка ветвления, не являющаяся *алгебраической точкой ветвления*. Иначе говоря, это либо точка ветвления конечного порядка $k>0$, в к-рой, однако, не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a,\ z\neq a} f(z)$, либо *ло-*

гарифмическая точка ветвления бесконечного порядка. Напр., первая возможность реализуется в Т. т. в. $a=0$ для функции $\exp(1/\sqrt[k]{z})$, а вторая — для функции $\ln z$.

В первом случае — Т. т. в. a конечного порядка k — функция $f(z)$ в окрестности a разлагается в ряд Пюизе вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^{n/k},$$

причем среди коэффициентов c_n с отрицательными индексами имеется бесконечно много отличных от нуля.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968. *Е. Д. Соломенцев*

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ — в узком смысле слова *мероморфная функция* в плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, отличная от *рациональной функции*. В частности, сюда относятся целые Т. ф., т. е. *целые функции*, отличные от многочленов, напр. показательная функция e^z, тригонометрич. функции $\sin z$, $\cos z$, гиперболич. функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, функция $1/\Gamma(z)$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Целые Т. ф. имеют единственную существенно особую точку в бесконечности. Собственно мероморфные Т. ф. характеризуются наличием конечного или бесконечного множества полюсов в конечной плоскости $\mathbb{C}$ и соответственно наличием существенно особой точки или предельной точки полюсов в бесконечности; к ним, напр., относятся тригонометрич. функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, гиперболич. функции $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, гамма-функция $\Gamma(z)$. Приведенное определение Т. ф. распространяется на мероморфные функции $f(z)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$.

В широком смысле слова под Т. ф. понимается всякая аналитич. функция (однозначная или многозначная), отличная от алгебраич. функции, для вычисления значений к-рой помимо алгебраич. операций над аргументом, необходимо применить предельный переход в той или иной форме. Для Т. ф. характерно наличие у нее хотя бы одной особенности, не являющейся полюсом или алгебраич. точкой ветвления; напр., логарифмич. функция $\ln z$ имеет две трансцендентные точки ветвления $z=0$ и $z=\infty$. Аналитич. функция трансцендентна тогда и только тогда, когда ее риманова поверхность не компактна.

Важный класс Т. ф. составляют часто встречающиеся специальные функции: *гамма-функция* и *бета-функция* Эйлера, *гипергеометрическая функция* и *вырожденная гипергеометрическая функция*, особенно ее частные случаи — *сферические функции*, *цилиндрические функции*, *Матьё функции*.

Лит.: [1] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963, [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962.

Л. Д. Кудрявцев, Е. Д. Соломенцев.

ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ РАСШИРЕНИЕ — расширение поля, не являющееся алгебраическим. Расширение K/k трансцендентно тогда и только тогда, когда поле K содержит элементы, трансцендентные над k, то есть элементы, не являющиеся корнем никакого алгебраич. уравнения с коэффициентами из k.

Элементы множества $X\subset K$ наз. алгебраически независимыми над k, если для любого конечного набора $x_1, x_2, \ldots, x_m\in K$ и любого многочлена $F(X_1, \ldots, X_m)$ с коэффициентами из k

$$F(x_1, \ldots, x_m)\neq 0.$$

Элементы множества X трансцендентны над k. Если X — максимальное множество, все элементы к-рого алгебраически независимы над k, то X наз. базисом трансцендентности поля K над k. Мощность множества X наз. степенью трансцендентности поля K над k и является инвариантом расширения K/k. Для башни полей $L\supset K\supset k$ степень трансцендентности L/k равна сумме степеней трансцендентности L/K и K/k.

Если все элементы множества X алгебраически независимы над k, то расширение $k(X)$ наз. чисто трансцендентным. В этом случае поле $k(X)$ изоморфно полю рациональных функций от множества переменных X над k. Любое расширение полей L/k представимо в виде башни расширений $L\supset K\supset k$, где L/K — алгебраическое, а K/k — чисто трансцендентное расширение. Если поле K можно выбрать так, чтобы L/K было сепарабельным расширением, то расширение L/k наз. сепарабельно порожденным, а базис трансцендентности K над k — сепарирующим базисом. Если L сепарабельно порождено над k, то L сепарабельно над k. В случае когда расширение L/k конечно порождено, верно и обратное утверждение. Расширение K/k сепарабельно тогда и только тогда, когда любое дифференцирование поля k продолжается на K. Такое продолжение определено однозначно для любого дифференцирования тогда и только тогда, когда расширение K/k алгебраично.

Лит. [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963, [2] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965. *Л. В. Кузьмин.*

ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ ЧИСЛО — число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Областью определения таких чисел являются поля действительных, комплексных и p-адических чисел. Существование и явные построения действительных Т. ч. обосновал Ж. Лиувилль [1] на основе замеченного им факта: иррациональные алгебраич. числа не допускают «очень сильных» приближений рациональными числами (см. *Лиувилля теорема* о приближении алгебраич. чисел). Аналогичные соображения позволяют строить p-адические Т. ч. Г. Кантор [2], обнаружив счетность множества всех алгебраич. чисел и несчетность множества всех действительных чисел, тем самым доказал, что действительные Т. ч. образуют множество мощности континуума. Э. Борель [3], введя первые понятия теории меры, установил, что «почти все» действительные числа трансцендентны. Позднее было найдено, что Т. ч. Лиувилля образуют множество, всюду плотное на действительной числовой оси, имеющее мощность континуума и нулевую меру Лебега. Хотя еще в сер. 18 в. возникла гипотеза о трансцендентности чисел типа e, π, $\ln 2$, $2^{\sqrt{2}}$ и др., доказательств этого долго не удавалось получить. Трансцендентность e доказал Ш. Эрмит [4], π и вообще логарифмов алгебраич. чисел — Ф. Линдеман [5], $2^{\sqrt{2}}$ — А. О. Гельфонд [6], К. Зигель [7] разработал общий метод доказательства трансцендентности и алгебраич. независимости значений в алгебраич. точках целых функций определенного класса (E-функции), удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами. А. О. Гельфонд [8] и Т. Шнайдер [9] одновременно и независимо доказали, что α^β трансцендентно при алгебраическом $\alpha\neq 0$, 1 и алгебраическом иррациональном β (т. н. седьмая проблема Гильберта), А. Бейкер [10] доказал трансцендентность произведений чисел вида α^β при естественных ограничениях. Аналогичные результаты получены для p-адических Т. ч. (исключая теорию E-функций Зигеля). Развитие методов теории Т. ч. оказало сильное влияние на новейшие исследования диофантовых уравнений [10], [11].

Лит.: [1] Liouville J., «C. r. Acad. sci.», 1844, t. 18, p. 883—85, 910—11; [2] Cantor G., Gesammelte Abhandlungen, B., 1932; [3] Borel E., Leçons sur les fonctions discontinues, P., 1898; [4] Hermite C., «C. r. Acad. sci.», 1873, t. 77,

p. 18—24, 74—79, 226—33, 285—93; [5] Lindemann C. L. F., «Math. Ann.», 1882, Bd 20, S. 213—25; [6] Гельфонд А. О., «С. r. Acad. sci.», 1929, t. 189, p. 1224—28; [7] Siegel C., «Abhandl. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Cl.», 1929, № 1, S. 1—70; [8] Гельфонд А. О., «Докл. АН СССР», 1934, т. 2, с. 1—6; [9] Schneider Th., «J. reine und angew. Math.», 1934, Bd 172, S. 65—74; [10] Baker A., Transcendental number theory, L., 1975; [11] Спринджук В. Г., Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных, М., 1982; [12] Фельдман Н. И., Седьмая проблема Гильберта, М., 1982. *В. Г. Спринджук.*

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ МЕРА — функция, характеризующая отклонение заданного *трансцендентного числа* от множества алгебраич. чисел ограниченной степени и ограниченной высоты при изменении границ для этих параметров. Для трансцендентного ω и натуральных n и H Т. м. есть

$$w_n(\omega;\ H)=\min|P(\omega)|,$$

где минимум берется по всем ненулевым целочисленным многочленам $P(x)$ степени не более n и высоты не более H. Из *Дирихле принципа* «ящиков» следует, что всегда

$$w_n(\omega;\ H)<c_1^nH^{-n},$$

где c_1 зависит только от ω. Во многих случаях вместе с доказательством трансцендентности числа ω удается получить оценку снизу для Т. м. в терминах степенной, логарифмической и экспоненциальной функций от n и H. Напр., метод Эрмита доказательства трансцендентности e позволяет получить неравенство

$$w_n(e;\ H)>H^{-n-\frac{c_2n^2\ln n}{\ln\ln H}},$$

где $c_2>0$ — абсолютная постоянная и $H\geqslant H_0(n)$. При любых фиксированных n и $\varepsilon>0$

$$w_n(\omega;\ H)>c_3H^{-n-\varepsilon},\ c_3=c_3(\omega;\ n,\varepsilon)$$

для почти всех (в смысле Лебега) действительных чисел ω (см. *Малера проблема*). Трансцендентные числа могут быть классифицированы на основе различий в асимптотич. поведении $w_n(\omega;\ H)$ при неограниченном изменении n и H (см. [3]).

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; [2] Cijsouw P. L., Transcendence measures, Amst., 1972 (Diss.); [3] Baker A., Transcendental number theory, L., 1975. *В. Г. Спринджук.*

ТРАПЕЦИЙ ФОРМУЛА — частный случай *Ньютона — Котеса квадратурной формулы*, в к-рой берется два узла:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \qquad (1)$$

Если подинтегральная функция $f(x)$ сильно отличается от линейной, то формула (1) дает малую точность. Промежуток $[a,\ b]$ разбивается на n частичных промежутков $[x_i,\ x_{i+1}]$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, длины $h=(b-a)/n$ и для вычисления интеграла по промежутку $[x_i,\ x_{i+1}]$ используется Т. к. ф.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\cong\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})].$$

Суммирование левой и правой части этого приближенного равенства по i от 0 до $n-1$ приводит к составной Т. к. ф.:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong h\left[\frac{f(a)}{2}+f(x_1)+\right.$$
$$\left.+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right], \qquad (2)$$

где $x_j=a+jh$, $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Квадратурную формулу (2) также называют Т. к. ф. (без добавления слова составная). Алгебраич. степень точности квадратурной формулы (2), как и формулы (1), равна 1. Квадратурная формула (2) точна для тригонометрич. функций

$$\cos\frac{2\pi}{b-a}kx,\ \sin\frac{2\pi}{b-a}kx,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

В случае $b-a=2\pi$ формула (2) точна для всех тригонометрич. полиномов порядка не выше $n-1$, более того, ее тригонометрич. степень точности равна $n-1$.

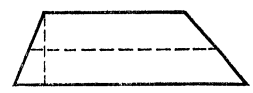
Если подинтегральная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a,\ b]$, то погрешность $R(f)$ квадратурной формулы (2) — разность между интегралом и квадратурной суммой — имеет представление

$$R(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi),$$

где ξ — нек-рая точка промежутка $[a,\ b]$.

И. П. Мысовских.

ТРАПЕЦИЯ — выпуклый четырехугольник, у к-рого две стороны параллельны, а две другие — непараллельны (см. рис.). Параллельные стороны наз. основаниями Т., а непараллельные — ее боковыми сторонами; отрезок, соединяющий середины боковых сторон Т.,— ее средней линией; средняя линия параллельна основаниям Т. и равна их полусумме. Площадь Т. равна произведению средней линии на высоту Т. или половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Т., боковые стороны к-рой равны между собой, наз. равнобочной. *БСЭ-3.*



ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — одна из *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть, напр., в ограниченной области Ω, в каждой точке границы Γ к-рой существует нормаль, задано эллиптич. уравнение 2-го порядка

$$Lu=\sum_{i,\ j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+$$
$$+c(x)u(x)=f(x), \qquad (*)$$

где $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $n\geqslant2$. Т. к. з. для уравнения $(*)$ в области Ω наз. следующая задача: из множества всех решений и $u(x)$ уравнения $(*)$ выделить те, к-рые в каждой граничной точке имеют производные по внутренней конормали N и удовлетворяют условию

$$\frac{\partial u(x)}{\partial N}+\alpha(x)\,u(x)=v(x),\ x\in\Gamma,$$

где $\alpha>0$ и v — заданные непрерывные на Γ функции.

А. Б. Иванов.

ТРЕУГОЛЬНАЯ ГРУППА, триангулируемая группа, — то же, что *Ли вполне разрешимая группа*.

ТРЕУГОЛЬНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица, у к-рой все элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю. В первом случае матрица наз. верхней треугольной матрицей, во втором — нижней треугольной матрицей. Определитель Т. м. равен произведению всех ее диагональных элементов.

О. А. Иванова.

ТРЕУГОЛЬНИК в евклидовой плоскости — три точки (вершины) и три отрезка прямых (стороны) с концами в этих точках. Иногда при определении Т. к нему относят и выпуклую часть плоскости, к-рая ограничена сторонами Т.

Понятие Т. вводится и в многообразиях, отличных от евклидовой плоскости. Т. обычно определяется как три точки и три отрезка геодезических с концами в этих точках. Таковы, напр., сферич. треугольник в *сферической геометрии*, треугольник в плоскости Лобачевского (см. *Неевклидовы геометрии*).

Лит.: [1] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л., Новые встречи с геометрией, пер. с англ., М., 1978; [2] Коксетер Х. С. М., Введение в геометрию, пер. с англ., М., 1966; [3] Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, 2 изд., М., 1962; [4] Адамар Ж., Элементарная геометрия, ч. 1. Планиметрия, пер. с франц., 4 изд., М., 1957; [5] Ефремов Д., Новая геометрия треугольника, Одесса, 1902.

А. Б. Иванов.

ТРЕУГОЛЬНОЕ ЧИСЛО — см. *Арифметический ряд.*

ТРЕУГОЛЬНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *матричный метод суммирования*, определенный треугольной матрицей

$$A=\|a_{nk}\|,\ n,\ k=1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. матрицей, у к-рой $a_{nk}=0$ при $k>n$. Т. м. с. является частным случаем *конечнострочных методов суммирования*. Треугольная матрица A наз. н о р м а л ь н о й, если $a_{nn}\neq 0$ для всех n. Преобразование

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} a_{nk}s_k,$$

осуществляемое посредством нормальной треугольной матрицы A, допускает обращение

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_{nk}^{-1}\sigma_k,$$

где $A^{-1}=\|a_{nk}^{-1}\|$ — матрица, обратная для A. Этот факт упрощает доказательство ряда теорем для матричных методов суммирования, определенных нормальными треугольными матрицами. К Т. м. с. относятся, напр., *Чезаро метод суммирования*, *Вороного метод суммирования*.

Лит. [1] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951, [2] К у к Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Б а р о н С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.

И. И. Волков.

ТРЕУГОЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ — 1) Т. э. алгебры $\mathrm{End}\,V$ эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V над полем k — элемент $X\in\mathrm{End}\,V$, все собственные значения к-рого принадлежат k. Если k алгебраически замкнуто, то всякий элемент из $\mathrm{End}\,V$ треуголен. Для Т. э. X (и только для такого элемента) существует базис в V, относительно к-рого матрица эндоморфизма X треугольна (или, что то же, существует инвариантный относительно X полный флаг в V). Для Т. э. имеется *Жордана разложение* над k. Существует ряд обобщений понятия Т. э. в $\mathrm{End}\,V$ на случай бесконечномерного V (см. [2]).

2) Т. э. конечномерной алгебры A над полем k — такой элемент $a\in A$, что оператор правого (или левого, в зависимости от рассматриваемого случая) умножения на a является Т. э. в алгебре $\mathrm{End}_k A$. Если A изоморфна алгебре $\mathrm{End}\,V$ для нек-рого конечномерного векторного пространства V над k, то эти два (формально различные) определения приводят к одному и тому же понятию.

В алгебрах Ли треугольность элемента $x\in A$ означает треугольность эндоморфизма ad_x (где $\mathrm{ad}_x(y)=[x,\,y]$). Множество всех Т. э. в алгебре Ли, вообще говоря, не замкнуто относительно операций сложения и коммутирования (напр., для $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ — простой алгебры Ли вещественных матриц порядка 2 со следом 0). Однако в случае разрешимой алгебры A это множество является даже характеристич. идеалом в A.

3) Т. э. в связной конечномерной группе Ли G — элемент $g\in G$, для к-рого Ad_g является Т. э. в $\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ (здесь $\mathrm{Ad}: G\to\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ — присоединенное представление группы Ли G в группе $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}\subset\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ автоморфизмов ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Если $\exp:\mathfrak{g}\to G$ — экспоненциальное отображение, а $X\in\mathfrak{g}$ — Т. э. (в смысле пункта 2), то $\exp(X)$ — Т. э. в G. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Алгебры Ли и группы Ли, все элементы к-рых треугольны, наз. треугольными алгебрами или группами соответственно, а также *Ли вполне разрешимыми алгебрами* и *Ли вполне разрешимыми группами*.

Лит. [1] Б о р е л ь А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972, [2] П л о т к и н Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966; [3] П о с т н и к о в М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.

В. В. Горбацевич.

ТРЕФФЦА МЕТОД — один из вариационных методов решения краевых задач. Пусть требуется решить краевую задачу

$$\Delta u=0,\quad u|_S=\varphi, \qquad (*)$$

где S — граница области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$. Решение задачи (*) минимизирует функционал

$$J(u)=\int_\Omega (\mathrm{grad}\,u(x))^2\,dx$$

среди всех функций, удовлетворяющих краевому условию $u/S=\varphi$. Т. м. заключается в следующем. Пусть дана последовательность гармонических в Ω функций $v_1, v_2, \ldots$, квадратично суммируемых в Ω вместе с первыми производными. Приближенное решение разыскивается в виде

$$u_n=\sum_{j=1}^{n} c_j v_j,$$

коэффициенты c_j определяются из условия минимума $J(u_n-u)$, где u — точное решение задачи (*). Это приводит к следующей системе уравнений относительно $c_1, \ldots, c_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_S v_j \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\,dS=\int_S \varphi\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\,dS,$$
$$i=1,\ \ldots,\ n,$$

где ν — внешняя нормаль к S.

Т. м. допускает обобщение и обоснование для различных краевых задач (см. [2] — [4]).

Метод предложен Э. Треффцем (см. [1]).

Лит.: [1] T r e f f t z E., в сб.: Verhandl, des 2. Internat. Kongresses für technische Mechanik, Zürich, 1926, 12—17 Sept., Zürich — Lpz., 1927, S. 131—37; [2] М и х л и н С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970; [3] К р ы л о в В. И., Б о б к о в В. В., М о н а с т ы р н ы й П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 2, Минск, 1975, [4] Б и р м а н М. Ш., «Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ. и астр.», 1956, № 13, в. 3, с. 69—89.

Г. М. Вайникко.

«ТРЕХ СИГМ ПРАВИЛО» — мнемоническое правило, согласно к-рому в нек-рых задачах теории вероятностей и математич. статистики считают практически невозможным событие, заключающееся в отклонении значения нормально распределенной случайной величины от ее математич. ожидания больше, чем на три стандартных отклонения.

Пусть X — нормально $N(a,\sigma^2)$ распределенная случайная величина. Для любого $k>0$

$$\mathrm{P}\{|X-a|<k\sigma\}=2\Phi(k)-1,$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона, откуда, в частности, при $k=3$ следует, что

$$\mathrm{P}\{a-3\sigma<X<a+3\sigma\}=0{,}99730.$$

Последнее равенство означает, что значения случайной величины X будут отклоняться от ее математич. ожидания a на расстояние, превосходящее 3σ в среднем не более чем 3 раза на одну тысячу испытаний. Именно это обстоятельство используют иногда экспериментаторы в нек-рых задачах теории вероятностей и математич. статистики, считая, что событие $\{|X-a|>3\sigma\}$ является практически невозможным и, следовательно, событие $\{|X-a|<3\sigma\}$ — практически достоверным. В этом случае говорят, что экспериментатор придерживается «правила трех сигм».

Лит.: [1] С м и р н о в Н. В., Д у н и н-Б а р к о в с к и й И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

М. С. Никулин.

ТРЕХ ТЕЛ ЗАДАЧА — задача о движении трех тел, рассматриваемых как материальные точки, взаимно притягивающихся по закону тяготения Ньютона. Классич. пример Т. т. з.— задача о движении системы Солнце — Земля — Луна. Т. т. з. состоит в нахожде-

нии общего решения системы дифференциальных уравнений вида

$$m_i\frac{d^2x_i}{\partial t^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{\partial t^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$
$$i=1,\ 2,\ 3,$$

где x_i, y_i, z_i — прямоугольные координаты тела M_i в нек-рой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей, t — время, m_i — масса тела M_i, а U — силовая функция, зависящая только от взаимных расстояний между телами. Функция U определяется соотношением

$$U=f\left(\frac{m_1m_2}{\Delta_{12}}+\frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}+\frac{m_3m_1}{\Delta_{13}}\right),$$

где взаимные расстояния Δ_{ij}, $i, j=1, 2, 3$, даются формулой

$$\Delta_{ij}=\Delta_{ji}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}.$$

Из свойств силовой функции выводятся десять первых интегралов уравнений движения в абсолютной системе координат. Шесть из них, называемые интегралами движения центра масс, определяют равномерное и прямолинейное движение центра масс трех тел. Три интеграла моментов количества движения задают неизменную величину и направление вектора момента количества движения системы трех тел. Интеграл энергии определяет постоянную величину полной энергии системы. Г. Брунс (H. Bruns, 1887) доказал, что уравнения движения Т. т. з. не имеют никаких других первых интегралов, выражающихся с помощью алгебраич. функций от координат и их производных. А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1889) доказал, что уравнения движения Т. т. з. не имеют также трансцендентных интегралов, выражающихся через однозначные аналитич. функции. К. Сундман (C. Sundman, 1912) нашел общее решение задачи в виде степенных рядов относительно нек-рой регуляризирующей переменной, сходящихся для любого момента. Однако ряды Сундмана оказались совершенно бесполезными как для качественных исследований, так и для практических вычислений вследствие их крайне медленной сходимости.

Уравнения Т. т. з. допускают пять частных решений, в к-рых все три материальные точки находятся в некоторой неизменной плоскости. При этом конфигурация трех тел остается неизменной, и они описывают кеплеровские траектории с общим фокусом в центре масс системы. Два частных решения соответствуют случаю, когда три тела все время образуют равносторонний треугольник. Это — т. н. треугольные решения Т. т. з., или решения Лагранжа. Три частных решения, соответствующие расположению всех трех тел на одной прямой, наз. прямолинейными частными решениями Т. т. з., или решениями Эйлера.

Для общего случая Т. т. з. подробно изучены финальные движения, т. е. предельные свойства движения при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$.

Частным случаем Т. т. з. является т.н. ограниченная Т. т. з., к-рая получается из общей Т. т. з. в том случае, когда масса одного из трех тел столь мала, что ее влиянием на движение остальных двух тел можно пренебречь. В этой задаче тела M_1 и M_2 с конечными массами m_1 и m_2 движутся под действием сил взаимного притяжения по кеплеровским орбитам. В правой прямоугольной системе координат $G\xi\eta\zeta$ с началом G в центре масс тел M_1 и M_2, с осью ξ, направленной по линии, соединяющей тела M_1 и M_2, и осью ζ, перпендикулярной плоскости их движения, движение третьего тела M_3 с малой массой описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{\xi}-2\dot{v}\dot{\eta}-\dot{v}^2\xi-\ddot{v}\eta=\frac{\partial W}{\partial\xi},$$
$$\ddot{\eta}+2\dot{v}\dot{\xi}-\dot{v}^2\eta+\ddot{v}\xi=\frac{\partial W}{\partial\eta},$$
$$\ddot{\zeta}=\frac{\partial W}{\partial\zeta},$$

где

$$W=f\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right),$$

v — истинная аномалия кеплеровского движения тел M_1 и M_2, а r_1 и r_2— расстояния от тела M_3 до тел M_1 и M_2 соответственно. В случае круговой ограниченной Т. т. з.

$$\dot{v}=n=\text{const},\quad \ddot{v}=0,$$

и уравнения движения тела M_3 имеют первый интеграл, наз. интегралом Якоби, вида

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2=n^2(\xi^2+\eta^2)+2f\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right)+C,$$

где C — произвольная постоянная. Поверхность, определяемая уравнением

$$n^2(\xi^2+\eta^2)+2f\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right)+C=0,$$

наз. поверхностью нулевой скорости и замечательна тем, что определяет области возможных движений тела M_3 относительно тел M_1 и M_2. Ограниченная Т. т. з. имеет частные решения, аналогичные частным решениям общей Т. т. з. Положения тела с малой массой при этих частных решениях наз. точками либрации.

Для ограниченной задачи удалось исследовать разнообразные классы периодич. движений.

Лит. [1] Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, 2 изд., М., 1978, [2] Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, М., 1968.

Е. П. Аксенов.

ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — топологическое пространство, каждая точка к-рого имеет окрестность, гомеоморфную трехмерному числовому пространству $\mathbb{R}^3$ или замкнутому полупространству $\mathbb{R}^3_+$. Это определение обычно дополняют требованием того, чтобы Т. м. как топологич. пространство, было хаусдорфовым и имело счетную базу. Край Т. м., т. е. совокупность его точек, имеющих окрестность второго, но не первого типа, является *двумерным многообразием* без края. Методы топологии Т. м. весьма специфичны, поэтому она занимает особое место в *топологии многообразий*.

Примеры. Несколько свойств Т. м., не имеющих, вообще говоря, места в старших размерностях: ориентируемое Т. м. всегда параллелизуемо; замкнутое Т. м. ограничивает нек-рое четырехмерное многообразие; на Т. м. всегда можно ввести кусочно линейную и дифференцируемую структуры, причем любой гомеоморфизм между двумя Т. м. можно аппроксимировать как кусочно линейным гомеоморфизмом, так и диффеоморфизмом.

Один из наиболее употребительных способов задания Т. м. состоит в использовании *Хегора разбиений* и тесно связанных с ними *Хегора диаграмм*. Суть этого способа состоит в том, что любое замкнутое ориентируемое Т. м. M можно разбить на два подмногообразия с общим краем, каждое из к-рых гомеоморфно стандартному полному кренделю V нек-рого рода n. Другими словами, Т. м. M можно получить склеиванием двух экземпляров полного кренделя V по нек-рому гомеоморфизму их краев. Этот факт позволяет сводить многие задачи топологии Т. м. к задачам топологии поверхностей. Минимальное возможное число n наз. родом Т. м. M. Другой полезный способ задания Т. м. основан на существовании тесной связи между Т. м.

и зацеплениями в S^3. Дело в том, что любое замкнутое ориентируемое Т. м. M можно представить в виде $M=\partial W$, где четырехмерное многообразие W получается из 4-шара B^4 приклейкой ручек индекса 2 по компонентам нек-рого оснащенного зацепления L в $S^3=\partial B^4$. Эквивалентно, Т. м. M можно получить из сферы S^3 сферич. перестройками. Дополнительно можно добиться, чтобы все компоненты зацепления L имели четные оснащения, и тогда многообразие W получается параллелизуемым. Часто используется представление Т. м. в виде пространств разветвленных накрытий сферы S^3. Если L — зацепление в S^3, то любое конечнолистное накрывающее пространство пространства $S^3\setminus L$ можно компактифицировать несколькими окружностями и получить замкнутое Т. м. M. Естественная проекция $p: M\to S^3$, локально гомеоморфная вне $p^{-1}(L)$, наз. разветвленным накрытием сферы S^3 с ветвлением вдоль зацепления L. Любое Т. м. рода 2 двулистно накрывает сферу с ветвлением вдоль нек-рого зацепления, тогда как в случае Т. м. произвольного рода можно гарантировать существование только трехлистного накрытия с ветвлением вдоль нек-рого узла. Это обстоятельство служит первопричиной того, что трехмерная гипотеза Пуанкаре и проблема алгоритмич. распознавания сферы решены пока (1984) только в классе Т. м. рода 2.

Основной задачей топологии Т. м. является задача их классификации. Т. м. M наз. простым, если из $M=M_1\#M_2$ следует, что ровно одно из многообразий M_1, M_2 является сферой. Каждое компактное Т. м. раскладывается в связную сумму конечного числа простых Т. м. Это разложение единственно в ориентируемом случае и единственно с точностью до замены прямого произведения $S^2\times S^1$ на косое произведение $S^2\tilde{\times} S^1$ в неориентируемом случае. Вместо понятия простого Т. м. часто бывает удобнее использовать понятие неприводимого Т. м., т. е. многообразия, в к-ром каждая 2-сфера ограничивает шар. Класс неприводимых Т. м. отличается от класса простых Т. м. ровно на три многообразия: S^3, $S^2\times S^1$, $S^2\tilde{\times} S^1$. При этом многообразие S^3 неприводимо, но обычно не считается простым, а многообразия $S^2\times S^1$ и $S^2\tilde{\times} S^1$ просты, но приводимы. Неприводимые Т. м. с краем изучены достаточно хорошо. Напр., любую гомотопич. эквивалентность пар $f: (M, \partial M)\to(N, \partial N)$, где M, N — компактные ориентируемые и неприводимые Т. м. с краем, можно продеформировать в гомеоморфизм. В замкнутом случае для этого достаточно дополнительно потребовать, чтобы Т. м. M было достаточно большим, т. е. содержало нек-рую двустороннюю несжимаемую поверхность. При этом поверхность $F\subset M$, $F\neq S^2$, наз. несжимаемой, если индуцируемый вложением гомоморфизм группы $\pi_1(F)$ в группу $\pi_1(M)$ инъективен. Если первая группа гомологий компактного неприводимого Т. м. бесконечна, то такая поверхность всегда существует. Любое компактное ориентируемое неприводимое достаточно большое Т. м., фундаментальная группа к-рого содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу, является *Зейферта многообразием*.

Лит [1] Hempel J., 3-manifolds, Princeton, 1976; [2] Waldhausen F., «Ann. Math.», 1968, v. 87, p. 56—88; [3] Jaco W., Lectures on three-manifold topology, Providence, 1980.

С. В. Матвеев

ТРИАДА — четверка $(X; A, B, x_0)$, где X — топологич. пространство, а A и B — такие его подпространства, что $A\cup B=X$ и $x_0\in A\cap B$. Вводятся гомотопич. группы Т. $\pi_n(X; A, B, x_0)$, $n\geqslant 3$ (при $n=2$ — просто множества), используемые при доказательстве теоремы о гомотопич. вырезании. Имеется также точная последовательность Майера — Вьеториса, связывающая *гомологий группы* пространств X, A, B, $A\cap B$.

Ю. Б. Рудяк.

ТРИАНГУЛЯЦИЯ — 1) Т. полиэдра, прямолинейная триангуляция,— представление *полиэдра* в виде тела геометрического симплициального комплекса K, т. е. такое его разбиение на замкнутые симплексы, что каждые два симплекса либо не пересекаются, либо пересекаются по их общей грани. Прямолинейные Т. полиэдров служат основным инструментом их изучения. Любой полиэдр имеет Т. и любые две его Т. имеют общее подразделение.

Замкнутой звездой $\mathrm{St}(\sigma, T)$ симплекса σ Т. T наз. объединение симплексов из T, содержащих σ. Имеется представление замкнутой звезды симплекса $\sigma\in T$ в виде *соединения* (джойна) σ и его *пояса* (линка): $\mathrm{St}(\sigma, T)=\sigma*\mathrm{lk}(\delta, T)$. В частности, звезда вершины является *конусом* над ее поясом. Если симплекс $\sigma\in T$ представлен в виде соединения двух своих граней δ и γ, то $\mathrm{lk}(\sigma, T)=\mathrm{lk}(\delta, \mathrm{lk}(\gamma, T))$. Пояс симплекса не зависит от Т.: если σ служит симплексом произвольных прямолинейных Т. T_1, T_2 одного и того же полиэдра, то полиэдры $|\mathrm{lk}(\sigma, T_1)|$ и $|\mathrm{lk}(\sigma, T_2)|$ pl-гомеоморфны. Открытая звезда симплекса $\sigma\in T$ определяется как объединение внутренностей тех симплексов Т. T, для к-рых σ служит гранью. Открытые звезды вершин Т. полиэдра P образуют открытое покрытие P. *Нерв* этого покрытия симплициально изоморфен T. Триангуляции T_1 и T_2 полиэдров P_1 и P_2 комбинаторно эквивалентны, если нек-рые их подразделения симплициально изоморфны. Для комбинаторной эквивалентности T_1 и T_2 необходимо и достаточно pl-гомеоморфности P_1 и P_2. Т. многообразия наз. комбинаторной, если звезда любой ее вершины комбинаторно эквивалентна симплексу. В этом случае звезда любого симплекса Т. также комбинаторно эквивалентна симплексу.

Если P — замкнутый подполиэдр полиэдра Q, то любая Т. K полиэдра P продолжается до нек-рой Т. L полиэдра Q. В этом случае говорят, что пара геометрических симплициальных комплексов (L, K) триангулирует пару (Q, P). Т. прямого произведения $\sigma\times\delta\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ симплексов $\sigma\in\mathbb{R}^m$, $\delta\in\mathbb{R}^n$ можно построить следующим способом. Вершинами Т. служат точки $c_{ij}=(a_i b_j)$, $0\leqslant i\leqslant\dim\sigma$, $0\leqslant j\leqslant\dim\delta$, где a_i — вершины σ, а b_j — вершины δ. На вершины $c_{i_0 j_0}, c_{i_1 j_1}, \ldots, c_{i_k j_k}$, где $i_0\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k$, тогда и только тогда натянут k-мерный симплекс, когда среди них нет совпадающих и $j_0\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_k$. Аналогичным способом производится Т. прямого произведения двух симплициальных комплексов с упорядоченными вершинами.

2) Т. топологического пространства, криволинейная триангуляция,— пара (K, f), где K — геометрич. симплициальный комплекс и $f: |K|\to X$ — гомеоморфизм. Т. (K, f) и (L, g) пространства X совпадают, если $g^{-1}f: |K|\to|L|$ — симплициальный изоморфизм. Если σ — симплекс комплекса K и (K, f) — Т. пространства X, то пространство $f(\sigma)$, снабженное гомеоморфизмом $f|_\sigma: \sigma\to f(\sigma)$, наз. топологическим симплексом. Звезда и пояс топологич. симплекса триангулированного топологич. пространства X определяются так же, как и в случае прямолинейных Т. Если точка $a\in X$ служит вершиной Т. (K, f) и (L, g) пространства X, то ее пояса в этих Т. гомотопически эквивалентны.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [2] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977.

С. В. Матвеев.

ТРИВЕКТОР — упорядоченная совокупность $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ трех векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ аффинного пространства A, отложенных от общего начала. Т. полагается равным нулю, если определяющие его векторы компланарны (линейно зависимы). Ненулевой Т. определяет несущую его 3-мерную плоскость. Если пространство A

имеет конечную размерность n, и в нек-ром базисе $e=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ векторы

$$u=\sum_{i=1}^{n} u^i e_i,\ v=\sum_{i=1}^{n} v^i e_i,\ w=\sum_{i=1}^{n} w^i e_i,$$

то величины

$$a^{ijk}=\begin{vmatrix} u^i & v^i & w^i \\ u^j & v^j & w^j \\ u^k & v^k & w^k \end{vmatrix}=3!\ u^{[i}\ v^j\ w^{k]},\ 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant n,$$

наз. координатами Т. $[u, v, w]$ в базисе e. Эти координаты кососимметричны по любой паре своих индексов, при замене базиса в A изменяются, как координаты трижды контравариантного тензора. Среди этих координат C_n^3 существенных. Два Т. наз. равными, если в каком-либо базисе A равны их координаты. Класс равных Т. наз. свободным Т.

При наличии в A скалярного произведения на Т. распространяется ряд метрич. понятий векторной алгебры. Мерой Т. $[u, v, w]$ наз. трехмерный объем параллелепипеда — множества концов векторов вида $h=xu+yv+zw$, где $0\leqslant x,\ y,\ z\leqslant 1$, отложенных от общего начала. В случае когда $\dim A=3$, мера Т. равна модулю смешанного произведения векторов u, v, w. Скалярным произведением двух Т. наз. число, равное произведению мер сомножителей на косинус угла между несущими их плоскостями. Скалярное произведение является билинейной формой от координат сомножителей. Если $\dim A=4$, то Т. $[u, v, w]$ может быть отождествлен с вектором пространства A, наз. векторным произведением векторов u, v, w.

Т. в тензорном исчислении есть любой контравариантный кососимметрич. тензор валентности 3 (т. е. тензор типа (3, 0)). Каждый такой тензор может быть представлен в виде суммы нескольких тензоров, к-рым соответствуют Т. с различными несущими их плоскостями.

См. также *Бивектор*, *Внешнее произведение*, *Поливектор*, *Плюккеровы координаты*. *Л. П. Купцов.*

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — одна из важнейших *ортогональных систем* функций. Функции Т. с.

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

ортогональны на любом отрезке вида $[a-\pi, a+\pi]$, а функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots$$

ортонормированы на этом отрезке. Т. с. полна и замкнута в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$ при $1\leqslant p<\infty$, а также в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций. Эта система образует базис в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$ при $1<p<\infty$. Ряды по Т. с. изучаются в теории *тригонометрических рядов*.

Наряду с Т. с. широкое применение находит комплексная тригонометрич. система $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Функции этих систем связаны друг с другом формулами Эйлера.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., 2 изд., М., 1965. *Б. И. Голубов.*

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СУММА — конечная сумма S вида

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F(x)},$$

где $P\geqslant 1$, P — целое число, $F(x)$ — действительная функция x. Т. с. также наз. и более общие суммы S' вида

$$S'=\sum_{x_1=1}^{P_1}\ldots\sum_{x_r=1}^{P_r}\Phi(x_1, \ldots, x_r)\,e^{2\pi i F(x_1, \ldots, x_r)},$$

где $F(x_1, \ldots, x_r)$ — действительная функция, а $\Phi(x_1, \ldots, x_r)$ — произвольная комплекснозначная функция.

Если $F(x)$ — многочлен, то S наз. суммой Вейля; если многочлен $F(x)$ имеет вид

$$F(x)=\frac{a_n x^n+\ldots+a_1 x}{q},\ (a_n, \ldots, a_1, q)=1,$$

то S наз. рациональной тригонометрич. суммой; если $P=q$, то S наз. полной тригонометрич. суммой; если $r=1$, $\Phi(x_1)=1$ при простом x_1, и $\Phi(x_1)=0$ при составном x_1, то S наз. тригонометрич. суммой с простыми числами; если $r\geqslant 1$, $\Phi(x_1, \ldots, x_r)=1$, $F(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен, то S' наз. кратной суммой Вейля. Основной проблемой в теории Т. с. является проблема разыскания верхней грани модуля S и S'.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избр. тр., М., 1952; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] его же, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976, [4] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [5] Титчмарш Е. К, Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М, 1953, [6] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., Кратные тригонометрические суммы, М., 1980 *А. А. Карацуба.*

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс элементарных функций: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс. Обозначаются соответственно: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$.

Тригонометрические функции действительного аргумента. Пусть A — точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, α — угол между осью абсцисс и вектором OA, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс (рис. 1). При этом если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной, т. е. α — полярный угол точки A. Если (x_α, y_α) — прямоугольные декартовы координаты точки A, то Т. ф. синус и косинус определяются формулами

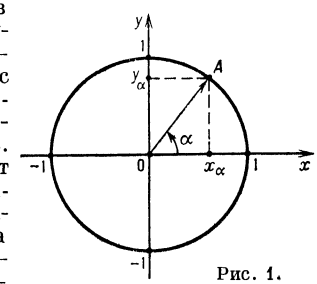


Рис. 1.

$$\sin\alpha=y_\alpha,\quad \cos\alpha=x_\alpha.$$

Остальные Т. ф. могут быть определены формулами

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$
$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Все Т. ф.— периодические функции. Графики Т. ф. даны на рис. 2.

Рис. 2.

Основные свойства Т. ф.: область определения, множество значений, четность и участки монотонности приведены в табл.

Каждая Т. ф. в каждой точке своей области определения непрерывна и бесконечно дифференцируема; производные Т. ф.:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Интегралы от Т. ф.:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$
$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C, \quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$$

Все Т. ф. допускают разложение в степенные ряды:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

при $|x| < \infty$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

при $|x| < \infty$,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_n|}{(2n)!}x^{2n-1} + \ldots \text{ при } |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots + \frac{2^{2n}|B_n|}{(2n)!}x^{2n-1}\right],$$

при $0 < |x| < \pi$ (B_n — числа Бернулли).

Функция	Область определения	Множество значений	Четность	Участки монотонности
$\sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$[-1, +1]$	нечетная	возрастает при $x \in ((4n-1)\pi/2, (4n+1)\pi/2)$ убывает при $x \in ((4n+1)\pi/2, (4n+3)\pi/2)$
$\cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$[-1, +1]$	четная	возрастает при $x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)$ убывает при $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$
$\operatorname{tg} x$	$x \neq \pi/2 + \pi n$	$(-\infty, +\infty)$	нечетная	возрастает при $x \in ((2n-1)\pi/2, (2n+1\ \pi/$
$\operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi n$	$(-\infty, +\infty)$	нечетная	убывает при $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$
$\sec x$	$x \neq \pi/2 + \pi n$	$(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$	четная	возрастает при $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$ убывает при $x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)$
$\operatorname{cosec} x$	$x \neq \pi n$	$(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$	нечетная	возрастает при $x \in ((4n+1)\pi/2, (4n+3)\pi/2)$ убывает при $x \in ((4n-1)\pi/2, (4n+1)\pi/2)$

Функция $y = \sin x$, являющаяся обратной по отношению к функции $x = \sin y$, определяет y как многозначную функцию от x; она обозначается $y = \operatorname{Arcsin} x$. Аналогично определяются функции, обратные по отношению к другим Т. ф.; все они наз. *обратными тригонометрическими функциями*.

Тригонометрические функции комплексного переменного. Т. ф. для комплексных значений переменного $z = x + iy$ определяются как *аналитические продолжения* соответствующих Т. ф. действительного переменного в комплексную плоскость.

Так, $\sin z$ и $\cos z$ можно определить с помощью рядов для $\sin x$ и $\cos x$. Эти ряды сходятся во всей плоскости, поэтому $\sin z$ и $\cos z$ — *целые функции*.

Т. ф. тангенс и котангенс определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Т. ф. $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ — *мероморфные функции*. Полюсы $\operatorname{tg} z$ простые (1-го порядка) и находятся в точках $z = \pi/2 + \pi n$, полюсы $\operatorname{ctg} z$ также простые и находятся в точках $z = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$.

Все формулы, справедливые для Т. ф. действительного аргумента, остаются справедливыми и для комплексного аргумента.

В отличие от Т. ф. действительного переменного, функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают все комплексные значения: уравнения $\sin z = a$ и $\cos z = a$ имеют решения для любого комплексного a:

$$z = \arcsin a = -i \ln(ia + \sqrt{1 - a^2}),$$
$$z = \arccos a = -i \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Т. ф. $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ принимают все комплексные значения, кроме $\pm i$: уравнения $\operatorname{tg} z = a$, $\operatorname{ctg} z = a$ имеют решения для любого комплексного числа $a \neq \pm i$:

$$z = \operatorname{arctg} a = \frac{i}{2} \ln \frac{1 - ia}{1 + ia},$$
$$z = \operatorname{arcctg} a = \frac{i}{2} \ln \frac{ia + 1}{ia - 1}.$$

Т. ф. можно выразить через *показательную функцию*:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}},$$

и *гиперболические функции*:

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz.$$

В. И. Битюцков.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ, конечная тригонометрическая сумма, — выражение вида

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

с действительными коэффициентами a_0, a_k, b_k, $k = 1, \ldots, n$; число n наз. порядком Т. п. ($|a_n| + |b_n| > 0$). Т. п. можно записать в комплексной форме

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

где

$$2c_k = \begin{cases} a_k - ib_k, & k \geqslant 0, \\ a_{-k} + ib_{-k}, & k < 0. \end{cases}$$

Т. п. являются важнейшим средством *приближения функций*.

В. И. Битюцков.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД — ряд по косинусам и синусам кратных дуг, т. е. ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

или в комплексной форме

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

где a_k, b_k или, соответственно, c_k наз. коэффициентами Т. р.

Впервые Т. р. встречаются у Л. Эйлера (L. Euler, 1744). Он получил разложения

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots \quad (0 < x < 2\pi),$$
$$\frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} = 1 + r\cos x + r^2 \cos 2x + \ldots,$$
$$\frac{r\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} = r\sin x + r^2 \sin 2x + \ldots$$

В сер. 18 в. в связи с исследованиями задачи о свободном колебании струны возник вопрос о возможности

представления функции, характеризующей начальное положение струны, в виде суммы Т. р. Этот вопрос вызвал острые споры, продолжавшиеся несколько десятилетий, лучших аналитиков того времени — Д. Бернулли (D. Bernoulli), Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert), Ж. Лагранжа (J. Lagrange), Л. Эйлера (L. Euler). Споры относились к содержанию понятия функции. В то время функции обычно связывались с их аналитич. заданием, что приводило к рассмотрению только аналитических или кусочно аналитических функций. А здесь появилась необходимость для функции, графиком к-рой является достаточно произвольная кривая, построить Т. р., представляющий эту функцию.

Но значение этих споров больше. Фактически в них обсуждались или возникли в связи с ними вопросы, связанные со многими принципиально важными понятиями и идеями математич. анализа вообще,— представление функций рядами Тейлора и аналитич. продолжение функций, использование расходящихся рядов, перестановка пределов, бесконечные системы уравнений, интерполирование функций многочленами и др.

И в дальнейшем, как и в этот начальный период, теория Т. р. служила источником новых идей математич. анализа и влияла на развитие др. его разделов. Существенную роль играли исследования по Т. р. в построении интегралов Римана и Лебега. Теория функций действительного переменного возникла и развивалась затем в тесной связи с теорией Т. р. Как обобщения теории Т. р. появились интеграл Фурье, почти периодические функции, общие ортогональные ряды, абстрактный гармонический анализ. Исследования по Т. р. послужили исходным пунктом при создании теории множеств. Т. р. являются мощным средством представления и исследования функций.

Вопрос, приведший к спорам математиков 18 в., был решен в 1807 Ж. Фурье (J. Fourier), указавшим формулы для вычисления коэффициентов Т. р. (1), к-рый должен представлять на $(0,2\pi)$ функцию $f(x)$:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и применившим их при решении задач теплопроводности. Формулы (2) получили название ф о р м у л Ф у р ь е, хотя они встречались ранее у А. Клеро (A. Clairaut, 1754), а Л. Эйлер (1777) приходил к ним с помощью почленного интегрирования. Т. р. (1), коэффициенты к-рого определяются по формулам (2), наз. р я д о м Ф у р ь е функции f, а числа a_k, b_k — к о э ф ф и ц и е н т а м и Ф у р ь е.

Характер получаемых результатов зависит от того, как понимается представление функции рядом, как понимается интеграл в формулах (2). Современный вид теория Т. р. приобрела после появления интеграла Лебега.

Теорию Т. р. можно условно разделить на два больших раздела — теорию *Фурье рядов*, в к-рой предполагается, что ряд (1) является рядом Фурье нек-рой функции, и теорию общих Т. р., где такое предположение не делается. Ниже указываются основные результаты, полученные в теории общих Т. р. (при этом мера множеств и измеримость функций понимаются по Лебегу).

Первым систематич. исследованием Т. р., в к-ром не предполагалось, что эти ряды являются рядами Фурье, была диссертация Б. Римана (B. Riemann, 1853). Поэтому теорию общих Т. р. наз. иногда р и м а н о в с к о й т е о р и е й Т. р.

Для изучения свойств произвольного Т. р. (1) со стремящимися к нулю коэффициентами Б. Риман рассматривал непрерывную функцию $F(x)$, являющуюся суммой равномерно сходящегося ряда

$$\frac{a_0}{4}x^2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\cos kx + b_k\sin kx}{k^2},$$

полученного после двукратного почленного интегрирования ряда (1). Если ряд (1) сходится в нек-рой точке x к числу s, то в этой точке существует и равна s вторая симметрич. производная функции F:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{4h^2}=s.$$

Так как

$$\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{4h^2}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

то это приводит к суммированию ряда (1), порождаемому множителями $\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2$, наз. м е т о д о м с у м м и р о в а н и я Р и м а н а. С помощью функции F формулируется принцип локализации Римана, согласно к-рому поведение ряда (1) в точке x зависит только от поведения функции F в произвольно малой окрестности этой точки.

Если Т. р. сходится на множестве положительной меры, то его коэффициенты стремятся к нулю (т е о р е м а К а н т о р а — Л е б е г а). Стремление к нулю коэффициентов Т. р. следует также из его сходимости на множестве второй категории (У. Юнг, W. Young, 1909).

Одной из центральных проблем теории общих Т. р. является задача о представлении произвольной функции Т. р. Усилив результаты Н. Н. Лузина (1915) о представлении функций Т. р., суммируемыми почти всюду методами Абеля — Пуассона и Римана, Д. Е. Меньшов доказал (1940) следующую теорему, относящуюся к наиболее важному случаю, когда представление функции f понимается как сходимость Т. р. к $f(x)$ почти всюду. Для каждой измеримой и конечной почти всюду функции f существует Т. р., сходящийся к ней почти всюду (т е о р е м а М е н ь ш о в а). Следует отметить, что если даже функция f интегрируема, то в качестве такого ряда нельзя, вообще говоря, взять ряд Фурье функции f, т. к. существуют ряды Фурье, расходящиеся всюду.

Приведенная теорема Меньшова допускает следующее уточнение: если функция f измерима и конечна почти всюду, то существует такая непрерывная функция φ, что $\varphi'(x)=f(x)$ почти всюду и почленно продифференцированный ряд Фурье функции φ сходится к $f(x)$ почти всюду (Н. К. Бари, 1952).

Неизвестно (1984), можно ли в теореме Меньшова опустить условие конечности функции f почти всюду. В частности, неизвестно (1984), может ли Т. р. сходиться почти всюду к $+\infty$.

Поэтому задача о представлении функций, к-рые могут принимать бесконечные значения на множестве положительной меры, была рассмотрена для случая, когда сходимость почти всюду заменяется на более слабое требование — сходимость по мере. Сходимость по мере к функциям, к-рые могут принимать бесконечные значения, определяется так: последовательность частных сумм Т. р. $s_n(x)$ сходится по мере к функции $f(x)$, если

$$s_n(x)=f_n(x)+\alpha_n(x),$$

где $f_n(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, а последовательность $\alpha_n(x)$ сходится по мере к нулю. В этой постановке вопрос о представлении функций решен до конца: для каждой измеримой функции существует Т. р., сходящийся к ней по мере (Д. Е. Меньшов, 1948).

Много исследований посвящено проблеме единственности Т. р.: могут ли два разных Т. р. сходиться к одной и той же функции; в др. формулировке: если Т. р. сходится к нулю, то следует ли отсюда, что все коэффициенты ряда равны нулю. Здесь можно иметь в виду сходимость во всех точках или во всех точках вне нек-рого множества. Ответ на эти вопросы существенно зависит от свойств того множества, вне к-рого сходимость не предполагается.

Установилась следующая терминология. Множество $E\subset[0,2\pi]$ наз. *единственности множеством* или U-м н о ж е с т в о м, если из сходимости Т. р. к нулю на $[0,2\pi)$ всюду, кроме, быть может, точек множества E, следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю. В противном случае E наз. M-м н о ж е с т в о м.

Как показал Г. Кантор (G. Cantor, 1872), пустое множество, а также любое конечное множество являются U-множествами. Произвольное счетное множество также является U-множеством (У. Юнг, 1909). С др. стороны, каждое множество положительной меры является M-множеством.

Существование M-множеств меры нуль было установлено Д. Е. Меньшовым (1916), к-рый построил первый пример совершенного множества, обладающего этими свойствами. Этот результат имеет принципиальное значение в проблеме единственности. Из существования M-множеств меры нуль следует, что при представлении функций Т. р., сходящимися почти всюду, эти ряды определяются заведомо неоднозначно.

Совершенные множества могут быть и U-множествами (Н. К. Бари; А. Райхман, A. Rajchman, 1921). В проблеме единственности существенную роль играют весьма тонкие характеристики множеств меры нуль. Общий вопрос о классификации множеств нулевой меры на M- и U-множества остается (1984) открытым. Он не решен даже для совершенных множеств.

К проблеме единственности примыкает следующая задача. Если Т. р. сходится к функции $f\in L(0,2\pi)$, то должен ли этот ряд быть рядом Фурье функции f. П. Дюбуа-Реймон (P. Du Bois-Reymond, 1877) дал положительный ответ на этот вопрос, если f интегрируема в смысле Римана, а ряд сходится к $f(x)$ во всех точках. Из результатов Ш. Ж. Валле Пуссена (Ch. J. La Vallée Poussin, 1912) следует, что ответ положителен и в том случае, когда всюду, кроме счетного множества точек, ряд сходится и его сумма конечна.

Если Т. р. в нек-рой точке x_0 сходится абсолютно, то точки сходимости этого ряда, а также точки его абсолютной сходимости расположены симметрично относительно точки x_0 (П. Фату, P. Fatou, 1906).

Согласно *Данжуа — Лузина теореме* из абсолютной сходимости Т. р. (1) на множестве положительной меры следует сходимость ряда $\Sigma_k(|a_k|+|b_k|)$ и, следовательно, абсолютная сходимость ряда (1) для всех x. Этим свойством обладают и множества второй категории, а также нек-рые множества меры нуль.

Приведенный обзор охватывает только одномерные Т. р. (1). Имеются отдельные результаты, относящиеся к общим Т. р. от нескольких переменных. Здесь во многих случаях нужно еще найти естественные постановки задач.

Лит.: [1] Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, [2] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965, [3] Л у з и н Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951, [4] Р и м а н Б., Соч., пер с нем., М.— Л., 1948, с. 225—61. *С. А. Теляковский.*

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ МЕТОД — один из общих методов *аналитической теории чисел*. Две проблемы теории чисел потребовали для своего решения создания Т. с. м.: проблема распределения дробных долей многочлена и проблема представления натурального числа суммою слагаемых определенного вида (аддитивные проблемы теории чисел).

Пусть $f(x)$ — действительная функция, $x=1, 2, \ldots, P$, $P\to+\infty$; говорят, что дробные доли $f(x)$ распределены равномерно (р. р.), если при любых α и β, $0\leqslant\alpha<\beta<1$, число σ дробных долей $f(x)$, попадающих на интервал (α, β), пропорционально длине этого интервала, т. е.

$$\sigma=(\beta-\alpha)P+o(P).$$

Пусть, теперь $\psi(x)$ — характеристич. функция интервала (α, β), т. е.

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha<x<\beta,\\ 0, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Продолжая $\psi(x)$ периодически на всю прямую, т. е. полагая $\psi(x+1)=\psi(x)$, имеют

$$\sigma=\sum_{x=1}^{P}\psi(f(x)).$$

Разлагая $\psi(x)$ в ряд Фурье, находят

$$\psi(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c(m)\,e^{2\pi imx},\quad c(0)=\beta-\alpha.$$

Тем самым

$$\sigma=(\beta-\alpha)P+\sum_{m=-\infty,\,m\neq0}^{+\infty}c(m)\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}. \quad (1)$$

Последнее соотношение, вообще говоря, не верно, т. к. могут быть такие x, что $\{f(x)\}=\alpha$ или $\{f(x)\}=\beta$; но числа α и β можно заменить близкими α' и β' и такими, что при всех $x=1, 2, \ldots, P$, $\{f(x)\}\neq\alpha'$, $\{f(x)\}\neq\beta'$; от такой замены точность соотношения практически не изменится и оно станет верным. Точно также функцию $\psi(x)$ можно так «сгладить» («подправить»), что величина σ практически не изменится, а коэффициенты $c(m)$ ряда Фурье будут «быстро» убывать с ростом m, т. е. будет «быстро» сходиться ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|c(m)|.$$

Второе слагаемое в равенстве (1) по абсолютной величине не превосходит $\varkappa$,

$$\varkappa=\sum_{m=-\infty,\ m\neq0}^{+\infty}|c(m)|\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}\right|.$$

Если известно, что

$$|S|=\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}\right|\leqslant P\Delta, \quad (2)$$

где $\Delta=\Delta(P)\to0$ при $P\to+\infty$, то для σ получают

$$\sigma=(\beta-\alpha)P+o(P),\ o(P)=cP\Delta,$$

т. е. дробные доли $f(x)$ распределены равномерно. Таким образом, надо уметь оценивать сверху модуль тригонометрич. суммы. Так как каждое слагаемое в S по модулю равно 1, то тривиальная оценка $|S|$ есть P, т. е. тривиальная оценка — это число слагаемых суммы S. Оценка вида (2) наз. нетривиальной, если $\Delta<1$, а Δ наз. п о н и ж а ю щ и м м н о ж и т е л е м.

В задаче о дробных долях $f(x)$ за счет сглаживания $\psi(x)$ можно добиться того, что оценку (2) надо получать для «небольшого» числа значений m, напр., для m из промежутка $0<|m|<(\ln P)^A$, $A>0$ — нек-рая постоянная.

Такой же подход применяется при выводе асимптотич. формулы для суммы

$$\sum_{x=1}^{P}\{f(x)\},$$

к-рая возникает в задачах о числе целых точек в областях на плоскости и в пространстве.

В аддитивных проблемах теории чисел тригонометрические суммы появляются следующим образом.

При целом m справедлива формула

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}\,d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m=0,\\ 0, & \text{если } m\neq 0,\end{cases}$$

поэтому, если через $I(N)$ обозначить число решений уравнения

$$N = u_1+\ldots+u_k,\ u_\nu\in U_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ k,$$

где U_ν — нек-рые подмножества натурального ряда чисел, то

$$I(N)=\int_0^1 S_1(\alpha)\ldots S_k(\alpha)\,e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha,$$

где

$$S_\nu(\alpha)=\sum_{u_\nu\in U_\nu} e^{2\pi i\alpha u_\nu},\ \nu=1,\ \ldots,\ k.$$

Полагая, в частности, $U_\nu=U=\{1^n,\ 2^n,\ \ldots\}$, получают *Варинга проблему*; при $k=3$, $U_\nu=U=\{2,3,5,7,11,\ \ldots,\ p,\ \ldots\}$ — тернарную *Гольдбаха проблему* и т. д. Как и в задаче о распределении дробных долей, главным вопросом здесь является вопрос об оценке сверху модуля $S_\nu(\alpha)$, т. е. вопрос о верхней грани $|S_\nu(\alpha)|$.

Тем самым широкий круг разнообразных проблем теории чисел формулируется единообразно на языке тригонометрич. сумм.

Первая нетривиальная тригонометрич. сумма появилась у К. Гаусса (C. Gauss, 1811) в одном из его доказательств закона взаимности квадратичных вычетов:

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F(x)},\quad F(x)=\frac{ax^2}{P},$$

и К. Гаусс точно вычислил значение S:

$$S=\begin{cases}(1+i)\sqrt{P}, & \text{если } P\equiv 0 \bmod 4;\\ \sqrt{P}, & \text{если } P\equiv 1 \pmod 4;\\ 0, & \text{если } P\equiv 2 \pmod 4;\\ i\sqrt{P}, & \text{если } P\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Целый ряд независимых работ с применением тригонометрич. сумм появился в нач. 20 в.

Г. Вейль (H. Weyl, 1916), изучая распределение дробных долей многочлена

$$f(x)=\alpha_1 x+\ldots+\alpha_n x^n$$

с действительными коэффициентами $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$, рассмотрел суммы S с функцией $F(x)$ вида $F(x)=mf(x)$, m — целое число, $m\neq 0$. И. М. Виноградов (1917) при изучении распределения целых точек в областях на плоскости и в пространстве рассмотрел суммы S с функцией $F(x)$, от к-рой требовалось только, чтобы ее вторая производная удовлетворяла условиям

$$\frac{c_1}{A}\leqslant F''(x)\leqslant\frac{c_2}{A},$$

где c_1, c_2 — нек-рые абсолютные положительные постоянные, $A=A(P)\to+\infty$ при $P\to+\infty$. Г. Харди (G. Hardy) и Дж. Литлвуд (J. Litlewood) (1918), получив приближенное функциональное уравнение дзета-функции Римана, рассмотрели сумму S с функцией $F(x)$ вида

$$F(x)=t\ln x,$$

где t — действительный параметр, $t=t(P)$.

Во всех указанных работах требовалось найти возможно лучшую оценку сверху модуля суммы S.

Общая схема исследования названных проблем теории чисел Т. с. м. такова: выписывается точная формула, выражающая число решений изучаемого уравнения или число дробных долей изучаемой функции, попадающих на заданный интервал, или число целых точек в заданной области, в виде интеграла от тригонометрич. суммы или в виде ряда, коэффициентами к-рого являются тригонометрич. суммы; точная формула представляется суммою двух слагаемых — главного и дополнительного (напр., если рассматривается ряд Фурье характеристич. функции интервала, то главный член получается от нулевого коэффициента ряда Фурье); главное слагаемое доставляет главный член асимптотич. формулы, дополнительное — остаточный член. В аддитивных задачах, таких, как проблема Варинга, проблема Гольдбаха и др., главное слагаемое исследуется методом, близким к круговому методу Харди — Литлвуда — Рамануджана (этот метод наз. *круговым методом* Харди — Литлвуда — Рамануджана в форме тригонометрич. сумм Виноградова). В большинстве других задач (распределение дробных долей, целые точки в областях и др.) главный член получается тривиально. Теперь возникает проблема оценки остаточного члена, и если удается доказать, что он является величиной меньшего порядка, чем главный, то тем самым и доказывается асимптотич. формула.

Основной задачей при оценке остаточного члена является задача возможно более точных оценок тригонометрич. сумм. О методах оценок тригонометрич. сумм и оценках см. *Тригонометрическая сумма*, а также *Виноградова метод*, *Варинга проблема*, *Гольдбаха проблема*, *Аддитивные проблемы*.

Лит. см. при ст. *Тригонометрическая сумма*.

А. А. Карацуба.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ — приближенное представление функции $f(x)$ в виде тригонометрич. полинома

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

значения к-рого в заданных точках совпадают с соответствующими значениями функции. Именно, всегда можно подобрать $2n+1$ коэффициентов A, a_k, b_k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, полинома n-го порядка $T(x)$ так, чтобы его значения были равны значениям y_k функции $y=f(x)$ в $2n+1$ наперед заданных точках x_k промежутка $[0,2\pi)$. Полином $T(x)$ имеет вид

$$T(x)=\sum_{k=0}^{2n} y_k t_k(x),$$

где

$$t_k(x)=\frac{\Delta x}{\Delta'(x)\,2\sin(x-x_k)/2},\quad \Delta(x)=\prod_{k=0}^{2n}2\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

Особенно простой вид полином $T(x)$ приобретает в случае равноотстоящих узлов $x_k=(2k-1)\pi/2n$; его коэффициенты выражены формулами

$$A=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k,$$

$$a_m=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k\cos mx_k,$$

$$b_m=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k\sin mx_k,\ 1\leqslant m\leqslant n.$$

В. И. Битюцков.

ТРИГОНОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром метрич. соотношения между элементами треугольника описываются через *тригонометрические функции* (см., напр., *Косинусов теорема*, *Синусов теорема*, *Тангенсов формула*), а также устанавливаются соотношения между тригонометрич. функциями (т. н. г о н и о м е т р и я). Т. рассматривается как для евклидовой, так и для *неевклидовой геометрии*. Т. сферы евклидового пространства наз. *сферической тригонометрией*.

А. Б. Иванов.

ТРИКОМИ ЗАДАЧА — задача отыскания решения уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя независимыми переменными и с одной

гладкой разомкнутой линией параболического вырождения AB, принимающего заданные значения на эллиптической части σ границы $\partial\Omega$ области Ω задания уравнения и на одной из двух характеристик AC или BC, образующих гиперболическую часть $\sigma_1 = AC \cup BC$ границы $\partial\Omega = \sigma \cup \sigma_1$ (см. *Смешанного типа уравнение*).

Т. з. для *Трикоми уравнения*

$$Tu \equiv yu_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в области Ω, ограниченной гладкой кривой $\sigma \subset \{(x, y) : y > 0\}$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1,0)$ и характеристиками AC и BC:

$$AC: x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2},\ BC: 1 - x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

впервые была поставлена и изучена Ф. Трикоми (F. Tricomi, [1], [2]).

При определенных ограничениях на гладкость заданных функций и характер поведения производной u_y искомого решения u в точках A и B Т. з.:

$$u|_\sigma = \varphi,\ u|_{AC} = \psi \qquad (2)$$

для уравнения (1) редуцируется к отысканию регулярного в области $\Omega^+ = \Omega \cap \{x, y) : y > 0\}$ решения $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющего краевым условиям

$$u|_\sigma = \varphi,$$

$$u_y(x, 0) = \alpha D_{0x}^{2/3} u(x, 0) + \psi_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (3)$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, $\psi_1(x)$ — однозначно определяется через ψ, $D_{0x}^{2/3}$ — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) дифференцирования порядка $^2/_3$:

$$D_{0x}^{2/3}\tau(x) = \frac{1}{\Gamma(1/3)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}},$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Решение задачи (1), (3) в свою очередь сводится к нахождению функции $\nu(x) = u_y(x, 0)$ из нек-рого сингулярного интегрального уравнения. Это уравнение в случае, когда σ совпадает с нормальным контуром

$$\sigma_0 = \left\{(x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4},\ y \geqslant 0\right\}$$

имеет вид

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2x}\right)\times$$
$$\times \nu(t)\,dt = f(x),$$

где $f(x)$ явно выражается через φ и ψ, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши (см. [1] — [4]).

При доказательстве единственности и существования решения Т. з. наряду с принципом экстремума Бицадзе (см. *Смешанного типа уравнение)* и методом интегральных уравнений широко используется так наз. метод a b c, сущность к-рого заключается в том, что для данного дифференциального оператора 2-го порядка L (напр., T) с областью определения $D(L)$ строится дифференциальный оператор 1-го порядка

$$l = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x, y),\ (x, y) \in \Omega$$

обладающий тем свойством, что

$$\int_\Omega lu \cdot Lu\,dx\,dy \geqslant c\,\|u\|^2 \quad \forall u \in D(L),$$

где $C = \text{const} > 0$; $\|\cdot\|$ — нек-рая норма (см. [5]).

Т. з. получила обобщения как на случай уравнений смешанного типа с несколькими линиями параболического вырождения (см. [6]) так и на случай уравнений смешанного гиперболо-параболического типа (см. [7]).

Лит.: [1] Трикоми Ф., О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, пер. с итал., М.— Л., 1947, [2] его же, Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957; [3] Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, М., 1953; [4] его же, Уравнения смешанного типа, М., 1959; [5] Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, пер. с англ., М., 1961; [6] Нахушев А. М., «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, с. 38—40; [7] Джураев Т. Д., Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, Ташкент, 1979.

А. М. Нахушев.

ТРИКОМИ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0,$$

к-рое является простой моделью смешанного эллиптико-гиперболического типа уравнений с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y и с одной разомкнутой нехарактеристической линией параболического вырождения. Т. у. эллиптично при $y > 0$, гиперболично при $y < 0$ и вырождается в параболического типа уравнение на прямой $y = 0$ (см. [1]). Т. у. является прототипом уравнения Чаплыгина

$$k(y)\,u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где $u = u(x, y)$ — функция тока плоскопараллельных устанавливающихся газовых течений, $k(y)$ и y — функции скорости течения, к-рые положительны при дозвуковой и отрицательны при сверхзвуковой скорости; x — угол наклона вектора скорости (см. [2], [3]).

К краевым задачам для Т. у. сводятся многие важные проблемы механики сплошных сред, в частности, смешанные течения с образованием локальных дозвуковых зон (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Трикоми Ф., О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, пер. с итал., М.— Л., 1947; [2] Чаплыгин С. А., О газовых струях, М.— Л., 1949; [3] Франкль Ф. И., Избр. труды по газовой динамике, М., 1973; [4] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.

А. М. Нахушев.

ТРИОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОВЕРХНОСТЕЙ — множество поверхностей в трехмерном пространстве, распадающихся на три однопараметрич. семейства таким образом, что любые две поверхности различных семейств образуют прямой угол в каждой точке их пересечения. Предполагается, что входящие в Т. с. п. поверхности являются регулярными, в этом случае кривые, по к-рым пересекаются входящие в нее поверхности, являются линиями кривизны этих поверхностей (теорема Дюпена).

Т. с. п. образуют системы координатных поверхностей в ортогональной координации пространства. Так, в сферич. системе координат Т. с. п. образуют: одно семейство сфер с общим центром в начале координат, второе семейство конусов вращения с вершиной в начале координат и с осью, через к-рую проходят плоскости третьего семейства координатных поверхностей. С каждой Т. с. п. может быть связана нек-рая ортогональная координация пространства. Линейный элемент пространства в ортогональных координатах u, v, w имеет вид

$$ds^2 = H_1^2\,du^2 + H_2^2\,dv^2 + H_3^2\,dw^2,$$

где $H_i(u, v, w)$, $i = 1, 2, 3$,— т. н. функции Ламе, для к-рых риманов тензор этой пространственной формы тождественно равен нулю. Этими функциями определяется Т. с. п. с точностью до движения (или отражения). С каждой регулярной поверхностью может быть связана Т. с. п., в состав к-рой она входит. Если задано однопараметрич. семейство регулярных поверхностей, входящее в состав Т. с. п., и если в этом семействе содержится хотя бы одна поверхность, от-

личная от плоскости или сферы, то вся Т. с. п. этим семейством вполне определяется.

Т. с. п. образуют софокусные поверхности поверхностей 2-го порядка в евклидовом пространстве; уравнение систем этих поверхностей в декартовой ортогональной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}+\frac{z^2}{c+\lambda}=1,$$

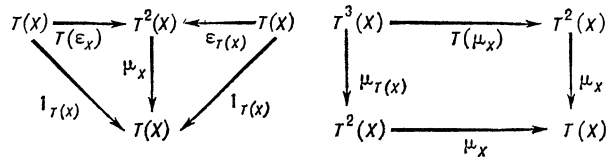
где a, b, c — фиксированные величины, $0<c<b<a$, λ — параметр. При $\lambda<c$ это уравнение определяет семейство эллипсоидов, при $c<\lambda<b$ — семейство однополостных гиперболоидов, а при $b<\lambda<a$ — семейство двуполостных гиперболоидов. Через каждую точку пространства проходят три поверхности этой системы: однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид и эллипсоид. Автоморфизмами Т. с. п. в евклидовом пространстве являются сферич. преобразования.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, 2 éd., P., 1910, [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.— Л., 1947—48. *Л. А. Сидоров.*

ТРИСЕКЦИЯ УГЛА — задача о делении угла φ на три равные части; одна из классич. задач древности на точное построение с помощью циркуля и линейки. Решение задачи о Т. у. сводится к нахождению рациональных корней кубич. уравнения вида $4x^3-3x-\cos\varphi=0$, где $x=\cos\frac{\varphi}{3}$, к-рое, в общем случае, не разрешимо в квадратных радикалах. Таким образом, задача о Т. у. не может быть решена с помощью циркуля и линейки, что было доказано в 1837 П. Ванцелем (P. Wantzell). Однако такое построение возможно для углов $90°/2^n$, где $n=0, 1, 2, \ldots$, а также при использовании других средств и приемов построения (напр., *Диностратa квадратрисы*, *конхоиды*, т. н. метода «вставок»).

Лит.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 4. Геометрия, М., 1963, с. 205—27. *Е. Г. Соболевская.*

ТРОЙКА, монада, в категории — моноид в категории функторов. Другими словами, Т. в категории $\mathfrak{R}$ наз. ковариантный функтор $T\colon \mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$, снабженный такими естественными преобразованиями $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}\to\mathfrak{R}$ и $\mu\colon T^2\to T$, что следующие диаграммы коммутативны (здесь $\mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}$ обозначает тождественный функтор категории $\mathfrak{R}$).



Иногда Т. наз. стандартной конструкцией.

Для любой пары сопряженных функторов $F\colon \mathfrak{R}\to\mathfrak{L}$ и $G\colon \mathfrak{L}\to\mathfrak{R}$ функтор $T=FG\colon \mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ является тройкой вместе с морфизмами $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}\to T$ и $\mu=G(\eta_F)\colon T^2\to T$, где ε и η — единица и коединица сопряжения. Обратно, для произвольной тройки (T, ε, μ) существует такая пара сопряженных функторов F и G, что $T=FG$, а преобразования ε и μ получаются из единицы и коединицы сопряжения описанным выше способом. Подобных различных разложений для Т. может оказаться целый класс. В этом классе имеется наименьший элемент (конструкция Клейсли) и наибольший элемент (конструкция Эйленберга — Мура).

Примеры. 1) В категории множеств функтор взятия множества подмножеств произвольного множества обладает структурой Т. каждое множество X естественно вкладывается в множество своих подмножеств, а каждому множеству подмножеств X сопоставляется объединение этих подмножеств.

2) В категории множеств каждый основной функтор $H_A(X)=H(A, X)$ является Т.: отображение $\varepsilon_X\colon X\to H(A, X)$ сопоставляет каждому $x\in X$ функцию $f_x\colon A\to X$, тождественно равную x; отображение $\mu_X\colon H(A, H(A, X))\simeq H(A\times A, X)\to H(A, X)$ сопоставляет каждой функции от двух переменных ее ограничение на диагональ.

3) В категории R-модулей над коммутативным кольцом R функтор $T_A(X)=A\otimes_R X$ снабжается структурой Т., аналогичной структуре из примера 2).

4) В категории топологич. пространств каждая топологич. группа G позволяет определить функтор $T_G(X)=X\times G$, к-рый является Т.: каждый элемент $x\in X$ переходит в элемент (x, e), где e — единичный элемент группы G, а отображение $\mu\colon X\times G\times G\to X\times G$ определяется равенством $\mu_X(x, g, g')=(x, gg')$.

Лит.: [1] Адамс Дж., Бесконечнократные пространства петель, пер. с англ., М., 1982; [2] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, М., 1975; [4] Mac Lane S., Categories for the working mathematician, N. Y.— [a. o.], 1971; [5] Manes E. G., Algebraic theories, N. Y., 1976. *М. Ш. Цаленко.*

ТРОХОИДА — плоская кривая, являющаяся траекторией точки M вне или внутри окружности, к-рая катится по другой окружности. Т. наз. эпитроходой (рис. 1 *а*, *б*) или гипотроходой (рис. 2 *а*, *б*) в зависимости от того, будет ли катящаяся окружность иметь внешнее или внутреннее касание

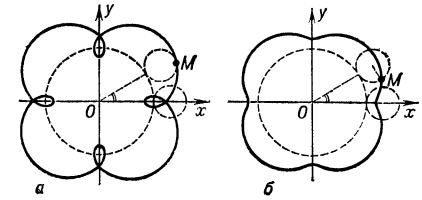


Рис. 1.

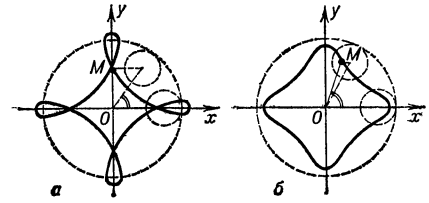


Рис. 2.

с неподвижной окружностью. Параметрич. уравнения эпитрохоиды:

$$x=(R+mR)\cos mt-h\cos(t+mt),$$
$$y=(R+mR)\sin mt-h\sin(t+mt);$$

гипотрохоиды:

$$x=(R-mR)\cos mt+h\cos(t-mt),$$
$$y=(R-mR)\sin mt-h\sin(t-mt),$$

где r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной окружности, $m=R/r$ — модуль Т., h — расстояние от вычерчивающей точки до центра катящейся окружности. Если $h>r$, то Т. наз. удлиненной (см. рис. 1*а*, 2*а*), при $h<r$ — укороченной (см. рис. 1*б*, 2*б*), при $h=r$ — *эпициклоидой* или *гипоциклоидой*.

Если $h=R+r$, то Т. наз. трохоидальной розой, уравнение к-рой в полярных координатах

$$\rho=a\sin\mu\varphi.$$

При рациональном значении μ трохоидальная роза — алгебраич. кривая. Если $R=r$, то Т.— *Паскаля улитка*, если $R=2r$ — *Эллипс*.

Т. относится к т. н. *циклоидальным кривым*. Иногда Т. наз. укороченную или удлиненную циклоиду.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов

ТРУБЧАТАЯ ОБЛАСТЬ, труба,— область T в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ вида

$$T=B+i\mathbb{R}^n=\{z=x+iy: x\in B,\ |y|<\infty\},$$

где B — область в действительном подпространстве $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$, к-рая наз. основанием Т. о. T. Области вида $\mathbb{R}^n+iB$ тоже наз. Т. о. *Голоморфности оболочка* произвольной Т. о. совпадает с ее выпуклой оболочкой; в частности, всякая функция, голоморфная в Т. о. T, продолжается до функции, голоморфной в выпуклой оболочке T. Т. о. наз. радиальной, если ее основание есть связный конус в $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. М. Чирка.

ТРУБЧАТАЯ ОКРЕСТНОСТЬ — окрестность гладкого подмногообразия N в гладком многообразии M, расслаивающаяся над N со слоем $\mathbb{R}^d$, где

$$d=\dim M-\dim N.$$

Пусть в M выбрана риманова метрика и рассматриваются начинающиеся в N отрезки нормальных к N геодезических. Если N компактно, то найдется такое $\varepsilon>0$, что никакие два отрезка длины $\leqslant\varepsilon$, исходящие из разных точек N, не пересекаются. Объединение всех таких отрезков длины $<\varepsilon$ является открытой окрестностью U подмногообразия N и наз. его трубчатой окрестностью. Для некомпактного N можно строить Т. о., покрыв N счетным множеством компактов и уменьшая ε с ростом номера элемента покрытия. Имеется деформационная ретракция $r: U\to N$, сопоставляющая каждой точке из U начало геодезической, содержащей эту точку. Эта ретракция задает векторное расслоение со слоем $\mathbb{R}^d$, изоморфное нормальному расслоению ν вложения $N\to M$. Таким образом, факторпространство $\overline{U}/\partial\overline{U}$ гомеоморфно *Тома пространству* расслоения ν.

Аналог понятия Т. о. вводится и для топологич. многообразий (где надо рассматривать локально плоские вложения, [2]).

Лит.: [1] Том Р., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 293—351; [2] Kirby R., Siebenmann L., Foundational essays on topological manifolds, Princeton, 1977.

Ю. Б. Рудяк.

ТУПИКОВАЯ ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — представляющая заданную *булеву функцию* дизъюнктивная нормальная форма (д. н. ф.), к-рую нельзя упростить ни вычеркиванием буквы из нек-рой конъюнкции, ни удалением какой-либо конъюнкции. Минимальная д. н. ф. получается из сокращенной д. н. ф. путем удаления нек-рых конъюнкций; этот неоднозначный, ветвящийся процесс может привести «в тупик», т. е. к д. н. ф., из к-рой нельзя удалить никакого члена. Такая д. н. ф. и наз. тупиковой. Т. д. н. ф., вообще говоря, не является минимальной.

Значение этого понятия состоит, с одной стороны, в том, что Т. д. н. ф. в задаче оптимизации моделируют локальные минимумы, среди к-рых надо отыскать глобальный (минимальную д. н. ф.). С другой стороны, на практике при минимизации булевых функций зачастую ограничиваются построением Т. д. н. ф. Оценки сложности д. н. ф. показывают: 1) быстрый рост числа Т. д. н. ф. с увеличением числа переменных n булевых функций (эта величина порядка $2^{2^{cn}}$); 2) малую (стремящуюся к нулю при $n\to\infty$) долю минимальных д. н. ф. среди Т. д. н. ф.; 3) неограниченно растущее (при $n\to\infty$) расхождение в сложности наугад взятой Т. д. н. ф. и минимальной д. н. ф. Перечисленные факты имеют место как для самой «плохой» функции, так и в «типичном» случае, т. е. для совокупности функций, доля к-рых стремится к единице при $n\to\infty$.

См. также *Булевых функций нормальные формы*.

В. В. Глаголев.

ТУРБУЛЕНТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — вывод, анализ и решение уравнений, описывающих турбулентные течения жидкостей и газов (т. е. такие завихренные течения, термодинамич. и гидродинамич. характеристики к-рых испытывают хаотич. флуктуации из-за наличия многочисленных вихрей различных размеров и потому изменяются в пространстве и времени весьма нерегулярно).

Индивидуальные реализации турбулентных течений описываются обычными уравнениями гидромеханики вязкой жидкости. Единственность решения задачи Коши для них не доказана (доказательство удается лишь для двумерных течений и при специальных предположениях об изменчивости кинематич. вязкости ν). Стационарные решения, отвечающие ламинарным течениям, формально существуют при любых числах Рейнольдса $\mathrm{Re}=UL/\nu$ (L и U — масштабы длины и скорости), но при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$ они неустойчивы. Гидродинамич. неустойчивость относительно малых возмущений поля скорости вида

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},\ t)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\exp(\lambda t)$$

исследуется как задача о собственных значениях соответствующего линеаризованного уравнения для $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ (т. н. *Орра — Зоммерфельда уравнение*).

При значениях числа Рейнольдса Re в нек-рой окрестности $\mathrm{Re}_{кр}$ в фазовом пространстве течения существует однопараметрич. семейство замкнутых траекторий. Если оно появляется лишь при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$, то бифуркация наз. нормальной, и замкнутые траектории суть предельные циклы, к-рым соответствуют периодические по t решения с конечными амплитудами порядка $(\mathrm{Re}-\mathrm{Re}_{кр})^{1/2}$ и произвольными фазами. По предположению Л. Д. Ландау (1944), турбулентность образуется в результате последовательности нормальных бифуркаций и представляет собой квазипериодическое эргодическое течение с очень большим числом несоизмеримых частот колебаний и соответствующих степеней свободы — фаз колебаний.

Если семейство замкнутых фазовых траекторий появляется еще при $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{кр}$, то бифуркация наз. обратной, предельные циклы неустойчивы (т. е. траектории с них сматываются); при $\mathrm{Re}\to\mathrm{Re}_{кр}-0$ они сжимаются и в пределе исчезают, а при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$ возмущения разрастаются со временем и, по-видимому, быстро приобретают непериодич. характер. Возможно, что в этом случае в фазовом пространстве имеется *странный аттрактор*, т. е. множество Λ неблуждающих точек (у к-рых каждая окрестность пересекается с нек-рой траекторией по меньшей мере дважды), отличающихся от неподвижных точек и замкнутых траекторий и имеющих окрестности, в к-рых появляющиеся траектории все асимптотически приближаются к Λ.

Существует гипотеза, что после четырех бифуркаций в фазовом пространстве течений жидкости появляется странный аттрактор, являющийся локально канторовым множеством двумерных поверхностей, попадание на к-рый и создает хаотичность течения, т. е. турбулентность. Однако доказательной теории бифуркаций для гидродинамич. систем еще не построено (см. [3]).

Наиболее полным статистич. описанием турбулентного течения несжимаемой жидкости является задание вероятностной меры $P(\omega)$ на функциональном прост-

ранстве возможных полей скорости $u(x, t)$ или ее функционального преобразования Фурье — характеристич. функционала, напр. в спектральном представлении $\Psi[z(k, t)]$ (см. [1]). Для него из уравнений Навье — Стокса выводится линейное уравнение в вариационных производных (так что статистич. динамика турбулентности оказывается линейной), к-рое надлежит решать при заданном

$$\Psi_0[z(k)] = \Psi[z(k)\,\delta(t-t_0)].$$

В частности, для пространственного характеристич. функционала $\Psi[z(k), t]$, дающего полное статистич. описание поля скорости в фиксированный момент времени t, получается уравнение Хопфа:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (H_0+H_1)\Psi;\ H_0 = -i\nu\int dk k^2 z_\alpha(k) D_\alpha(k);$$

$$H_1 = \int\int dk'\,dk'' B_{\alpha,\beta\gamma}(k'+k'') z_\beta(k'+k'') D_\alpha(k') D_\gamma(k''),$$

где

$$B_{\alpha,\ \beta\gamma}(k) = ik_\alpha(\delta_{\beta\gamma} - k_\beta k_\gamma k^{-2}),$$

а $D_\alpha(k)$ — оператор вариационного дифференцирования по $z_\alpha(k)$. Это уравнение аналогично уравнению для вектора состояния Ψ в представлении Шрёдингера квантового бозе-поля с сильным взаимодействием специального вида (слияние двух бозонов в один): $z_\alpha(k)$ и $D_\alpha(k)$ суть операторы рождения и уничтожения квантов с импульсом k, а константой взаимодействия служит Re. Общих методов решения линейных уравнений в вариационных производных еще не создано. При $\mathrm{Re}\gg 1$ теория возмущений не действует, хотя частичное суммирование диаграмм Фейнмана возможно (см. [2]). Решение Ψ можно записать в виде континуального интеграла, но общих методов для вычисления таких интегралов еще нет. Зато общим методом нахождения вероятностных мер $P(\omega)$ для описания турбулентных течений может служить построение таких мер $P_e(\omega)$ для галеркинских аппроксимаций уравнений Навье — Стокса: для семейства мер $\{P_e\}$ доказывается слабая компактность (см. [6]); этим методом, в частности, доказываются нек-рые теоремы существования и единственности решений Ψ.

Эквивалентная формулировка полного статистич. описания турбулентного течения заключается в задании всех конечномерных плотностей вероятности $f_n = P_{M_1\ldots M_n}(u_1, \ldots, u_n)$ для значений $u_m = u(M_m)$ поля скорости на всевозможных конечных наборах точек $M_m = (x_m, t_m)$ пространства-времени. Для них из уравнений Навье — Стокса выводятся (см. [5]) линейные уравнения

$$\frac{\partial f_n}{\partial t_k} = -\left(\frac{\partial u_{k\alpha} f_n}{\partial x_{k\alpha}} + \frac{\partial w_{k\alpha} f_n}{\partial u_{k\alpha}}\right),$$

где w_k — перенесенное в точку M_k условное математич. ожидание ускорения в точке (x, t_k) при условии, что значения $u_1 = u(M_1), \ldots, u_n = u(M_n)$ фиксированы. Величины $w_{k\alpha} f_n$ содержат интегралы по $f_{n+1}\,du_{n+1}$, так что уравнения для f_n образуют бесконечную цепочку (аналогичную *Боголюбова цепочке уравнений*). Интегрируя уравнение для $\partial f_n/\partial t_k$ по $F(u_1, \ldots, u_n)\times$ $\times du_1 \ldots du_k$, получают обобщенные уравнения Фридмана — Келлера

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial t_k} = -\overline{\frac{\partial u_{k\alpha} F}{\partial x_{k\alpha}}} + \overline{w_{k\alpha}\frac{\partial F}{\partial u_{k\alpha}}},$$

где черточка — математич. ожидание. Это уравнение было выведено при $F = u_{1\alpha_1}^{m_1}\ldots u_{n\alpha_n}^{m_n}$, так что $\overline{F}$ — это n-точечный статистич. момент поля скорости порядка $N = m_1 + \ldots + m_n$. Уравнения для моментов образуют бесконечную цепочку (разрешимость к-рой доказывается с помощью галеркинских аппроксимаций уравнений Навье — Стокса).

При $N=1$ эти уравнения (уравнения Рейнольдса) получаются непосредственным осреднением уравнений Навье — Стокса и отличаются от таковых для осредненного поля скорости $\bar{u}$ появлением дополнительных неизвестных — одноточечных вторых моментов $\tau_{jl} = -\rho\overline{u_j' u_l'}$ (ρ — плотность жидкости, штрихи обозначают отклонения от математич. ожиданий), называемых напряжениями Рейнольдса. Простейшим способом замыкания системы уравнений Фридмана — Келлера является представление τ_{jl} в виде функций от $\partial\bar{u}_i/\partial x_k$. В т. н. полуэмпирич. теории турбулентности эти функции берутся линейными, и для их коэффициентов (имеющих смысл коэффициентов турбулентной вязкости) принимаются те или иные дополнительные предположения (напр., пропорциональность $l\sqrt{b}$, где l и b — масштаб и кинетич. энергия турбулентности в единице массы, для к-рых конструируются дополнительные уравнения — это делает реологию осредненного течения нелинейной и создает специфич. эффекты).

При $N=2$ получаются уравнения для двухточечных корреляционных функций поля скорости $\overline{u_{1\alpha}' u_{2\beta}'}$ (или их преобразований Фурье по $(M_1 — M_2)$-спектральных функций). Для их замыкания необходимы дополнительные предположения о входящих в них третьих моментах (см. [1], [5]). Наиболее естественные методы построения замкнутых уравнений для спектров турбулентности получаются обрезанием частично просуммированных диаграмм Фейнмана.

Существенные геометрич. упрощения получаются в случае однородной и изотропной турбулентности. Эта модель важна, потому что всякая реальная турбулентность с очень большим числом Рейнольдса оказывается локально-стационарной, локально-однородной и локально-изотропной. При этом при фиксированной скорости диссипации кинетич. энергии ε статистич. структура трехмерного турбулентного течения с очень большим числом Рейнольдса в достаточно малых масштабах полностью определяется двумя параметрами ε и ν, так что, напр., структурная функция скоростей при $r \ll L$ должна иметь вид

$$\overline{[u_\alpha(x+r, t) - u_\alpha(x, t)]^2} = (\varepsilon r)^{2/3}\varphi(r/\lambda),$$

где L — масштаб течения в целом, а $\lambda = \varepsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$ — колмогоровский внутренний масштаб; в т. н. инерционном интервале масштабов $L \gg r \gg \lambda$ параметр ν выпадает, и функция φ обращается в константу. Если же учитывать флуктуации поля ε, то колмогоровская автомодельность становится неполной, и структурная функция приобретает поправочный множитель $(r/L)^m$ с небольшим показателем.

В двумерных течениях, кроме энергии, адиабатич. интегралом движения является еще средний квадрат вихря — энстрофия (так что вихревые нити не растягиваются) и, кроме параметров ε и ν, появляется еще скорость вырождения энстрофии ε_ω. При этом от масштабов энергоснабжения энергия передается в сторону больших масштабов по колмогоровскому закону, а энстрофия — в сторону малых масштабов по нелокальному спектральному закону (см. [4]):

$$E(k) = C_\omega \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3}\left(\ln\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3}.$$

Такими свойствами обладает крупномасштабная квазидвумерная турбулентность в атмосфере и в океане, образуемая синоптич. вихрями и волнами Россби —

Блиновой. Роль вихря двумерного течения здесь играет т. н. потенциальный вихрь — скалярное произведение вихря абсолютной скорости на градиент энтропии. Уравнение для него в квазигеострофич. приближении получается в виде

$$\frac{\partial \mathscr{L}\psi}{\partial t}+J(\psi, \mathscr{L}\psi)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=F;\ \mathscr{L}=\Delta+\frac{\partial}{\partial z}\frac{H^2}{L_R^2}\frac{\partial}{\partial z},$$

где ψ, Δ, J — горизонтальные функция тока, лапласиан и якобиан, z — вертикальная координата, H и $L_R=HN/f$ — толщина слоя и «радиус деформации» Россби (N — частота Вайссала — Брента, f — параметр Кориолиса), x — дуга круга широты, β — производная от f по дуге меридиана, F — неадиабатические факторы. В масштабах $L\ll L_R$ получается обычное уравнение двумерной турбулентности. Волновое число $k_\beta=(\beta/2\ U)^{1/2}$ (где U — типичная скорость) разделяет вихри ($k>k_\beta$) и волны Россби — Блиновой ($k<k_\beta$). Малые начальные вихри имеют тенденцию со временем расти, выравниваться по вертикали («баротропизация»), смещаться на запад и вытягиваться вдоль кругов широты.

Важными обобщениями турбулентности в несжимаемой жидкости являются турбулентности в страфицированной жидкости с архимедовыми силами и гидромагнитная турбулентность.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч 1—2, М., 1965—67, [2] Гледзер Е. Б., Монин А. С., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 3, с. 111—59; [3] Монин А. С., «Успехи физич. наук», 1978, т. 125, в. 1, с. 97—122, [4] Мирабель А. П., Монин А. С., «Успехи механики», 1979, т. 2, в. 3, с. 47—95; [5] Монин А. С., Озмидов Р. В., Океанская турбулентность, Л., 1981; [6] Вишик М. И., Фурсиков А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980. *А. С. Монин.*

ТУРНИР — ориентированный *граф* без петель, каждая пара вершин к-рого соединена дугой точно в одном направлении. Т. с n вершинами может служить описанием исхода состязания n игроков, правилами к-рого запрещен ничейный исход. Понятие Т. используется для упорядочения n объектов методом попарных сравнений. В связи с этим оно находит свои приложения в биологии, социологии и т. п.

Т. наз. транзитивным, если можно так занумеровать его вершины числами 1, 2, . . ., n, что из вершины v_i идет дуга в вершину v_j тогда и только тогда, когда $i>j$. В транзитивном Т. отсутствуют контуры. Т. наз. сильным, если для любой упорядоченной пары его вершин v_i, v_j существует ориентированный путь из v_i в v_j. Множество дуг в Т. наз. согласованным, если в подграфе, образованном этими дугами и инцидентными им вершинами, отсутствуют контуры. Максимальная мощность множества согласованных дуг является мерой согласованности при определении «победителя» Т. Всякий Т. содержит подмножество согласованных дуг мощности не меньшей, чем $(n^2/4)(1+o(1))$. Другой мерой согласованности является отношение числа транзитивных k-вершинных подтурниров турнира с n вершинами к числу сильных k-вершинных подтурниров. Максимальное число сильных k-вершинных подтурниров турнира с n вершинами равно

$$C_n^k-kC_{\frac{n-1}{2}}^k, \text{ если } n \text{ нечетно},$$

$$C_n^k-\frac{k}{2}\left(C_{\frac{n}{2}}^{k+1}-C_{\frac{n-2}{2}}^{k-1}\right), \text{ если } n \text{ четно}.$$

Т. является сильным тогда и только тогда, когда он имеет остовный контур. Каждый сильный Т. с n вершинами имеет контур длины k для $k=3, 4, \ldots, n$. Всякий Т. имеет остовный путь.

Набор всех полустепеней исхода d_i турнира с n вершинами удовлетворяет равенству

$$\sum_{i=1}^n d_i^2=\sum_{i=1}^n (n-d_i)^2.$$

Пусть набор целых чисел $(d_1, \ldots, d_n)$ удовлетворяет условию $0\leqslant d_1\leqslant\ldots\leqslant d_n\leqslant n-1$. Т. с полустепенями исхода $d_1, \ldots, d_n$ существует тогда и только тогда, когда для любого $k=1, \ldots, n-1$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^k d_i\geqslant\frac{k(k-1)}{2},$$

а для $k=n$ справедливо равенство. При этом Т. является сильным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^k d_i>\frac{k(k-1)}{2} \text{ для } k<n.$$

Если T_1 и T_2 — два подтурнира турнира T и для каждой пары вершин v' из T_1, v'' из T_2 существует дуга (v', v''), то пишут $T_1\to T_2$. Пусть множество вершин Т. разбито на непересекающиеся подмножества $T_1, \ldots, T_m$. И пусть либо $T_i\to T_j$, либо $T_j\to T_i$ для $1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$. Тогда разбиение определяет отношение эквивалентности на вершинах Т. T. Турнир наз. простым, если на его вершинах нельзя определить нетривиальное отношение эквивалентности. Всякий Т. с n вершинами является подтурниром нек-рого простого Т. с $n+2$ вершинами. Турнир T с n вершинами является подтурниром нек-рого простого Т. с $n+1$ вершинами тогда и только тогда, когда T не является ни контуром с тремя вершинами, ни нетривиальным транзитивным Т. с нечетным числом вершин. Число попарно неизоморфных Т. с n вершинами асимптотически равно $\frac{1}{n!}2^{C_n^2}$. Число различных Т. с n нумерованными вершинами равно $2^{C_n^2}$. Производящие функции $t(x)$ и $s(x)$ для Т. и сильных Т. соответственно связаны соотношением:

$$s(x)=\frac{t(x)}{1+t(x)}.$$

Всякий Т. с n вершинами, $n\geqslant 5$, не являющийся сильным, однозначно восстанавливается по совокупности своих вершинных подтурниров.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973, [2] Moon J. W., Topics on tournaments, N. Y., [1968]. *А. А. Сапоженко.*

ТУЭ МЕТОД — метод в теории диофантовых приближений, созданный А. Туэ [1] в связи с проблемой приближения алгебраич. чисел рациональными числами: найти величину $\nu=\nu(n)$, при к-рой для каждого алгебраич. числа α степени n неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{\nu+\varepsilon}} \qquad (1)$$

имеет конечное число решений в целых рациональных числах p и q, $q>0$, при любом $\varepsilon>0$, и бесконечное число решений при любом $\varepsilon<0$.

А. Туэ показал, что $\nu\leqslant\frac{n}{2}+1$. Т. м. основан на свойствах специального многочлена $f(x, y)$ от двух переменных x, y с целыми коэффициентами и предположении существования двух решений неравенства (1) при $\nu\leqslant\frac{n}{2}+1$ с достаточно большими значениями q. Теорема Туэ имеет много важных приложений в теории чисел. В частности, из нее следует, что диофантово уравнение

$$F(x, y)=m, \qquad (2)$$

где $F(x, y)$ — неприводимая форма от переменных x и y с целыми коэффициентами степени $n\geqslant 3$, а m —

целое число, может иметь не более, чем конечное число, решений в целых числах x и y.

Окончательную оценку величины ν в неравенстве (1) получил К. Рот (K. Roth, [2]) путем обобщения Т. м. на случай многочлена любого числа переменных, подобного многочлену $f(x, y)$, и использования большего числа решений неравенства (1). Результат — т е о р е м а Туэ — З и г е л я — Р о т а: $\nu=2$ для любого $n\geqslant 2$. Т. м. имеет обобщение на случай приближения алгебраич. чисел алгебраич. числами. Т. м. является общим методом доказательства конечности целых точек на широкого класса кривых алгебраич. многообразий (см. *Диофантова геометрия*, *Диофантово множество*). Наряду с этим Т. м. имеет существенный недостаток — является неэффективным методом в том смысле, что не дает ответа на вопрос, существуют ли на самом деле используемые в доказательствах решения неравенств (1) или соответствующих уравнений (2). Таким образом, Т. м., решая вопрос о конечности числа решений уравнения (2), не дает возможности определить, разрешимо ли конкретное уравнение такого типа и каковы количествен. оценки решений x, y в зависимости от F.

См. также *Диофантовых приближений проблемы эффективизации*.

Лит.: [1] T h u e A., «J. reine angew. Math.», 1909, Bd 135, S. 284—305; [2] Р о т К. Ф., «Математика», 1957, т 1, в. 1, с. 3—18; [3] Проблемы теории диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1974. *А. Ф. Лаврик.*

ТУЭ ПОЛУСИСТЕМА, п о л у - Т у э с и с т е м а, с и с т е м а п о д с т а н о в о к — см. *Туэ система.*

ТУЭ СИСТЕМА — *ассоциативное исчисление*, названное по имени А. Туэ, к-рый впервые сформулировал проблему распознавания равенства слов в ассоциативных системах (п р о б л е м а Т у э, см. [1]). Если при задании Т. с. допустимыми подстановками считать только подстановки правых частей соотношений вместо левых частей (т. е. исключить обратные подстановки), то получим п о л у с и с т е м ы Т у э (п о л у - Т у э с и с т е м ы, или с и с т е м ы п о д с т а н о в о к), к-рые фактически совпадают также с локальными канонич. системами Поста. Каждая Т. с. может рассматриваться как полусистема Туэ, но обратное неверно.

Лит.: [1] T h u e A., «Videnskapsselskapets Skrifter. Mat. Naturv. Kl.», 1914, № 10; [2] М а л ь ц е в А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965. *С. И. Адян.*

ТУЭ — ЗИГЕЛЯ — РОТА ТЕОРЕМА: если α — алгебраич. иррациональность, $\delta>0$ и сколь угодно мало, то существует лишь конечное число целых решений p и $q>0$ (p и q взаимно просты) неравенства

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<q^{-2-\delta}.$$

Эта теорема является наилучшей в своем роде — число 2 в показателе степени уменьшить нельзя. Т.—З.—Р. т. есть усиление теоремы Лиувилля (см. *Лиувилля число*). Результат Лиувилля последовательно усиливали А. Туэ [1], К. Зигель [2] и, наконец, К. Рот [3]. А. Туэ доказал, что если α — алгебраич. число степени $n\geqslant 3$, то неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<q^{-\nu}$$

имеет лишь конечное число целых решений p и $q>0$ (p и q взаимно просты) при $\nu>\frac{n}{2}+1$. К. Зигель установил, что утверждение теоремы Туэ справедливо при $\nu>2\sqrt{n}$. Окончательный вариант теоремы, сформулированный выше, получен К. Ротом. Имеется p-адический аналог Т.—З.—Р. т. Перечисленные результаты доказываются неэффективными методами (см. *Диофантовых приближений проблемы эффективизации*).

Лит.: [1] T h u e A., «Norske Vid. selesk. Skr.», 1908, Bd 3, S. 1—34; [2] S i e g e l C., «Math. Z.», 1921, Bd 10, S. 173—213; [3] R o t h K. F., «Mathematika», 1955, v. 2, № 1, p. 1—20; [4] M a h l e r K., Lectures on Diophantine approximations, pt 1, [s. l.], 1961, [5] R i d o u t D., «Mathematika», 1958, v. 5, № 9, p. 40—48, [6] Г е л ь ф о н д А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952. *С. В. Котов.*

ТЬЮРИНГА МАШИНА — название, закрепившееся за *вычислительными машинами абстрактными* некрого точно охарактеризованного типа. Концепция такого рода машины возникла в середине 30-х гг. 20 в. у А. М. Тьюринга [1] в результате произведенного им анализа действий человека, выполняющего в соответствии с заранее разработанным планом те или иные вычисления, т. е. последовательные преобразования знаковых комплексов. Анализ этот, в свою очередь, был осуществлен им с целью решения назревшей к тому времени проблемы поиска точного математич. эквивалента для общего интуитивного представления об *алгоритме*. В ходе развития *алгоритмов теории* появился ряд модификаций первоначального тьюринговского определения. Здесь дается версия, восходящая к Э. Посту [2], — в таком виде определение Т. м. получило весьма большое распространение (детально Т. м. описаны, напр., в [3] и [4]).

Т. м. удобно представлять себе в виде автоматически функционирующего устройства, способного находиться в конечном числе в н у т р е н н и х с о с т о я н и й и снабженного бесконечной внешней памятью — л е н т о й. Среди состояний имеется два выделенных — н а ч а л ь н о е и з а к л ю ч и т е л ь н о е. Лента разделена на клетки и неограниченна влево и вправо. В каждой клетке ленты может быть записана любая из букв нек-рого *алфавита* A (ради единообразия удобно считать, что в пустой клетке записана «пустая буква»). В каждый момент дискретного времени Т. м. находится в одном из своих состояний и, рассматривая одну из клеток своей ленты, воспринимает записанный в ней символ — букву алфавита A или пустую букву.

Находясь в какой-либо момент времени в незаключительном состоянии, Т. м. совершает ш а г, к-рый вполне определяется ее текущим состоянием и символом, воспринимаемым ею в данный момент на ленте. Шаг этот заключается в том, что: 1) в рассматриваемой клетке записывается новый символ, быть может, совпадающий со старым или пустой; 2) машина переходит в новое состояние, быть может, совпадающее со старым или заключительное; 3) лента сдвигается влево или вправо на одну клетку или остается на месте. Перечисление всех возможных шагов Т. м. в зависимости от текущей комбинации «незаключительное состояние + воспринимаемый символ», представленное, напр., в виде специальной таблицы с двумя входами, наз. п р о г р а м м о й, или с х е м о й, данной Т. м. В клетках этой таблицы стоят коды соответствующих шагов машины — ее к о м а н д ы. Программа Т. м. является объектом с точной структурой, и можно условиться отождествлять Т. м. с ее программой. Стремясь подчеркнуть связь так описанной Т. м. с алфавитом A, обычно говорят, что эта машина есть Т. м. в а л ф а в и т е A.

Текущее полное описание Т. м. дается ее к о н ф и г у р а ц и е й, к-рая состоит из указания для данного момента следующей информации: 1) конкретного заполнения клеток ленты символами; 2) клетки, находящейся в поле зрения машины; 3) внутреннего состояния, в к-ром машина находится. Конфигурация, соответствующая заключительному состоянию Т. м., также наз. з а к л ю ч и т е л ь н о й.

Если зафиксировать какую-либо незаключительную конфигурацию Т. м. в качестве исходной, то работа этой машины будет заключаться в последовательном (шаг за шагом) преобразовании исходной конфигурации в соответствии с программой машины до тех пор, пока не будет достигнута заключительная конфигу-

рация. После этого работа Т. м. считается закончившейся, а результатом работы считается достигнутая заключительная конфигурация. Разумеется, работа Т. м. заканчивается, вообще говоря, не при всякой исходной конфигурации.

Понятие Т. м. может быть следующим образом использовано для уточнения общего представления об алгоритме в данном алфавите. Тьюринговским алгоритмом в алфавите A мы назовем всякий алгоритм $\mathfrak{A}$ следующего вида. Фиксируется нек-рая Т. м. $\mathfrak{M}$ в алфавите A. Пусть $\mathcal{P}$ — слово в A, принимаемое в качестве исходного данного для алгоритма $\mathfrak{A}$. Построим следующую исходную конфигурацию машины $\mathfrak{M}$: 1) на ее ленте без пробелов запишем слово $\mathcal{P}$, оставив прочие клетки пустыми; 2) в поле зрения $\mathfrak{M}$ установим клетку с первой буквой слова $\mathcal{P}$; 3) приведем $\mathfrak{M}$ в начальное состояние (если $\mathcal{P}$ пусто, ленту возьмем пустой, а в поле зрения $\mathfrak{M}$ установим произвольную ее клетку). Пусть $\mathfrak{M}$, отправляясь от этой исходной конфигурации, заканчивает работу. Рассмотрим клетку ленты, находящуюся в поле зрения $\mathfrak{M}$ в заключительной конфигурации. Если символ, записанный в ней, пуст, то в качестве $\mathfrak{A}(\mathcal{P})$ берется пустое слово. В противном случае в качестве $\mathfrak{A}(\mathcal{P})$ берется слово, записанное в максимальном, не содержащем пустых клеток отрезке ленты, включающем обозреваемую машиной $\mathfrak{M}$ клетку.

Имеются серьезные основания считать, что уточнение общего представления об *алгоритме в алфавите*, произведенное с помощью понятия Т. м., является адекватным. Именно, считается, что для всякого алгоритма $\mathfrak{A}$ в каком-либо алфавите может быть построен тьюринговский алгоритм, дающий при одинаковых исходных данных те же самые результаты, что и алгоритм $\mathfrak{A}$. Это соглашение известно в теории алгоритмов под названием тезиса Тьюринга. Принятие тезиса Тьюринга равносильно принятию *Чёрча тезиса* (для частично рекурсивных функций) или принципа нормализации (для нормальных алгорифмов). Однако, в отличие от этих последних, тезис Тьюринга в высшей степени непосредственно убедителен. Действительно, производя вычисления согласно избранному плану, математик работает сходным с Т. м. образом: рассматривая какое-либо место в своих записях и находясь в определенном «умонастроении», он делает необходимые изменения в написанном, проникается новым «умонастроением» и переходит к рассмотрению дальнейших записей. То обстоятельство, что при этом он совершает более интегральные, чем Т. м., шаги, представляется не слишком принципиальным.

По структуре своего описания и по типу функционирования Т. м. являются *автоматами* весьма общего типа, так что концепция Тьюринга в значительной степени стимулировала возникновение абстрактной *автоматов теории* и во многом предопределила ее особенности.

Существует много модификаций Т. м. Самыми распространенными среди них являются многоленточные Т. м., имеющие по одной или несколько головок на каждой из лент. Движение головок и запись букв на лентах происходят одновременно согласно программе управляющего устройства. Многоленточные Т. м. удобно использовать для формализации понятия относительного алгоритма. Так, функция f (алгоритмически) вычислима относительно функции g, если существует многоленточная Т. м., к-рая вычисляет функцию f при условии, что в любой начальной конфигурации на одной из лент в фиксированном порядке записаны все значения функции g. В таком виде через относительные вычисления можно ввести важное в теории алгоритмов понятие сводимости по Тьюрингу и другие виды *алгоритмической сводимости*. С помощью многоленточных Т. м. естественно формализуется понятие вероятностного алгоритма. Распространенный подход состоит в том, что на одной из лент многоленточной Т. м. записывается случайная последовательность, и Т. м. в каждый момент времени считывает ровно один символ этой последовательности. При другом подходе в программе управляющего устройства Т. м. допускается существование различных команд с одинаковыми левыми частями, причем выбор той или иной команды происходит с заданными вероятностями. На близкой идее основывается понятие недетерминированной Т. м., в программе управляющего устройства к-рой также могут иметься различные команды с одинаковыми левыми частями. В обоих случаях вместо одного вычисления для данного входа рассматривается класс всевозможных вычислений, согласованных с программой. Для вероятностных Т. м. рассматривают вероятность тех или иных вычислений, для недетерминированных Т. м.— возможность самого вычисления.

См. также *Алгоритма сложность*, *Вычислимая функция*, *Машина*.

Лит.: [1] Turing A. M., «Proc. London Math. Soc.», 1936/37, v. 42, т. 230—65; 1937, v. 43, p. 544—46; [2] Post E. L., «J. Symbol. Logic», 1936, v. 1, p. 103—05; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [4] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965, [5] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971; [6] Минский М., Вычисления и автоматы, пер. с англ., М., 1971; [7] Машины Тьюринга и рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1972.

Н. М. Нагорный, С. С. Марченков.

ТЯГОТЕНИЯ ТЕОРИЯ — раздел теории поля в теоретич. и математич. физике, широко использующий математич. методы исследования. Традиционным предметом Т. т. является изучение гравитационного взаимодействия между материальными объектами, сказывающегося на их движении и структуре (см. *Гравитация*); предмет Т. т. охватил, кроме анализа самого гравитационного поля, также структуру пространства-времени в более широком плане, проблемы квантования гравитации и ее связь с теорией элементарных частиц. Соответственно и математич. аппарат, используемый в Т. т., расширился с теории дифференциальных уравнений 2-го порядка с обыкновенными и частными производными до дифференциальной (псевдоримановой) геометрии, теории функций многих комплексных переменных и комплексных многообразий, топологии, теории групп и спинорного и твисторного исчисления. Все чаще применяются расчеты на ЭВМ (в том числе аналитические).

Основы Т. т. были заложены в кон. 16 — нач. 18 вв. в работах Г. Галилея (G. Galilei) и И. Ньютона (I. Newton). В классич. Т. т. Ньютона уравнение для потенциала φ гравитационного поля (поля тяготения) имеет вид уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho,$$

где γ — гравитационная постоянная Ньютона, ρ — плотность массы источников поля. Напряженность поля определяется как $\boldsymbol{g} = -\nabla\varphi$, а сила, с к-рой поле действует на точечную пробную массу m,— как $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ (пробная масса сама не возмущает поля). Второй закон Ньютона дает тогда уравнения движения пробной массы. В конкретной постановке Т. т. Ньютона приводит к ряду задач, в частности, баллистики и небесной механики. Она по сей день остается достаточно точной для описания практически всей небесной механики. Как теория потенциала Т. т. Ньютона послужила образцом для создания теории электростатики, а в дальнейшем представления о физическом поле, сформировавшиеся в электродинамике Максвелла, в свою очередь повлияли на генезис релятивистской Т. т. Эйнштейна.

А. Эйнштейн (A. Einstein) начал построение новой Т. т. с внесения в теорию принципа конечности ско-

рости распространения взаимодействий (в том числе — гравитационного) и принципа эквивалентности. Первые шаги в этом направлении он сделал в 1907, а в статье (1913) совместно с М. Гроссманом (M. Grossmann) определил путь построения релятивистской Т. т. (общей теории относительности — ОТО) как геометризацию физики. Мысль о реальности неевклидовой геометрии приходила К. Гауссу (C. Gauss) и Н. И. Лобачевскому, в достаточно определенной форме она высказывалась Б. Риманом (B. Riemann) и У. Клиффордом (W. Clifford), однако лишь А. Эйнштейн связал тяготение с геометрией не 3-мерного пространства, а 4-мерного пространства-времени, что сыграло решающую роль. В окончательной форме уравнения гравитационного поля были даны Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1915) и самим А. Эйнштейном (1916, ранее он корректно записал их лишь для поля в вакууме).

В релятивистской Т. т. геометрич. характеристики пространственно-временного многообразия одновременно играют роль переменных, описывающих гравитационное поле. В квадрате интервала $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, к-рый метризует пространство-время, индефинитный метрический тензор (здесь сигнатура $+\ -\ -\ -$) играет роль многокомпонентного гравитационного потенциала. Уравнение светового конуса $ds^2=0$ используется в формулировке общерелятивистского принципа причинности. Коэффициенты связности, определяющие параллельный перенос и ковариантное дифференцирование ($g_{\mu\nu;\ \alpha}=0$), играют роль напряженности. *Римана тензор* кривизны выражается как комбинация производных такой напряженности, т. е. характеризует напряженность поля. Свернутый тензор кривизны — тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ («дивергенция напряженности») алгебраически выражается через тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ вещества и полей (кроме гравитационного) — источников поля тяготения:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

(уравнения Эйнштейна). Левая часть этих уравнений нелинейна по метрическому тензору и его первым производным, но в случае слабого гравитационного поля нелинейная добавка может быть выделена в отдельный член, к-рый, будучи переведен в правую часть уравнений, объединяется с источниками (отсюда — трактовка нелинейности гравитационного поля как его способности к самодействию). Уравнение движения пробной точечной массы во внешнем гравитационном поле записывается как уравнение геодезической

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0 \qquad (2)$$

и не содержит величины массы частицы (т. е. при прочих равных условиях пробные точечные частицы любых масс движутся одинаково). Это выражает принцип эквивалентности, отвечающий здесь равенству инертной и тяготеющей масс (факт, экспериментально проверенный с относительной точностью около 10^{-12}, последние работы проведены в группе В. Б. Брагинского). В другой формулировке, известной по первым работам Эйнштейна, этот принцип утверждает локальную эквивалентность гравитации и ускорения: в свободно падающей без вращения лаборатории в малом объеме пространства и за короткое время ни в каком физическом эксперименте невозможно заметить проявлений тяготения. Уравнение (2) является первым приближением задачи для системы непробных тел; в 1938—39 А. Эйнштейн совместно с Л. Инфельдом (L. Infeld) и Б. Гофманом (B. Hoffmann) и В. А. Фок развили методы нахождения дальнейших приближений (задача многих тел в ОТО). Уравнения других (негравитационных) полей, напр. электромагнитного, получаются из обычной теории соответствующих полей в плоском мире при требовании общей ковариантности. Все уравнения полей, включая (1), как и уравнение движения (2), следуют из принципа экстремума действия при соответствующем задании функций Лагранжа. В полной теории исследуются самосогласованные системы уравнений, но часто ввиду их сложности нек-рые или все негравитационные поля полагаются пробными (для них решается несамосогласованная задача с внешним гравитационным полем).

Ввиду нелинейности уравнений Эйнштейна развиты специальные методы отыскания их точных решений (приближенные решения могут не отражать специфики задачи). При этом важен выбор подходящего базиса (тетрады); часто используется *Картана метод внешних форм*. Комплексная изотропная (светоподобная) тетрада положена в основу мощного вычислительного формализма Ньюмена — Пенроуза (см. [3]). В приложении к уравнениям Эйнштейна развиты новые методы типа преобразований Беклунда обратной задачи теории рассеяния (теории *солитонов*). Уже известно большое число точных решений уравнений Эйнштейна (см. [3]), первое из которых — решение Шварцшильда (1916)

$$ds^2=\left(1-\frac{2\gamma m}{c^2r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2\gamma m}{c^2r}\right)^{-1}dr^2-$$
$$-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \qquad (3)$$

(в чаще всего используемой системе координат кривизн), имеющее смысл гравитационного поля сферической массы в точке. С физич. точки зрения решения уравнений Эйнштейна можно подразделить на вакуумные поля локализованных источников, внутренние гравитационные поля распределения вещества и др. полей, поля Эйнштейна — Максвелла, волновые гравитационные поля, космологические решения и пр. Развиты различные методы классификации псевдоримановых пространств, к-рые помогают строить решения уравнений Эйнштейна с требуемыми свойствами и интерпретировать уже известные решения. Это — алгебраическая классификация по свойствам тензора конформной кривизны Вейля (три типа по Петрову — I, II, III и два вырожденных подтипа, D и N, а также тривиальный случай — тип 0, отвечающий конформно-плоским пространствам; часто считается, что типы N, II и III отвечают волновым гравитационным полям); алгебраическая классификация по свойствам тензора Риччи (или тензора энергии-импульса); классификация по группам движений (изометрий: пространство-время отображается на себя с помощью переноса Ли без изменения метрики). В приложении к 3-мерным пространствам при требовании их однородности классификация по группам движений приводит к типам Бианки (9 случаев), играющим важную роль в теории однородных космологических моделей. Для получения и особенно исследования решений уравнений Эйнштейна все чаще применяются ЭВМ; успешно применяются в этой области программы аналитических вычислений. Появились сообщения о решении проблемы отождествления метрик, записанных в разных координатных системах, с помощью ЭВМ. Для удобства сравнения выводов Т. т. Эйнштейна и ее разных модификаций и обобщений между собой и с опытом развит феноменологический метод описания метрического тензора и гравитационных эффектов («параметризованная постньютонова Т. т.»).

При анализе конкретных решений уравнений Эйнштейна важную роль играет определение полноты атласа карт данного многообразия (отсюда развитие методов продолжения), нахождение и исследование сингулярностей (их определение принципиально за-

труднено индефинитностью метрики), выяснение асимптотических (включая топологические) свойств решений в случае островных систем. Задачи Т. т. Эйнштейна привели к формулировке нового важного понятия в псевдоримановой геометрии — горизонта. Хотя горизонт (различаются горизонт событий, горизонт частиц, горизонт Коши, горизонт причинности и кажущийся горизонт) не является местом сингулярных точек, он инвариантно выделен в пространстве-времени. Так, горизонт событий в асимптотически плоском мире определяется как предел множества событий, т. е. 4-мерных точек, из к-рых можно уйти на бесконечность, оставаясь внутри светового конуса. Если такой горизонт событий существует, ограниченная им область пространства-времени (откуда нельзя уйти на бесконечность, не превысив скорости света) наз. ч е р н о й д ы р о й; ее простейший пример описывается расширением метрики Шварцшильда (3). Внутри черной дыры находится сингулярность (в частности, нек-рые инварианты римановой кривизны для (3) обращаются в бесконечность при $r \to 0$), причем шварцшильдовская сингулярность пространственноподобна ($ds^2<0$), тогда как для других черных дыр (общий случай — метрика Керра-Ньюмена [3]) она может быть и времениоподобной ($ds^2>0$). Из астрофизич. приложений ОТО известно, что черные дыры могут образоваться в результате гравитационного коллапса массивных звезд; рассматривается ряд кандидатов на роль черных дыр среди наблюдаемых небесных тел, к-рые проявляют себя через процессы, происходящие в близкой к ним внешней области, где гравитационные поля сильны. Считается, что при выполнении т. н. энергетических условий (фактически — естественных условий на тензор энергии-импульса материи) сингулярное состояние в прошлом и будущем при эволюции материальных систем неизбежно [теоремы о сингулярности Р. Пенроуза (R. Penrose), С. Хокинга (S. Hawking) и др.], однако требуется, чтобы сингулярности были скрыты под горизонтами (принцип «космической цензуры»).

Развиты основы квантовой Т. т. (как в смысле квантования гравитационного поля, так и квантования др. полей на фоне неплоской классич. геометрии). Одним из следствий является эффект Хокинга рождения частиц (фотонов и др.) черными дырами, приводящий к их «испарению». Квантовые эффекты гравитации важны на ранних стадиях расширения Вселенной. При описании квантовой Т. т. опираются на канонический формализм теории поля, фейнмановские интегралы по путям и др.; в связи с этим развивают евклидову (в смысле сигнатуры) теорию поля и исследуют инстантонные решения уравнений Эйнштейна, развивают твисторное исчисление Пенроуза, близкое по ряду результатов к теории комплексифицированных пространств с самодуальным или антисамодуальным тензором конформной кривизны Вейля (H-пространства). Др. обобщения Т. т. включают теорию Эйнштейна — Картана с кривизной и кручением, аффинные Т. т., Т. т. с квадратичными по кривизне лагранжианами, биметрические Т. т. и др. (см. [6]).

Т. т. Эйнштейна приводит к новым по сравнению с классической Т. т. Ньютона эффектам, однако они трудно обнаружимы экспериментально; в остальном обе Т. т. дают одинаковые следствия. Пока получили подтверждения следующие эффекты: гравитационное красное смещение, отклонение лучей света, движение перигелия планет, нестационарность (расширение) Вселенной. Можно считать косвенно подтвержденным эффект гравитационного излучения (по потере энергии двойной системой, вращающейся вокруг общего центра масс). Ни одного факта, к-рый противоречил бы Т. т. Эйнштейна, не обнаружено. На грани возможностей эксперимента в настоящее время находятся: прием гравитационных волн от космических источников и эффекты увлечения в гравитационных полях вращающихся тел (прецессия оси гироскопа и пр.).

Лит.: [1] Э й н ш т е й н А., Собрание научных трудов, т. 1—4, М., 1965—67; [2] М и з н е р Ч., Т о р н К., У и л е р Дж., Гравитация, т. 1—3, пер. с англ., М., 1977; [3] К р а м е р Д. [и др.], Точные решения уравнений Эйнштейна, пер. с англ., М., 1982; [4] П е т р о в А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [5] Х о к и н г С., Э л л и с Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977, [6] General relativity and gravitation, v. 1—2, N. Y — L., 1980. *Н. В. Мицкевич.*

ТЯЖЕЛОГО ШАРИКА МЕТОД — метод решения задачи минимизации дифференцируемой функции $f(x)$ на евклидовом пространстве E^n. Метод основан на рассмотрении системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+\frac{f'(x)}{1+|f'(x)|^2}=0,\quad t\geqslant 0, \qquad (1)$$

$$x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

к-рая описывает движение материальной точки по поверхности $y=f(x)$ в поле тяжести, направленном в отрицательном направлении оси Oy, при условии, что точка не может оторваться от поверхности и трение пропорционально скорости; $f'(x)$ — градиент функции $f(x)$ в точке x, $a\geqslant 0$ — коэффициент трения. Этим объясняется название метода. Учитывая, что в окрестности стационарной точки величина $|f'(x)|^2$ мала, систему (1) часто заменяют системой

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+f'(x)=0,\quad t\geqslant 0. \qquad (2)$$

При нек-рых предположениях относительно функции $f(x)$ и начальных условий

$$x(0)=x_0,\quad \frac{dx(0)}{dt}=x_1$$

можно доказать, что соответствующее решение $x(t)$ системы (1) или (2) при $t\to\infty$ сходится к какой-либо стационарной точке x_* функции $f(x)$; если $f(x)$ — выпуклая функция, то x_* — точка минимума $f(x)$ на E^n. Таким образом, Т. ш. м. является частным случаем *установления метода* (см. [1]). Для численного решения систем (1), (2) могут быть применены, напр., разностные методы. В зависимости от выбора разностного метода получаются дискретные аналоги Т. ш. м., охватывающие как частный случай *овражных функций методы минимизации*, *сопряженных градиентов метод* и т. п. Выбор величины шага разностного метода и коэффициента a существенно влияют на скорость сходимости Т. ш. м. Вместо (1), (2) возможно использование других систем 1-го или 2-го порядка (см. [1]).

В задачах минимизации функции $f(x)$ при ограничениях

$$g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ m;\ g_i(x)=0,\ i=m+1,\ \ldots,\ s,$$

Т. ш. м. применяется в сочетании с *штрафных функций методом*, *Лагранжа функцией* и др. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Б а х в а л о в Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] В а с и л ь е в Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [3] Е в т у ш е н к о Ю. Г., Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М., 1982. *Ф. П. Васильев.*

У

УАЙТХЕДА ГОМОМОРФИЗМ, J-гомоморфизм,— гомоморфизм из *стабильных гомотопических групп* спектра SO в стабильные гомотопич. группы спектра сфер S^0, задаваемый специальным образом. Одна из конструкций У. г.— конструкция Хопфа: пусть дано отображение $\varphi: S^m \to SO(q)$; отображение φ задает отображение $(J\varphi): S^m \times S^{q+1} \to S^{q-1}$, к-рое продолжается до отображения $J\varphi: S^m \times S^q \to E^q_+$ в верхнюю полусферу сферы S^q. Имеется также продолжение $J\varphi: S^{m+1} \times S^{q-1} \to E^q_-$ в нижнюю полусферу сферы S^q, и определено отображение $J\varphi: S^{m+q} \to S^q$. Эта конструкция задает отображение гомотопич. классов и задает гомоморфизм $J: \pi^S_m(SO) \to \pi^S_m(S^0)$, к-рый и наз. гомоморфизмом Уайтхеда.

Впервые этот гомоморфизм был построен Дж. Уайтхедом [1] и им была доказана теорема о нетривиальности бесконечной серии гомотопич. групп сфер $\pi_n(S^r) \neq 0$ при следующих значениях n и r:

n	14	14	$8k$	$16k+2$	$8k+1$	$16k+3$
r	7	4	$4k$	$8k$	$4k+1$	$8k+1$

Стабильные гомотопич. группы $\pi^S_m(SO)$ описываются теоремой периодичности Ботта [2]:

m mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi^S_m(SO)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

Образ У. г. вычислен полностью (см. [4], [5]): при $m \equiv 0 \bmod 8$ и $m>0$ У. г. является мономорфизмом и его образ выделяется прямым слагаемым в группе $\pi^S_m(S^0)$; при $m \equiv 1 \bmod 8$ и $m>1$ У. г. является мономорфизмом на прямое слагаемое группы $\pi^S_m(S^0)$; при $m=4s-1$ образом У. г. является циклич. группа порядка $\tau(2s)$, выделяющаяся прямым слагаемым в $\pi^S_m(S^0)$, где $\tau(2s)$ — знаменатель несократимой дроби $B_s/4s$, B_s есть s-е *Бернулли число*.

Лит.: [1] Whitehead G. W., «Ann. Math», 1942, v. 43, p. 634—40, 1950, v. 51, p. 192—237, [2] Bott R., там же, 1959, v. 70, p. 313—37, [3] Адамс Дж., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 70—84, 1967, т. 11, № 4, с. 3—41, 1968, т. 12, № 3, с. 3—97, [4] Becker J., Gottlieb D., «Topology», 1975, v. 14, № 1, p. 1—12; [5] Адамс Дж., Бесконечнократные пространства петель, пер. с англ., М., 1982.

А. В. Шокуров.

УАЙТХЕДА ГРУППА — абелева группа, к-рая сопоставляется ассоциативному кольцу по определенному правилу; введена Дж. Уайтхедом [1]. Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей и $GL(n, A)$ — группа невырожденных $(n \times n)$-матриц над A. Имеются естественные вложения $GL(1, A) \subset \ldots \subset GL(n, A) G \ldots$, и пусть $GL(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} GL(i, A)$. Матрица, отличающаяся от единичной единственным недиагональным элементом, наз. элементарной. Подгруппа $E(A) \subset GL(A)$, порожденная всеми элементарными матрицами, совпадает с коммутантом группы $GL(A)$. Коммутативная факторгруппа $K_1A = GL(A)/E(A)$ и наз. группой Уайтхеда кольца A. Пусть $[-1] \in K_1A$ — элемент, соответствующий матрице

$$\begin{Vmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Он имеет порядок 2. Факторгруппа $\overline{K}_1A = K_1A/\{0, [-1]\}$ наз. приведенной группой Уайтхеда кольца A.

Пусть Π — мультипликативная группа, и $\mathbb{Z}[\Pi]$ — групповое кольцо этой группы над $\mathbb{Z}$. Имеется гомоморфизм $\Pi \xrightarrow{j} \overline{K}_1\mathbb{Z}[\Pi]$. Факторгруппа $Wh(\Pi) = \overline{K}_1[\Pi]/j(\Pi)$ наз. группой Уайтхеда группы Π.

Пусть дан гомоморфизм групп $f: \Pi_1 \to \Pi_2$. Тогда определен гомоморфизм $Wh(f)$: $Wh(\Pi_1) \to Wh(\Pi_2)$, причем $Wh(g \circ f) = Wh(g) \circ Wh(f)$, где $g: \Pi_2 \to \Pi_3$. Поэтому Wh задает ковариантный функтор из категории групп в категорию абелевых групп. Если $f: \Pi \to \Pi$ — внутренний изоморфизм, то $Wh(f) = \mathrm{id}_{Wh(\Pi)}$.

Рассматривая У. г. фундаментальной группы пространства, можно не заботиться о выборе отмеченной точки, что существенно для определения важного инварианта отображений — *Уайтхеда кручения*.

Лит.: [1] Whitehead J. H. C., «Amer J. Math.», 1950, v. 72, p. 1—57; [2] Милнор Дж, «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 3—42; [3] его же, Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974.

А. В. Шокуров.

УАЙТХЕДА КРУЧЕНИЕ — элемент *Уайтхеда группы* $\overline{K}_1A$, построенный по комплексу A-модулей. В частности, получается У. к. отображения комплексов. Пусть A — кольцо, F — конечнопорожденный A-модуль. Пусть $b=(b_1, \ldots, b_k)$ и $c=(c_1, \ldots, c_k)$ — два его базиса, и $e_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_j$. Тогда матрица $\|a_{ij}\|$ невырождена и, следовательно, определяет элемент группы $\overline{K}_1A$, обозначаемый $[c/b]$. Если $[c/b]=0$, то базисы b и c наз. эквивалентными. Очевидно,

$$[e/c] + [c/b] = [e/b], \quad [b/b] = 0.$$

Для произвольной точной последовательности $0 \to E \to F \to G \to 0$ свободных A-модулей и базисов e и g в E и G определен базис $eg=(e, f)$ в F, причем образом элементов f является базис g. Класс эквивалентности этого базиса зависит только от базисов e и g.

Пусть теперь $C: C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_0$ — комплекс из свободных A-модулей C_i с отмеченными базисами e_i, гомологии этого комплекса свободны и в них также выбраны базисы h_i. Пусть образы гомоморфизмов $\partial: C_{i+1} \to C_i$ также свободны. Комбинации базисов $b_i h_i b_{i-1}$ задают новые базисы в C_i. Тогда кручение комплекса C определяется формулой

$$\tau(C) = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [c_i/b_i h_i b_{i-1}] \in \overline{K}_1A.$$

При этом кручение не зависит от базисов b_i в группах границ, а только от c_i и h_i.

Пусть дана пара (K, L), состоящая из конечного связного клеточного разбиения K и подкомплекса L, являющегося *деформационным ретрактом* K. Пусть $\Pi \cong \pi_1(K) \cong \pi_1(L)$. Если $\tilde{K}$ и $\tilde{L}$ — универсальные накрывающие разбиений K и L, то $\sigma \in \Pi$ определяет клеточное отображение $\sigma : (\tilde{k}, \tilde{i}) \to (\tilde{K}, \tilde{L})$, а следовательно, и отображение групп цепей $\sigma_* : C(\tilde{K}, \tilde{L}) \to C(\tilde{K}, \tilde{L})$, т. е. $C_p(\tilde{K}, \tilde{L})$ является $\mathbb{Z}[\Pi]$-модулем. Получается свободный цепной комплекс $C_n(\tilde{K}, \tilde{L}) \to C_{n-1}(\tilde{K}, \tilde{L}) \to \to \ldots \to C_0(\tilde{K}, \tilde{L})$ над $\mathbb{Z}[\Pi]$. Гомологии этого комплекса тривиальны, т. е. $\tilde{L}$ — деформационный ретракт $\tilde{K}$.

Пусть $e_1, \ldots, e_\alpha$ суть p-клетки в $K \setminus L$. Для каждой клетки e_i выбирается клетка-представитель $\tilde{e}_i$ в $\tilde{K}$, лежащая над e_i, и фиксируется ее ориентация. Тогда $c_p = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_\alpha)$ — базис в $C_p(\tilde{K}, \tilde{L})$. Следовательно, определено подмножество $\tau C(\tilde{K}, \tilde{L}) \subset \tilde{K}_1 \mathbb{Z}[\Pi]$, т. к. кручение, вообще говоря, зависит от выбора базиса c_p. Однако уже образ этого множества в группе Уайтхеда $Wh(\Pi)$ состоит из одного элемента $\tau(K, L)$ и наз. к р у ч е н и е м У а й т х е д а п а р ы (K, L).

Важным свойством У. к. является его комбинаторная инвариантность. Является ли $\tau(K, L)$ топологич. инвариантом, неизвестно (1984).

Пусть $f : X \to Y$ — гомотопич. эквивалентность (X и Y — клеточные комплексы). Тогда кручение отображения f определяется как $\tau(f) = f_* \tau(M_f, X) \in Wh(\pi_1 Y)$, где M_f — цилиндр отображения f. Если $\tau(f) = 0$, то f наз. п р о с т о й г о м о т о п и ч е с к о й э к в и в а л е н т н о с т ь ю. Свойства кручения $\tau(f)$: 1) если $i : L \to K$ — включение, то $\tau(i) = \tau(K, L)$; 2) $\tau(g \circ f) = \tau(g) + g_* \tau(f)$; 3) если f гомотопно f', то $\tau(f) = \tau(f')$; 4) если I — тождественное отображение односвязного комплекса с эйлеровой характеристикой χ, то $\tau(I \times f) = \chi \cdot \tau(f)$.

Лит.: [1] W h i t e h e a d J. H. C., «Amer. J. Math.», 1950, v. 72, p. 1—57, [2] М и л н о р Д ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 3—42. *А. В. Шокуров.*

УАЙТХЕДА ПРОИЗВЕДЕНИЕ элементов гомотопич. групп пунктированного топологич. пространства — см. *Уайтхеда умножение.*

УАЙТХЕДА УМНОЖЕНИЕ — умножение в *гомотопических группах* $\pi_m(X) \times \pi_m(X) \to \pi_{n+m-1}(X)$, определенное Дж. Уайтхедом [1]. Пусть в S^k фиксировано разбиение на две клетки e^0 и e^k. Тогда в произведении сфер $S^m \times S^n$ индуцируется разбиение на клетки e^0, e^m, e^n, e^{m+n}. Поэтому характеристич. отображение $\varphi_{n,m}$:

$$\partial e^{n+m} = S^{n+m-1} \longrightarrow S^m \times S^n$$

разлагается в композицию

$$S^{n+m-1} \xrightarrow{W(m,n)} S^m \vee S^n \longrightarrow S^m \times S^n,$$

где $S^m \vee S^n$ — букет сфер. Пусть, теперь, классы $\alpha \in \pi_m(X)$ и $\beta \in \pi_n(X)$ представляются отображениями f и g. Тогда п р о и з в е д е н и е У а й т х е д а $[\alpha, \beta] \in \pi_{n+m-1}(X)$ представляется композицией отображений

$$\xrightarrow{W(n,m)} S^m \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X.$$

Для этого умножения выполняются следующие свойства:

1) $[\alpha, \beta] = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} [\beta, \alpha]$;

2) если $\alpha, \beta \in \pi_1(X)$, то $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$;

3) если X n-просто, то $[\alpha, \beta] = 0$ для $\alpha \in \pi_1(X)$; $\beta \in \pi_n(X)$;

4) если $[\alpha, \beta] = 0$ для любых $\alpha \in \pi_1(X)$, $\beta \in \pi_n(X)$, то X n-просто;

5) если $\alpha \in \pi_n(X)$, $\beta \in \pi_m(X)$, $\gamma \in \pi_k(X)$, $n, m, k > 1$, то $(-1)^{nk}[[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{mn}[[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{mk}[[\gamma, \alpha], \beta] = 0$;

6) элемент $[i_1, i_2] \in \pi_3(S^2)$, где $i_2 \in \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ — образующая, равен удвоенной образующей группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$;

7) ядро эпиморфизма $\Sigma : \pi_{4n-1}(S^{2n}) \to \pi_{4n}(S^{2n+1})$ порождается одним элементом $[i_{2n}, i_{2n}] \in \pi_{4n-1}(S^{2n})$, где $i_{2n} \in \pi_{2n}(S^{2n})$ — канонич. образующая.

Лит.: [1] W h i t e h e a d G. W., «Ann. Math.», 1946, v. 47, p. 460—75; 1950, v. 51, p. 192—237. *А. В. Шокуров.*

УБИВАЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО (X, n) — пространство расслоения $p_n : (X, n) \to X$, для к-рого гомотопич. группы $\pi_i(X, n) = 0$ при $i < n$ и такое, что отображение $p_{n*} : \pi_i(X, n) \to \pi_i(X)$ — изоморфизм при $i \geqslant n$. Пространство (X, n) строится по индукции по n. Если пространство $(X, n-1)$ уже построено, то за (X, n) принимается гомотопич. слой естественного вложения в *Эйленберга — Маклейна пространство*

$$(X, n-1) \longrightarrow K(\pi_{n-1}(X), n-1).$$

Последовательность пространств (X, n) и отображений p_n является системой Мура — Постникова отображения $* \to X$. *А. Ф. Харшиладзе.*

УБЫВАЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — такая последовательность x_n, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_n > x_{n+1}$. Иногда такие последовательности наз. с т р о г о у б ы в а ю щ и м и, а термин «У. п.» применяется к последовательностям, удовлетворяющим для всех n лишь условию $x_n \geqslant x_{n+1}$. Такие последовательности наз. также н е в о з р а с т а ю щ и м и. Всякая ограниченная снизу невозрастающая последовательность имеет конечный предел, а всякая не ограниченная снизу имеет бесконечный предел, равный $-\infty$. *Л. Д. Кудрявцев.*

УБЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — такая функция $f(x)$, определенная на нек-ром числовом множестве E, что из условия

$$x' < x'', \ x', \ x'' \in E,$$

следует

$$f(x') > f(x'').$$

Иногда такие функции наз. с т р о г о у б ы в а ю щ и м и, а термин «У. ф.» применяется к функциям, удовлетворяющим для указанных x', x'' лишь условию $f(x') \geqslant f(x'')$ (н е в о з р а с т а ю щ а я ф у н к ц и я). У всякой строго У. ф. обратная функция является однозначной и также строго убывающей. Если x_0 — правосторонняя (соответственно левосторонняя) предельная точка множества E, $f(x)$ — невозрастающая функция и множество $\{y : y = f(x), x > x_0, x \in E\}$ ограничено сверху (соответственно $\{y : y = f(x), x < x_0, x \in E\}$ ограничено снизу), то при $x \to x_0 + 0$ (соответственно $x \to x_0 - 0$), $x \in E$, у функции $f(x)$ существует конечный предел; если же указанное множество не ограничено сверху (соответственно снизу), то $f(x)$ имеет бесконечный предел, равный $+\infty$ (соответственно $-\infty$). *Л. Д. Кудрявцев.*

УГЛОВАЯ ТОЧКА — то же, что *излома точка.*

УГЛОВОЕ ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ, г р а н и ч н о е з н а ч е н и е п о в с е м н е к а с а т е л ь н ы м п у т я м,— значение комплексной функции $f(z)$, определенной в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, в граничной точке $\zeta = e^{i\theta}$, равное пределу

$$\lim_{z \to \zeta, \ z \in S(\zeta, \varepsilon)} f(z) = f^*(\zeta)$$

функции $f(z)$ по множеству точек угловой области

$$S(\zeta, \varepsilon) = \left\{ z = re^{i\varphi} \in D : |\arg(e^{i\theta} - z)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}$$

при условии, что этот предел существует для всех ε, $0<\varepsilon<\pi/2$, и, следовательно, не зависит от ε. Этот термин иногда употребляется в обобщенном смысле для функций $f(z)$, заданных в произвольных (включая многомерные) областях D, причем в качестве $S(\zeta, \varepsilon)$ берется пересечение с D угловой (или конической) области с вершиной $\zeta \in \partial D$, осью к-рой является нормаль к границе ∂D в точке ζ, а угол раствора равен $\pi/2 - \varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/2$.

Лит. [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68, [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М — Л., 1950.

Е. Д. Соломенцев

УГОЛ — геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки. Лучи наз. сторонами У., а их общее начало — вершиной У. Пусть $[BA)$, $[BC)$ — стороны угла, B — его вершина, α — плоскость, определяемая сторонами У. Фигура $\Gamma=[BA)\cup[BC)$ делит плоскость α на две фигуры $\alpha_i'=\alpha\setminus\Gamma$, $i=1, 2$: $\alpha_1'\cup\alpha_2'=\alpha\setminus\Gamma$. Фигура $\alpha_i=\alpha_i'\cup\Gamma$, $i=1, 2$, также наз. У. или плоским углом, α_i' наз. внутренней областью плоского У. α_i.

Два угла наз. равными (или конгруэнтными), если они могут быть совмещены так, что совпадут их соответствующие стороны и вершины. От любого луча на плоскости в данную сторону от него можно отложить единственный У., равный данному У. Сравнение У. осуществляется двумя способами. Если У. рассматривается как пара лучей с общим началом, то для выяснения вопроса, какой из двух У. больше, необходимо совместить в одной плоскости вершины У. и одну пару их сторон (см. рис. 1). Если вторая сторона одного У. окажется расположенной внутри другого У., то говорят, что первый У. меньше, чем второй. Второй способ сравнения У. основан на сопоставлении каждому У. нек-рого числа. Равным У. будет соответствовать одинаковое число градусов или радиан (см. ниже), большему У.— большее число, меньшему — меньшее.

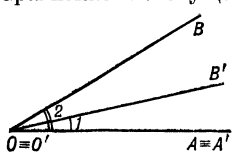


Рис. 1.

Два У. наз. смежными, если у них общая вершина и одна сторона, а две другие стороны образуют прямую (см. рис. 2). Вообще, У., имеющие общую вершину и одну общую сторону, наз. прилежащими. У. наз. вертикальными, если стороны одного являются продолжениями за вершину сторон другого У. Вертикальные У. равны между собой. У., у к-рого стороны образуют прямую, наз. развернутым. Половина развернутого У. наз. прямым У. Прямой У. можно эквивалентно определить иначе: У., равный своему смежному, наз. прямым. Внутренняя область плоского У., не превосходящего развернутого, является выпуклой областью на плоскости.

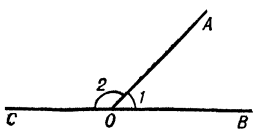


Рис. 2.

За единицу измерения У. принимается 90-я доля прямого У., наз. градусом.

Используется и т. н. круговая, или радианная, мера У. Числовое значение радианной меры У. равно длине дуги, высекаемой сторонами У. из единичной окружности. Один радиан приписывается У., соответствующему дуге, длина к-рой равна ее радиусу. Развернутый У. равен π радиан.

При пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей прямой образуются У. (см. рис. 3): 1 и 5, 2 и 6, 4 и 8, 3 и 7 — наз. соответственными; 2 и 5, 3 и 8 — внутренними односторонними; 1 и 6, 4 и 7 — внешними односторонними; 3 и 5, 2 и 8 — внутренними накрест лежащими; 1 и 7, 4 и 6 — внешними накрест лежащими.

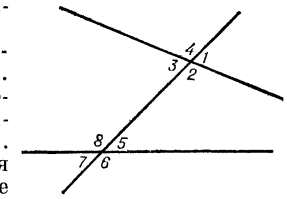


Рис. 3.

В практич. задачах целесообразно рассматривать У. как меру поворота фиксированного луча вокруг его начала до заданного положения. В зависимости от направления поворота У. в этом случае можно рассматривать как положительные, так и отрицательные. Тем самым У. в этом смысле может иметь своей величиной любое действительное число. У. как мера поворота луча рассматривается в теории тригонометрич. функций: для любых значений аргумента (У.) можно определить значения тригонометрич. функций. Понятие У. в геометрич. системе, в основу к-рой положена точечно-векторная аксиоматика, в корне отличается от определений У. как фигуры — в этой аксиоматике под У. понимают определенную метрич. величину, связанную с двумя векторами с помощью операции скалярного умножения векторов. Именно, каждая пара векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяет нек-рый угол φ — число, связанное с векторами формулой

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|},$$

где $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ — скалярное произведение векторов.

Понятие У. как плоской фигуры и как нек-рой числовой величины применяется в различных геометрич. задачах, в к-рых У. определяется специальным образом. Так, под У. между пересекающимися кривыми, имеющими определенные касательные в точке пересечения, понимают У., образованный этими касательными.

За угол между прямой и плоскостью принимается У., образованный прямой и ее прямоугольной проекцией на плоскость; он измеряется в пределах от 0° до 90°. Под У. между скрещивающимися прямыми понимают У. между направлениями этих прямых, т. е. между прямыми, параллельными, скрещивающимися и проведенными через одну точку.

Телесным углом наз. часть пространства, ограниченная нек-рой конической поверхностью; частным случаем телесного У. является *многогранный угол*.

В многомерной геометрии определяется У. между многомерными плоскостями, между прямыми и плоскостями и т. д. Углы между прямыми, плоскостями и прямыми, многомерными плоскостями определяются и в неевклидовых пространствах.

Л. А. Сидоров.

УДАРНЫХ ВОЛН МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — математическое описание свойств, движения и взаимодействия с окружающей средой поверхностей разрыва параметров среды (ударных волн). В более широком и абстрактном смысле У. в. м. т. описывает свойства поверхностей разрыва решений *квазилинейных гиперболических уравнений и систем*. У. в. м. т. возникла в связи с задачами движения газов и сжимаемых жидкостей во 2-й пол. 19 в.; ее основы были заложены в работах С. Ирншоу, Б. Римана, У. Ранкина, П. Гюгоньо (см., напр., [1] — [4]).

При идеализации реальных газов и жидкостей рассматривают среды, лишенные диссипативных свойств, в к-рых отсутствуют вязкость и теплопроводность. В процессе движения в таких идеальных средах могут возникать разрывы в распределениях всех параметров течения (плотности, давления, температуры, скорости и др.). Множества точек разрыва параметров течения

могут быть весьма сложными. Систематически рассмотрен лишь простейший основной случай, когда эти множества образуют кусочно гладкие поверхности разрыва, состоящие из точек разрыва параметров 1-го рода. В общем случае двумерные поверхности разрыва перемещаются в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с течением времени. Ударные волны являются одним из возможных типов поверхностей разрыва.

Появление разрывов существенно осложняет математич. постановку задачи о течении идеальных газов и жидкостей, так как разрывные функции не могут быть решениями дифференциальных уравнений газовой динамики (гидродинамики). Поэтому течения с поверхностями разрыва описываются обобщенными решениями системы квазилинейных *газовой динамики уравнений* и У. в. м. т. является частью теории обобщенных решений системы интегральных законов сохранения газовой динамики.

Поверхности разрыва. На поверхностях разрыва должны выполняться условия, вытекающие из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Исключение составляют лишь разрывы в момент начала движения (т. н. начальные разрывы), к-рые могут быть произвольными. Пусть $\Sigma(t)$ — гладкая поверхность разрыва параметров течения газа (жидкости); $\boldsymbol{D}$ — нормальная скорость движения поверхности разрыва. Рассматриваются лишь гомогенные среды, к-рые характеризуются плотностью $\rho(\boldsymbol{r}, t)$, давлением $p(\boldsymbol{r}, t)$, внутренней энергией единицы массы газа $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ и вектором скорости движения среды $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$.

Пусть в точках поверхности $\Sigma(t)$ $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_n+\boldsymbol{u}_\tau$, где $\boldsymbol{u}_n$ — нормальная и $\boldsymbol{u}_\tau$ — тангенциальная (по отношению к $\Sigma(t)$) составляющие вектора скорости $\boldsymbol{u}$. Условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии на поверхности $\Sigma(t)$ записываются в виде равенств

$$\left.\begin{aligned}&[\rho(u_n-D)]=0,\quad [p+\rho(u_n-D)^2]=0,\\ &[\rho(u_n-D)\boldsymbol{u}_\tau]=0,\ [\rho(u_n-D)(\varepsilon+p/\rho+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{D})^2/2]=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где квадратные скобки означают скачок стоящей внутри их величины при переходе с одной стороны поверхности разрыва на другую, т. е. $[f(\boldsymbol{r}, t)]=f_1-f_0$, где f_1, f_0 — предельные значения величины f в точке $(\boldsymbol{r}, t)\in\Sigma(t)$ при приближении к ней с разных сторон. Условия (1) являются внутренними граничными условиями, к-рые добавляются к уравнениям газовой динамики на поверхностях разрыва параметров среды.

Существует два типа разрывов: тангенциальные разрывы при $u_{n1}=u_{n0}=D$; $j=\rho_1(u_{n1}-D)=\rho_0(u_{n0}-D)=0$, и ударные волны при $j\neq 0$. Вектор $\boldsymbol{j}$ наз. потоком массы через единичную площадку движущейся поверхности разрыва (ударной волны) $\Sigma(t)$.

Тангенциальные и контактные разрывы. Для тангенциального разрыва ($j=0$) давление непрерывно, $[p]=0$ на $\Sigma(t)$, а величины ρ, ε, $\boldsymbol{u}_\tau$ могут иметь на $\Sigma(t)$ произвольный скачок. Если хотя бы одна из величин $[\rho]$, $[\varepsilon]$ отлична от нуля, то разрыв наз. также контактным разрывом. В случае контактного разрыва поверхность $\Sigma(t)$ является границей раздела сред с разными свойствами, в частности с разными уравнениями состояния; она образуется линиями тока, выпущенными из поверхности начального контактного разрыва.

Тангенциальный разрыв ($j=0$, $[\boldsymbol{u}_\tau]\neq 0$) неустойчив, т. к. под действием даже малой вязкости, присущей газам и жидкостям, начальный разрыв тангенциальной составляющей $\boldsymbol{u}_\tau$ вектора скорости размывается во все более широкую зону непрерывного перехода. За исключением особых случаев, когда он осуществляется на коротких интервалах времени (тангенциальные разрывы в соплах, начальные участки зон смешения различных потоков и т. п.), он не рассматривается как допустимый разрыв. В этом проявляется ограниченность описания «идеальной» средой среды даже с малой вязкостью, т. к. в идеальной среде тангенциальные разрывы сохраняются. Поэтому вопрос о допустимости или недопустимости тангенциального разрыва в течении идеальной среды решается в связи с условиями конкретной задачи.

Чисто контактный разрыв ($j=0$, $[\boldsymbol{u}_\tau]=0$, $[p]=0$, $[\rho]^2+[\varepsilon]^2\neq 0$) может разрушаться процессами молекулярной диффузии; как правило, эти процессы столь медленны, что контактный разрыв можно считать устойчивым на умеренных интервалах времени.

Однако контактный разрыв также становится неустойчивым и быстро разрушается, если в течение значительного интервала времени ускорение среды на контактной границе направлено в сторону среды с меньшей плотностью. В этом случае контактный разрыв разрушается и начинается «перемешивание» сред, расположенных первоначально по разные стороны от контактного разрыва. Простейшим примером подобной, существенно многомерной, неустойчивости является разрушение в поле силы тяжести горизонтального контактного разрыва между легкой жидкостью, находящейся в нижней части сосуда, и налитой на нее сверху более тяжелой жидкостью (т. н. тейлоровская неустойчивость).

Ударные волны. В этом случае $j=\rho_1(u_{n1}-D)=\rho_0(u_{n0}-D)\neq 0$ и из (1) следует $[\boldsymbol{u}_\tau]=0$, т. е. отсутствует разрыв тангенциальной составляющей вектора скорости. Условия (1) на ударной волне $\Sigma(t)$ сводятся к трем уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&[\rho(u_n-D)]=0,\ [p+\rho(u_n-D)^2]=0,\\ &[\varepsilon+p/\rho+(u_n-D)^2/2]=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

к-рые наз. условиями Ранкина — Гюгонью. Если $\boldsymbol{u}_\tau=0$, то ударную волну наз. прямой, в противном случае — косой. Исключение из (2) величин $(u_{n1}-D)$, $(u_{n0}-D)$ дает соотношение

$$\varepsilon_1-\varepsilon_0+\frac{1}{2}(V_1-V_0)(p_1+p_0)=0,\quad V=\frac{1}{\rho}, \tag{3}$$

к-рое связывает лишь термодинамич. параметры среды по разные стороны ударной волны; оно наз. ударной адиабатой или адиабатой Гюгонью.

Пусть поверхность $\Sigma(t)$ движется в направлении $\boldsymbol{D}$ слева направо. Тогда, если $j<0$, то ударная волна относительно среды движется направо, в процессе движения вещество пересекает ударную волну $\Sigma(t)$, двигаясь относительно $\Sigma(t)$ справа налево. Наоборот, если $j>0$, то ударная волна движется относительно среды налево. Среду справа от ударной волны при $j<0$ и слева от ударной волны при $j>0$ наз. средой перед ударной волной, др. среду — средой за ударной волной. Параметры среды перед ударной волной — $u_{n0}=u_0$, V_0, p_0, ε_0; параметры среды за ударной волной — $u_{n1}=u_1$, V_1, p_1, ε_1. В процессе движения частицы перед ударной волной проходят через поверхность $\Sigma(t)$ ударной волны и присоединяются к среде за ударной волной (u_0, V_0, p_0, $\varepsilon_0\to u_1$, V_1, p_1, ε_1). При этом они проходят через зону больших градиентов (зона ударной волны), в к-рой существенно действие диссипативных процессов — трения и теплопроводности — несмотря на малые коэффициенты вязкости и теплопроводности вещества. Ввиду необратимости диссипативных процессов должно выполняться условие $S_0<S_1$, где S — энтропия газа. Это неравенство уже не позволяет менять местами состояния u_0, V_0, p_0, ε_0 и u_1, V_1, p_1, ε_1 (как это допускается условиями (2) и (3)), а, напротив, указы-

вает определенное положение этих состояний относительно поверхности $\Sigma(t)$.

Условие $S_1>S_0$ наз. условием устойчивости ударной волны. Вопрос о реализуемости (допустимости) ударной волны, на к-рой выполняются условия (2), (3) и $S_1>S_0$, решается сравнительно просто лишь для т. н. нормального газа. Газ (жидкость) наз. нормальным газом, если его уравнения состояния удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial p}{\partial V}(V,\ S)<0,\ \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial V^2}(V,S)>0,\ p(V,S)\longrightarrow\infty \text{ при } V\longrightarrow 0,\\ \dfrac{\partial p}{\partial S}(V,\ S)>0,\ \ c_V=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial T}(V,\ T)>0.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Для нормального газа условие $S_1>S_0$ гарантирует устойчивость ударной волны; при этом из условий Гюгоньо (2) состояние u_1, V_1, p_1, ε_1 за фронтом ударной волны определяется однозначно по заданным состоянию u_0, V_0, p_0, ε_0 и потоку массы j, если

$$-j^2<\frac{\partial p}{\partial V}(V_0,\ S_0).$$

Из условия устойчивости $S_1>S_0$ ударной волны вытекают свойства: а) ударная волна движется со сверхзвуковой скоростью по среде перед ее фронтом и с дозвуковой скоростью по среде за ее фронтом (теорема Цемплена), т. е.

$$|u_0-D|>c_0,\ |u_1-D|<c_1,\ c^2=-V^2\frac{\partial p}{\partial V}(V,\ S);$$

б) ударные волны приводят к сжатию вещества и увеличению в нем давления, т. е. из $S_1>S_0\to\rho_1>\rho_0$, $p_1>p_0$.

Ударная адиабата (3) для нормального газа изображается в плоскости переменных V, p выпуклой вниз кривой $H(V,\ p;\ V_0,\ p_0)=0$, $V_1=V$, $p_1=p$, проходящей через точку $(V_0,\ p_0)$, называемую центром ударной адиабаты. График ударной адиабаты при $V<V_0$ лежит выше графика адиабаты Пуассона $S=S_0$ и ниже его при $V>V_0$; в точке $(V_0,\ p_0)$ эти две адиабаты имеют касание не ниже 2-го порядка. Состояниям $(V_1,\ p_1)$ за фронтом ударной волны соответствует левая ветвь ударной адиабаты $(V<V_0)$.

Для среды с уравнениями состояния

$$pV=RT,\ \varepsilon=pV/(\gamma-1),\ \gamma=\text{const}>1,$$

(т. н. идеальный газ), условия (4) выполнены, а уравнение (3) имеет вид

$$\left.\begin{array}{l}(p+hp_0)(V-hV_0)=(1-h^2)p_0V_0,\ p=p_1,\\ V=V_1,\ \ 0<h=\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}<1.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Уравнение (5) определяет гиперболу с асимптотами $V=hV_0$, $p=-hp_0$. Предельное сжатие вещества достигается за бесконечно сильной ударной волной

$$p_1/p_0=\infty,\ V_0/V_1=\rho_1/\rho_0=1/h=(\gamma+1)/(\gamma-1).$$

Решение уравнений (2) относительно u_{n1}, ρ_1, p_1 при заданных u_{n0}, ρ_0, p_0 и D дается формулами

$$\left.\begin{array}{l}u_{n1}=u_{n0}-(\text{sign } j)\,(1-h)\,c_0\,(M_0-1/M_0),\\ \rho_1=\rho_0M_0^2/(1-h+hM_0^2),\ p_1=p_0\left[(1+h)\,M_0^2-h\right];\\ M_0=|u_0-D|/c_0,\ M_0>1.\end{array}\right\} \tag{6}$$

Для газов с аномальными термодинамич. свойствами, когда нарушаются условия (4), требование $S_1>S_0$ уже не гарантирует устойчивости (допустимости) ударного перехода. Вопрос об условиях допустимости ударного перехода значительно усложняется и для газов с произвольными уравнениями состояния, удовлетворяющими лишь необходимым условиям термодинамики, до конца не решен. Наиболее изучен случай, когда нарушается лишь требование $p''_{VV}(V,\ S)>$ из условий (4) и величина $p''_{VV}(V,\ S)$ может быть знакопеременной. В этом случае ударная адиабата (3) содержит состояния V_1, p_1, ε_1, для к-рых ударный переход V_0, p_0, $\varepsilon_0\to V_1$, p_1, ε_1 является неустойчивым даже при выполнении условия $S_1>S_0$.

Зона ударного перехода и его ширина. Так называют зону непрерывного изменения параметров среды от их значений перед фронтом до значений за фронтом ударной волны (и ее эффективную ширину) для реальных сред, обладающих конечной вязкостью и теплопроводностью. Предполагается, что непрерывный переход существует только для устойчивых ударных волн. Поэтому изучение непрерывного ударного перехода дает критерий допустимости ударной волны. Исследуется и характер изменения параметров среды в зоне перехода.

При малой ширине зоны перехода любая ударная волна может рассматриваться как локально плоская. Поэтому ударный переход описывается решениями одномерных с плоской симметрией уравнений газовой динамики для вязкого и теплопроводящего газа:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial\rho u}{\partial x}=0;\ \dfrac{\partial\rho u}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p+\rho u^2-\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon+\rho\dfrac{u^2}{2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\,(\varepsilon+p/\rho+u^2/2)-\mu u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\right.\\ \qquad\left.-\varkappa\dfrac{\partial T}{\partial x}\right]=0,\end{array}\right\} \tag{7}$$

где μ и $\varkappa$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности (предполагаемые здесь постоянными). К уравнениям (7) добавляются уравнения состояния $p=p(V,\ T)$ из $\varepsilon=\varepsilon(V,\ T)$. В системе координат, движущейся со скоростью D ударной волны, ударный переход описывается стационарными решениями уравнений (7). Для них имеются два уравнения:

$$\left.\begin{array}{l}j\mu\dfrac{dV}{dx}=M(V,\ T)=p+j^2V-f,\\ \varkappa\dfrac{dT}{dx}=L(V,\ T)=j\,(\varepsilon-j^2V^2/2+fV)-g,\end{array}\right\} \tag{8}$$

где $j>0$, f, g — постоянные.

Для уравнений (8) ставится задача: найти решение $V(x)$, $T(x)$ такое, что $V(x)\to V_0$, $T(x)\to T_0$ при $x\to\infty$ и $V(x)\to V_1$, $T(x)\to T_1$ при $x\to-\infty$. Необходимые условия существования такого решения

$$M(V_0,\ T_0)=L(V_0,\ T_0)=M(V_1,\ T_1)=L(V_1,\ T_1)=0$$

приводят к условиям Гюгоньо (2).

Качественное изучение картины интегральных кривых системы (8) приводит к выводу о существовании единственной интегральной кривой этой задачи, если для уравнений состояния газа выполнены условия (4), параметры V_0, p_0, u_0 и V_1, p_1, ε_1 удовлетворяют условиям Гюгоньо и условию устойчивости ударной волны $S_1>S_0$. «Ширина» зоны ударного перехода бесконечна, и примыкание к предельным значениям происходит экспоненциально. В случае невязкого теплопроводного газа ($\mu=0$, $\varkappa>0$), к-рый можно рассматривать как предельный при $\mu\to 0$, также существует непрерывное решение задачи об ударном переходе, если кривая $M(V,\ T)=0$ в плоскости переменных V, T является монотонной. В противном случае (что бывает для достаточно сильных ударных волн) предел при $\mu\to 0$ интегральных кривых может иметь разрыв плотности при постоянной температуре (т. н. изотермический скачок). Это означает, что решения уравнений газовой динамики для теплопроводящей среды, лишенной вязкости, могут быть разрывными. Если среда обладает вязкостью ($\mu>0$) и лишена теплопроводности ($\varkappa=0$), то всегда существует непрерывный

переход V_0, $T_0 \to V_1$, T_1. Из этого можно сделать вывод, что решения уравнений газовой динамики для среды, обладающей вязкостью, не могут иметь разрывов типа ударной волны, т. е. для них задача Коши разрешима в целом (при любых $t>0$). Однако строгое доказательство этого отсутствует.

Подробно изучен ударный переход для идеального газа: $p=RT/V$, $\varepsilon=c_V T$ (R, c_V — константы). Уравнения (8) в этом случае интегрируются при $\varkappa=0$, $\mu>0$:

$$[V_0-V(x)]^{\frac{V_0}{V_0-V_1}}\cdot[V(x)-V_1]^{\frac{V_1}{V_0-V_1}}=c\exp\{(\gamma+1)x/2\mu\}.$$

Эффективную ширину зоны ударного перехода определяют так:

$$l=(V_0-V_1)/\max\left|\frac{dV}{dx}(x)\right|.$$

Вычисления показывают, что ширина l ударной волны имеет порядок длины свободного пробега молекулы.

Тем самым оправдывается точка зрения, согласно к-рой течение газа подразделяется на области обратимых процессов, где течение описывается уравнениями газовой динамики без учета диссипативных членов, и на области необратимых процессов, к-рые представляют собой узкие зоны и могут быть эффективно описаны подвижными поверхностями разрыва (ударными волнами). Более точно поведение параметров среды в зоне ударного перехода описывается *Больцмана уравнением* для неравновесных газодинамич. процессов.

Для газов с аномальными термодинамич. свойствами изучение зоны ударного перехода осложняется. Рассмотрен случай, когда величина $p''_{VV}(V, S)$ знакопеременна. Пусть $\varkappa=0$, $\mu>0$ в системе (8). Тогда $L(V, T)=0$ и нахождение $V(x)$, $T(x)$ сводится к решению одного уравнения

$$j\mu\frac{dV}{dx}=M(V, T)=[p(V, T)+j^2V-f]. \qquad (9)$$

Решение этого уравнения $V=V(x)$, $V(x)\to V_0$ при $x\to-\infty$ и $V(x)\to V_1$ при $x\to+\infty$, существует, если V_0, p_0, ε_0 и V_1, p_1, ε_1 лежат на ударной адиабате (3) и

$$\frac{p-p_0}{V-V_0}\geqslant -j^2=\frac{p_1-p_0}{V_1-V_0} \qquad (10)$$

в точках кривой $L(V, T)=0$ при $(V-V_0)(V-V_1)<0$.

Из (10) следует, что $S_1\geqslant S_0$, причем если $S_1=S_0$, то отрезок адиабаты Гюгоньо (3) между точками (V_0, p_0) и (V_1, p_1) в плоскости переменных V, p — отрезок прямой $p-p_0=j^2(V_0-V)$. Неравенство (10) дает условия допустимости ударной волны в случае знакопеременности величины $p''_{VV}(V, S)$. Основные свойства ударных волн в этом случае видоизменяются: а) $|u_{n0}-D|\geqslant c_0$, $|u_{n1}-D|\leqslant c_1$; б) ударные волны приводят к неубыванию энтропии ($S_1\geqslant S_0$). Существуют ударные волны сжатия ($\rho_1>\rho_0$) и ударные волны разрежения ($\rho_1<\rho_0$).

Возникновение ударных волн в идеальных средах происходит как в результате распада начального разрыва параметров на устойчивые разрывы (ударные волны, контактные и тангенциальные разрывы), так и в процессе непрерывного до того течения. Напр., в одномерном изоэнтропическом течении идеального газа ($S(x, t)=\mathrm{const}$) ударные волны не возникают, если при $t=0$ выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u-\frac{2}{\gamma-1}c\right)\geqslant 0;\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{2}{\gamma-1}c\right)\geqslant 0$$

и, наоборот, они возникают, если какое-либо из этих условий нарушено.

В теории разрывных решений квазилинейных гиперболич. уравнений и систем также развивается теория разрывов, подобная У. в. м. т. в газовой динамике. Основные результаты (далекие от завершения) получены лишь для случая двух независимых переменных x t. Одно квазилинейное уравнение

$$u_t+[\varphi(u)]_x=0 \qquad (11)$$

будем рассматривать как закон сохранения, тогда $\varphi(u)$ — поток величины u. Непрерывность потока на линии разрыва $x=x(t)$ приводит к условию

$$[Du-\varphi(u)]=0;\ D=x'(t), \qquad (12)$$

к-рое по аналогии с (1) наз. у с л о в и е м Г ю г о н ь о. Так же как и для ударных волн в газовой динамике, к (12) добавляется требование устойчивости разрыва, к-рое обеспечивает единственность решения задачи Коши для уравнения (11) в классе разрывных функций. Если $\varphi(u)\in C^2$ и $\varphi''_{uu}(u)\neq 0$, то условие устойчивости имеет вид

$$\varphi'_u(u(x(t)-0, t))\geqslant\varphi'_u(u(x(t)+0, t)).$$

Для системы квазилинейных законов сохранения

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_i(u)}{\partial x}=0,\ i=1, \ldots, n,\ u=\{u_1, \ldots, u_n\}, \qquad (13)$$

условия Гюгоньо имеют вид (12), где $u=\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\varphi(u)=\{\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)\}$. Вопрос о корректных условиях устойчивости разрыва решения решен лишь для узких классов систем вида (13).

Лит.: [1] E a r n s h o w S., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», 1860, v. 150, p. 133—48, [2] Р и м а н Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 376—95; [3] R a n k i n e W. J. M., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», 1870, v. 160, p. 277—88; [4] H u g o n i o t H., «J. École polytech.», 1889, cahier 58, p. 1—125; [5] К о ч и н Н. Е., Собр. соч., т 2, М.— Л., 1949, с. 5—42; [6] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [7] W e y l H., «Communs Pure and Appl. Math.», 1949, v. 2, p. 103—22, [8] G i l b a r g D., «Amer. J. Math.», 1951, v. 73, p. 256—74, [9] B e c k e r R., «Z. Phys.», 1922, Bd 8, S. 321—62; [10] К у р а н т Р., Ф р и д р и х с К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, пер. с англ., М., 1950; [11] С е д о в Л. И., Механика сплошной среды, 3 изд., т. 1, М., 1976; [12] З е л ь д о в и ч Я. Б., Теория горения и детонации газов, М.— Л., 1944; [13] Р о ж д е с т в е н с к и й Б. Л., Я н е н к о Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, 2 изд., М., 1978; [14] О л е й н и к О. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 3, с. 3—73.

Б. Л. Рождественский.

УДВОЕНИЕ КУБА — задача на построение куба, объем к-рого вдвое больше объема данного куба; одна из классич. задач древности на точное построение циркулем и линейкой. Длина ребра x искомого куба численно равна $\sqrt[3]{2}$ и определяется из кубического уравнения $x^3-2=0$. Однако точное построение отрезка $\sqrt[3]{2}$ посредством циркуля и линейки неосуществимо вследствие неразрешимости кубического уравнения в квадратных радикалах. Первое строгое доказательство неразрешимости задачи У. к. с помощью циркуля и линейки дал в 1837 П. Ванцель (P. Wantzell).

Лит Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963, с. 205—27.

Е. Г. Соболевская.

УЗЕЛ. 1) У.— тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot{x}=f(x),\ x=(x_1, x_2),\ f\colon G\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f\in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0 такая, что для всех траекторий системы, начинающихся в $U\setminus\{x_0\}$, отрицательные полутраектории являются уходящими (с течением времени покидают любой компакт $V\subset U$), а положительные полутраектории — асимптотическими (не выходя из U, примыкают к x_0, причем, будучи дополнены точкой x_0, касаются в ней определенных направлений), или наоборот. У. наз. при этом и сама точка x_0.

У. либо асимптотически устойчив по Ляпунову, либо вполне неустойчив (асимптотически устойчив при $t \to -\infty$). Индекс Пуанкаре для У. равен 1.

Для системы (*) класса C^1 ($f \in C^1(G)$) с ненулевой матрицей $A = f'(x_0)$ точка покоя x_0 является У., когда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A действительны и удовлетворяют условиям $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, но может быть У. и в тех случаях, когда $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ точка x_0 будет У., если $f \in C^2(G)$; при несоблюдении этого условия она может оказаться *фокусом*. В любом из перечисленных выше случаев траектории системы, примыкающие к У. x_0, касаются в этой точке направлений, определяемых собственными векторами матрицы A. Если $0 \leqslant |\lambda_1| < |\lambda_2|$, то существует четыре таких направления (если различать диаметрально противоположные); при этом все траектории системы касаются в точке x_0 направлений, соответствующих собственному значению λ_1, за исключением двух траекторий, к-рые касаются в x_0 направлений, соответствующих собственному значению λ_2 (рис. 1). Это — о б ы к н о в е н н ы й У. Если $\lambda_2 = \lambda_1$, то собственными для матрицы A в точке x_0 будут либо лишь два противоположных направления (в этом случае У. наз. в ы р о ж д е н н ы м, рис. 2),

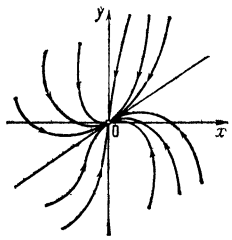


Рис. 1.

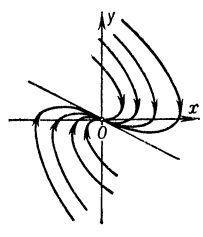


Рис. 2.

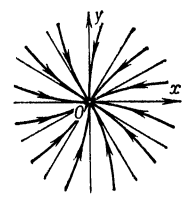


Рис. 3.

либо — все направления. В последнем случае при условии $f \in C^2(G)$ каждого направления касается в точке x_0 единственная траектория системы. Такой У. наз. д и к р и т и ч е с к и м (рис. 3).

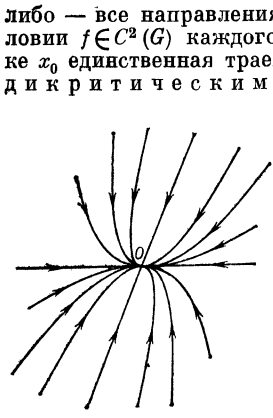


Рис. 4.

Рис. 5.

Если система (*) линейна ($f(x) = A(x - x_0)$, A — постоянная матрица), то для нее точка x_0 является У. лишь в тех случаях, когда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A действительны и $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Любой луч $x = x_0 + ps$ (p — собственный вектор матрицы A, $s \neq 0$ — параметр) является для нее траекторией. Обыкновенный, вырожденный и дикритический У. для линейной системы изображены соответственно на рис. 4, 5, 6. В случае обыкновенного У. все криволинейные траектории являются аффинными образами парабол $x_2 = c|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

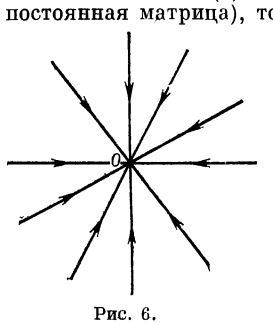


Рис. 6.

Термин «У.» применяют и для наименования точек покоя систем вида (*) порядка $n \geqslant 3$ с аналогичным поведением траекторий в их окрестностях.

Лит. см при ст *Особая точка* дифференциального уравнения.
А. Ф Андреев.

2) У. в г е о м е т р и и — плоская кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a \operatorname{ctg} k\varphi.$$

Имеет в начале координат узловую точку и асимптоты, параллельные координатным осям (см. рис.). При $k = 1$ У. есть *каппа*, при $k = 1/2$ — *строфоида*. Инверсия У. относительно начала координат есть У., конгруэнтный данному, но повернутый на 90°.

Лит [1] С а в е л о в А А, Плоские кривые, М., 1960.
Д Д. Соколов.

3) У. в т о п о л о г и и — см. *Узлов теория*.

УЗКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ — см. *Предикатов исчисление*.

УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ ГРУППЫ — класс групп, изоморфных *фундаментальным группам* $G(k) = \pi_1(M(k))$ дополнительных пространств $M(k) = S^n \setminus k$ зацеплений k коразмерности 2 в сферах S^n.

Для случая $n \geqslant 5$ группы G гладких зацеплений кратности μ выделяются такими свойствами [3]: 1) G порождается как свой нормальный делитель μ элементами; 2) двумерная группа гомологий $H_2(G; Z)$ группы G с целыми коэффициентами и тривиальным действием G в Z равна 0; 3) факторгруппа G по ее коммутанту G' равна свободной абелевой группе J^μ ранга μ. Если G — группа зацепления k, то свойство 1) выполнено, так как G становится единичной группой после приравнивания единице меридианов (см. ниже), свойство 2) вытекает из т е о р е м ы Х о п ф а, согласно к-рой $H^2(G; Z)$ есть факторгруппа группы $H_2(M(k); Z)$, равной нулю в силу *Александера двойственности*; свойство 3) вытекает из того, что $G/G' \approx H_1(M(k); Z)$ и $H_1(M(k); Z) = J^\mu$ по двойственности Александера.

В случаях $n = 3$ и $n = 4$ необходимые и достаточные условия еще (1984) не получены. Если $n = 3$, то k не распадается тогда и только тогда, когда $M(k)$ асферично, т. е. является пространством Эйленберга — Маклейна типа $K(G, 1)$. Зацепление k распадается тогда и только тогда, когда дефект группы G больше единицы [3]. Дополнение многомерного ($n \geqslant 4$) зацепления, имеющего больше одной компоненты, никогда не асферично, а дополнение многомерного узла может быть асферичным только при условии $G \approx \mathbb{Z}$ [5]. Более того, при $n \geqslant 6$ всякий n-мерный узел с асферичным дополнением тривиален. Известно также, что при $n = 3$ зацепление тривиально тогда и только тогда, когда его группа свободна [3]. Дальше принимается, что $n = 3$. Для получения копредставления группы $G(k)$ по общему правилу (см. *Фундаментальная группа*) в S^3 строят двумерный комплекс K, содержащий исходный узел k и такой, что $\pi_1(S^3 - K) = 1$. Тогда 2-клетки K дают систему образующих $G(k)$, а обходы вокруг 1-клеток из $K \setminus k$ — соотношения. Если в качестве K взять конус над k, идущий из точки снизу от плоскости проекции, получается верхнее копредставление Виртингера (см. *Узлов и зацеплений диаграммы*). Если в качестве K взять объединение черной и белой поверхностей, получаемых из диаграммы k (удалив внешнюю область), получится копредставление Дена.

Задание k в виде замкнутой косы приводит к копредставлению $G(k)$ вида $\{s_i; s_i = L_i s_k L_i^{-1}\}$, где L_i — слово в алфавите s_i, s_i^{-1}, причем $\prod_{i=1}^{N}(L_i s_k L_i^{-1}) = \prod_{i=1}^{N} s_i$ в свободной группе $\{s_i;\}$. При этом каждое копредставление такого типа получается из замкнутой косы. О других копредставлениях см. [1], [2], [4], [7], [8].

Сравнение верхнего и нижнего копредставлений Виртингера приводит к особого рода двойственности в $G(k)$ (см. [7]). Она формулируется в терминах исчисления Фокса: $G(k)$ имеет два таких копредставления $(x_i; r_j)$ и $(y_i; s_j)$, что для нек-рой их эквивалентности $\theta: (x_i; r_j) \to (y_i; s_j)$ имеет место $\theta x_i \equiv y_i^{-1}$ и $\theta\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1)\right) \equiv \frac{\partial s_j}{\partial y_i}(y_i - 1)$, где сравнения берутся по модулю ядра гомоморфизма группового кольца свободной группы на групповое кольцо G/G'. Из этой двойственности вытекает симметрия в *Александера инвариантах*.

Проблема тождества решается лишь для отдельных классов узлов (напр., для торических, нек-рых крендельных [6] и др.). Не существует (см. [1]) алгоритма для распознавания групп трехмерных узлов по копредставлениям. Более сильным инвариантом для k является групповая система $\langle G, T_i\rangle$, состоящая из $G(k)$ и из системы классов T_i сопряженных подгрупп. Подгруппа $S_i \subset T_i$ наз. периферической подгруппой компоненты k_i; это образ при гомоморфизме вложения фундаментальной группы $\pi_1(\partial N(k_i))$ края нек-рой регулярной окрестности $N(k_i)$ компоненты $k_i \subset k$. Если k_i не является тривиальным узлом, отделенным от остальных компонент 2-сферой, то $S_i \approx \pi_1(\partial N(k_i))$. Меридиан и параллель в $\partial N(k_i)$ порождает в S_i два элемента, к-рые также наз. меридианом m_i и параллелью l_i для k_i в групповой системе. В случае $\mu = 1$ параллель определяется самой группой G в подгруппе S_i однозначно, а меридиан только с точностью до сомножителя вида l_i^n. О силе $\langle G, T_i\rangle$ как инварианта см. *Узлов теория*. Группа автоморфизмов группы G полностью изучена лишь для торич. зацеплений, для *Листинга узла* и, в значительной степени, для *Нейвирта узлов* (см. [2]). Представления G в различных группах, особенно с учетом $\langle G, T_i\rangle$,— мощный метод различения узлов. Напр., представления в группе движений плоскости Лобачевского позволяют заметить необратимые узлы. Систематически изучены метациклич. представления.

Если k не распадается, то для подгрупп $F \subset G(k)$ пространствами типа $K(F; 1)$ служат накрывающие M, к-рые, как и M, имеют *гомотопический тип* двумерного комплекса. Отсюда следует, что абелевы подгруппы $G(k)$ изоморфны J или $J \oplus J$; в частности, $G(k)$ не имеет элементов конечного порядка. Для $\mu = 1$ периферич. подгруппы S_i являются максимальными во множестве абелевых подгрупп. Центр имеют только группы торич. зацеплений [10]. Особую роль играет подгруппа $L(k)$, в к-рую входят элементы $G(k)$, коэффициент зацепления к-рых с объединением ориентированных компонент k_i равен нулю. Если $\mu = 1$, то $L(k)$ — коммутант. Вообще, $G(k)/L(k) \approx J$. Поэтому $L(k)$ служит группой накрывающего $\tilde{M}_0$ над $M(k)$ с бесконечной циклич. группой J скольжений. Если $F(k)$ — связная ориентируемая поверхность в S^3 с краем k, то она накрыта в $\tilde{M}_0$ счетной системой поверхностей $\tilde{F}_j$, к-рые разрезают $\tilde{M}_0$ на счетное число кусков M_j (край $\partial M_j = F_j \cup F_{j+1}$). Отсюда получается, что $L(k)$ есть предел диаграммы

$$\ldots \xleftarrow{i_{j*}} \pi_1 F_j \xrightarrow{i_{j*}} \pi_1 M_j \xleftarrow{i'_{j+1*}} \pi_1 F_{j+1} \xleftarrow{i_{j+1*}} \ldots,$$

где все i_{j*}, i'_{j*} индуцированы вложением. Оказывается, что либо все они — изоморфизмы, либо ни один из них не эпиморфен [2]. Если род связной $F(k)$ равен роду $\gamma(k)$ зацепления (такое k наз. вполне неразложимым), то все i_{j*}, i'_{j*} — мономорфизмы, и тогда $L(k)$ — либо свободная группа ранга $2\gamma + \mu - 1$, либо не имеет конечной системы образующих (и не свободна, если приведенный многочлен Александера не нуль; это так, в частности, для узлов). Вполне неразложимое зацепление с конечно порожденной $L(k)$ наз. зацеплением Нейвирта.

Лит.: [1] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [2] Neuwirth L. P., «Ann. Math. Stud.», 1965, № 56; [3] Hillman J. A., «Lect. Notes in Math.», 1981, v. 883; [4] Gordon C McA., там же, 1978, v. 685, p. 1—60; [5] Eckmann B., «Comment. math. helv.», 1976, v. 51, p. 93—98; [6] Reidemeister K., «Hamburg. Abh.», 1928, Bd 6, S. 56—64; [7] Hotz G., там же, 1960, Bd 24, S. 132—48; [8] Trotter H. F., «Ann. Math.», 1962, v. 76, p. 464—98; [9] его же, «Topology», 1964, v. 2, p. 341—58; [10] Burde G., Zieschang H., «Math. Ann.», 1966, Bd 167, S. 169—76

А. В. Чернавский.

УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ ДИАГРАММЫ — графическое изображение узлов и зацеплений, основу к-рых составляют плоские проекции. Пусть $k \subset \mathbb{R}^3$ — зацепление и $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ — проекция $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$. Порядком точки $p \in \pi(k)$ наз. число элементов множества $\pi^{-1}(p) \cap k$. Точки порядка два наз. двойными, точки порядка >1 — кратными. Говорят, что полигональное зацепление k находится в регулярном положении, если: (1) все его кратные точки являются двойными и их число конечно и (2) никакая двойная точка не является образом вершины. Всякое зацепление может быть переведено в регулярное положение сколь угодно малым вращением пространства. Если k находится в регулярном положении, то в каждой двойной точке ветвь, лежащая выше (в направлении координаты z), наз. переходом, а ветвь, лежащая ниже,— проходом. Чтобы задать диаграмму зацепления, находящегося в регулярном положении, нужно указать его проекцию $\pi(k) \subset \mathbb{R}^2$ и разорвать образы проходов в двойных точках (см. рис. 1). Если зацепление ориентировано, т. е. заданы обходы компонент, то они указываются на диаграмме D стрелками. Если при обходе каждой компоненты зацепления на ее проекции проходы и переходы чередуются, то диаграмма наз. альтернирующей. Зацепление, имеющее хотя бы одну альтернирующую диаграмму, наз. альтернирующим зацеплением (см. *Альтернирующие узлы и зацепления*).

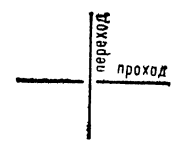


Рис. 1.

Каждой области f_i, на к-рые проекция зацепления делит плоскость $\mathbb{R}^2$, отвечает ее индекс $\nu(f_i)$, равный суммарному числу обходов, совершаемых проекциями всех компонент зацепления вокруг произвольной внутренней точки f_i. При переходе к смежной области индекс меняется на единицу; откуда следует, что все области f_i можно раскрасить в черный и белый цвета в шахматном порядке.

Во множество диаграмм на плоскости вводится некрое отношение эквивалентности, причем две диаграммы оказываются эквивалентными тогда и только тогда, когда отвечающие им зацепления объемлемо изотопны. Это дает возможность свести изучение узлов к плоской топологии. Именно, $D_1 \sim D_2$, если D_1 можно получить

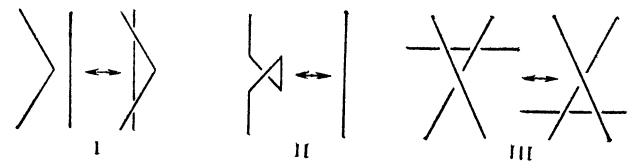


Рис. 2.

из D_2 применением конечного числа элементарных операций I, II, III, показанных на рис. 2, и изотопич. деформаций. Подход к теории узлов, основанный на указанном сведении, является типичным подходом комбинаторной топологии. Он был основным в 1-й период развития теории узлов (примерно до 40-х гг. 20 в.). В рамках этого подхода инварианты узлов оп-

ределяют исходя из диаграмм, а затем доказывают, что результат не зависит от выбора диаграммы (см. [1]). В современных исследованиях определения инвариантов предпочитают давать в терминах алгебраич. топологии, выделяя тем самым на первый план их геометрич. сущность.

Диаграмма ориентированного зацепления используется для построения его поверхности Зейферта. Пусть x — произвольная не двойная точка ориентированной диаграммы D зацепления k. Обход D, начиная от x, совершается в направлении, указанном ориентацией. В первой встретившейся двойной точке осуществляется поворот и продолжается движение в направлении ориентации D до возвращения в x; при этом будет описан простой замкнутый контур, к-рый наз. окружностью Зейферта. Диаграмма D распадается на такие окружности Зейферта C_j, причем они могут лишь соприкасаться. Пусть для каждой окружности C_j через D_j обозначается диск, лежащий в плоскости, параллельной $\mathbb{R}^2$, так что его край проектируется в C_j. Для каждой двойной точки α_i рассматривается прямоугольник H_i, помещенный вертикально над α_i, к-рый скручивается на 90° так, чтобы верхняя сторона лежала на крае D_{j_1}, а нижняя — на крае D_{j_2}, если C_{j_1} и C_{j_2} — примыкающие к α_i окружности Зейферта. Если каждое скручивание произвести в нужную сторону, то край возникающей поверхности $F=U_jD_j\cup U_jH_i$ изотопен зацеплению k. Так получаемая поверхность ориентируема. Более простую, но, возможно, неориентируемую поверхность, натянутую на зацепление, можно построить, взяв по диску над каждой черной областью шахматной диаграммы и соединив их, как и выше, скрученными прямоугольниками.

Известно несколько способов выписывания копредставления группы зацепления по его диаграмме. Чтобы получить копредставление Виртингера, рассматривают множество компонент связности $t_1, \ldots, t_n$ диаграммы зацепления (множество переходов), занумерованных в порядке их прохождения по каждой компоненте зацепления в направлении, указанном ориентацией. Пусть γ_i — нек-рый символ, сопоставленный t_i. Для каждой двойной точки составляется соотношение $\gamma_i=\gamma_j\gamma_{i+1}\gamma_j^{-1}$ или $\gamma_i=\gamma_j^{-1}\gamma_{i+1}\gamma_j$, в зависимости от того, имеет ли диаграмма зацепления в окрестности этой двойной точки вид, изображенный на рис. 3*а* или на рис. 3*б*. Группа, заданная копредставлением с образующими $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (по одному для каждого перехода) и указанными выше соотношениями (по одному для каждой двойной точки), изоморфна группе рассматриваемого зацепления. Полученное копредставление наз. ее верхним копредставлением Виртингера. Двойственным образом определяется нижнее копредставление Виртингера.

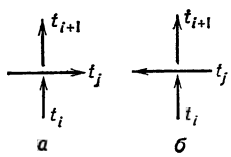


Рис. 3.

Для нахождения копредставления Дена рассматривают области f_i, на к-рые проекция зацепления делит плоскость, и берут по одному символу $\bar{f}_i$ для каждой области f_i. Символы $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, ... принимают за образующие, а соотношения получают обходом точек α_i: пишут подряд символы, отвечающие областям, примыкающим к α_i, причем если f_1 и f_2 лежат слева от прохода, то степени $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_3$ равны -1, а f_2 и f_4 равны 1. Кроме того, считается, что $\bar{f}_0=1$, где f_0 — внешняя область.

Использование У. и з. д. для преобразования зацепления в замкнутую косу (см. *Кос теория*). Пусть точка $o\in\Pi$ выбрана вне D так, что лучи, исходящие из o, не содержат двойных точек и отрезков D. Обход одной из компонент k_i зацепления осуществляется до тех пор, пока соответствующий обход проекции k происходит в одном и том же направлении вокруг o. Пусть l — первый отрезок, направленный в противоположную сторону, и точка c взята так, чтобы треугольник cab, где a и b — концы l, содержал o внутри и стороны ac и bc находились в общем положении по отношению к $D(k)$. Можно считать, что на l лежит не более одной двойной точки. Заменив l в $D(k)$ на $ac\cup bc$, причем если l не содержит двойной точки или является переходом, полагают, что ac и bc являются переходами во всех точках своего пересечения с $D(k)$. Если l — проход, то пусть и они являются проходами. Продолжая это построение для k_i и применяя его последовательно для всех компонент, получают в результате новую диаграмму для k, в к-рой проекции всех компонент обходят o все время в одну сторону, т. е. k будет представлено в виде замкнутой косы [2].

Лит.: [1] Reidemeister K., Knotentheorie, B., 1932; [2] Alexander J. W., «Proc. Nat. Acad. USA», 1923, v. 9, p. 193.
А. В. Чернавский.

УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ — формы, сопоставляемые трехмерным узлам и зацеплениям; нек-рые инварианты этих форм являются топологич. инвариантами изотопич. типа узлов и зацеплений. У. и з. к. ф. возникают в результате симметризации спариваний Зейферта (см. *Зейферта матрица*). Если V^2 — многообразие Зейферта зацепления $L=(S^3, l)$, а

$$\theta\colon H_1(V;\ \mathbb{Z})\otimes H_1(V;\ \mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{Z}$$

— спаривание Зейферта, то билинейная симметричная форма

$$q\colon H_1(V;\ \mathbb{Z})\otimes H_1(V;\ \mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{Z},$$

заданная равенством

$$q(v_1\otimes v_2)=\theta(v_1\otimes v_2)+\theta(v_2\otimes v_1),$$

наз. квадратичной формой зацепления L. Форма q описывается матрицей $M+M'$, где M — матрица Зейферта, а штрих означает транспонирование. Форма q сама по себе не является инвариантом зацепления L, однако ее сигнатура $\sigma(q)\in\mathbb{Z}$ и единицы Минковского $C_p(q)\in\{-1, +1\}$, где p — простое число, не зависят от выбора многообразия Зейферта. Они наз. соответственно сигнатурой и единицами Минковского зацепления L и обозначаются так: $\sigma(L)=\sigma(q)$, $C_p(L)=C_p(q)$. Размерность $n(q)$ радикала формы q также является инвариантом зацепления L. Число $n(L)=n(q)+1$ наз. дефектом зацепления L. Имеют место неравенства: $d(L)\leqslant\leqslant n(L)\leqslant\mu(L)$, где $d(L)$ — максимальное число компонент связности, к-рое может иметь многообразие Зейферта зацепления L, а $\mu(L)$ — кратность, т. е. число компонент зацепления L.

Пусть N — локально плоское двумерное ориентируемое подмногообразие шара D^4 с $N\cap S^3=\partial N=l$. Род $h(N)$ многообразия N оценивается снизу следующим неравенством:

$$2h(N)+\mu(L)-\mu(N)\geqslant|\sigma(L)|+|n(L)-\mu(N)|,$$

где $\mu(N)$ — число компонент многообразия N. Нижняя граница для $h(N)$ наз. 4-родом, или внешним родом зацепления L. Задача вычисления внешнего рода различных зацеплений тесно связана с задачей реализации двумерных гомологич. классов четырехмерных многообразий замкнутыми ориентируемыми поверхностями как можно меньшего рода. Внешний род всякого специального альтернирующего узла равен его роду и совпадает с половиной степени многочлена Алек-

сандера. Срезанные узлы (см. *Узлов кобордизм*) — это узлы внешнего рода нуль. Сигнатура и единицы Минковского узла определяются его классом кобордизмов. Функция на группе кобордизмов одномерных узлов в S^3 со значениями в группе $\mathbb{Z}$, к-рая сопоставляет классу кобордизмов сигнатуру представляющего его узла, является гомоморфизмом, образ к-рого совпадает с подгруппой четных чисел. Число заузливания всякого узла не менее половины его сигнатуры.

У. и з. к. ф. тесно связаны с двулистными разветвленными накрывающими Σ^4 шара D^4 с ветвлением над ориентируемыми двумерными поверхностями $N \subset D^4$ с $N \cap S^3 = \partial N = l$. В частности, сигнатура и единицы Минковского зацепления $L = (S^3, l)$ равны соответственно сигнатуре и единицам Минковского многообразия Σ^4. Край $\partial\Sigma^4 = \Sigma^3$, будучи двулистным накрытием сферы S^3, разветвленным над зацеплением l, является инвариантом зацеплений L. В случае узлов $H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z})$ является конечной группой. Эта группа, а также форма коэффициентов зацепления

$$\lambda\colon H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z}) \otimes H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

определяется квадратичной формой узла следующим образом. Группой с зацеплением или V-г р у п п о й наз. пара (G, μ), состоящая из конечной абелевой группы G и невырожденной билинейной симметричной формы $\mu : G \otimes G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Каждой невырожденной симметричной целочисленной $(n \times n)$-матрице A сопоставляется V-группа (G, μ), определяемая так: группа G порождается элементами $g_1, \ldots, g_n$ со следующими определяющими соотношениями: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j = 0$, $i = 1, \ldots, n$, где $A = \|a_{ij}\|$, а $\mu(g_i, g_j)$ равно mod 1 элементу матрицы A^{-1}, находящемуся на месте (i, j). Оказывается, что V-группа, определяемая этим способом по матрице $M + M'$ квадратичной формы узла, изоморфна V-группе $(H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z}), \lambda)$ многообразия Σ^3 (см. [4], [9]). Числовые инварианты V-групп находятся методом Бланчфилда — Фокса [5]. С их помощью в нек-рых случаях удается различать узлы, имеющие изоморфные группы.

Инварианты зацепления в двулистном накрытии S^3, разветвленном над узлом, могут быть найдены непосредственно по проекции узла с помощью следующей конструкции, к-рая приводит к к в а д р а т и ч н о й ф о р м е д и а г р а м м ы у з л а. Регулярная проекция узла делит плоскость на области, к-рые могут быть однозначно окрашены в черный и белый цвета таким образом, чтобы бесконечная область G_0 была окрашена в черный цвет, а всякие две области, примыкающие друг к другу по дуге, были бы окрашены в разные цвета. Пусть $G_0, G_1, \ldots, G_n$ — все черные области. Каждой двойной точке x диаграммы узла сопоставляется следующим образом нек-рое число $\eta(x) \in \{-1, 0, 1\}$. Пусть точка x является общей граничной точкой двух черных областей G_i и G_k. Если $i = k$, то $\eta(x) = 0$. Если же $i \neq k$, то $\eta(x) = 1$ тогда и только тогда, когда вращение от перехода к проходу вокруг точки x по черной области происходит по часовой стрелке; в противном случае $\eta(x) = -1$. Образуется следующая $(n \times n)$-матрица $A = \|a_{ij}\|$, где a_{ii} — сумма всех чисел $\eta(x)$, отвечающих двойным точкам x, лежащим на границе области G_i, а a_{ik} с $i \neq k$ есть взятая с обратным знаком сумма всех чисел $\eta(x)$, где x пробегает все общие граничные точки G_i и G_k. Форма $f = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ наз. к в а д р а т и ч н о й ф о р м о й д и а г р а м м ы у з л а. Матрица $A = \|a_{ij}\|$ определяется типом узла с точностью до следующего отношения связанности: две квадратные матрицы наз. с в я з а н н ы м и, если одна может быть переведена в другую конечной последовательностью следующих операций: $Q_1 : A \to T'AT$, где T — целочисленная унимодулярная матрица, $Q_2 : A \to \left\|\begin{matrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{matrix}\right\|$, и обратных к ним. Модуль определителя матрицы A является инвариантом узла и наз. д е т е р м и н а н т о м у з л а. Для всякого узла он равен $|\Delta(-1)|$, где $\Delta(t)$ — многочлен Александера (см. *Александера инварианты*). V-группа, определяемая указанным выше способом по матрице квадратичной формы произвольной диаграммы, является инвариантом узла. Более того, эта V-группа изоморфна V-группе $(H_1(\Sigma^3, \mathbb{Z}), \lambda)$ двулистного накрытия сферы S^3, разветвленного над узлом K.

Лит.: [1] Reidemeister K., Knotentheorie, B., 1932; [2] Goeritz L., «Math. Z.», 1933, Bd 36, S. 647; [3] Seifert H., «Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.», 1936, № 11, S. 84—101; [4] Kneser M., Puppe D., «Math. Z.», 1953, Bd 58, S 376—84; [5] Blanchfield R, Fox R., «Ann. Math.», 1951, v. 53, p. 556—64; [6] Trotter H, «Ann. Math.», 1962, v. 76, p. 464—68, [7] Murasugi K, «Trans. Amer. Math. Soc», 1965, v. 117, p. 387—422, [8] Tristram A., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1969, v. 66, p. 251—64, [9] Виро О. Я., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, с. 1241—58 *М. Ш. Фарбер*

УЗЛОВ КОБОРДИЗМ (правильнее бордизм узлов, см. *Бордизм*) — отношение эквивалентности на множестве узлов, более слабое, чем изотопич. тип. Два гладких n-мерных узла $K_1 = (S^{n+2}, k_1^n)$ и $K_2 = (S^{n+2}, k_2^n)$ наз. к о б о р д а н т н ы м и, если существует гладкое ориентированное $(n+1)$-мерное подмногообразие V многообразия $[0, 1] \times S^{n+2}$, причем V гомеоморфно $[0, 1] \times S^n$ и $\partial V = V \cap [0,1] \times (S^{n+2}) = (0 \times k_1) \cup (1 \times -k_2)$. Здесь знак минус означает обращение ориентации. Узлы, кобордантные тривиальному узлу, наз. к о б о р д а н т н ы м и н у л ю или с р е з а н н ы м и у з л а м и. Множество классов эквивалентности (кобордантности) n-мерных гладких узлов обозначается C_n. Операция несвязной суммы определяет во множестве C_n структуру абелевой группы. Обратным для класса У. к. (S^{n+2}, k^n) служит класс У. к. $(-S^{k+2}, -k^n)$.

При всех четных n группа C_n равна нулю. Класс У. к. нечетномерного узла определяется его *Зейферта матрицей*. Квадратная целочисленная матрица A называется к о б о р д а н т н о й н у л ю, если она унимодулярно конгруэнтна матрице вида $\left\|\begin{matrix} 0 & N_1 \\ N_2 & N_3 \end{matrix}\right\|$, где N_1, N_2, N_3 — квадратные матрицы одинакового размера, а 0 — нулевая матрица. Две квадратные матрицы A_1 и A_2 наз. к о б о р д а н т н ы м и, если матрица $\left\|\begin{matrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_2 \end{matrix}\right\|$ кобордантна нулю. Квадратная целочисленная матрица A наз. ε-матрицей, где $\varepsilon = +1$ или -1, если $\det(A + \varepsilon A') = \pm 1$. Матрица Зейферта всякого $(2q-1)$-мерного узла является $(-1)^q$-матрицей. Для всякого ε отношение кобордантности является отношением эквивалентности на множестве всех ε-матриц. Множество классов эквивалентности обозначается через G_ε. Операция прямой суммы определяет в G_ε структуру абелевой группы. Имеется г о м о м о р ф и з м Л е в и н а: $\varphi_q : C_{2q-1} \to G_{(-1)^q}$, к-рый сопоставляет классу У. к. K класс кобордизмов матрицы Зейферта узла K. Гомоморфизм Левина φ_q является изоморфизмом при всех $q \geqslant 3$. Гомоморфизм $\varphi_2 : C_3 \to G_+$ является мономорфизмом, и его образ является подгруппой индекса 2 в G_+, состоящей из классов $(+1)$-матриц A, для к-рых сигнатура матрицы $A + A'$ делится на 16. Гомоморфизм $\varphi_1 : C_1 \to G_{-1}$ является эпиморфизмом; его ядро нетривиально.

Для изучения строения групп G_+ и G_- и построения полной системы инвариантов класса У. к. используется следующая конструкция. И з о м е т р и ч е с к о й с т р у к т у р о й над полем F наз. пара $(<, >; T)$, состоящая из невырожденной квадратичной формы $<, >$, заданной на конечномерном векторном пространстве V над полем F, и ее изометрии $T : V \to V$. Изометрич. структура $(<, >; T)$ наз. к о б о р д а н т н о й н у л ю, если V содержит вполне изотропное инвариантное относительно T подпространство половинной размерности. Операции ортогональной суммы

форм и прямой суммы изометрий определяют во множестве изометрич. структур операцию $\perp$. Две изометрич. структуры $(<, >; T)$ и $(<, >'; T')$ наз. кобордантными, если изометрич. структура $(<, >; T)\perp\perp(-<, >'; T')$ кобордантна нулю. Пусть G_F — множество классов кобордизмов изометрических структур $(<, >; T)$, удовлетворяющих условию $\Delta_T(1)\times\times\Delta_T(-1)\neq 0$, где $\Delta_T(t)$ — характеристич. многочлен изометрии T. В изучении групп G_+ и G_- важную роль играют вложения $f_+ : G_+ \to G_{\mathbb{Q}}$ и $\chi_- : G_- \to G_{\mathbb{Q}}$, к-рые строятся следующим образом. Каждый класс кобордизмов ε-матриц содержит невырожденную матрицу. Если A — невырожденная ε-матрица, то пусть $B=-A^{-1}A'$, $Q=A+A'$ и $(<, >; T)$ — изометрич. структура, в к-рой форма $<, >$ задается матрицей Q, а изометрия T — матрицей B. Это сопоставление корректно определяет гомоморфизмы χ_ε и $\ker\chi_\varepsilon = 0$.

Пусть $\alpha=(<, >; T)$ — изометрич. структура на векторном пространстве V и $\lambda\in F[t]$. Пусть V_λ обозначает λ-примарную компоненту пространства V, т. е. $V_\lambda=\ker\lambda(T)^N$ для большего N. Многочлен $\lambda(t)=t^k+a_1t^{k-1}+\ldots+a_{n-1}t+1$ наз. возвратным, если $a_i=a_{k-i}$ при всех i. Для каждого неприводимого возвратного многочлена $\lambda\in\mathbb{Q}[t]$ через $\varepsilon_\lambda(\alpha)$ обозначается приведенный по mod 2 показатель, с к-рым λ входит в характеристич. многочлен Δ_T изометрии T. Для каждого возвратного неприводимого в $\mathbb{R}[t]$ многочлена $\lambda\in\mathbb{R}[t]$ обозначается через $\sigma_\lambda(\alpha)$ сигнатура сужения формы $<, >$ на $(V\otimes\mathbb{R})_\lambda$. Для каждого простого числа p и возвратного неприводимого в $\mathbb{Q}_p[t]$ многочлена $\lambda\in\mathbb{Q}_p[t]$ пусть сужение $<, >^p_\lambda$ формы $<, >$ на $(V\otimes\mathbb{Q}_p)_\lambda$, где $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел. Пусть

$$\mu^p_\lambda(\alpha)=(-1, 1)^{\frac{r(r+3)}{2}}\left(\det <, >^p_\lambda, -1\right)^r S\left(<\ ,>^p_\lambda\right),$$

где $(,)$ — символ Гильберта в $\mathbb{Q}_p$, S — символ Хассе, $2r$ — ранг $<, >^p_\lambda$. Две изометрич. структуры кобордантны тогда и только тогда, когда $\varepsilon_\lambda(\alpha)=\varepsilon_\lambda(\beta)$, $\sigma_\lambda(\alpha)=\sigma_\lambda(\beta)$, $\mu^p_\lambda(\alpha)=\mu^p_\lambda(\beta)$ для всех λ и p, для к-рых эти инварианты определены (см. [3], [4]).

Композиция гомоморфизма Левина, гомоморфизма χ и функций ε_λ, σ_λ, μ^p_λ сопоставляет каждому нечетномерному узлу K числа $\varepsilon_\lambda(K)\in\{0, 1\}$, $\sigma_\lambda(K)\in\mathbb{Z}$, $\mu^p_\lambda(K)\in\{-1, 1\}$. Два $(2q-1)$-мерных узла K_1 и K_2, где $q>1$, кобордантны тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon_\lambda(K_1)=\varepsilon(K_2),\ \sigma_\lambda(K_1)=\sigma_\lambda(K),\ \mu^p_\lambda(K_1)=\mu^p_\lambda(K_2)$$

для всех λ и p, для к-рых эти инварианты определены. $\Sigma\sigma_\lambda(K)$ равна сигнатуре узла K (см. *Узлов и зацеплений квадратичные формы*), где сумма берется по всем $\lambda(t)$ вида $t^2-2t\cos\theta+1$, где $0<\theta<\pi$, и в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Аналогичным образом определяются группы кобордизмов локально плоских и кусочно линейных, к-рые обозначаются C^{top}_n и C^{PL}_n соответственно. При всех n имеется изоморфизм $C^{\text{PL}}_n\approx C_n$. Естественное отображение $C_n\to C^{\text{top}}_n$ является изоморфизмом при $n\geqslant 3$, а при $n=3$ оно является мономорфизмом с образом индекса 2. Это, в частности, означает существование несглаживаемых локально плоских топологических трехмерных узлов в S^5 (см. [5]).

Теория У. к. связана с изучением особенностей не локально плоских и кусочно линейных вложений коразмерности 2. Если P есть $(n+1)$-мерное ориентированное многообразие, вложенное как подкомплекс в $(n+3)$-мерное многообразие M, $x\in P$ и N — малая звездная окрестность x в M, то особенность вложения P в M в точке x измеряется следующим образом. Край ∂N является $(n+2)$-мерной сферой, ориентация к-рой определяется ориентацией M; $P\cap\partial N$ является n-мерной сферой, ориентация к-рой определяется ориентацией P. Таким образом, возникает n-мерный узел $(\partial N, \partial N\cap P)$, к-рый наз. особенностью вложения $P\subset M$ в точке x.

Лит.: [1] Fox R. H., Milnor J. W., «Osaka J. Math.», 1966, v. 3, p. 257—67; [2] Kervaire M., «Bull. Soc. Math. France», 1965, t. 93, p. 225—71; [3] Levine J., «Comment. math. helv.», 1969, v. 44, p. 229—44; [4] его же, «Invent. Math.», 1969, v. 8, p. 98—110; [5] Cappell S., Shaneson J., «Topology», 1973, v. 12, p. 33—40, [6] Stoltzfus N., «Mem. Amer. Math. Soc», 1977, v. 12, № 192. *М. Ш. Фарбер.*

УЗЛОВ ТАБЛИЦА — перечень диаграмм всех простых узлов, допускающих проекции на плоскость с девятью и меньшим числом двойных точек. Обозначения узлов, приведенных в этой таблице, стандартны: первая цифра указывает число двойных точек, а вторая (расположенная в индексе) — порядковый номер узла. Напр., узел 7_5 — это пятый узел таблицы, имеющий 7 пересечений. Рядом с каждым узлом в закодированном виде указан его многочлен Александера $\Delta(t)=a_{2n}t^{2n}+\ldots+a_nt^n+\ldots+a_0$. Поскольку многочлен Александера всякого узла имеет четную степень и является возвратным (т. е. $a_i=a_{2n-i}$), то для его задания достаточно указать набор последних коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$; именно они и приведены в таблице. Напр., рядом с узлом 8_9 указано 7—5+3—1. Это означает, что его многочлен Александера равен $\Delta(t)=-t^6+3t^5-5t^4+7t^3-5t^2+3t-1$. Неальтернирующие узлы помечены звездочкой. Приводимая таблица (см. колонку 485) перепечатана из [1] с небольшими модификациями.

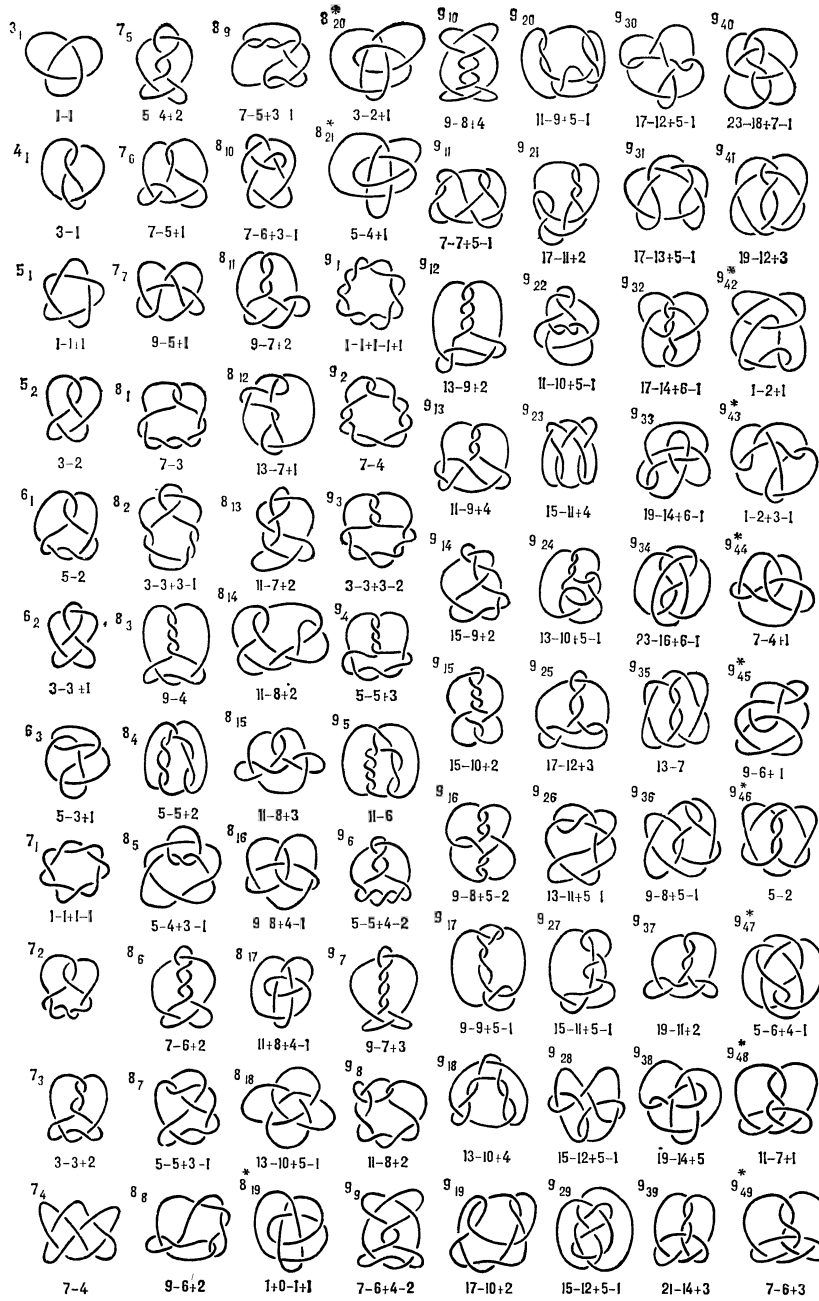
Лит. [1] Burde G., в кн. Jahrbuch Überblicke Mathematik, Mannheim, 1978, S. 131—47. *М. Ш. Фарбер.*

УЗЛОВ ТЕОРИЯ — изучение вложений одномерных многообразий в трехмерное евклидово пространство или в сферу S^3. В более широком смысле предметом У. т. являются вложения сфер в многообразия (см. *Многомерный узел*) и вообще вложения многообразий.

Основные понятия У. т. Вложение (чаще — его образ) несвязной суммы μ экземпляров окружности в $\mathbb{R}^3$ или S^3 наз. зацеплением кратности μ. Зацепление кратности $\mu=1$ наз. узлом. Узлы, составляющие данное зацепление, наз. его компонентами. Объемлемо-изотопич. классы зацеплений (см. *Изотопия*) наз. типами зацеплений. Зацепления одного типа наз. эквивалентными. Тип зацепления «0, 0, . . ., 0»; лежащего в плоскости в $\mathbb{R}^3$, наз. тривиальным. Несколько простейших узлов имеют специальные названия; напр., узел 3_1 (см. *Узлов таблица*) наз. трилистником, а узел 4_1 — восьмеркой или *Листинга узлом*. Зацепление, состоящее из нек-рых компонент зацепления L, наз. его частичным зацеплением. Говорят, что зацепление распадается (или расщепляется), если два его частичных зацепления разделены в S^3 двумерной сферой. Зацепление наз. брунновым, если распадается каждое его частичное зацепление, кроме него самого.

Наиболее изучены кусочно линейные зацепления. Рассмотрение гладких или локально плоских топологич. вложений в $\mathbb{R}^3$ приводит к теории, по существу, совпадающей с кусочно линейной.

Обычно зацепления задаются посредством диаграмм (см. *Узлов и зацеплений диаграммы*). Если в косе (см. *Кос теория*) из $2n$ нитей соединить вверху и внизу по n пар соседних концов отрезками, то получится зацепление, называемое $2n$-сплетением. Другой способ конструирования зацеплений из кос состоит в замыкании кос. Если между двумя параллельными плоскостями Π_1 и Π_2 в $\mathbb{R}^3$ взять $2m$ ортогональных им отрезков и соединить их концы попарно m дугами в Π_1 и m дугами в Π_2 без пересечений, то сумма всех дуг и отрезков даст зацепление. Зацепление, допускающее



такое представление, наз. зацеплением с m мостами. Всякое зацепление можно расположить на стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3$ замкнутой поверхности; если зацепление можно расположить на незаузленном торе или кренделе, то оно наз. соответственно торическим, или крендельным (см. *Торический узел*). Зацепление, лежащее на границе трубчатой окрестности узла k, наз. обмоткой узла k. Зацепление, к-рое можно получить многократным взятием обмоток, начиная с тривиального узла, наз. трубчатым, или сложным кабельтовым. Такие зацепления встречаются при изучении сингулярностей алгебраич. кривых; они могут задаваться аналитически как линки изолированных особенностей многочленов от двух переменных [2].

Поверхностью Зейферта ориентированного зацепления L наз. компактная ориентированная поверхность $F \subset S^3$ с $\partial F = L$, причем требуется, чтобы ориентация L индуцировалась из ориентации F. Родом ориентированного зацепления L наз. минимальный род поверхности Зейферта для L. Вообще говоря, род зависит от ориентации компонент. Известен алгоритм построения поверхности Зейферта по диаграмме; в нек-рых случаях (напр., для *альтернирующих узлов и зацеплений*) он сразу приводит к поверхности минимального рода. Тривиальный узел (но не зацепление) характеризуется тем, что его род равен нулю.

Во множестве типов узлов K имеется операция связной суммы (состоящая, грубо говоря, в завязывании одного узла после другого), к-рая наделяет K структурой абелевой полугруппы с нулем. Род определяет эпиморфизм K на аддитивную полугруппу целых неотрицательных чисел. Отсюда вытекает, что нетривиальный узел не может иметь противоположного узла относительно связной суммы и что каждый узел есть сумма простых (т. е. неразложимых) узлов. Известно, что это разложение единственно. Таким образом, K изоморфна мультипликативной полугруппе натуральных чисел.

Регулярная окрестность зацепления $L = k_1 \cup \ldots \cup k_\mu \subset \mathbb{R}^3$ кратности μ состоит из μ полных торов N_i. Пространство $M(L) = \mathbb{R}^3 - \bigcup \operatorname{int} N_i$ наз. (дополнительным) пространством, или внешностью, зацепления L. Простые замкнутые кривые l_i на $F_i = \partial N_i$, коэффициенты зацепления к-рых с k_i равны нулю, все изотопны между собой и наз. параллелями i-й компоненты. Простые замкнутые кривые m_i на F_i, гомологичные нулю в N_i, но не на F_i, также все изотопны между собой и наз. меридианами i-й компоненты. Пространство зацепления $M(L)$ вместе с меридианами $m_1, \ldots, m_\mu \subset \partial M(L)$ определяет тип L. Это — главные геометрич. инварианты зацеплений. Предполагается, что для узлов топологич. тип внешности $M(k)$ определяет тип k. Это доказано для всех непростых узлов, для торич. узлов, для большинства обмоток и для многих других классов узлов (см. [10]). Однако имеются неэквивалентные зацепления с гомеоморфными дополнительными пространствами [1].

Помимо отношения объемлемой изотопии, У. т. изучает и другие, более грубые отношения эквивалентности между зацеплениями. Два зацепления (имеющие одинаковое число компонент) наз. изотопными (не объемлемо), если они изотопны как вложения. Зацепления, показанные на рис. 1, изотопны, но не объемлемо изотопны. Таким образом, изотопия зацеплений пренебрегает «маленькими» узлами, и потому ее изучение можно рассматривать как теорию зацеплений по модулю теории узлов. Это

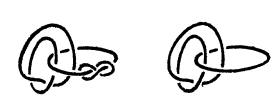


Рис. 1.

высказывание обретает точную формулировку в следующей теореме Рольфсена [12]: два изотопных зацепления объемлемо изотопны, если их соответствующие компоненты эквивалентны (как ориентированные узлы). В силу этого изучение изотопии зацеплений редуцируется к объемлемой изотопии.

Другим отношением эквивалентности, изучаемым в У. т., является конкордантность, или кобордизм. Локально плоские вложения i_0 и i_1 многообразия X в многообразие Y наз. конкордантными, если существует такое локально плоское вложение

$$i\colon X\times[0,\ 1]\longrightarrow Y\times[0,\ 1],$$

что $i(x,\ 0)=(i_0(x),\ 0)$, $i(x,\ 1)=(i_1(x),\ 1)$ для всех $x\in X$. Если X есть несвязная сумма нескольких экземпляров окружности, а Y есть $\mathbb{R}^3$ или S^3, то получается определение конкордантности зацеплений. Связная сумма вносит во множество классов конкордантных узлов структуру абелевой группы. Нуль этой группы есть класс, содержащий тривиальный узел. Узлы, конкордантные тривиальному, наз. срезанными. Противоположным к классу узла k является класс узла, получаемого так: нужно сменить ориентацию узла k и взять его образ при отражении от любой плоскости. О строении группы классов конкордантных узлов см. *Узлов кобордизм*. Для того чтобы построить срезанный узел, проще всего взять тривиальное двухкомпонентное зацепление, приклеить к любой из компонент ленточку, как-либо заузлить ее и пропустить через исходное зацепление, а затем приклеить ко второй компоненте. После этого нужно удалить все внутренние точки ленты, а также ее граничные точки, по к-рым производилось приклеивание. В результате получится срезанный узел (см., напр., рис. 2). Обобщение этого построения приводит к понятию ленточного зацепления [1]. Имеется гипотеза, что всякий срезанный узел является ленточным. Из изотопности зацеплений не следует их конкордантность (действительно, всякий узел изотопен тривиальному, но не всякий является срезанным). Однако изотопные зацепления конкордантны, если все их соответствующие компоненты попарно конкордантны [12].

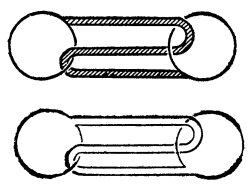


Рис. 2.

Изучаются и другие отношения эквивалентности между зацеплениями, напр. гомотопия и I-эквивалентность (см. [8]).

Аппарат У. т. *Фундаментальная группа* $G(L)$ дополнительного пространства $M(L)$ наз. группой зацепления L. Это — важнейший алгебраич. инвариант зацепления. В случае узлов и нераспадающихся зацеплений внешность $M(L)$ асферична и потому ее *гомотопический тип* определяется группой $G(L)$. Зацепление тривиально тогда и только тогда, когда его группа свободна [8]. Торич. узлы эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют изоморфные группы. Однако утверждение о том, что группа определяет тип зацепления, неверно даже для узлов [1]. Имеется несколько алгоритмов выписывания копредставления группы зацепления по его диаграмме. Наиболее широко известно копредставление Виртингера. О свойствах групп зацеплений см. *Узлов и зацеплений группы*.

Более сильным инвариантом зацеплений является групповая система $\langle G(L);\ T_1,\ldots,\ T_\mu\rangle$, к-рая состоит из группы зацепления $G(L)$ и классов сопряженности ее подгрупп T_i, порожденных классами меридиана и параллели i-й компоненты. Групповая система узла определяет топологич. тип его дополнения. Полным алгебраич. инвариантом узла является тройка $(G,\ T,\ m)$, состоящая из группы узла G, периферич. подгруппы $T\subset G$ и меридиана $m\in T$: два узла эквивалентны тогда и только тогда, когда имеется изоморфизм между их группами, сохраняющий периферич. подгруппы и переводящий меридиан одного узла в меридиан другого или в его обратный. Известны и классифицирующие инварианты узлов, представляющие собой группы. Один такой инвариант (см. [11]) сопоставляет узлу k свободное произведение групп нек-рых обмоток связной суммы узла k и узла Листинга 4_1. В этом определении вместо узла 4_1 можно взять и нек-рые другие узлы, и при этом получающаяся группа, хотя и изменится, но будет по-прежнему полным инвариантом.

Найден (см. [5]) более естественный полный алгебраич. инвариант узла. Пусть узел k задан своей регулярной проекцией на плоскость, и все переходы занумерованы числами от 1 до n. Пусть, далее, в нек-рой двойной точке сходятся переходы с номерами p, q, r, расположенные, как на рис. 3, и $\Gamma(k)$ — дистрибутивный группоид, заданный образующими $a_1,\ldots,\ a_n$ (их число равно числу переходов), связанными соотношениями $a_p\circ a_q=a_r$ (по одному для каждой двойной точки). Доказано (см. [5]), что, во-первых, группоид $\Gamma(k)$ является инвариантом узла, т. е. не зависит от выбора проекции, и, во-вторых, узлы с изоморфными группоидами эквивалентны.

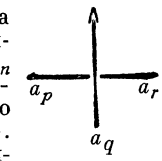


Рис. 3.

Группа узла, групповая система, группоид — достаточно сложные алгебраич. объекты, и их различение часто оказывается непростым делом. В вычислениях удобны абелевы инварианты узлов и зацеплений, к-рые устроены проще (напр., они описываются средствами коммутативной алгебры) и в то же время достаточно информативны. Важнейший из абелевых инвариантов — модуль Александера, определяется так. *Гомологий группа* внешности $H_1(M(L))$ зацепления кратности μ есть свободная абелева группа ранга μ (это — следствие *Александера двойственности*), и потому накрытие $p:\tilde M(L)\to M(L)$, отвечающее коммутанту группы $G(L)$, имеет $\mathbb{Z}^\mu$ в качестве группы накрывающих преобразований. Если $x_0\in M(L)$ — базисная точка, а $\tilde X_0=p^{-1}(x_0)$, то группа $H_1(\tilde M(L),\ \tilde X_0)$ имеет естественную структуру модуля над $\Lambda_\mu=\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^\mu]$ (кольцом целочисленных лорановских полиномов от μ переменных), к-рый и наз. модулем Александера зацепления L. В случае $\mu=1$ модуль $H_1(\tilde M(L),\ \tilde X_0)$ изоморфен прямой сумме $H_1(\tilde M(L))$ и Λ_1; поэтому при изучении узлов модулем Александера принято называть Λ_1-модуль $H_1(\tilde M(L))$. Матрица, задающая копредставление модуля Александера, наз. матрицей Александера. Для нахождения матрицы Александера по копредставлению группы $G(L)$ используется свободное дифференциальное исчисление Фокса [1]. Модуль Александера стандартным образом (см. *Александера инварианты*) задает возрастающую цепочку идеалов кольца Λ_μ (к-рые наз. элементарными идеалами) и последовательность целочисленных многочленов $\Delta_1(t_1,\ \ldots,\ t_\mu)$, $\Delta_2(t_1,\ \ldots,\ t_\mu)$, $\ldots$, определенных с точностью до единиц кольца Λ_μ. Первый многочлен $\Delta_1(t_1,\ \ldots,\ t_\mu)$ наз. многочленом Александера. Модуль Александера определяет также класс идеалов Штейница — Фокса — Смита [8]. С его помощью удается, напр., доказать необратимость нек-рых узлов (узел $k\subset S^3$ наз. обратимым, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм S^3 на себя, переводящий k в k с обраще-

нием ориентации). Обратимость узла влечет следующее свойство его модуля Александера: существует групповой автоморфизм $f: H_1(\tilde{M}(k)) \to H_1(\tilde{M}(k))$ с $f(ta)=t^{-1}f(a)$ для любого $a \in H_1(\tilde{M}(k))$.

Многочлены зацеплений обладают следующим свойством взаимности: для всякого $i \geqslant 1$ главные идеалы кольца Λ_μ, порожденные $\Delta_i(t_1, \ldots, t_\mu)$ и $\Delta_i(t_1^{-1}, \ldots, t_\mu^{-1})$, совпадают. Этот факт — проявление особого рода двойственности в гомологиях универсального абелева накрывающего внешности зацеплений. Двойственность не только накладывает ограничения на модуль Александера, но и задает на нем дополнительную мультипликативную структуру. Напр., в случае узлов имеется инвариантно определенная невырожденная эрмитова форма

$$H_1(\tilde{M}(L)) \times H_1(\tilde{M}(L)) \longrightarrow Q(\Lambda)/\Lambda,$$

к-рая наз. формой Бланчфилда. Здесь $\Lambda=\Lambda_1$, а $Q(\Lambda)$ обозначает поле частных Λ. Определение и свойства аналогов этой формы для зацеплений см. [8]. С формой Бланчфилда тесно связана форма Милнора, принимающая значения в $\mathbb{Q}$ (см. [6]). *Зейферта матрица*, отвечающая любой поверхности Зейферта узла, определяет модуль Александера и формы Бланчфилда и Милнора на нем [13]. Если k_1 и k_2 — два узла, то следующие условия эквивалентны: (1) узлы k_1 и k_2 имеют изоморфные формы Бланчфилда; (2) узлы k_1 и k_2 имеют изоморфные формы Милнора; (3) матрицы Зейферта узлов k_1 и k_2 S-эквивалентны (см. [6]).

Всякий эпиморфизм φ группы зацепления $G(L)$ на произвольную группу H определяет регулярное *накрытие* внешности $M(L)$ с группой накрывающих преобразований H. Если H — конечная группа, то, подклеивая соответствующим образом полнотория к границе накрывающего, получают многообразие $\Sigma_\varphi(L)$ и отображение $\Sigma_\varphi(L) \to S^3$, являющееся разветвленным накрытием с ветвлением над L. На $\Sigma_\varphi(L)$ действует группа H. Поэтому $B_\varphi = H_1(\Sigma_\varphi(L))$ является $\mathbb{Z}[H]$-модулем. Кроме того, поскольку $\Sigma_\varphi(L)$ — замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие, определена форма коэффициентов зацепления

$$\{,\}: \operatorname{Tors}_{\mathbb{Z}} B_\varphi \times \operatorname{Tors}_{\mathbb{Z}} B_\varphi \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Итак, каждому представлению $\varphi: G(L) \to H$ на конечную группу H отвечает $\mathbb{Z}[H]$-модуль B_φ и спаривание $\{,\}$.

Наиболее изучены представления групп зацеплений в циклич. и метациклич. группы. Группа ориентированного зацепления допускает канонич. представление на циклич. группу $\mathbb{Z}_n$ (классу петли α сопоставляется вычет по модулю n коэффициента зацепления α с L). Отвечающее этому представлению разветвленное накрытие $\Sigma_\varphi(L) \to S^3$ наз. n-листным циклическим разветвленным накрытием зацепления L. Соответствующие ему инварианты $(B_\varphi, \{,\})$ часто используются для различения узлов. Они выражаются через матрицу Зейферта, а значит, и через модуль Александера со спариванием Бланчфилда.

Рис. 4.

Очень эффективным инвариантом узлов и зацеплений является многочлен Конвея. Он вычисляется гораздо проще многочлена Александера (не требуется находить матрицу Александера, подсчитывать определители и т. п.). К тому же можно вычислять многочлен Конвея, не зная его определения, пользуясь следующими тремя его свойствами: (1) многочлен Конвея $\nabla_L(z)$ является инвариантом объемлемо изотопич. типа ориентированного зацепления L; (2) если L — тривиальный узел, то $\nabla_L(z)=1$; (3) если три зацепления L_+, L_- и L_0 имеют диаграммы, совпадающие всюду за исключением участков, изображенных на рис. 4, то

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z).$$

Из этих свойств следует, напр., что многочлен Конвея распадающегося зацепления равен нулю. Благодаря свойству (3) можно следить за изменением многочлена Конвея при варьировании диаграммы в отдельных двойных точках; ясно, что после конечного числа таких модификаций зацепление становится тривиальным и в этот момент вычисления завершаются. Теория, облегчающая нахождение многочлена Конвея, развита в [14]. Для узлов многочлены Конвея и Александера однозначно определяют друг друга. Напр., если известен многочлен Конвея, то многочлен Александера $\Delta(t)$ определяется из равенства $\Delta(t^2)=t^{2n}\nabla_L(t-t^{-1})$.

Классификация узлов и зацеплений. Выше уже упоминались полные алгебраич. инварианты узлов, благодаря к-рым задача различения узлов может быть редуцирована к алгебре. Алгоритм для вычисления рода узла построен Хакеном, но он не применим практически. Для нек-рых классов, напр. для альтернирующих узлов и зацеплений, имеются простые алгоритмы (см. также *Нейвирта узел*).

Перечислены все узлы, имеющие диаграммы с не более чем 11 двойными точками; перечислены также все зацепления, имеющие менее 11 пересечений (см. [17]). Однако не доказано, что среди узлов этого списка, имеющих 11 пересечений, нет повторений. Таблица простых узлов с девятью и меньшим числом пересечений приведена в ст. *Узлов таблица*.

Полностью классифицированы торич. узлы, а также узлы с двумя мостами (см. [16]).

В связи с развитием топологии многообразий стали исследоваться многомерные узлы и зацепления; многомерная У. т. развита во многих отношениях лучше, чем классическая. Так, полностью решена задача классификации многомерных узлов относительно кобордизма (см. *Узлов кобордизм*), получено описание объемлемо изотопич. классов многомерных узлов в стабильно-гомотопич. терминах [15], отдельные наиболее важные виды многомерных узлов описаны в терминах их алгебраич. инвариантов [6]. Кроме того, найдены гомологич. инварианты многомерных узлов, определяющие их тип с точностью до конечного числа возможностей.

Приложения У. т. Значение У. т. для изучения трехмерных многообразий определяется, прежде всего, тем, что всякое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие можно представить в виде накрывающего сферы S^3, разветвленного над нек-рым зацеплением (теорема Александера). Более того (см. [16]), всякое ориентируемое связное трехмерное многообразие рода 1 (т. е. *линзовое пространство*) гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему нек-рого зацепления с двумя мостами, и зацепления с двумя мостами эквивалентны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их двулистные разветвленные накрывающие. Этот факт полезен как для описания трехмерных многообразий, так и для классификации узлов.

Всякое ориентируемое связное трехмерное многообразие рода 2 гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему нек-рого зацепления с тремя мостами; построен (см. [4]) пример неэквивалентных узлов с тремя мостами, имеющих гомеоморфные двулистные разветвленные накрывающие.

Другим важным средством, доставляемым У. т. для изучения трехмерных многообразий, является исчисление оснащенных зацеплений Кёрби [3]. Оснащенным зацеплением наз. конечная совокупность L непересекающихся гладко

вложенных окружностей $l_1, \ldots, l_\mu \subset S^3$ (заузленных или нет), каждой из к-рых приписано нек-рое число n_i. Оснащенное зацепление L определяет четырехмерное многообразие M_L, получаемое приклеиванием к четырехмерному шару ручек индекса два, причем приклеивающее отображение $f_i : S^1 \times D^2 \to S^3$ i-й ручки обладает свойствами: (1) $f_i(S^1 \times 0) = l_i$ и (2) для любого $x \in D^2 \setminus 0$ коэффициент зацепления кривой $f_i(S^1 \times \{x\})$ с l_i равен n_i. Край $W_L = \partial M_L$ — замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие. Оказывается, что, во-первых, всякое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие гомеоморфно W_L для нек-рого оснащенного зацепления L и, во-вторых, W_{L_1} и W_{L_2} гомеоморфны тогда и только тогда, когда оснащенное зацепление L_1 может быть получено из L_2 описанными ниже преобразованиями $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ или обратными к ним. Преобразование $\mathcal{O}_1$ заключается в добавлении к оснащенному зацеплению незаузленной окружности, отделенной от остальных компонент вложенной двумерной сферой и оснащенной $+1$ или -1. Преобразование $\mathcal{O}_2$ осуществляет «сложение» двух компонент l_i и l_j следующим образом. Пусть $\tilde{l}_i$ — кривая на границе малой трубчатой окрестности l_i в S^3, изотопная l_i в этой трубчатой окрестности и имеющая коэффициент зацепления n_i с l_i. Заменив компоненту l_j окружностью $l_j' = l_j \#_b \tilde{l}_i$, где b — нек-рая лента, соединяющая l_j с $\tilde{l}_i$, не задевая остальных частей зацепления L, получают новое оснащенное зацепление L', если новой компоненте l_j' приписать число $n_j' = n_i + n_j \pm 2a_{ij}$. Здесь a_{ij} — коэффициент зацепления компонент l_i и l_j (каких-либо ориентированных), а знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости от того, согласована ли с только что зафиксированными ориентациями лента b. Напр., для оснащенных зацеплений, изображенных на рис. 5, многообразие W_L есть соответственно линзовое пространство $L(n, 1)$ в случае $а$), линзовое пространство $L(pq-1, p) = L(pq-1, q)$ в случае $б$), пространство додекаэдра в случаях $в$) и $г$).

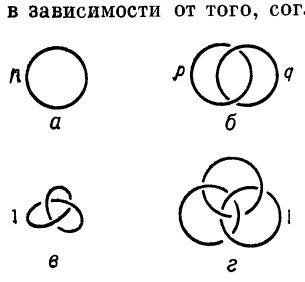


Рис. 5.

Помимо этих и многих других применений У. т. в топологии, ее приложения включают также изучение особенностей плоских алгебраич. кривых, а в многомерной ситуации — изолированных особенностей комплексных гиперповерхностей [2], гладкие структуры на сферах, конструирование динамич. систем и слоений. Имеются попытки применить У. т. в символической динамике [18] и математической теории турбулентности [19].

Историческая справка. По-видимому, К. Гаусс (C. Gauss) был первым, кто рассматривал узел как математич. объект. Он считал, что анализ явлений заузливания и зацепливания является одной из основных задач «geometris situs». Сам К. Гаусс мало написал об узлах и зацеплениях (см. *Зацепления коэффициент*), однако его ученик И. Листинг (J. Listing) посвятил узлам значительную часть своей монографии [7].

К концу 19 в. усилиями П. Тэйта (P. Tait) и К. Литла (C. Little) были составлены таблицы простых узлов, имеющих не более 10 пересечений, и таблицы альтернирующих простых узлов, имеющих не более 11 пересечений. Проблема табулирования узлов имеет два аспекта: во-первых, нужно убедиться в полноте представленного списка, а во-вторых, доказать, что все перечисленные узлы действительно различны. В то время как для решения первого вопроса необходимы лишь комбинаторные рассуждения (хотя и довольно громоздкие), для ответа на второй вопрос нужны инварианты алгебраич. топологии. Таких инвариантов не было в 19 в., и поэтому неэквивалентность приведенных в таблице узлов обосновывалась эмпирически. Последующий анализ выявил нек-рые ошибки в таблицах 19 в.

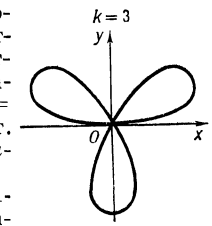
В 1906 Г. Титце (H. Tietze) впервые применил фундаментальную группу для доказательства нетривиальности узла. В 1927 Дж. Александер (J. Alexander) и Л. Бригс (L. Briggs), используя коэффициенты кручения гомологий двулистных и трехлистных разветвленных циклич. накрывающих, различили все табулированные узлы с 8 пересечениями и все узлы, за исключением 3 пар, с 9 пересечениями. В 1928 появился многочлен Александера, но и с его помощью не удалось убедиться в различности всех 84 узлов, имеющих не более 9 пересечений. Этот последний шаг сделал К. Рейдемейстер (K. Reidemeister), рассмотревший коэффициенты зацепления в диэдральных разветвленных накрывающих.

Представление о современном состоянии проблем У. т. дает список проблем [10]; там же можно найти комментарии и литературные ссылки. Подробная библиография по У. т. имеется в [1], [8], [9].

Лит · [1] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [2] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [3] Мандельбаум Р., Четырехмерная топология, пер. с англ., М., 1981; [4] Вирро О. Я., «Матем. сб.», 1972, т. 87, с. 216—28, [5] Матвеев С. В., там же, 1982, т. 119, с. 78—88; [6] Фарбер М. Ш., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 5, с. 59—106, [7] Listing J. B., Vorstudien zur Topologie, Gött., 1848; [8] Hillman J. A., Alexander ideals of links, B.— Hdlb.— N. Y., 1981; [9] Gordon C. McA., «Lect. Notes Math.», 1978, v. 685, p. 1—60; [10] Kirby R. C., «Proc. Symp. Pure Math.», 1978, v. 32, p. 273—312; [11] Simon J., «Ann. Math.», 1973, v. 97, p. 1—13; [12] Rolfsen D., «J. Indian Math. Soc.», 1972, v. 36, p. 263—78; [13] Levine J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 229, p. 1—50; [14] Giller C. A., там же, 1982, v. 270, p. 75—109; [15] Farber M. S., там же, 1980, v. 261, p. 185—209; [16] Schubert H., «Math. Z.», 1956, Bd 65, S. 133—70; [17] Conway J. H., в кн.: Computational problems in abstract algebra, Oxf.— N. Y., 1970, p. 329—58, [18] Franks J. M., «Ann. Math.», 1981, v. 113, p. 529—52; [19] Birman J. S., Williams R. F., «Topology», 1983, v. 22, p. 47—82.

М. Ш. Фарбер, А. В. Чернавский.

УЗЛОВАЯ ТОЧКА — точка самопересечения кривой. При параметрич. задании кривой У. т. соответствует двум или более значениям параметра. Например, у кривой $\rho = a \sin 3\varphi$ У. т.— начало координат.



УИТНИ КЛАСС — см. *Штифеля — Уитни класс.*

УИТТЕКЕРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x) = \int_0^\infty (2xt)^{-1/4} W_{\lambda, \mu}(2xt) f(t)\, dt,$$

где $W_{\lambda, \mu}(z)$ — функция Уиттекера. При $\lambda = 1/4$ и $\mu = \pm 1/4$ У. п. переходит в *Лапласа преобразование*.

Лит. [1] Meijer C. S., «Proc. Koninkl. ned. akad. wet.», 1941, v. 44, p. 727—37.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

УИТТЕКЕРА УРАВНЕНИЕ — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$w'' + \left(\frac{1/4 - \mu^2}{z^2} + \frac{\lambda}{z} - \frac{1}{4}\right) w = 0, \qquad (*)$$

где переменные z, w и параметры λ, μ могут принимать любые комплексные значения. Уравнение (*) представляет собой приведенную форму *вырожденного гипергеометрического уравнения* и впервые исследовано Э. Уиттекером [1]. При $\lambda = 0$ У. у. эквивалентно *Бесселя уравнению*. Если 2μ не является целым числом, то

фундаментальную систему решений У. у. составляют функции $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $M_{\lambda,-\mu}(z)$; здесь $M_{\lambda,\mu}(z)$ — *Уиттекера функция*. При произвольных значениях параметров общее решение У. у. записывается также в виде линейной комбинации

$$w=C_1W_{\lambda,\mu}(z)+C_2W_{-\lambda,\mu}(-z),$$

где $W_{\lambda,\mu}(z)$ — функция Уиттекера.

Лит.: [1] Whittaker E. T., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1903, v. 10, p. 125—34; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. 2, пер. с англ., 2 изд., М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [4] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [5] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976. *Н. Х. Розов.*

УИТТЕКЕРА ФУНКЦИИ — функции $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $W_{\lambda,\mu}(z)$, к-рые являются решениями дифференциального *Уиттекера уравнения*

$$w''+\left(\frac{1/4-\mu^2}{z^2}+\frac{\lambda}{z}-\frac{1}{4}\right)w=0. \qquad (*)$$

Функция $W_{\lambda,\mu}$ вводится равенством

$$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2-\lambda-\mu)}M_{\lambda,\mu}(z)+\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2-\lambda+\mu)}M_{\lambda,-\mu}(z).$$

Пары функций $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $M_{\lambda,-\mu}(z)$, $W_{\lambda,\mu}(z)$ и $W_{-\lambda,\mu}(-z)$ — линейно независимые решения уравнения (*). Точка $z=0$ — точка ветвления для $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $W_{\lambda,\mu}(z)$, $z=\infty$ — существенно особая точка.

Связь с другими функциями:

с *вырожденной гипергеометрической функцией*:

$$M_{\lambda,\mu}(z)=z^{\mu+1/2}e_1^{-z/2}F_1(\mu-\lambda+1/2;\ 2\mu+1;\ z),$$

с модифицированной *Бесселя функцией* и *Макдональда функцией*:

$$M_{0,\mu}(z)=2^{2\mu}\Gamma(\mu+1)\sqrt{z}\,I_\mu\left(\frac{z}{2}\right),$$

$$W_{0,\mu}(z)=\sqrt{\frac{z}{\pi}}\,K_\mu\left(\frac{z}{2}\right),$$

с *интегралом вероятности*:

$$W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(z)=\sqrt{\pi}\,z^{1/4}e^{z/2}\operatorname{erfc}(\sqrt{z}),$$

с *Лагерра многочленами*:

$$W_{n+\mu+1/2,\mu}(z)=(-1)^n z^{\mu+1/2}e^{-z/2}L_n^{2\mu}(z).$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., [2 изд.], т. 2, М., 1974; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963.
Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

УИШАРТА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — совместное распределение элементов выборочной ковариационной матрицы для многомерного нормального распределения. Пусть результаты наблюдений имеют p-мерное нормальное распределение $N(\mu, \Sigma)$ с вектором средних μ и ковариационной матрицей Σ. Тогда плотность распределения матрицы $A=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})'$ определяется формулой

$$w(n,\Sigma)=\frac{|A|^{(n-p)/2}e^{-\frac{1}{2}\operatorname{sp}A\Sigma^{-1}}}{2^{(n-1)p/2}\pi^{p(p-1)/4}|\Sigma|^{(n-1)/2}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)}$$

($\operatorname{sp}A$ — след матрицы A), если матрица A положительно определена, и $w(n, \Sigma)=0$ в остальных случаях. Распределением Уишарта с n степенями свободы и матрицей Σ наз. $\frac{p(n+1)}{2}$-мерное распределение $W(n, \Sigma)$ с плотностью $w(n, \Sigma)$. Выборочная ковариационная матрица $S=\frac{1}{n-1}A$, являющаяся оценкой матрицы Σ, имеет У. р.

У. р. является основным распределением в многомерном статистич. анализе; оно является в определенном смысле p-мерным обобщением одномерного «хи-квадрат» распределения.

Если независимые случайные векторы X и Y имеют У. р. $W(n_1, \Sigma)$ и $W(n_2, \Sigma)$ соответственно, то вектор $X+Y$ имеет У. р. $W(n_1+n_2, \Sigma)$.

Впервые У. р. было введено Дж. Уишартом [1].

Лит.: [1] Wishart J., «Biometrika», 1928, v. 20 A, p. 32—52; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963. *А. В. Прохоров.*

УКЛОНЕНИЕ приближающей функции — расстояние $\rho(g, f)$ между приближающей функцией $g(x)\in K$ и заданной функцией $f(x)\in\mathfrak{M}$. В одном и том же классе $\mathfrak{M}$ могут рассматриваться различные метрики ρ, напр. равномерная метрика

$$\rho(g, f)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)-f(x)|,$$

интегральные метрики

$$\rho(g, f)=\left(\int_a^b|g(x)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad p\geqslant 1,$$

и др. В качестве класса K приближающих функций рассматриваются алгебраич. многочлены, тригонометрич. полиномы, а также множества частичных сумм ортогональных разложений функции $f(x)$ по ортонормированным системам, линейные средние этих частичных сумм и целый ряд др. множеств.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947; [2] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949, [3] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [4] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [5] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.
А. В. Ефимов.

УЛЬТРАБОРНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — *локально выпуклое пространство*, являющееся индуктивным пределом банаховых пространств. В частности, У. п. является локально выпуклым пространством, для к-рого выполнены следующие условия: а) любое ограниченное замкнутое множество является окрестностью нуля; б) каждое его ограниченное замкнутое подмножество полно. При отказе от условия б) получается т. н. борнологическое пространство (иногда оно наз. пространством Макки). Всякое борнологич. пространство является пределом нормированных пространств.

Лит.: [1] Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967.
В. И. Ломоносов.

УЛЬТРАБОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое векторное пространство E с топологией t, для к-рой любая топология t', обладающая базой окрестностей нуля из t-замкнутых множеств, слабее топологии t. Всякое топологич. векторное пространство, не являющееся множеством первой категории, ультрабочечно. Из ультрабочечности локально выпуклого пространства следует, что оно бочечно, однако бочечное пространство может и не быть ультрабочечным.

Лит. [1] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [2] Robertson W., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1958, v. 8, № 30, p. 242—57. *В. И. Ломоносов.*

УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены Гегенбауэра,— многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $h(x)=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$; частный случай *Якоби многочленов* при $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}\left(\lambda>-\frac{1}{2}\right)$; *Лежандра многочлены* $P_n(x)$ — частный случай У. м.: $P_n(x)=P_n\left(x,\frac{1}{2}\right)$.

Для У. м. принята стандартизация

$$P_n(x,\ \lambda)\equiv C_n^{(\lambda)}(x)=$$
$$=\frac{(-2)^n}{n!}\cdot\frac{\Gamma(n+\lambda)\,\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2n+2\lambda)}(1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\times$$
$$\times\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]$$

и имеет место представление

$$C_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{\Gamma(n-k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

У. м. являются коэффициентами разложения в степенной ряд производящей функции

$$\frac{1}{(1-2xw+w^2)^{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(\lambda)}(x)\,w^n.$$

У. м. $C_n^{(\lambda)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y''-(2\lambda+1)\,xy'+n\,(n+2\lambda)\,y=0.$$

Наиболее употребительны формулы

$$(n+1)\,C_{n+1}^{(\lambda)}(x)=2\,(n+\lambda)\,xC_n^{(\lambda)}(x)-(n+2\lambda-1)\,C_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$
$$C_n^{(\lambda)}(-x)=(-1)^n\,C_n^{(\lambda)}(x),$$
$$\frac{d}{dx}\left[C_n^{(\lambda)}(x)\right]=2\lambda C_{n-1}^{(\lambda+1)}(x),$$
$$C_n^{(\lambda)}(\pm 1)=(\pm 1)^n\frac{2\lambda\,(2\lambda+1)\ldots(2\lambda+n-1)}{n!}=$$
$$=(\pm 1)^n\binom{n+2\lambda-1}{n}.$$

Лит. см. при ст. *Ортогональные многочлены.*

П. К. Суетин.

УЛЬТРАФИЛЬТР — *фильтр*, являющийся максимальным в том смысле, что всякий содержащий его фильтр совпадает с ним.

У. можно определить как систему подмножеств, удовлетворяющую трем условиям: 1) пустое множество ей не принадлежит; 2) пересечение двух принадлежащих ей подмножеств также ей принадлежит; 3) для любого подмножества либо оно само, либо его дополнение принадлежит этой системе.

Все У. делятся на два класса: тривиальные (или фиксированные) и свободные. У. наз. т р и в и а л ь н ы м, если он представляет собой систему всех подмножеств, содержащих нек-рую точку, такой У. наз. также фиксированным на этой точке. У. наз. с в о б о д н ы м, если пересечение всех его элементов есть пустое множество, другими словами, если он не фиксирован ни на какой точке. Существование свободных У. недоказуемо без *Выбора аксиомы*.

Для каждого фильтра имеется содержащий его У., более того, каждый фильтр есть в точности пересечение всех содержащих его У.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [2] К у р а т о в с к и й К., М о с т о в с к и й А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970.

В. И. Малыхин.

УМНОЖЕНИЕ ч и с е л — одна из основных арифметич. операций. У. заключается в сопоставлении двум числам a и b (называемым с о м н о ж и т е л я м и) третьего числа c (называемого п р о и з в е д е н и е м). У. обозначается знаком $\times$ или $\cdot$; в буквенном обозначении эти знаки, как правило, опускаются.

У. целых положительных чисел определяется следующим образом через сложение: произведением чисел a и b считается число c, равное сумме b слагаемых, каждое из к-рых равно a, так что

$$ab=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ раз}}.$$

Число a при этом наз. м н о ж и м ы м, b — м н о ж и т е л е м. У. положительных рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ определяется равенством

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$$

(см. *Дробь*). Произведение двух отрицательных сомножителей положительно, а положительного и отрицательного — отрицательно, причем модуль произведения в том и другом случае равен произведению модулей сомножителей. Произведение иррациональных чисел определяется как предел произведений их рациональных приближений. У. комплексных чисел $\alpha=a+bi$ и $\beta=c+di$ задается формулой

$$\alpha\beta=(a+bi)\,(c+di)=ac-bd+(ad+bc)\,i$$

или, в тригонометрич. форме, ($\alpha=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $\beta=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$)

$$\alpha\beta=r_1r_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

У. чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно слева и справа относительно сложения (см. *Коммутативность*, *Ассоциативность*, *Дистрибутивность*). При этом $a\cdot 0=0$, $a\cdot 1=a$.

В общей алгебре У. может называться любая *алгебраическая операция* (n-арная, $n\geqslant 2$); чаще всего — бинарная операция (*группоид*). В нек-рых случаях эти операции являются обобщением обычного У. чисел. Напр., У. кватернионов, У. матриц, У. преобразований. Однако свойства У. чисел (напр., коммутативность) в этих случаях могут утрачиваться.

О. А. Иванова.

УНАРНАЯ АЛГЕБРА, у н о и д,— универсальная алгебра $\langle A,\ \{f_i|i\in I\}\rangle$ с семейством $\{f_i|i\in I\}$ унарных операций $f_i: A\to A$.

Важный пример У. а. дает групповой гомоморфизм $\varphi: G\to S_A$ произвольной группы G в группу S_A всех подстановок множества A. Такой гомоморфизм наз. д е й с т в и е м группы G на A. Определяя унарную операцию $f_g: A\to A$ для каждого элемента $g\in G$ как подстановку $\varphi(g)$ из S_A, отвечающую элементу g при гомоморфизме φ, получают У. а. $\langle A,\ \{f_g|g\in G\}\rangle$, в к-рой

$$f_1(x)=x,\ f_g(f_h(x))=f_{gh}(x),\quad x\in A,\ g,\ h\in G.$$

Структуру У. а. несет на себе любой *модуль* над кольцом. Каждый детерминированный полуавтомат с множеством состояний S и входными символами $a_1,\ \ldots,$ a_n также можно рассматривать как У. а. $\langle S,\ f_1,\ \ldots,\ f_n\rangle$, в к-рой $f_i(s)=a_is$ есть состояние, следующее за состоянием s в зависимости от входного символа a_i.

У. а. с одной основной операцией наз. м о н о у н а р н о й, или у н а р о м. Примером унара может служить алгебра Пеано $\langle P,\ f\rangle$, где $P=\{1,\ 2,\ldots\}$ и $f(n)=n+1$.

Тождества произвольной У. а. могут быть лишь следующих типов:

$$\mathrm{I}_1.\ f_{i_1}\ldots f_{i_k}(x)=f_{j_1}\ldots f_{j_l}(x),$$
$$\mathrm{II}_1.\ f_{i_1}\ldots f_{i_k}(x)=f_{j_1}\ldots f_{j_l}(y),$$
$$\mathrm{I}_2.\ f_{i_1}\ldots f_{i_k}(x)=x,\quad \mathrm{II}_2.\ f_{i_1}\ldots f_{i_k}(x)=y,$$
$$\mathrm{I}_3.\ x=x,\quad \mathrm{II}_3.\ x=y.$$

Тождество II_2 равносильно тождеству II_3, выполнимому лишь в одноэлементной алгебре. Многообразие У. а., определяемое лишь тождествами вида I_1, I_2 или I_3, наз. р е г у л я р н о о п р е д е л и м ы м. Существует следующая связь между р е г у л я р н о о п р е д е л и м ы м и многообразиями У. а. и полугруппами (см. [1], [3], [4]).

Пусть V — регулярно определимое многообразие У. а., заданное множеством $\{f_i | i \in I\}$, $I \neq \varnothing$, функциональных символов и множеством Σ тождеств. Каждому символу f_i сопоставляется элемент a_i, а для каждого тождества вида I_1 из Σ выписывается определяющее соотношение

$$a_{i_1} \ldots a_{i_k} = a_{j_1} \ldots a_{j_l}.$$

Пусть P — полугруппа с порождающими a_i, $i \in I$, и выписанными определяющими соотношениями, а P^1 — полугруппа P с внешне присоединенной единицей e. Для каждого тождества вида I_2 из Σ (если такие имеются) выписывают определяющее соотношение $a_{i_1} \ldots a_{i_k} = e$. Полугруппу P_V, получаемую из P^1 присоединением всех таких определяющих соотношений, и считают соответствующей многообразию V. Она во многом характеризует это многообразие. Если Σ содержит лишь тождества вида I_1, то можно ограничиться построением лишь полугруппы P. Определяя в P_V унарные операции $f_i(x) = xa_i$, получают У. а. $\langle P_V, \{f_i | i \in I\}\rangle$, к-рая является V-свободной алгеброй ранга 1. Группа всех автоморфизмов У. а. $\langle P_V, \{f_i | i \in I\}\rangle$ изоморфна группе P_V^* обратимых элементов полугруппы P_V.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Биркгоф Г., Барти Т., Современная прикладная алгебра, пер. с англ., М., 1976; [3] Смирнов Д. М., «Алгебра и логика», 1976, т. 15, № 3, с. 331—42; [4] его же, там же, 1978, т. 17, № 4, с 468—77, [5] Jonsson B., Topics in universal algebra, B.— Hdlb — N. Y., 1972. *Д. М. Смирнов.*

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебраическая система с пустым множеством отношений. У. а. часто называют просто алгеброй. Для У. а. справедлива теорема о гомоморфизме: если φ — гомоморфизм У. а. A на У. а. B и θ — ядерная конгруэнция гомоморфизма φ, то B изоморфна факторалгебре A/θ. Всякая У. а. разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых У. а.

Если к основным операциям алгебры A присоединить все производные операции, то возникает У. а. $\tilde{A}$ большей сигнатуры. Равенство $\tilde{A} = \tilde{B}$ возможно и при $A \neq B$, что приводит к понятию рациональной эквивалентности У. а. (см. *Универсальных алгебр многообразие*).

С каждой У. а. A связаны сопутствующие структуры: моноид всех эндоморфизмов End A, группа всех автоморфизмов Aut A, решетки всех подалгебр Sub A и всех конгруэнций Con A. Для любых группы G и *алгебраических решеток* U и C существует такая У. а. A, что $G \cong \mathrm{Aut}\, A$, $U \cong \mathrm{Sub}\, A$ и $C \cong \mathrm{Con}\, A$ (см. [12]). Однако при замене Aut A на End A аналогичный результат не имеет места. Такого рода задачи наз. абстрактными задачами реализации. Пример решения конкретной задачи реализации: система подмножеств U множества A совпадает с Sub A для нек-рой У. а. с носителем A тогда и только тогда, когда U замкнута относительно объединения направленных подсистем и произвольных пересечений [11]. Как абстрактную, так и конкретную задачи реализации можно решать и для заданного класса У. а. Исследовались У. а. с теми или иными ограничениями на сопутствующие структуры. Напр., У. а. с дистрибутивной или дедекиндовой решеткой конгруэнций, с двуэлементной решеткой конгруэнций (конгруэнц-простые У. а.), с одноэлементной или двуэлементной решеткой подалгебр (простые У. а.), с коммутативным моноидом эндоморфизмов, с одноэлементной группой автоморфизмов (жесткие У. а.) и т. п. У. а. с перестановочными конгруэнциями изоморфна прямому произведению конечного числа конгруэнц-простых алгебр тогда и только тогда, когда решетка ее конгруэнций удовлетворяет условию максимальности, а точная верхняя грань ее минимальных конгруэнций равна наибольшей конгруэнции. У. а. с дистрибутивной решеткой конгруэнций и перестановочными конгруэнциями (арифметические У. а.) допускают представление в виде глобального сечения подходящих пучков. Исследовалось, насколько У. а. определяется той или иной из своих сопутствующих структур. Впрочем, большинство результатов такого рода касается конкретных классов У. а. ([9] — [12], [15]).

У. а. наз. функционально полной, если всякая операция на ее носителе принадлежит клону, порожденному ее основными операциями и константами. Если отказаться от включения констант, то получается определение примальной (или строго функционально полной) У. а. Принадлежность к вышеупомянутому клону всех операций, сохраняемых конгруэнциями, определяет аффинно полную У. а. Всякая функционально полная У. а. конечна. Поэтому требование конечности часто включают в определение перечисленных классов У. а. (см. [9], [13], [14]).

Формирование теории У. а. началось в 30—40-х гг. 20 в., когда были сформулированы основные определения, охарактеризованы многообразия универсальных алгебр и доказана теорема о подпрямых разложениях (см. [7], [8]). Предыстория теории У. а. восходит к прошлому столетию. Активные исследования в этой области начались в кон. 40-х гг., а в СССР — в нач. 50-х гг. (А. Г. Курош, А. И. Мальцев и их ученики). Привлечение методов математич. логики привело к рассмотрению *алгебраических систем*.

Термин «У. а.» употребляется также в смысле «теория универсальных алгебр».

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., 2 изд., М., 1983; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [4] его же, Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974; [5] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970, [6] Скорняков Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983; [7] Birkhoff G., «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1935, v. 31, p. 433—54; [8] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v 50, p. 764—68; [9] Grätzer G., Universal algebra, 2 ed., N. Y.— Hdlb.— B., 1979; [10] Hu Tah-Kai, «Math. Nachr.», 1969, Bd 42, N 1—3, S. 157—71; [11] Jónsson B., Topics in universal algebra, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [12] Lampe W. A., «Algebra universalis», 1972, v. 2, N 3, p. 270—83, 286—95, 296—302; [13] Pixley A. F., «Coll. Math. Soc. J. Bolyai», 1982, v. 29, p 583—608, [14] Werner H., Discriminator-algebras, B., 1978; [15] Wolf A., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 148, p. 87—93. *Л. А. Скорняков.*

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над коммутативным кольцом k с единицей — ассоциативная k-алгебра $U(\mathfrak{g})$ с единицей, снабженная отображением $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$, для к-рой выполнены следующие свойства: 1) σ является гомоморфизмом алгебр Ли, т. е. σ k-линейно и $\sigma([x, y]) = \sigma(x) \cdot \sigma(y) - \sigma(y) \cdot \sigma(x)$, $x, y \in \mathfrak{g}$; 2) для любой ассоциативной k-алгебры A с единицей и всякого такого k-линейного отображения $\alpha : \mathfrak{g} \to A$, что $\alpha([x, y]) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(x)$, $x, y \in \mathfrak{g}$, существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\beta : U(\mathfrak{g}) \to A$, переводящий единицу в единицу, для к-рого $\alpha = \beta \circ \sigma$. У. о. а. определяется однозначно с точностью до изоморфизма и всегда существует: если $T(\mathfrak{g})$ — тензорная алгебра k-модуля $\mathfrak{g}$, I — ее двусторонний идеал, порожденный элементами вида $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x$, $x, y \in \mathfrak{g}$ и $\sigma : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})/I$ — каноническое отображение, то $T(\mathfrak{g})/I$ — У. о. а. для $\mathfrak{g}$.

Если k нётерово, а модуль $\mathfrak{g}$ конечного порядка, то алгебра $U(\mathfrak{g})$ — нётерова слева и справа. Если $\mathfrak{g}$ — свободный модуль над областью целостности k, то $U(\mathfrak{g})$ не имеет делителей нуля. Для любой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k алгебра $U(\mathfrak{g})$ удовлетворяет условию Оре (см. *Вложение полугруппы*) и тем самым обладает телом частных.

Если V — нек-рый k-модуль, то всякий гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ продолжается до гомоморфизма ассоциативных алгебр $U(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End} V$. Этим устанавливается изоморфизм категории $\mathfrak{g}$-модулей и категории левых $U(\mathfrak{g})$-модулей, существование к-рого лежит в основе применений У. о. а. в теории представлений алгебр Ли (см. [3], [4]).

У. о. а. прямого произведения алгебр Ли $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ есть тензорное произведение алгебр $U(\mathfrak{g}_i)$. Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, причем $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — свободные k-модули, то канонический гомоморфизм $U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$ является вложением. Если k' — расширение поля k, то $U(\mathfrak{g} \otimes_k k') = U(\mathfrak{g}) \otimes_k k'$. У. о. а. обладает канонической фильтрацией $U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \ldots \subset U_n(\mathfrak{g}) \subset \ldots$, где $U_0(\mathfrak{g}) = k \cdot 1$, а $U_n(\mathfrak{g})$, $n > 0$,— k-подмодуль в $U(\mathfrak{g})$, порожденный произведениями $\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_m)$, $m \leqslant n$, $x_i \in \mathfrak{g}_i$ для всех i. Ассоциированная с этой фильтрацией градуированная алгебра $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ коммутативна и порождается образом естественного отображения $\mathfrak{g} \to \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$; это отображение определяет гомоморфизм δ симметрической алгебры $S(\mathfrak{g})$ k-модуля $\mathfrak{g}$ в $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$. Согласно теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта $\delta : S(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ — изоморфизм алгебр, если $\mathfrak{g}$ — свободный k-модуль. Эквивалентная формулировка состоит в следующем: если $\{x_i\}_{i \in I}$ — базис k-модуля $\mathfrak{g}$, где I — линейно упорядоченное множество, то семейство одночленов $\sigma(x_{i_1}) \ldots \sigma(x_{i_n})$, $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n$, $n \geqslant 0$, образует базис k-модуля $U(\mathfrak{g})$ (в частности, σ инъективно).

Пусть $Z(\mathfrak{g})$ — центр алгебры $U(\mathfrak{g})$. Тогда для любой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0 $\operatorname{gr} Z(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ совпадает с подалгеброй G-инвариантных элементов в $S(\mathfrak{g})$. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то $Z(\mathfrak{g})$ является алгеброй многочленов от $r k \mathfrak{g}$ переменных.

Одним из важнейших направлений исследования У. о. а. является изучение их примитивных идеалов (см. [3]).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] его же, Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, пер. с франц., М., 1978; [3] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978; [4] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [5] Гельфанд И. М., «Матем. сб.», 1950, т. 26, с. 103—12; [6] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969.

В. Л. Попов.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ для данного класса K функций типа $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ — функция $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ типа $\mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ такая, что для всякой $f(x_1, \ldots, x_n) \in K$ найдется $i \in \mathbb{N}$, при к-ром

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(i, x_1, \ldots, x_n). \qquad (*)$$

Здесь $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а равенство (*) означает, что функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $F(i, x_1, \ldots, x_n)$ определены на одних и тех же наборах аргументов $x_1, \ldots, x_n$ и их значения на этих наборах совпадают. Иногда в определении У. ф. требуется, чтобы для всех $i \in \mathbb{N}$ функция $F(i, x_1, \ldots, x_n)$ принадлежала классу K (см. [4]). Имеются также др. варианты определения У. ф. (см. [1], [2]).

У. ф. существуют для всякого счетного класса функций. Следующие У. ф. играют важную роль в теории алгоритмов: 1) универсальные частично рекурсивные функции для классов всех n-местных ($n \geqslant 0$) *частично рекурсивных функций*, 2) общерекурсивные У. ф. для классов всех n-местных *примитивно рекурсивных функций*.

Если функция $\psi(y, x)$ универсальна для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, то она не продолжается до рекурсивной всюду определенной функции, а множество $\{x | \psi(x, x) \text{ определена}\}$ является примером перечислимого, но не разрешимого множества натуральных чисел.

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.

С. Н. Артемов.

УНИВЕРСАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО, универсум,— нек-рое множество, фиксированное в рамках данной математич. теории и содержащее в качестве элементов все объекты, рассматриваемые в этой теории. Напр., для элементарной арифметики У. м. является множество всех целых чисел. Особую роль играет понятие У. м. в теории множеств. Объектами исследования в ней являются множества, поэтому У. м. здесь является совокупность всех множеств; однако оно уже не является множеством, т. е. не может быть объектом рассмотрения в теории множеств. На это указывают парадоксы, связанные с понятием множества всех множеств (напр., *антиномия* Кантора).

Множество всех множеств становится объектом исследования в теории множеств и классов. В этой теории наряду с множествами рассматриваются классы — объекты, к-рые не могут быть членами др. множеств или классов.

Лит.: [1] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [2] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966

В. Е. Плиско.

УНИВЕРСАЛЬНОЕ НАКРЫТИЕ — накрытие, к-рому подчинены или к-рыми накрываются все остальные накрытия.

М. И. Войцеховский.

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство, содержащее гомеоморфный образ любого топологич. пространства нек-рого класса. Примеры:

1) $C[0,1]$, см. *Банахово пространство*;

2) гильбертов кирпич и тихоновский куб;

3) кривая Менгера (см. *Линия*);

4) универсальное расслоение Милнора (см. *Главное расслоение*).

Свойство универсальности обеспечивает рассмотрение нек-рого абстрактно заданного объекта как подобъекта более простого (с категорной точки зрения) и тем самым наделяет его «внешними» свойствами, большим богатством. С другой стороны, этим подчеркивается отношение «частное от общего».

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968.

М. И. Войцеховский.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ для данного класса алгоритмов — алгоритм с входным параметром p, к-рый при различных допустимых значениях p моделирует работу любого алгоритма данного класса. Различным формализациям вычислимости соответствуют различные уточнения понятия У. а.: для *рекурсивных функций* это универсальная частично рекурсивная функция (см. *Универсальная функция*), для *Тьюринга машин* — это универсальная машина Тьюринга, для нормальных алгорифмов — это *универсальный нормальный алгорифм*, и т. д.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960, [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965, [3] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

С. Н. Артемов.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ АЛГОРИФМ — нормальный алгорифм (н. а.) $\mathfrak{B}$, к-рый в уточненном ниже смысле моделирует работу любого н. а. в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Н. а. $\mathfrak{B}$ в алфавите $B \supset A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ (A не содержит букв α, β, γ, δ) является универсальным для алфавита A, если для всякого н. а. $\mathfrak{A}$ в алфавите A и для каждого слова P в алфавите A

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}} \delta P) \simeq \mathfrak{A}(P).$$

Здесь $\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}}$ есть изображение н. а. (см. *Алгоритма изображение*), а символ δ из B играет роль разделитель-

ного знака. Существование У. н. а. доказал А. А. Марков (см. [1]). Важной характеристикой У. н. а. является его сложность, т. е. длина его изображения (см. также *Алгоритма сложность* описания). Для минимальной сложности У. н. а. как функции от n (количества символов в алфавите A) получены отличающиеся лишь на аддитивную константу нижняя и верхняя оценки вида $5n+C$ (см. [2]).

Лит: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.—Л., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т 42); [2] Жаров В. Г., О сложности универсального нормального алгорифма, в сб.: Теория алгорифмов и математическая логика, М., 1974, с. 34—54.

С. Н. Артемов.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ РЯД — функциональный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x), \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

с помощью к-рого могут быть представлены в том или ином смысле все функции заданного класса. Напр., существует такой ряд (1), что для каждой непрерывной на $[a, b]$ функции f найдется подпоследовательность частных сумм этого ряда $\sum_{i=1}^{n_k} \varphi_i(x)$, сходящаяся к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

Существуют тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos ix+b_i \sin ix) \tag{2}$$

со стремящимися к нулю коэффициентами такие, что для каждой измеримой (по Лебегу) на $[0, 2\pi]$ функции f имеется подпоследовательность частных сумм ряда (2), сходящаяся к $f(x)$ почти всюду.

Указанные ряды наз. универсальными относительно подпоследовательностей частных сумм. Рассматриваются также др. определения У. р. Напр., ряды (1), универсальные относительно подрядов $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{i_k}(x)$ или относительно перестановок членов ряда (1).

Лит. [1] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963, [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, [3] Талалян А. А., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, № 5, с 77—141.

С. А. Теляковский.

УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР МНОГООБРАЗИЕ — класс универсальных алгебр, определяемый системой тождеств (ср. *Алгебраических систем многообразие*). У. а. м. характеризуется как непустой класс алгебр, замкнутый относительно факторалгебр, подалгебр и прямых произведений. Последние два условия можно заменить требованием замкнутости относительно подпрямых произведений. У. а. м. наз. тривиальным, если оно состоит из одноэлементных алгебр. Каждое нетривиальное У. а. м. содержит *свободную алгебру* с базой любой мощности. Если X и Y — базы одной и той же свободной алгебры нетривиального У. а. м. и X бесконечна, то X и Y равномощны. Требование бесконечности одной из баз существенно. Оно может быть снято, если У. а. м. содержит неодноэлементную конечную алгебру.

У. а. м., порожденное классом K, состоит из всех факторалгебр всевозможных подпрямых произведений алгебр из K. Все конечно порожденные алгебры из У. а. м., порожденного конечной алгеброй, конечны. Конгруэнции любой алгебры из У. а. м. M сигнатуры Ω перестановочны в том и только в том случае, когда существует такой тернарный *терм* f сигнатуры Ω, что тождества

$$f(x, x, y)=y=f(y, x, x)$$

справедливы во всех алгебрах из M. Аналогичным образом могут быть охарактеризованы У. а. м., чьи алгебры обладают модулярными или дистрибутивными решетками конгруэнций (см. [1—4, 7, 9, 10]).

В многообразии M n-арная операция f наз. тривиальной, если во всех алгебрах из M справедливо тождество $f(x_1, \ldots, x_n)=f(y_1, \ldots, y_n)$. Напр., в многообразии колец с нулевым умножением операция умножения тривиальна. Каждую тривиальную операцию f можно заменить 0-арной операцией v_f, определяемой равенством $v_f=f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть сигнатуры Ω и Ω' У. а. м. M и M' соответственно не содержат тривиальных операций. Отображение Φ сигнатуры Ω в множество $W(\Omega')$ термов сигнатуры Ω' наз. допустимым, если арности операций f и $\Phi(f)$ совпадают для всех $f \in \Omega$. Допустимое отображение Φ естественным образом продолжается до отображения $W(\Omega)$ в $W(\Omega')$, к-рое также обозначается Φ. Многообразия M и M' наз. рационально-эквивалентными, если существуют допустимые отображения $\Phi: \Omega \to W(\Omega')$ и $\Phi': \Omega' \to W(\Omega)$ такие, что $f=\Phi'(\Phi(f))$ для всех $f \in \Omega$, $f'=\Phi(\Phi'(f'))$ для всех $f' \in \Omega'$ и для каждого тождества $u=v$ (соответственно $u'=v'$), входящего в определение многообразия M (многообразия M'), тождество $\Phi(u)=\Phi(v)$ (соответственно $\Phi'(u')=\Phi'(v')$) справедливо во всех алгебрах из M' (из M). Последнее требование равносильно тому, что каждая алгебра A из M (A' из M') превращается в алгебру из M' (из M), если каждую n-арную операцию f' из Ω' (f из Ω) определить равенством $f'(x_1, \ldots, x_n)=\Phi'(f')(x_1, \ldots, x_n)$ (соответственно $f(x_1, \ldots, x_n)=\Phi(f)(x_1, \ldots, x_n)$). Рационально эквивалентны многообразия булевых колец и *булевых алгебр*. Многообразие *унарных алгебр* сигнатуры Ω, определяемое тождествами

$$\{u_\iota(x)=v_\iota(x) \mid \iota \in \Im\},$$

рационально эквивалентно многообразию всех левых R-*полигонов*, где R — фактормоноид свободного моноида со свободной порождающей системой Ω по конгруэнции, порожденной всеми парами $\{(u_\iota, v_\iota) \mid \iota \in \Im\}$. У. а. м. M рационально эквивалентно многообразию всех правых модулей над нек-рым ассоциативным кольцом тогда и только тогда, когда конгруэнции любой алгебры из M перестановочны, конечные *свободные произведения* в M совпадают с *прямыми произведениями* и существует нуль-арная производная операция, отмечающая подалгебру. Первые два условия можно заменить требованием: каждая подалгебра любой алгебры из M является классом нек-рой конгруэнции и каждая конгруэнция любой алгебры из M однозначно определяется своим классом, являющимся подалгеброй [3, 5, 6, 7].

Многообразие решеток, порожденное решетками конгруэнций всех алгебр нек-рого У. а. м., наз. конгруэнц-многообразием. Не всякое многообразие решеток является конгруэнц-многообразием. Существуют не модулярные конгруэнц-многообразия, отличные от многообразия всех решеток [7, 8].

Лит [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968, [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973, [3] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970, [4] Скорняков Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983; [5] Чакань Б., «Acta Scient. Math.», 1963, t. 24, № 1—2, p. 157—64, [6] его же, там же, 1964, t. 25, № 3—4, p. 202—08; [7] Grätzer G., Universal algebra, 2 ed., N. Y.— Hdlb.— B., 1979; [8] Jónsson B., «Coll. Math. Soc. J. Bolyai», 1982, v. 29, p. 421—36, [9] Smith J. D. H., Mal'cev varieties, B.— Hdlb.— N. Y., 1976; [10] Taylor W., «Algebra universalis», 1973, v. 3, № 3, p. 351—97.

Л. А. Скорняков.

УНИКУРСАЛЬНАЯ КРИВАЯ — плоская кривая Г, к-рую можно обойти, побывав дважды только в точках самопересечения. Для того чтобы кривая была уникурсальной, необходимо и достаточно, чтобы у нее было не более двух точек, через к-рые проходит нечетное число путей. Если Г — плоская алгебраич. кривая n-го порядка, имеющая максимальное число δ двойных точек (включая несобственные и мнимые), то $\delta=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (причем точки кратности k рассматриваются как $\frac{k(k-1)}{2}$ двойных точек).

Всякий интеграл $\int R(x, y)dx$, где y — функция от x, определяемая уравнением $F(x, y)=0$, задающая алгебраич. У. к., а $R(x, y)$ — рациональная функция, приводится к интегралу от рациональных функций и выражается в элементарных функциях. *М. И. Войцеховский.*

УНИМОДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, одновершинное распределение,— *вероятностная мера* на прямой, функция распределения к-рой $F(x)$ выпукла при $x<a$ и вогнута при $x>a$ для нек-рого действительного a. Число a в этом случае наз. *модой* (вершиной) и определяется, вообще говоря, неоднозначно; точнее, множество мод (вершин) данного У. р. образует замкнутый интервал, возможно, вырожденный.

Примерами У. р. служат *нормальное распределение, равномерное распределение, Коши распределение, Стьюдента распределение, «Хи-квадрат» распределение.* А. Я. Хинчин [1] получил следующий критерий унимодальности: для того чтобы функция $f(t)$ была характеристич. функцией У. р. с модой в нуле, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\,du, \quad f(0)=1,$$

где $\varphi(u)$ — нек-рая характеристич. функция. В терминах функций распределения это равенство эквивалентно следующему

$$F(x)=\int_0^1 G\left(\frac{x}{u}\right)du,$$

где $F(x)$ и $G(x)$ соответствуют $f(t)$ и $\varphi(t)$. Иными словами, $F(x)$ унимодальна тогда и только тогда, когда она является функцией распределения произведения двух независимых случайных величин, одна из к-рых распределена равномерно на отрезке [0, 1].

Для распределений, к-рые задаются своими характеристич. функциями (как, напр., для *устойчивого распределения*), проверка факта их унимодальности представляет трудную аналитич. задачу. Кажущийся естественным путь представления данного распределения как предела композиции У. р. не приводит к цели, т. к., вообще говоря, композиция двух У. р. не будет У. р. (хотя для симметричных распределений унимодальность сохраняется при композиции и долгое время казалось, что так будет в общем случае). Напр., если F имеет плотность

$$p(x)=1, \quad 0<x\leqslant\frac{5}{6} \text{ и } p(x)=0$$

в др. случаях, то плотность композиции F с F имеет два максимума. Поэтому было введено (см. [2]) понятие сильной унимодальности (сильной одновершинности): распределение наз. сильно унимодальным (сильно одновершинным), если его свертка с любым У. р. унимодальна. Всякое сильно унимодальное распределение является У. р.

Решетчатое распределение, приписывающее точкам $a+hk$, $k=0, \pm 1, \ldots, h>0$, вероятности p_k наз. У. р., если существует такое целое k_0, что p_k как функция от k является неубывающей при $k\leqslant k_0$ и невозрастающей при $k\geqslant k_0$. Примерами решетчатых У. р. являются *Пуассона распределение, биномиальное распределение, геометрическое распределение.*

Нек-рые результаты, касающиеся распределений, могут быть усилены в предположении унимодальности. Так, напр., *Чебышева неравенство* для случайной величины ξ, имеющей У. р., можно уточнить следующим образом

$$\mathsf{P}\{|\xi-x_0|\geqslant k\zeta\}\leqslant\frac{4}{9k^2}$$

для любого $k>0$, где x_0 — мода, а $\zeta^2=\mathsf{E}(\xi-x_0)^2$.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Об унимодальных распределениях, «Изв. НИИ матем и мех. ун-та», Томск, 1938, т. 2, в. 2, с. 1—7, [2] Ибрагимов И. А., О композиции одновершинных распределений, «Теор. вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 283—88, [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967. *Н. Г. Ушаков.*

УНИМОДУЛЯРНАЯ ГРУППА — топологическая группа, левоинвариантная *Хаара мера* на к-рой правоинвариантна или, что равносильно, инвариантна относительно преобразования $a\mapsto a^{-1}$. Группа Ли G унимодулярна тогда и только тогда, когда

$$|\det \mathrm{Ad}\, g|=1 \quad (g\in G),$$

где Ad — присоединенное представление. Для связных групп Ли G это равносильно тому, что $\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,x=0$ $(x\in\mathfrak{g})$, где ad — присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Любая компактная, дискретная или абелева локально компактная группа, а также любая связная редуктивная или нильпотентная группа Ли унимодулярна. *А. Л. Онищик.*

УНИМОДУЛЯРНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица, определитель к-рой равен ±1. Иногда, при рассмотрении матриц над коммутативным кольцом, под У. м. понимают обратимую матрицу. *О. А. Иванова.*

УНИМОДУЛЯРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства, матрица к-рого имеет определитель ±1. *О. А. Иванова.*

УНИПОТЕНТНАЯ ГРУППА — подгруппа U линейной алгебраич. группы G, состоящая из *унипотентных элементов*. Если отождествить G с ее образом при изоморфном вложении в группу $GL(V)$ автоморфизмов подходящего конечномерного векторного пространства V, то У. г.— это подгруппа, лежащая в множестве

$$\{g\in GL(V)\mid (1-g)^n=0\}, \quad n=\dim V,$$

всех унипотентных автоморфизмов пространства V. Зафиксировав в V базис, можно отождествить $GL(V)$ с полной матричной группой $GL_n(K)$, где K — основное алгебраически замкнутое поле; матричная группа U также называется при этом У. г. Пример У. г.— группа $U_n(K)$ всех верхнетреугольных матриц из $GL_n(K)$ с единицами на диагонали. Если k — подполе поля K и U — унипотентная подгруппа в $GL_n(k)$, то U сопряжена над k с нек-рой подгруппой группы $U_n(k)$. В частности, все элементы из U имеют в V общий ненулевой неподвижный вектор, а U является нильпотентной группой. Эта теорема показывает, что алгебраические У. г.— это в точности замкнутые (в топологии Зарисского) подгруппы групп $U_n(K)$ при различных n.

В любой линейной алгебраич. группе H имеется единственная связная нормальная унипотентная подгруппа $R_u(H)$ (унипотентный радикал), фактор $H/R_u(H)$ по к-рому редуктивен. Это в известной степени сводит изучение строения любой группы к изучению строения редуктивных групп и У. г. В отличие от редуктивного случая классификация алгебраических У. г. к настоящему времени (1984) неизвестна.

Всякая подгруппа и всякая факторгруппа алгебраической У. г. снова являются У. г. Если $\mathrm{char}\ K=0$, то U всегда связна, причем экспоненциальное отображение $\exp: \breve{u}\to U$ (где $\breve{u}$ — алгебра Ли группы U) является изоморфизмом алгебраич. многообразий; если же $\mathrm{char}\ K=p>0$, то существуют несвязные алгебраические У. г.: напр., аддитивная группа $\mathbf{G}_a$ основного поля K (ее можно отождествить с $U_2(K)$) является p-группой и потому содержит конечные У. г. В связной У. г. U имеется такая последовательность нормальных делителей $U=U_1\supset U_2\supset\ldots\supset U_s=\{e\}$, что все факторы U_i/U_{i+1} одномерны. Всякая связная алгебраическая одномерная У. г. изоморфна $\mathbf{G}_a$. Это сводит изучение связных алгебраических У. г. к описанию кратных расширений групп типа $\mathbf{G}_a$.

Значительно больше, чем в общем случае, известно о коммутативных алгебраических У. г. (см. [4]). Если char $K=0$, то это в точности алгебраич. группы, изоморфные $\mathbf{G}_a\times\ldots\times\mathbf{G}_a$; при этом изоморфизм $\mathbf{G}_a\times\ldots\times\mathbf{G}_a\to U$ задается экспоненциальным отображением. Если же char $K=p>0$, то связные коммутативные алгебраические У. г. U — это в точности связные коммутативные алгебраич. группы, являющиеся p-группами. В этом случае U не обязательно изоморфна $\mathbf{G}_a\times\ldots\times\mathbf{G}_a$: для этого необходимо и достаточно, чтобы $g^p=e$ для любого $g\in U$. В общем же случае U изогенна произведению нек-рых специальных групп (т. н. групп Витта, см. [2]).

Если H и U — связные алгебраические У. г. и $H\subset U$, то многообразие U/H изоморфно аффинному пространству. Любая орбита алгебраической У. г. автоморфизмов аффинного алгебраич. многообразия X замкнута в X [5].

Лит. [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972, [2] Серр Ж. П., Алгебраические группы и поля классов, пер с франц., М., 1968; [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980, [4] Kambayachi T., Miyanishi M., Takeuchi M., Unipotent algebraic groups, B.— [a. o.], 1974, [5] Steinberg R., Conjugacy classes in algebraic groups, B.— [a. o.], 1974.

В. Л. Попов.

УНИПОТЕНТНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица A над кольцом, для к-рой матрица $A-E_n$, где n — порядок матрицы A, нильпотентна, то есть $(A-E_n)^n=0$. Матрица над полем порядка n унипотентна тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен есть $(x-1)^n$.

Группа матриц наз. унипотентной, если каждая ее матрица унипотентна. Любая унипотентная подгруппа в $GL(n, F)$, где F — поле, сопряжена в $GL(n,F)$ с нек-рой подгруппой специальной треугольной группы (теорема Колчина). Это утверждение справедливо и для унипотентных групп над телом, если характеристика тела либо равна 0, либо больше некрого $\gamma(n)$.

Д. А. Супруненко.

УНИПОТЕНТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ — элемент g линейной алгебраич. группы G, совпадающий с унипотентной компонентой g_u своего *Жордана разложения* в группе G. Если реализовать G как замкнутую подгруппу группы $GL(V)$ автоморфизмов конечномерного векторного пространства V над основным алгебраически замкнутым полем K, то У. э. g — это в точности такие элементы, что $(1-g)^n=0$, $n=\dim V$, или, что их матрицы в нек-ром базисе пространства V являются верхне-треугольными с единицами на диагонали. Множество $U(G)$ всех У. э. в G замкнуто в топологии Зарискоого, а если G определена над подполем $k\subset K$, то и $U(G)$ определено над k. Если char $K=0$, то всякий У. э. g имеет бесконечный порядок. В этом случае наименьшая алгебраич. подгруппа в G, содержащая g, является одномерной *унипотентной группой*. Если же char $K=p>0$, то g будет У. э. в точности тогда, когда он имеет конечный порядок, равный p^t для нек-рого $t\geqslant 0$. Связная группа не содержит У. э. $g\neq e$ тогда и только тогда, когда она является *алгебраическим тором*.

В терминах У. э. может быть дан критерий анизотропности (см. *Анизотропная группа*).

У. э. играют важную роль в теории *дискретных подгрупп* алгебраич. групп и групп Ли. Наличие У. э. в дискретных группах Γ движений симметрических пространств, имеющих некомпактную фундаментальную область конечного объема, является важным средством изучения структуры таких групп и их канонических фундаментальных областей (см. [5]); существование У. э. в таких Γ доказано в [4].

Многообразие $U(G)$ инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G. Пусть G связна и полупроста. Тогда число классов сопряженных У. э. конечно и для каждой простой G известно полное их описание (а также описание централизаторов У. э.), см. [7]. В классич. группах такое описание получается с использованием жордановой формы матрицы [2]. Напр., для группы $G=SL_n(K)$ существует биекция между классами сопряженных У. э. и разбиениями $(m_1, \ldots, m_s)$ числа n в сумму положительных целых слагаемых m_i, $m_1\geqslant\ldots\geqslant m_s$. Если $\lambda=(m_1,\ldots, m_s)$ и $\mu=(l_1,\ldots, l_t)$ — два разбиения числа n, то класс, отвечающий λ, содержит в своем замыкании класс, отвечающий μ, в точности тогда, когда $\sum_{i=1}^{j} m_i\geqslant\sum_{i=1}^{j} l_i$ для всех j. Размерность класса, отвечающего разбиению $(m_1,\ldots, m_s)$ (как алгебраического многообразия), равна $n^2-\sum_{ij}\min(m_i, m_j)$.

Множество всех простых точек алгебраического многообразия $U(G)$ образует один класс сопряженных У. э.— регулярные У. э. Если G проста, то многообразие особых точек многообразия $U(G)$ также содержит открытый в топологии Зарискоого класс сопряженных У. э.— субрегулярные У. э. По поводу изучения особых точек многообразия $U(G)$ см. также [6].

Лит [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973, [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980, [4] Каждан Д. А., Маргулис Г. А., «Матем. сб.», 1968, т 75, № 1, с. 163—68; [5] Сельберг А., «Математика», 1972, т. 16, в. 4, с. 72—89; [6] Slodowy P., Simple singularities and simple algebraic groups, B.— [a. o.], 1980; [7] Spaltenstein N., Classes unipotentes et sousgroupes de Borel, B.— [a. o.], 1982.

В. Л. Попов.

УНИРАЦИОНАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — алгебраическое многообразие X над полем k, для к-рого существует такое рациональное отображение проективного пространства $\varphi: P^n\to X$, что $\varphi(P^n)$ плотно в X и расширение полей рациональных функций $k(P^n)/k(X)$ сепарабельно. Другими словами, $k(X)$ имеет сепарабельное чисто трансцендентное расширение.

У. м. близки к *рациональным многообразиям*. Напр., на У. м. нет регулярных дифференциальных форм, $H^0(X, \Omega_X^p)=0$ при $p\geqslant 1$. Вопрос о совпадении понятий рационального и унирационального многообразия наз. *Люрота проблемой*.

Лит. [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вик. С. Куликов.

УНИТАРНАЯ ГРУППА относительно формы f — группа $U_n(K, f)$ всех линейных преобразований φ n-мерного правого линейного пространства V над телом K, сохраняющих фиксированную невырожденную полуторалинейную (относительно инволюции J тела K) форму f на V, т. е. таких φ, что

$$f(\varphi(v), \varphi(u))=f(v, u)\quad\forall v, u\in V.$$

У. г. принадлежит к числу *классических групп*. Частными случаями У. г. являются *симплектическая группа* (в этом случае K — поле, $J=1$ и f — знакопеременная билинейная форма) и *ортогональная группа* (K — поле, char $K\neq 2$, $J=1$, f — симметрическая билинейная форма). Далее, пусть $J\neq 1$ и f обладает свойством (T) (см. *Витта теорема*). Умножая f на подходящий скаляр, можно, не меняя У. г., добиться того, чтобы f стала эрмитовой формой, а меняя, сверх того, J,— чтобы f стала косоэрмитовой формой.

Если исключить случай $n=2$, $K=\mathbb{F}_4$, то всякий элемент У. г. $U_n(K, f)$ является произведением не более чем $n+1$ квазиотражений (т. е. преобразований, оставляющих на месте все элементы какой-либо неизотропной гиперплоскости в V). Центр Z_n У. г. $U_n(K, f)$ состоит из всех гомотетий пространства V вида $x\mapsto x\gamma$, $\gamma\in K$, $\gamma^J\gamma=1$.

Пусть ν — индекс Витта формы f. Если $\nu\neq 0$, то удобно считать f косоэрмитовой. Пусть $T_n(K, f)$ — нормальный делитель в $U_n(K, f)$, порожденный унитар-

ными сдвигами, т. е. линейными преобразованиями вида $x \mapsto x + af(a, x)$, где a — изотропный вектор пространства V, а $\lambda \in S = \{\gamma \in K | \gamma^J = \gamma\}$. Центром группы $T_n(K, f)$ является группа $W_n = T_n(K, f) \cap Z_n$. Факторгруппа $T_n(K, f)/W_n$ проста при $n \geqslant 2$, если $K \neq \mathbb{F}_4$ или $\mathbb{F}_9$. Строение факторгруппы $U_n(K, f)/T_n(K, f)$ описывается следующим образом. Пусть Σ — подгруппа мультипликативной группы K^* тела K, порожденная $K^* \cap S$, а Ω — подгруппа в K^*, порожденная элементами $\lambda \in K^*$, обладающими следующим свойством: в V существует такая гиперболическая плоскость (т. е. двумерное неизотропное подпространство, содержащее изотропный вектор), что $f(v, v) = \lambda - \lambda^J$ для нек-рого вектора $v \in V$, ортогонального к указанной плоскости. Эти подгруппы являются нормальными в K^*. Пусть $[K^*, \Omega]$ — подгруппа в K^*, порожденная коммутаторами $\lambda w \lambda^{-1} w^{-1}$, $\lambda \in K^*$, $w \in \Omega$. Если исключить случай $n = 3$, $K = \mathbb{F}_4$, то $U_n(K, f)/T_n(K, f)$ при $n \geqslant 2$ изоморфна $K^*/\Sigma[K^*, \Omega]$.

Группа $T_n(K, f)$ во многих случаях совпадает с коммутантом У. г. $U_n(K, f)$: это верно, напр., если $\nu \geqslant 2$. Если K коммутативно и $n \geqslant 2$, то $T_n(K, f)$ совпадает с нормальной подгруппой $U_n^+(K, f)$, состоящей из тех элементов, определитель Дьёдонне к-рых равен 1 (за исключением случая $n = 3$, $K = \mathbb{F}_4$). Соотношения между $U_n(K, f)$, $U_n^+(K, f)$ и $T_n(K, f)$ исследованы также в случае, когда тело K имеет конечную размерность над своим центром [1].

Пусть теперь $\nu = 0$. Тогда многие из указанных результатов неверны (имеются примеры У. г., обладающих бесконечным рядом нормальных делителей с абелевыми факторами, примеры У. г., для к-рых $n = 2$ и $U_n^+(K, f)$ не совпадает со своим коммутантом и т. п.). Наиболее изученными являются случаи локально компактного поля характеристики $\neq 2$ и поля алгебраич. чисел.

Один из основных результатов об автоморфизмах У. г. состоит в следующем (см. [1]): если $\mathrm{char}\, K \neq 2$, а $n \geqslant 3$, то всякий автоморфизм У. г. $U_n(K, f)$ имеет вид $\varphi(u) = \chi(u) g u g^{-1}$, $u \in U_n(K, f)$, где χ — гомоморфизм $U_n(K, f)$ в ее центр Z_n, а g — унитарное полуподобие пространства V (т. е. биективное *полулинейное отображение* $V \to V$, удовлетворяющее условию $f(g(x), g(y)) = r_g (f(x, y))^\sigma$, где $x, y \in V$, $r_g \in K^*$, а σ — автоморфизм K, связанный с g). Если n четно, $n \geqslant 6$, K — поле характеристики $\neq 2$ и $\nu \geqslant 1$, то всякий автоморфизм группы $U_n^+(K, f)$ индуцируется автоморфизмом группы $U_n(K, f)$.

Если $K = \mathbb{C}$, J — автоморфизм комплексного сопряжения и эрмитова форма f положительно определена, то У. г. $U_n(K, f)$ обозначается через U_n; она является компактной вещественной связной группой Ли и часто наз. просто У. г. В случае неопределенной формы f группу $U_n(\mathbb{C}, f)$ часто наз. псевдоунитарной. С помощью выбора в V базиса U_n отождествляется с группой всех *унитарных матриц*. Группа $U_n^+(K, f)$ в этом случае наз. специальной унитарной группой и обозначается через SU_n.

Лит.: [1] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966, [3] Автоморфизмы классических групп, сб. пер. с англ. и франц., М., 1976; [4] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [5] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [6] Залесский А. Е., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 5, с. 57—107.

В. Л. Попов.

УНИТАРНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, строки к-рой образуют ортонормированную систему, т. е.

$$a_{i1}\bar{a}_{k1} + \ldots + a_{in}\bar{a}_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

$i, k = 1, \ldots, n$. С помощью У. м. осуществляется переход от одного ортонормированного базиса к др. ортонормированному базису в унитарном пространстве. У. м. служат также матрицами унитарных преобразований в ортонормированном базисе. Квадратная матрица A с комплексными элементами унитарна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет любому из следующих условий:

1) $A^*A = E$,

2) $AA^* = E$,

3) $A^* = A^{-1}$,

4) столбцы матрицы A образуют ортонормированную систему (здесь A^* — сопряженная с A матрица). Определитель У. м. есть комплексное число, модуль к-рого равен единице.

О. А. Иванова.

УНИТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ — действующие в гильбертовом пространстве H линейные операторы A и B с областями определения D_A и D_B соответственно такие, что

1) $UD_A = D_B$,

2) $UAU^{-1}x = Bx$ для любого $x \in D_B$,

где U — *унитарный оператор*. Если A и B — ограниченные линейные операторы, то условие 1) опускается. Если A — *самосопряженный оператор*, то таков же и B; если A и B — ограниченные операторы, то $\|A\| = \|B\|$.

Самосопряженные У. э. о. имеют унитарно эквивалентные спектральные функции, т. е. $E_\lambda(B) = UF_\lambda(A)U^{-1}$. Поэтому спектры У. э. о. имеют одинаковую структуру: либо оба чисто точечные, либо оба чисто непрерывные, либо оба смешанные. В частности, в случае чисто точечного спектра собственные значения У. э. о. одинаковые и ранги собственных значений совпадают, причем это является не только необходимым, но и достаточным условием унитарной эквивалентности операторов с чисто точечным спектром.

Примером пары У. э. о. в комплексном пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ является оператор дифференцирования $Ax = i\frac{dx}{dt}$ с областью определения D_A, состоящей из абсолютно непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций, имеющих на этом промежутке суммируемую с квадратом производную, и оператор умножения на независимую переменную $Bx = tx(t)$. Унитарным оператором, осуществляющим унитарную эквивалентность, является в этом случае *Фурье преобразование*.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965, [3] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979.

В. И. Соболев.

УНИТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — представления π_1, π_2 группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в гильбертовых пространствах H_1, H_2, удовлетворяющие условию

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)\, U$$

для нек-рого унитарного оператора $U : H_1 \to H_2$ и всех $x \in X$. См. также *Сплетающий оператор*.

А. И. Штерн.

УНИТАРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ топологической группы — представление топологич. группы унитарными операторами в гильбертовом пространстве. Теория У. п.— один из наиболее разработанных разделов теории представлений топологич. групп, что связано как с его многочисленными приложениями, так и с наличием ряда свойств, упрощающих изучение У. п. А именно, любое У. п. вполне приводимо; для У. п. условия полной неприводимости, тензорной неприводимости, топологич. неприводимости и операторной

неприводимости равносильны; из непрерывности У. п. в слабой операторной топологии следует его непрерывность; для У. п. определена операция тензорного произведения представлений, а также операция перехода к контрагредиентному представлению (в гильбертовом пространстве, комплексно сопряженном к данному), и для операций прямой суммы, тензорного произведения и перехода к контрагредиентному представлению справедлив ряд естественных алгебраических соотношений.

Наиболее разработанной и наиболее важной в приложениях частью общей теории У. п. является теория У. п. локально компактных групп. Не существует описания класса групп, У. п. (или неприводимые У. п.) к-рых разделяют точки группы (1984). Однако если группа G локально компактна, то для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такое неприводимое У. п. π группы G, что $\pi(g)$ — неединичный оператор в пространстве представления (теорема Гельфанда — Райкова). Кроме того, между невырожденными симметричными представлениями групповой алгебры $L_1(G)$ (построенной по левой мере Хаара) и непрерывными У. п. группы G существует естественное взаимно однозначное соответствие $\pi' \mapsto \pi$, определяемое формулой

$$\pi'(f) = \int_G f(y)\,\pi(g)\,dm(g), \quad f \in L_1(G);$$

при этом представление π' алгебры $L_1(G)$ тогда и только тогда является топологически неприводимым (факторпредставлением, представлением данного типа, представлением, эквивалентным или квазиэквивалентным другому), когда соответствующее У. п. π группы G обладает тем же свойством.

Теория циклических У. п. локально компактной группы G, связанная с теорией положительных линейных функционалов на $L_1(G)$, может быть изложена с помощью соответствующих сферич. функций (см. *Представление топологической группы*). Сферич. функции, связанные с У. п. локально компактной группы G, являются непрерывными положительно определенными функциями на группе, и обратно, любая непрерывная положительно определенная функция на G, равная 1 в единице, является сферич. функцией, связанной с циклическим У. п. (и определяется циклич. вектором этого У. п.). Совокупность $B(G)$ линейных комбинаций непрерывных положительно определенных функций на G образует коммутативную банахову алгебру (относительно обычного умножения), называемую алгеброй Фурье—Стилтьеса группы G; замкнутый идеал $A(G)$ в $B(G)$, порожденный семейством функций вида $\varphi * \psi$, где φ, $\psi \in L_2(G)$, наз. алгеброй Фурье группы G. Банаховы алгебры $A(G)$ и $B(G)$ определяют группу G однозначно с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма.

На множестве P_1 непрерывных положительно определенных функций на G, равных 1 в единице группы, топология равномерной сходимости на компактных подмножествах в G совпадает со слабой топологией, определяемой двойственностью между $L_1(G)$ и $L_\infty(G)$ и вложением P_1 в $L_\infty(G)$. Любая функция φ из P_1 есть предел (в этих топологиях) сети выпуклых комбинаций положительно определенных функций, связанных с неприводимыми У. п. группы G; если же группа G сепарабельна, то существует такая положительная мера μ_φ на компактном множестве непрерывных положительно определенных функций на G, не превосходящих 1 по модулю, сосредоточенная на P_1, что

$$\varphi(g) = \int_{P_1} \chi(g)\,d\mu_\varphi(\chi) \text{ для всех } g \in G.$$

Конструкция У. п. по положительно определенной функции допускает обобщение на случай положительно определенных мер на G. Если группа G сепарабельна, то любое представление, определенное положительно определенной мерой, циклично.

У. п. π локально компактной группы G в гильбертовом пространстве H допускает разложение в топологич. прямой интеграл неприводимых У. п. группы G, если либо G, либо H сепарабельны (для несепарабельных групп и пространств это, вообще говоря, неверно); кроме того, в этом случае У. п. π допускает по существу однозначное разложение в прямой интеграл факторпредставлений. В связи с этим существенную роль играет двойственное пространство $\hat{G}$ (факторпространство пространства неприводимых У. п. группы G, рассматриваемого в топологии, определяемой равномерной сходимостью матричных элементов на компактах, и в борелевской структуре, подчиненной этой топологии, по отношению эквивалентности, определяемому унитарной эквивалентностью У. п.) и квазидуальное пространство $\hat{G}$ (факторпространство пространства факторпредставлений группы G, рассматриваемого в борелевской структуре, подчиненной топологии равномерной сходимости матричных элементов на компактах). Таким образом, $\hat{G}$ — топологическое и борелевское пространство, $\hat{G}$ — борелевское пространство, к-рое для сепарабельных групп может быть снабжено топологией, продолжающей топологию на $\hat{G}$). Группа G наз. группой типа I, если все ее факторпредставления имеют тип I; для таких групп вопросы теории У. п. решаются проще, чем в общем случае. К группам типа I относятся алгебраич. группы Ли и алгебраич. группы Шевалле над p-адическими полями, нильпотентные группы Ли и др. Известна характеризация односвязных разрешимых групп Ли типа I. Группа G наз. CCR-группой, если для любого неприводимого У. п. π группы G образ $\tilde{\pi}(L_1(G))$ представления $\tilde{\pi}$ содержится в множестве $BC(H_\pi)$ компактных операторов в пространстве H_π представления π. Всякая CCR-группа является группой типа I. Группа типа I является CCR-группой тогда и только тогда, когда ее двойственное пространство есть T_1-пространство. Нильпотентные группы Ли и линейные полупростые группы Ли являются CCR-группами. Образ представления $(\pi \otimes \sigma)^\wedge$ содержится в $BC(H_{\pi\otimes\sigma})$ для всех неприводимых У. п. π, σ группы G тогда и только тогда, когда все ее неприводимые У. п. конечномерны.

Сепарабельная локально компактная группа имеет тип I тогда и только тогда, когда ее двойственное пространство удовлетворяет нулевой аксиоме отделимости. Др. топологич. свойства спектра (T_1-отделимость, хаусдорфовость, дискретность и др.) также связаны со свойствами группы. Особенно тесные связи между топологич. и алгебраич. свойствами группы и ее двойственного пространства существуют в классах групп, обладающих различными условиями компактности. К числу этих классов локально компактных групп относятся: 1) класс $[MAP]$ максимальных почти периодич. групп (допускающих непрерывное вложение в компактную группу); 2) класс $[SIN]$ групп, содержащих фундаментальную систему окрестностей единичного элемента, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов; 3) класс $[FC]^-$ групп с предкомпактными классами сопряженных элементов; 4) класс $[FIA]^-$ групп с предкомпактной группой внутренних автоморфизмов; 5) класс $[FIR] \subset [MAP] \cap [SIN]$ групп, все неприводимые У. п. к-рых конечномерны; 6) класс $[Z] \subset [FIR]$ групп, факторгруппа к-рых по центру компактна. Дуальные пространства групп класса $[FC]^-$ хаусдорфовы, а группы класса $[FIR]$ дискретны тогда и только тогда, когда их двойственное простран-

ство компактно (хотя и не обязательно отделимо). Теория У. п. групп класса $[MAP]$ связана с теорией почти периодич. функций на локально компактных группах.

Характером У. п. локально компактной группы G наз. такой точный нормальный полуконечный след t на множестве положительных элементов алгебры Неймана μ_π, порожденной семейством $\pi(G)$, что множество элементов x из групповой C^*-алгебры $C^*(G)$ группы G (обертывающей C^*-алгебры групповой алгебры $L_1(G)$) таких, что $t(\pi(x^*, x))$ конечен, переходит в множество, порождающее алгебру Неймана $\pi(G)''$. Если π — факторпредставление (соответственно неприводимое У. п.), то характер t определяет У. п. π однозначно с точностью до квазиэквивалентности (соответственно эквивалентности). Если π_1, π_2 — неприводимые У. п. группы G с характерами t_1, t_2 соответственно, то произведение этих следов определяет след на алгебре Неймана, порожденной У. п. $\pi_1 \otimes \pi_2$. Если этот след является характером представления $\pi_1 \otimes \pi_2$, то он (для сепарабельной группы или сепарабельных пространств представлений) определяет разложение У. п. $\pi_1 \otimes \pi_2$ в прямой интеграл факторпредставлений со следом по однозначно определенной мере (мере Планшереля для $\pi_1 \otimes \pi_2$) на квазиспектре $\hat{G}$. Нахождение мер Планшереля тензорных произведений У. п. является одной из общих задач теории У. п.; в ряде случаев (в частности, для групп $SL(2, \mathbb{C})$, $SL(2, \mathbb{R})$, нек-рых У. п. др. полупростых групп Ли и нек-рых разрешимых групп Ли) эта задача решена (с помощью изучения спектрального разложения оператора Лапласа, методом орбит или методом орисфер).

Иногда характером У. п. π в гильбертовом пространстве H наз. линейный функционал χ_π на инвариантной относительно сдвигов подалгебре $D_\pi(G)$ в алгебре $M(G)$, определенный равенством $\chi_\pi(a) = \operatorname{Tr} \tilde{\pi}(a)$, $a \in D_\pi(G)$, где $\tilde{\pi}$ — представление алгебры $D_\pi(G)$, определенное π (предполагается, что π однозначно определяется представлением $\tilde{\pi}$, операторы представления $\tilde{\pi}$ ядерны и отображение $\tilde{\pi}$ алгебры $D_\pi(G)$ в пространство ядерных операторов непрерывно). Характеры неприводимых У. п. полупростых и нильпотентных групп Ли определяются обобщенными функциями, к-рые в случае полупростых групп измеримы и локально интегрируемы. Характеры неприводимых У. п. разрешимых групп Ли типа I определены, вообще говоря, лишь на подалгебрах алгебры $C_0^\infty(G)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на G. Вычисление характеров во многом основано на формуле для характера индуцированного представления.

Компактная подгруппа K группы G наз. массивной, если ограничение любого неприводимого У. п. π группы G на подгруппу K содержит любое неприводимое У. п. σ группы K с конечной кратностью. Пусть P_σ^π — проектор в пространстве H_π представления π на подпространство, в к-ром действует представление группы K, кратное σ; функции вида

$$\varphi_\sigma^\pi(g) = \operatorname{Tr}\left(P_\sigma^\pi \pi(g)\right), \quad g \in G,$$

наз. K-сферическими функциями представления π (ср. *Представляющая функция*). Группа G с массивной компактной подгруппой принадлежит типу I; каждое неприводимое У. п. группы G имеет характер и определяется однозначно с точностью до эквивалентности любой ненулевой сферич. функцией; дуальное пространство $\hat{G}$ к группе G можно представить в виде счетного объединения (пересекающихся) хаусдорфовых локально компактных пространств (образованных такими $\pi \in \hat{G}$, что $\varphi_\sigma^\pi = 0$ для данного $\sigma \in \hat{K}_\pi$, а размерность соответствующего проектора P_σ^π имеет данное значение). К числу групп с массивной компактной подгруппой относятся линейные полупростые группы Ли и $[Z]$-группы.

Пусть π — У. п. группы G в гильбертовом пространстве H, M_π — алгебра Неймана, порожденная семейством $\pi(G)$. Представление π наз. допускающим след, если существует след на M_π^+, являющийся характером У. п. π. Следом на группе G наз. полуконечный полунепрерывный снизу след на $C^*(G)^+$; след на G наз. характером группы G, если соответствующее У. п. группы G есть факторпредставление. Существует каноническое взаимно однозначное соответствие между множеством характеров группы G, определенных с точностью до положительного множителя, и множеством классов квазиэквивалентности факторпредставлений группы G, допускающих след; при этом факторпредставлениям конечного типа соответствуют непрерывные центральные положительно определенные функции на G.

Регулярное представление локально компактной группы G в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ есть точное непрерывное У. п.; C^*-алгебра, порожденная образом соответствующего представления алгебры $L_1(G)$, наз. приведенной C^*-алгеброй группы G и обозначается $C_r^*(G)$; пусть N — ядро канонического эпиморфизма $C^*(G)$ на $C_r^*(G)$, определяемого регулярным представлением. Группа G аменабельна, т. е. на $L_\infty(G)$ существует инвариантное среднее, тогда и только тогда, когда $N = \{0\}$ (ограниченное представление аменабельной группы в гильбертовом пространстве эквивалентно У. п.). Семейство таких У. п. $\pi \in \hat{G}$, что ядро соответствующего представления C^*-алгебры $C^*(G)$ содержит N, наз. основной серией; остальные У. п. $\pi \in \hat{G}$ образуют дополнительную серию.

Пусть G — унимодулярная сепарабельная локально компактная группа типа I, $W^*(G)$ — алгебра Неймана μ_λ, где λ — регулярное У. п. группы G. Существует единственная положительная мера $\hat{\mu}$ на спектре $\hat{G}$ группы G, удовлетворяющая условию

$$\int_G |f(g)|^2 \, d\mu(g) = \int_{\hat{G}} \operatorname{Tr}(\pi(f)\pi(f)^*) \, d\hat{\mu}(\pi) \qquad (*)$$

для всех $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Мера $\hat{\mu}$ наз. мерой Планшереля. Кроме того, существует изоморфизм пространства $L_2(G)$ на прямой интеграл операторов Гильберта — Шмидта в пространствах представлений $\pi \in \hat{G}$ по мере $\hat{\mu}$, переводящий левое регулярное У. п. λ в прямой интеграл У. п., кратных представлениям π, а след на $W^*(G)$, определяемый следом $\mathcal{E}_e$ на G ($\mathcal{E}_e(f) = f(e)$ для $f \in K(G)$, в прямой интеграл следов $T \otimes 1 \to \operatorname{Tr} T$ на $(\mu_\pi \otimes \mathbb{C}_1)^+$. След $\mathcal{E}_e$ на $C^*(G)^+$ совпадает со следом $f \to \int_{\hat{G}} \operatorname{Tr} \pi(f) \, d\hat{\mu}(\pi)$, $f \in C^*(G)$. Формула $(*)$ наз. формулой Планшереля; она допускает обобщение на несепарабельные унимодулярные локально компактные группы типа I, а также на неунимодулярные сепарабельные локально компактные группы и сепарабельные группы не типа I. Одной из задач теории У. п. является явное построение меры Планшереля для данной локально компактной группы. Эта задача решена лишь частично (напр., для полупростых вещественных групп Ли, разрешимых групп Ли типа I, а также некоторых групп движений, некоторых групп Шевалле и нек-рых групп с условиями компактности). С разложением регулярного У. п. и формулой Планшереля связана теория квадратично интегрируемых представлений, *дискретных серий* и *интегрируемых представлений*.

Полное описание неприводимых У. п. локально компактных групп даже в случае групп Ли не известно.

Оно получено лишь для разрешимых групп Ли типа I, нек-рых редуктивных групп Ли, а также групп Шевалле (в малых размерностях), нек-рых нильпотентных локально компактных групп Ли и нек-рых полупрямых произведений. В этих описаниях решающую роль играет операция индуцирования (и ее обобщения), в частности метод орбит (и его обобщения). Задача изучения более общих проективных У. п. и У. п. с мультипликаторами связана с теорией обычных У. п. с помощью теории (непрерывных или борелевских) когомологий групп. Для групп не типа I полного описания факторпредставлений нет (с точностью до квазиэквивалентности), хотя для нек-рых из них получено описание факторпредставлений конечного типа.

Теория У. п. играет решающую роль в теории ряда (банаховых и топологических) групповых алгебр: в изучении свойств винеровости и полной симметричности, описании максимальных односторонних и двусторонних идеалов и т. д. Теория У. п. играет важную роль также и в вопросах теории представлений и гармонического анализа, требующих использования неунитарных представлений — таких, как построение ограниченных серий и дополнительных серий; определении явного вида операторов, сплетающих представления из аналитич. продолжения основной серии У. п., изучение зацеплений вполне неприводимых представлений, развитие гармонич. анализа в пространствах функций на группах и однородных пространствах, отличных от пространств L_2, изучение структуры и свойств групповых алгебр (алгебры мер, алгебры $L_1(G)$, топологич. алгебры $K(G)$).

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978, [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [3] его же, Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [4] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970, [5] Желобенко Д. П., Штерн А. И., Представления групп Ли, М., 1983, [6] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974, [7] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966, [8] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [9] Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1980; [10] Климык А. У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп, К., 1979; [11] Mackey G. W., Unitary group representations in physics, probability and number theory, Reading (Mass.), 1978, [12] Bernat P. [e a.], Representations des groupes de Lie résolubles, P., 1972, [13] Brezin J., Harmonic analysis on compact solvmanifolds, B.— [a. o.], 1977, [14] Non-commutative harmonic analysis, B.— [a. o.], 1979 *А. И. Штерн.*

УНИТАРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное преобразование A унитарного пространства L, сохраняющее скалярное произведение векторов, т. е. такое, что для любых векторов x и y из L имеет место равенство

$$(Ax,\ Ay)=(x,\ y).$$

У. п. сохраняет, в частности, длину вектора. Обратно, если линейное преобразование унитарного пространства сохраняет длины всех векторов, то оно унитарно. Собственные значения У. п. равны по модулю 1; собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Линейное преобразование A конечномерного унитарного пространства L является У. п. тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет любому из следующих условий:

1) в любом ортонормированном базисе преобразованию A соответствует *унитарная матрица*;

2) A переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный;

3) в L существует ортонормированный базис, состоящий из собственных для A векторов, причем соответствующая A в этом базисе диагональная матрица имеет диагональные элементы, равные по модулю 1.

У. п. данного унитарного пространства образуют относительно умножения преобразований группу (наз. *унитарной группой*). *А. Л. Онищик.*

УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в к-ром задано скалярное умножение векторов (причем произведение $(a,\ b)$ векторов a и b предполагается, вообще говоря, комплексным числом) и выполняются следующие аксиомы:

1) $(a,\ b)=\overline{(b,\ a)}$;

2) $(\alpha a,\ b)=\alpha\,(a,\ b)$;

3) $(a+b,\ c)=(a,\ c)+(b,\ c)$;

4) если $a\neq 0$, то $(a,\ a)>0$,

т. е. скалярный квадрат ненулевого вектора есть положительное действительное число.

У. п. не предполагается конечномерным. В У. п. точно так же, как и в евклидовых пространствах, вводятся понятия ортогональности и ортонормированной системы векторов, а в конечномерном случае доказывается существование ортонормированного базиса. *О. А. Иванова.*

УНИТАРНЫЙ МОДУЛЬ — левый (или правый) модуль M над кольцом с единицей e такой, что умножение на e служит тождественным оператором, то есть отображение $m\to em$ (соответственно $m\to me$ для правого модуля), $m\in M$,— тождественный автоморфизм группы M. *О. А. Иванова.*

УНИТАРНЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор U, отображающий линейное нормированное пространство X на линейное нормированное пространство Y и такой, что $\|Ux\|_Y=\|x\|_X$. Наиболее важными являются У. о., отображающие гильбертово пространство в себя. Такой оператор унитарен тогда и только тогда, когда $(x,\ y)=(Ux,\ Uy)$ для всех $x,\ y\in X$. Др. характеристич. на признаками унитарности оператора $U: H\to H$ являются: 1) $U^*U=UU^*=I$, т. е. $U^{-1}=U^*$; 2) спектр оператора U лежит на единичной окружности, и имеет место спектральное разложение $U=\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,dE_\varphi$. Совокупность У. о., действующих в H, образует группу.

Примером У. о. и его обратного в пространстве $L_2(-\infty,\ \infty)$ являются взаимно обратные *Фурье преобразования*.

Лит.: [1] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979, [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966, [3] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965 *В. И. Соболев.*

УНИФОРМИЗАЦИЯ множества $A\subset\mathbb{C}^N$ (или $A\subset\mathbb{C}P^N$) — тройка $(f,\ D,\ G)$, где $f=(f_1,\ \ldots,\ f_N)$ — система мероморфных в области $D\subset\mathbb{C}^N$ (соответственно $D\subset\mathbb{C}P^N$) функций, определяющая голоморфное *накрытие* $D_0\to f(D_0)$, причем $f(D_0)$ плотно в A, а G — собственно разрывная группа биголоморфных автоморфизмов D, ограничение к-рой на D_0 служит группой накрывающих гомеоморфизмов этого накрытия, т. е. D_0/G биголоморфно эквивалентно $f(D_0)$.

Можно говорить также об У. многозначных аналитических функций $w=F(z):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$, понимая под этим У. множества $A=\{(z,\ w)\}$; это соответствует параметризации F с помощью однозначных мероморфных функций.

Напр., комплексная кривая $z^2+w^2=1$ в $\mathbb{C}^2$ униформизируется тройкой $((z,\ w),\ \mathbb{C},\ G)$, где $z=\cos t$, $w=\sin t$, G — группа сдвигов $t\to t+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, или тройкой $((z,\ w),\ D,\ G)$, где

$$z=(1-t^2)/(1+t^2),\quad w=2t/(1+t^2),$$
$$D=\mathbb{C}\setminus\{i,\ -i\},$$

G — тривиальная группа. Менее тривиальный пример дает кубическая кривая $w^2=a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$, к-рая не допускает рациональной параметризации, но может быть униформизирована с помощью *эллиптических функций*, а именно тройкой $((f_1, f_2), D, G)$, где f_1 и f_2 — рациональные функции от $\wp$-функции Вейерштрасса $\wp(t)$ и ее производной с соответствующими периодами ω_1, ω_2, а G — группа, порожденная сдвигами $t \to t+\omega_1$, $t \to t+\omega_2$.

Проблема У. произвольной алгебраич. кривой, определяемой общим алгебраич. уравнением

$$P(z, w)=\sum_{j,\ k} a_{jk}z^j w^k=0, \qquad (*)$$

где P — неприводимый алгебраич. многочлен над $\mathbb{C}$, возникла еще в 1-й пол. 19 в., в частности в связи с интегрированием алгебраич. функций. А. Пуанкаре (H. Poincaré) поставил вопрос об У. множества решений произвольных аналитич. уравнений вида (*), когда P — сходящийся степенной ряд от двух переменных, рассматриваемый с его всевозможными аналитич. продолжениями. У. алгебраич. и произвольных аналитич. многообразий составляет содержание двадцать второй проблемы Гильберта. Полного решения проблемы У. пока (к 1984) не получено, за исключением одномерного случая.

Введя во множестве пар (z, w) в $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющих (*), комплексную структуру с помощью элементов соответствующей алгебраич. функции $w(z)$ (или $z(w)$), получают компактную риманову поверхность, при этом координаты точек кривой (*) будут мероморфными функциями на этой поверхности. Более того, все компактные римановы поверхности с точностью до конформной эквивалентности получаются таким образом. Поэтому проблема У. алгебраич. кривых сводится к проблеме У. римановых поверхностей.

У. произвольной римановой поверхности S наз. тройка (D, π, G), где D — область на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$, $\pi : D \to S$ — регулярное голоморфное накрытие с накрывающей группой G конформных автоморфизмов D. Общая проблема заключается в нахождении и описании всех возможных таких троек для данной римановой поверхности.

Возможность У. любой римановой поверхности S, дающая принципиальное решение проблемы, была установлена в классич. работах П. Кебе (P. Koebe), А. Пуанкаре и Ф. Клейна (F. Klein); было получено окончательное решение, дающее описание всех возможных У. поверхности S (см. [4] — [6]). Справедлива теорема униформизации Клейна — Пуанкаре (доказанная в общем случае А. Пуанкаре, см. [2]); каждая риманова поверхность S конформно эквивалентна фактору D/G, где D — одна из трех канонических областей: риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$, комплексная плоскость $\mathbb{C}$, единичный круг Δ, а G — собственно разрывная группа мёбиусовых (дробно-линейных) автоморфизмов D, определяемая с точностью до сопряжения в группе всех мёбиусовых автоморфизмов D.

Случаи $D=\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и Δ взаимно исключают друг друга. Поверхности S с такими универсальными голоморфными накрытиями наз. соответственно эллиптическими, параболическими и гиперболическими. При этом $D=\overline{\mathbb{C}}$ только в случае, когда сама S конформно эквивалентна $\overline{\mathbb{C}}$ (и, значит, G тривиальна); $D=\mathbb{C}$, когда S конформно эквивалентна либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, либо тору, и соответственно этому G либо тривиальна, либо есть группа, порожденная сдвигом $z \to z+\omega$ ($\omega \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$), либо есть группа, порожденная двумя сдвигами $z \to z+\omega_1$, $z \to z+\omega_2$, где ω_1, $\omega_2 \neq 0$ — комплексные числа с $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)\neq 0$. В остальных случаях S конформно эквивалентна Δ/G, где G — фуксова группа без кручения. Каноническая проекция $\pi : D \to S$ является неразветвленным накрытием и униформизирует все функции f на S, так как функции $f\circ\pi$ однозначны в D. Теорема Клейна — Пуанкаре обобщается и на разветвленные накрытия с заданными порядками ветвления.

Несколько др. подход к проблеме У. (см. [3]) опирается на принцип: если риманова поверхность $\tilde{S}$ гомеоморфна области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ (не обязательно односвязной), то $\tilde{S}$ и конформно эквивалентна D. Тем самым проблема У. сводится к топологич. проблеме нахождения всех (вообще говоря, разветвленных) плоских накрытий $\tilde{S} \to S$ данной римановой поверхности S. Решение этих проблем дается следующими теоремами Маскита (см. [4], [5]).

I. Пусть S — ориентируемая поверхность, $v_1, \ldots, v_n, \ldots$ — множество простых попарно не пересекающихся петель на S. Если $\tilde{S} \to S$ — регулярное накрытие с определяющей подгруппой $N=\langle v_1^{\alpha_1}, \ldots, v_n^{\alpha_n}, \ldots\rangle$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — натуральные числа, то $\tilde{S}$ — плоская поверхность, т. е. гомеоморфна области в $\overline{\mathbb{C}}$.

II. Пусть $\tilde{S}$ — плоская поверхность и $\tilde{S} \to S$ — регулярное накрытие ориентируемой поверхности S с определяющей подгруппой N. Если S — поверхность конечного типа, т. е. $\pi_1(S)$ конечно порождена, то существуют конечное множество простых попарно не пересекающихся петель $v_1, \ldots, v_n$ и такие натуральные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $\langle v_1^{\alpha_1}, \ldots, v_n^{\alpha_n}\rangle = N$.

III. Если $\tilde{S}$ — плоская риманова поверхность и G — собственно разрывная группа конформных автоморфизмов $\tilde{S}$, то существует конформный гомеоморфизм $h : \tilde{S} \to D\subset\overline{C}$ такой, что hGh^{-1} есть *клейнова группа* с инвариантной компонентой D.

Таким образом, каждая риманова поверхность униформизируется клейновой группой. Напр., если S — замкнутая риманова поверхность рода $g\geqslant 1$, то ее фундаментальная группа имеет копредставление

$$\pi_1(S)=\left\{a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g : \prod_{j=1}^{g}[a_j, b_j]=1\right\}$$

и в качестве определяющей плоское накрытие $\tilde{S}$ нормальной подгруппы N можно взять наименьшую нормальную подгруппу, порожденную $a_1, \ldots, a_g$ (или $b_1, \ldots, b_g$); тогда S униформизируется группой Шотки G рода g — свободной чисто локсодромической клейновой группой с g образующими (классич. теорема Кёбе о разрезах).

У. римановых поверхностей конечного типа возможные клейновы группы могут быть классифицированы. Для этого используется понятие факторподгруппы. Если G — клейнова группа с инвариантной компонентой D (G), то ее подгруппа H наз. факторподгруппой G, если H — максимальная подгруппа, для к-рой: a) ее инвариантная компонента $D(H)\supset D(G)$ односвязна; b) H не содержит случайных параболических элементов g (т. е. таких параболич. элементов, что при конформном изоморфизме $h : D(H) \to \Delta$ образ $h\circ g\circ h^{-1}$ будет гиперболическим); c) каждый параболический элемент G с неподвижной точкой на предельном множестве H принадлежит H. Напр., в теореме Клейна — Пуанкаре каждая факторподгруппа G совпадает с самой G, а в теореме Кёбе о разрезах все факторподгруппы G тривиальны. У. (D, π, G) римановой поверхности S, где D — инвариантная компонента G, наз. стандартной, если G не имеет кручения и не содержит случайных параболич. элементов. Для замкнутых поверхностей все такие У. описываются следующей теоремой (см. [6]).

Пусть S — замкнутая риманова поверхность рода $g>0$ и $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество простых попарно не

пересекающихся петель на S. Тогда существует единственная с точностью до конформной эквивалентности стандартная У. (D, π, G) поверхности S такая, что каждая факторподгруппа G является либо фуксовой, либо элементарной и накрытие $\pi : D \to S$ построено по наименьшей нормальной подгруппе $\pi_1(S)$, натянутой на петли $v_1, \ldots, v_n$.

Теория *квазиконформных отображений* и *Тайхмюллера пространств* позволила доказать возможность одновременной У. нескольких римановых поверхностей одной клейновой группой, а также всех римановых поверхностей данного типа (см. [7]).

Лит.: [1] Klein Chr. F., «Math. Ann », 1883, Bd 21, S. 141—218; [2] Poincaré H., «Acta math.», 1907, v. 31, p. 1—63, [3] Koebe P., «Göttinger Nachr.», 1907, S. 177—210; [4] Maskit B., «Ann. Math.», 1965, v. 81, № 2, p. 341—55; [5] его же, «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, № 3, p. 718—22; [6] его же, в кн.: Contributions to analysis, N. Y.— L., 1974, p. 293—312, [7] Берс Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 153—98, [8] Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А., Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах, Новосиб., 1981; [9] Неванлинна Р., Униформизация, пер с нем., М., 1955, [10] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936.

Н. А. Гусевский.

УНИФОРМИЗУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ — элемент π дискретно нормированного кольца A с простым идеалом $\mathfrak{p}$ такой, что $\mathfrak{p}=A\pi$. Если π_1, π_2 — два У. э. в A, то элемент $\pi_1\pi_2^{-1}$ обратим в A. Пусть R — нек-рая система представителей в A элементов поля вычетов $A/\mathfrak{p}$. Тогда любой элемент $a \in A$ однозначно записывается в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} r_i \pi^i$, где $r_i \in R$, π — У. э. Если кольцо A полно относительно дискретного нормирования, то любой степенной ряд указанного вида представляет нек-рый элемент $a \in A$.

Если A — локальное кольцо функций простой точки x алгебраич. кривой X, то π является У. э. тогда и только тогда, когда π имеет нуль первого порядка в точке x.

Л. В. Кузьмин.

УНИЧТОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРЫ — семейство замкнутых линейных операторов $\{a(f), f \in H\}$, где H — некрое гильбертово пространство, действующих в *Фока пространстве*, построенном над пространством H (т. е. в симметризованной $\Gamma^s(H)$ или антисимметризованной $\Gamma^a(H)$ тензорной экспоненте пространства H) так, что на векторах $(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_\alpha \in \Gamma^\alpha(H)$, $\alpha = s, a$, являющихся симметризованными ($\alpha = s$) или антисимметризованными ($\alpha = a$) тензорными произведениями последовательностей элементов $f_1, \ldots, f_n \in H$, $n = 1, 2, \ldots$, из H, они задаются формулами:

$$a(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_s = \sum_{i=1}^{n} (f, f_i)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_{i-1} \otimes f_{i+1} \otimes \ldots \otimes f_n)_s \quad (1)$$

в симметричном случае, и

$$a(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_a = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (f, f_i)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_{i-1} \otimes f_{i+1} \otimes \ldots \otimes f_n)_a \quad (2)$$

в антисимметричном случае; вакуумный вектор $\Omega \in \Gamma^\alpha(H)$, $\alpha = s, a$ (т. е. единичный вектор в подпространстве констант из $\Gamma^\alpha(H)$) переводится операторами $a(f)$ в нуль. Операторы $\{a^*(f), f \in H\}$, сопряженные к операторам $a(f)$, наз. операторами рождения, действуют на векторы $(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_\alpha$, $\alpha = s, a$, $h = 1, 2, \ldots$ по формулам

$$a^*(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_\alpha = (f \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_\alpha \quad (3)$$

и

$$a^*(f)\,\Omega = f.$$

При этом для каждого $n > 0$ подпространство $\Gamma_n^\alpha(H)^{\otimes n}_\alpha$, $\alpha = s, a$ (симметризованная или антисимметризованная n-я тензорная степень H) переводится оператором $a(f)$ в подпространство $\Gamma_{n-1}^\alpha(H)$, а оператором $a^*(f)$ — в подпространство $\Gamma_{n+1}^\alpha(H)$.

При физич. интерпретации пространства Фока $\Gamma^\alpha(H)$ $\alpha = s, a$ как пространства состояний системы, состоящей из произвольного (конечного) числа квантовых частиц с пространством H в качестве пространства состояний отдельной частицы, подпространство $\Gamma_n^\alpha(H)$ соответствует n-частичным состояниям системы, т. е. состояниям, в к-рых имеется ровно n частиц, и, таким образом, n-частичные состояния операторы $a(f)$ переводят в $(n-1)$-частичные («уничтожают» частицу), а операторы $a^*(f)$ — в $(n+1)$-частичные («рождают» частицу).

Операторы $a(f)$ и $a^*(f)$ образуют неприводимое семейство операторов и удовлетворяют следующей системе перестановочных соотношений: в симметричном случае

$$a(f_1)a(f_2) - a(f_2)a(f_1) = a^*(f_1)a^*(f_2) - a^*(f_2)a^*(f_1) = 0,$$
$$a^*(f_2)a(f_1) - a(f_1)a^*(f_2) = -(f_1, f_2)E \quad (4)$$

(соотношения коммутации), в антисимметричном случае

$$a(f_1)a(f_2) + a(f_2)a(f_1) = a^*(f_1)a^*(f_2) + a^*(f_2)a^*(f_1) = 0,$$
$$a(f_1)a^*(f_2) + a^*(f_2)a(f_1) = (f_1, f_2)E \quad (5)$$

(соотношения антикоммутации), здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H, а E — единичный оператор в $\Gamma^s(H)$ или $\Gamma^a(H)$. Кроме описанных здесь семейств операторов $a(f)$ и $a^*(f)$, $f \in H$ в случае бесконечномерного пространства H существуют и другие, не эквивалентные им, неприводимые представления коммутационных и антикоммутационных соотношений (4) или (5). Иногда их также называют операторами рождения и уничтожения. В случае же конечномерного H все неприводимые представления как коммутационных, так и антикоммутационных соотношений унитарно эквивалентны.

Операторы $\{a(f), a^*(f), f \in H\}$ являются во многих отношениях удобными «образующими» в совокупности всех линейных операторов, действующих в пространстве $\Gamma^\alpha(H)$, $\alpha = s, a$, и представление таких операторов в виде сумм произведений операторов рождения и уничтожения (нормальная форма оператора) бывает часто полезным при их исследовании. Связанный с этим формализм носит название метода вторичного квантования, см. (1).

В частном, но важном для применений случае, когда $H = L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, (или в более общем случае $H = L_2(M, \sigma)$, где (M, σ) — пространство с мерой) семейство операторов $a(f)$, $a^*(f)$, $f \in L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$, порождает две операторнозначные обобщенные функции $a(x)$ и $a^*(x)$ такие, что

$$a(f) = \int_{\mathbb{R}^\nu} a(x) f(x)\, d^\nu x, \quad a^*(f) = \int_{\mathbb{R}^\nu} a^*(x) \overline{f}(x)\, d^\nu x.$$

Введение функций $a(x)$ и $a^*(x)$ для формализма вторичного квантования оказывается удобным (напр., позволяет непосредственно рассматривать операторы вида

$$\int_{(\mathbb{R}^\nu)^{m+n}} K(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)\, a^*(x_1) \ldots a^*(x_n) \times a(y_1) \ldots a(y_n)\, d^\nu x_1 \ldots d^\nu x_n\, d^\nu y_1 \ldots d^\nu y_m, \quad n, m = 1, 2, \ldots,$$

где $K(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ — нек-рая «достаточно хорошая» функция), не прибегая к их разложению в ряды по мономам

$$a^*(f_1) \ldots a^*(f_n)\, a(g_1) \ldots a(g_m),$$

где

$$f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m \in L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x).$$

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [2] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67—122; [3] Gärding L., Wightman A., «Proc. Nat. Acad. sci. USA», 1954, v. 40, № 7, p. 617—26. *Р. А. Минлос.*

УОЛЛА ГРУППА — абелева группа, к-рая сопоставляется кольцу с инволюцией, являющейся антиизоморфизмом. В частности, она определена для группового кольца $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$, где $\pi_1(X)$ — фундаментальная группа пространства. Если X — *Пуанкаре комплекс*, то в этой группе определяются *препятствия* к существованию простой гомотопич. эквивалентности в классе *бордизмов* из $\Omega_*(X, \nu)$. Это препятствие наз. *Уолла инвариантом*, см. [1].

Пусть R — кольцо с инволюцией: $R \to R$, являющейся антиизоморфизмом, т. е. $\overline{ab}=\overline{b}\,\overline{a}$. Если P — левый R-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(P, R)$ является левым R-модулем относительно действия $(af)(x)=f(x)\overline{a}$, $f \in \mathrm{Hom}_R(P, R)$, $a \in R$, $x \in P$. Этот модуль обозначается через P^*. Для конечнопорожденного проективного R-модуля P имеется изоморфизм $P \to P^{**} : x \to (f \to \overline{f(x)})$, и можно отождествить P и P^{**} по этому изоморфизму.

Квадратичной $(-1)^k$-формой над кольцом с инволюцией R наз. пара (P, φ), где P — конечнопорожденный проективный R-модуль, а $\varphi : P \to P^*$ — такой гомоморфизм, что $\varphi=(-1)^k\varphi^*$. Морфизмом форм $f : (P, \varphi) \to (Q, \psi)$ наз. гомоморфизм $f : P \to Q$, для к-рого $f^*\psi f=\varphi$. Если φ — изоморфизм, то форма (P, φ) наз. невырожденной. Лагранжевой плоскостью невырожденной формы наз. прямое слагаемое $L \subset P$, для к-рого $L=\mathrm{Ann}\,\varphi(L)$. Если $L \subset P$ — прямое слагаемое, и $L \subset \mathrm{Ann}\,\varphi(L)$, то L наз. сублагранжевой плоскостью. Лагранжевы плоскости L, G формы (P, φ) наз. дополнительными, если $L+G=P$ и $L \cap G=\{0\}$.

Пусть L — проективный R-модуль. Невырожденная $(-1)^k$-форма $H_{(-1)^k}(L)=\left(L \oplus L^*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}\right)$ наз. гамильтоновой, а $L \subset L \oplus L^*$ и $L^* \subset L \oplus L^*$ — ее дополнительными лагранжевыми плоскостями. Если L — лагранжева плоскость формы (P, φ), то она изоморфна гамильтоновой форме $H_{(-1)^k}(L)$. Выбор дополнительной к L лагранжевой плоскости равносилен выбору изоморфизма $(P, \varphi) \to H_{(-1)^k}(L)$, при к-ром эта дополнительная плоскость отождествляется с L^*.

Пусть $U_{2k}(\mathbb{R})$ — абелева группа, порожденная классами эквивалентности (при изоморфизме) невырожденных квадратичных $(-1)^k$-форм (P, φ) с соотношениями: 1) $[(P, \varphi)]+[(Q, \varphi)]=[(P \oplus Q, \varphi \oplus \psi)]$; 2) $[(P, \varphi)]=0$, если (P, φ) имеет лагранжеву плоскость. Тройка $(H; F, L)$, состоящая из невырожденной $(-1)^k$-формы H и пары лагранжевых плоскостей F, L, наз. $(-1)^k$-формацией. Формация наз. тривиальной, если F и L дополнительны, и элементарной, если существует лагранжева плоскость формы H, дополнительная и к F, и к L. Тривиальная формация $(H_{(-1)^k}(G); G, G)$ наз. гамильтоновой. Изоморфизмом формаций $f : (H; F, L) \to (H_1; F_1, L_1)$ наз. изоморфизм форм $f : H \to H_1$, для к-рого $f(F)=F_1$, $f(L)=L_1$. Всякая тривиальная формация изоморфна гамильтоновой.

Пусть $U_{2k+1}(R)$ — абелева группа, порожденная классами эквивалентности (при изоморфизме) $(-1)^k$-формаций, со следующими соотношениями:

1) $[(H; F, L)] \oplus [(H_1; F_1, L_1)]=[(H \oplus H_1; F \oplus F_1/L \oplus L_1)]$;

2) $[(H; F, L)]=0$, если формация элементарна или тривиальна. Группы $U_n(R)$ и наз. группами Уолла кольца R.

Лит.: [1] Wall C. T. C., Surgery on compact manifolds, L.— N. Y., 1970; [2] Ranicki A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1980, v. 40, pt 1, p. 87—192. *А. В. Шокуров.*

УОЛЛА ИНВАРИАНТ — элемент из *Уолла группы*, являющийся препятствием к перестройке бордизма до простой гомотопич. эквивалентности.

Пусть X — конечный *Пуанкаре комплекс*, ν — расслоение над X и $x=[(M, \varphi, F)] \in \Omega(X, \nu)$ — нек-рый класс, где m — формальная размерность X и $\varphi : M \to X$ имеет степень 1. Отображение всегда можно перестроить до $\left[\frac{m}{2}\right]$-связного отображения. Пусть $\Lambda=\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ — групповое кольцо, и $^-$ — инволюция в нем: $\Lambda \to \Lambda$, задаваемая по формуле $\overline{\Sigma g n(g) g}=\Sigma w(g) n(g) g^{-1}$, где $w : \pi_1(X) \to \{1, -1\}$ определяется первым *Штифеля — Уитни классом* расслоения ν. Пусть

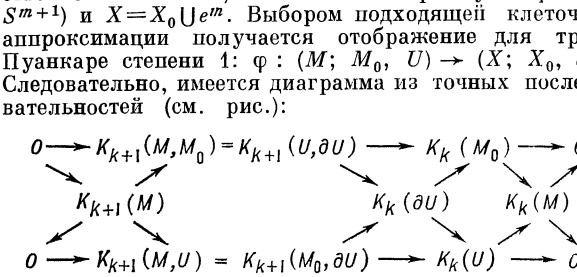
$$K^*(M)=\mathrm{coker}\,(\varphi^* : H^*(X) \longrightarrow H^*(M)),$$

$$K^*(M)=\ker(\varphi^* : H^*(M) \longrightarrow H_*(X))$$

(коэффициенты в кольце Λ). Инволюция является антиизоморфизмом и определены группы Уолла $U_n(\Lambda)=L_n(\pi_1(X), w)$.

Пусть теперь $m=2k \geqslant 4$. Тогда в стабильно свободном Λ-модуле $G=K_k(M)=\pi_{k+1}(\varphi)$ выделен базис, и *Пуанкаре двойственность* индуцирует простой изоморфизм $\lambda : G \to G^*=K^k(M)$, причем (G, λ) является $(-1)^k$-формой. Поэтому получается класс $\Theta_{2k}(x)=[(G, \lambda)] \in L_{2k}(\pi_1(X), w)$.

Пусть теперь $m=2k+1 \geqslant 5$. Можно выбрать образующие в $\pi_{k+1}(\varphi)=K_k(M; \Lambda)$ так, что они представляются вложениями $f_i : S^k \times D^{k+1} \to M$, образы к-рых не пересекаются, и эти образы соединены путями с отмеченной точкой. Пусть $U=\bigcup_i \mathrm{Im}\, f_i$, $M_0=M \setminus \mathrm{Int}\, U$. Поскольку $\varphi \circ f_i \sim 0$, то можно заменить φ гомотопным отображением и считать, что $\varphi(u)=*$. Так как X — комплекс Пуанкаре, то можно заменить X комплексом с единственной m-клеткой, т. е. имеется пара Пуанкаре (X_0, S^{m+1}) и $X=X_0 \cup e^m$. Выбором подходящей клеточной аппроксимации получается отображение для триад Пуанкаре степени 1: $\varphi : (M; M_0, U) \to (X; X_0, e^m)$. Следовательно, имеется диаграмма из точных последовательностей (см. рис.):



При этом имеется невырожденное спаривание $\lambda : K_k(\partial U) \times K_k(\partial U) \to \Lambda$, причем $H=(K_k(\partial U), \lambda)$ — квадратичная $(-1)^k$-форма, а $K_{k+1}(U, \partial U)$ и $K_{k+1}(M_0, \partial U)$ определяют ее лагранжевы плоскости L и P. Тогда $\Theta_{2k+1}(x)=[(H; L, P)] \in U_{2k+1}(\Lambda)=L_{2k+1} \times (\pi_1(x), w)$.

Определенные выше элементы $\Theta_m(x) \in L_m(\pi_1(x), w)$ и наз. инвариантами Уолла. Важным их свойством является независимость $\Theta(x)$ от произвола конструкции и то, что равенство $\Theta(x)=0$ равносильно представимости класса простой гомотопич. эквивалентностью, см. [1].

Лит.: [1] Wall C., Surgery on compact manifolds, L.— N. Y., 1970; [2] Ranicki A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1980, v. 40, pt 1, p. 87—192; [3] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, № 2, с. 253—88; № 3, с. 475—500. *А. В. Шокуров.*

УОЛМЕНА БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ (правильнее — Уолмена — Шанина *бикомпактное расширение*) ωX топологического пространства X, удовлетворяющего аксиоме T_1 (см. *Отделимости аксиомы*), определяется как множество, точками к-рого являются максимальные центрированные системы $\xi=\{F_\alpha\}$ замкнутых в X множеств. Топология в ωX задаётся замкнутой базой $\{\Phi_F\}$, где F пробегает любые замкнутые в X

множества, а Φ_F состоит из тех и только тех $\xi=\{F_\alpha\}$, что $F=F_\alpha$ при нек-ром α.

У. б. р. было открыто Г. Уолменом [1].

У. б. р. всегда является бикомпактным T_1-пространством: для нормального пространства оно совпадает со *Стоуна — Чеха бикомпактным расширением*.

Если при определении расширения ωX брать не любые замкнутые множества, а только принадлежащие нек-рой фиксированной замкнутой базе, получаем так наз. бикомпактные расширения уолменовского типа. Не всякое хаусдорфово бикомпактное расширение тихоновского пространства является расширением уолменовского типа.

Лит.: [1] Wallman H., «Ann. Math.», 1941, v. 42, p. 687—97. *П. С. Александров.*

УОЛША СИСТЕМА функций $\{W_n(x)\}$ на отрезке [0, 1] — функции $W_0(x)\equiv 1$ и $W_n(x)=r_{\nu_1}(x)\cdot r_{\nu_2}(x)\cdot\ldots\cdot r_{\nu_m}(x)$ при $n\geqslant 1$, где $r_k(x)=\operatorname{sign}\sin 2^{k+1}\pi x$, $k=0, 1, 2, \ldots$,— функции Радемахера, $n=2^{\nu_1}+2^{\nu_2}+\ldots+2^{\nu_m}$, $\nu_1>\nu_2>\ldots>\nu_m>0$ — двоичное представление числа $n\geqslant 1$. Эта система была определена и исследована Дж. Уолшем [1], хотя еще в 1900 году Баррет использовал функции этой системы в вопросах связи при размещении проводников в открытых проводных линиях. В теории связи более предпочтительным является другое определение У. с. Именно, если

$$W_0^*(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in[0,1),\\ 0 & \text{при } x\in(-\infty,0)\cup[1,\infty),\end{cases}$$

то функции $W_n^*(x)$ определяются следующими рекуррентными формулами:

$$W^*_{2j+p}(x)=W_j^*(2x)+(-1)^{j+p}W_j^*(2x-1),$$
$$p=0,\ 1;\quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Системы $\{W_n(x)\}$ и $\{W_n^*(x)\}$ отличаются только нумерацией в пачках $2^m\leqslant n\leqslant 2^{m+1}-1$, $m=1, 2, \ldots$ Например: $W^*_{2m}(x)=W_{3\cdot 2m-1}(x)$, $W^*_{2m-1}(x)=W_{2m}(x)$, $W_{2^{m+1}-2}(x)=W_{2^m+1}(x)$ и т. д. Номер k функции $W_k^*(x)$ соответствует числу перемен знака этой функции в промежутке (0,1), т. е. является аналогом удвоенной частоты для синусоидальных функций. У. с. ортонормирована на отрезке [0,1] и ее можно рассматривать как естественное пополнение системы Радемахера.

У. с. образуют коммутативную мультипликативную группу, единичным элементом в к-рой является функция $W_0(x)$, а обратным к $W_k(x)$ является снова $W_k(x)$.

Лит. [1] Walsh J. Z., «Amer J. Math.», 1923, v. 45, p. 5—24, [2] Fowle F. F., «Trans. AJEE», 1905, v. 23, p. 659—87, [3] Fine N. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 65, p. 372—414, [4] Качмаж С., Штейнауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1958, [5] Хармут Х. Ф., Передача информации ортогональными функциями, пер. с англ., М., 1975. *А. В. Ефимов.*

УПАКОВКА конечного (или бесконечного) семейства множеств M_1, M_2, ... в множестве A — выполнение условий

$$M_i\subset A,\quad M_i\cap M_j=\varnothing,\quad i\neq j.$$

В *геометрии чисел* обычно $A=\mathbb{R}^n$, $M_i=M+a_i$, где M — заданное множество, a_i пробегает нек-рое множество $\mathfrak{Z}$ векторов из $\mathbb{R}^n$ ($i=1, 2, \ldots$); в этом случае говорят об упаковке $(M, \mathfrak{Z})$ множества M по системе векторов $\mathfrak{Z}$. Если $\mathfrak{Z}=\Lambda$ — точечная решетка в $\mathbb{R}^n$, то говорят о решетчатой упаковке (M, Λ).

Рассматриваются также У. множеств M_1, M_2, ... не только в $\mathbb{R}^n$, но и в др. многообразиях — на n-мерной сфере, в заданной области и т. д. (см. [1], [2]). Иногда У. определяется как система множеств (напр., замкнутых областей) M_1, M_2, ... , не пересекающихся по внутренним точкам (см. [1]).

Лит. [1] Барановский Е. П., в кн.: Итоги науки. Алгебра Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 189—225; [2] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [3] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968. *А. В. Малышев.*

УПЛОТНЕНИЕ — биективное непрерывное отображение. *М. И. Войцеховский.*

УПЛОТНЯЮЩИЙ ОПЕРАТОР — оператор U, вообще, нелинейный, определенный на совокупности $\mathfrak{M}$ всех подмножеств множества M нормированного векторного пространства X, со значениями в нормированном векторном пространстве Y и такой, что $\psi_Y[U(A)]$ — мера некомпактности множества $U(A)\subset Y$ — меньше меры некомпактности $\psi_X(A)$ любого некомпактного множества $A\in\mathfrak{M}$. Меры некомпактности могут быть при этом как совпадающие, так и различные. Напр., в качестве и ψ_X, и ψ_Y можно взять меру некомпактности Куратовского: $\alpha(A)=\inf\{d>0|A$ можно разбить на конечные подмножества диаметра, меньшего $d\}$.

На непрерывные У. о. переносятся многие конструкции и факты теории вполне непрерывных операторов, напр. вращение уплотняющих векторных полей, принципы неподвижной точки У. о. и т. д.

Лит. [1] Садовский Б. Н., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в 1, с. 81—146, [2] Kuratowski C., «Fund. math.», 1930, t. 15, p. 301—09. *В. И. Соболев.*

УПЛОЩЕНИЯ ТОЧКА — точка регулярной поверхности, в к-рой касательный параболоид вырождается в плоскость. В У. т. индикатриса Дюпена не определена, гауссова кривизна равна нулю, тождественно равны нулю вторая квадратичная форма и все нормальные кривизны.

У. т. пространственной кривой наз. точка, в к-рой кручение кривой обращается в нуль. *Д. Д. Соколов.*

УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — группа G, на к-рой задано отношение порядка $\leqslant$ такое, что для любых a, b, x, y из G неравенство $a\leqslant b$ влечет за собой $xay\leqslant xby$. Порядок, как правило, подразумевается линейным и в этом случае понятие У. г. совпадает с понятием *линейно упорядоченной группы*. Иногда порядком называют произвольный частичный порядок и, соответственно, упорядоченными группами — произвольные *частично упорядоченные группы*.

Порядковым гомоморфизмом (частично) У. г. G в У. г. H наз. гомоморфизм φ группы G в группу H такой, что $x\leqslant y$, $x, y\in G$, $\Rightarrow x\varphi\leqslant y\varphi$ в H. Ядрами порядковых гомоморфизмов являются нормальные выпуклые подгруппы и только они. Множество правых смежных классов линейно У. г. G по выпуклой подгруппе H линейно упорядочено, если считать $Hx\leqslant Hy$ тогда и только тогда, когда $x\leqslant y$. Если H — выпуклая нормальная подгруппа линейно У. г. G, то это отношение порядка превращает факторгруппу G/H в линейно У. г.

Система $\Sigma(G)$ выпуклых подгрупп линейно У. г. обладает свойствами: а) $\Sigma(G)$ линейно упорядочена по включению и замкнута относительно пересечений и объединений; б) $\Sigma(G)$ инфраинвариантна, т. е. для любой $H\in\Sigma(G)$ и любого $x\in G$ верно $x^{-1}Hx\in\Sigma(G)$; в) если $A<B$ — скачок в $\Sigma(G)$, т. е. $A, B\in\Sigma(G)$, $A\subset B$, и между ними нет выпуклых подгрупп, то A нормальна в B, факторгруппа B/A — *архимедова группа* и

$$[[N_G(B),\ N_G(B)],\ B]\subseteq A,$$

где $N_G(B)$ — нормализатор B в G; г) все подгруппы из $\Sigma(G)$ строго изолированны, т. е. для любого конечного набора x, g_1, ... , g_n из G и любой подгруппы $H\in\Sigma(G)$ соотношение

$$x\cdot g_1^{-1}xg_1\ldots g_n^{-1}xg_n\in H$$

влечет за собой $x\in H$.

Расширение G У. г. H с помощью У. г. является У. г., если порядок H устойчив относительно внутренних

автоморфизмов G. Расширение G У. г. H с помощью конечной группы является У. г., если G без кручения и порядок в H устойчив относительно внутренних автоморфизмов G.

Порядковый тип счетной У. г. имеет вид $\eta^{\alpha}\xi$, где η, ξ — порядковые типы множества целых и рациональных чисел соответственно, а α — произвольный счетный ординал. Всякая У. г. G является топологич. группой относительно интервальной топологии, в к-рой базой открытых множеств являются открытые интервалы

$$(a,\ b)=\{x\in G\mid a<x<b\}.$$

Выпуклые подгруппы У. г. открыты в этой топологии.

Лит.: Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972. *В. М. Копытов.*

УПОРЯДОЧЕННАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, наделенная структурой (частичного, вообще говоря) порядка $\leqslant$, стабильного относительно полугрупповой операции, т. е. для любых элементов a, b, c из $a\leqslant b$ следует $ca\leqslant cb$ и $ac\leqslant bc$. Если отношение $\leqslant$ на У. п. S есть линейный порядок, то S наз. линейно упорядоченной полугруппой (л. у. п.). Если отношение $\leqslant$ на У. п. S задает решетку (с операциями объединения $\vee$ и пересечения $\wedge$), причем выполняются тождества

$$c\,(a\vee b)=ca\vee cb \text{ и } (a\vee b)\,c=ac\vee bc,$$

то S наз. решеточно упорядоченной полугруппой (р. у. п.); тем самым класс всех р. у. п., рассматриваемых как алгебры с полугрупповой и решеточными операциями, является многообразием. На р. у. п. тождества

$$c\,(a\wedge b)=ca\wedge cb \text{ и } (a\wedge b)\,c=ac\wedge bc,$$

вообще говоря, не выполняются, и их наложение выделяет собственное подмногообразие в многообразии всех р. у. п.

У. п. возникают при рассмотрении различных числовых полугрупп, полугрупп функций и бинарных отношений, полугрупп подмножеств (или подсистем различных алгебраич. систем, напр. идеалов колец и полугрупп) и т. п. Всякая У. п. изоморфна нек-рой полугруппе бинарных отношений, рассматриваемой как У. п., где отношение порядка — теоретико-множественное включение. Классич. пример р. у. п.— полугруппа всех бинарных отношений на произвольном множестве.

В общей теории У. п. выделяются два больших раздела: теория л. у. п. и теория р. у. п. Хотя всякая л. у. п. будет р. у. п., обе теории развиваются в значительной степени самостоятельно: исследования по л. у. п. посвящаются свойствам, большей частью не переносимым на произвольные р. у. п., а при рассмотрении р. у. п. изучаются, как правило, свойства, приводящие применительно к л. у. п. к вырожденным случаям. Важнейшим типом У. п. являются *упорядоченные группы*; их теория представляет собой самостоятельный раздел алгебры. В отличие от упорядоченных групп, отношение порядка на произвольной У. п. S, вообще говоря, не определяется множеством ее положительных элементов (т. е. таких элементов a, что $ax\geqslant x$ и $xa\geqslant x$ для любого $x\in S$).

Линейно упорядоченные полугруппы. Полугруппа S наз. упорядочиваемой, если на ней может быть задан линейный порядок, превращающий S в л. у. п. Необходимым условием упорядочиваемости является отсутствие в полугруппе неидемпотентных элементов конечного порядка. Если в упорядочиваемой полугруппе множество всех идемпотентов не пусто, то оно — подполугруппа. Среди упорядочиваемых полугрупп — свободная полугруппа, свободная коммутативная полугруппа, свободная n-ступенно нильпотентная полугруппа. Существует континуум способов упорядочения свободной полугруппы конечного ранга $\geqslant 2$. Найдены нек-рые необходимые и достаточные условия упорядочиваемости произвольной полугруппы, а также полугрупп из ряда известных классов (напр., полугрупп идемпотентов, инверсных полугрупп).

Полностью описано строение л. у. п. идемпотентов; в частности, в разложении такой полугруппы в полурешетку прямоугольных полугрупп (см. *Идемпотентов полугруппа*) прямоугольные компоненты сингулярны, а соответствующая полурешетка является деревом. Вполне простые л. у. п. исчерпываются *правыми группами* и левыми группами, являющимися лексикографич. произведением (см. *Лексикографический порядок*) линейно упорядоченной группы и л. у. п. правых (соответственно, левых) нулей. В терминах, использующих редукцию к линейно упорядоченным группам, получено описание л. у. п. в классе клиффордовых полугрупп, охарактеризованы также инверсные л. у. п. Классифицированы все типы л. у. п., порожденные двумя взаимно инверсными элементами (см. *Регулярный элемент*).

Условия, накладываемые на исследуемые л. у. п., часто постулируют дополнительные связи между операцией и отношением порядка. На этом пути выделены следующие основные типы л. у. п.: *архимедовы полугруппы*, естественно л. у. п. (см. *Естественно упорядоченный группоид*), положительно л. у. п. (в к-рых все элементы положительны), целые л. у. п. (в к-рых $x^2\leqslant x$ для любого x). Всякая архимедова естественно л. у. п. коммутативна, ее строение полностью описано. Строение произвольной л. у. п. в значительной мере определяется особенностями ее разбиения на *архимедовы классы*. Для периодич. л. у. п. это разбиение совпадает с разбиением на классы кручения, при этом каждый архимедов класс будет *нильполугруппой*. Произвольная линейно упорядоченная нильполугруппа является объединением возрастающей последовательности выпуклых нильпотентных подполугрупп; в частности, она локально нильпотентна.

Гомоморфизм $\varphi\colon A\to B$ л. у. п. наз. порядковым (или у-гомоморфизмом), если φ есть изотонное отображение A в B. Конгруэнция на л. у. п. наз. у-конгруэнцией, если все ее классы — выпуклые подмножества; у-конгруэнции и только они являются ядерными конгруэнциями у-гомоморфизмов. Разбиение л. у. п. S на архимедовы классы не всегда определяет у-конгруэнцию, т. е. не всегда будет связкой (см. *Связка полугрупп*), но это так, напр., если S периодическая и ее идемпотенты коммутируют или если S — положительно л. у. п.

Для л. у. п. возникают дополнительные условия простоты (см. *Простая полугруппа*), связанные с отношением порядка. Одно из них — отсутствие собственных выпуклых идеалов (выпукло идеально простые, или 0-простые, полугруппы); тривиальный пример таких л. у. п.— линейно упорядоченные группы. Л. у. п. S с наименьшим s и наибольшим g элементами (в частности, конечная) будет выпукло идеально простой тогда и только тогда, когда s и g одновременно левые или правые нули в S. Любая л. у. п. может быть вложена с сохранением порядка (у-изоморфно) в выпукло идеально простую л. у. п. Существуют л. у. п. с сокращением, невложимые в группу, но коммутативная л. у. п. с сокращением у-изоморфно вложима в абелеву линейно упорядоченную группу, причем существует единственная, с точностью до у-изоморфизма, такая группа частных. Л. у. п. тогда и только тогда у-изоморфно вложима в аддитивную группу действительных чисел, когда она удовлетворяет закону сокращения и не содержит аномальных пар (т. е. таких элементов a, b, что либо

$a^n<b^{n+1}$, $b^n<a^{n+1}$ для всех $n>0$, либо $a^n>b^{n+1}$, $b^n>a^{n+1}$ для всех $n>0$).

Решеточно упорядоченные полугруппы. Если для элементов a и b У. п. в ней существует наибольший элемент x с тем свойством, что $bx\leqslant a$, то он наз. их п р а в ы м ч а с т н ы м и обозначается $a:b$; аналогично определяется л е в о е ч а с т н о е $a:b$. Р. у. п. S наз. р. у. п. с д е л е н и е м, если правое и левое частные существуют в S для любой пары элементов. Такой полугруппой является полная (как решетка) р. у. п., решеточный нуль к-рой является и мультипликативным нулем, и удовлетворяющая бесконечным дистрибутивным законам $a(V_\alpha b_\alpha)=V_\alpha ab_\alpha$, $(V_\alpha b_\alpha)a=V_\alpha b_\alpha a$. Важный пример р. у. п. с делением — мультипликативная полугруппа идеалов ассоциативного кольца, и заметное направление в теории р. у. п. посвящено перенесению многих понятий и результатов теории идеалов ассоциативных колец на случай р. у. п. (однозначное разложение на простые множители, простой, примарный, максимальный, главный элементы р. у. п., и т. д.). Так, напр., известное отношение Артина из теории коммутативных колец следующим образом переносится на р. у. п. с делением, обладающие единицей 1: пусть $a\sim b\Leftrightarrow 1:a=1:b$. Если рассматриваемая р. у. п. S коммутативна, то отношение $\sim$ на ней есть конгруэнция; при этом факторполугруппа $S/\sim$ будет (решеточно упорядоченной) группой тогда и только тогда, когда S ц е л о з а м к н у т а, т. е. $a:a=1$ для любого $a\in S$.

Изучение р. у. п. связывается с группами при рассмотрении проблемы вложения р. у. п. в решеточно упорядоченные группы. Напр., любая р. у. п. с сокращением и условием Оре (см. *Вложение полугруппы* в группу), умножение в к-рой дистрибутивно относительно обеих решеточных операций, вложима в решеточно упорядоченную группу.

Начато исследование р. у. п. с точки зрения теории многообразий: описаны свободные р. у. п., найдены минимальные многообразия р. у. п. и т. д.

Лит. [1] Ф у к с Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер с англ., М., 1965; [2] Б и р к г о ф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; [3] К о к о р и н А. И., К о п ы т о в В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 116—20, [5] Итоги науки Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968, с. 99—102; [6] S a t y a n a r a y a n a M., Positively ordered semigroups, N. Y.— Basel, 1979.

Л. Н. Шеврин.

УПОРЯДОЧЕННАЯ СУММА ч а с т и ч н о у п о р я д о ч е н н ы х м н о ж е с т в — операция, ставящая в соответствие системе непересекающихся частично упорядоченных множеств $\{P_\alpha,\ \alpha\in L\}$, где множество индексов L также частично упорядочено, новое частично упорядоченное множество

$$P=\sum\nolimits_{\alpha\in L} P_\alpha,$$

элементами к-рого являются элементы теоретико-множественного объединения множеств P_α, а порядок устанавливается следующим образом. Во множестве P тогда и только тогда $a\leqslant b$, когда или $a,\ b\in P_\alpha$ и $a\leqslant b$ в P_α или $a\in P_\alpha$, $b\in P_\beta$ и $\alpha<\beta$. Важнейшими частными случаями У. с. являются к а р д и н а л ь н а я и о р д и н а л ь н а я с у м м ы. Первая из них получается, когда L упорядочено тривиально, т. е. каждый его элемент сравним только с самим собой, вторая — когда L является *цепью*. Таким образом, в кардинальной сумме двух непересекающихся частично упорядоченных множеств X и Y отношение $\leqslant$ сохраняет свое значение внутри слагаемых X и Y, а $x\in X$ и $y\in Y$ между собой несравнимы; в ординальной же сумме X и Y отношение порядка также сохраняется на слагаемых и $x\leqslant y$ для всех $x\in X$, $y\in Y$.

Лит. [1] Б и р к г о ф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984, [2] С к о р н я к о в Л. А., Элементы теории структур, М., 1970.

Т. С. Фофанова.

УПОРЯДОЧЕННОЕ КОЛЬЦО, ч а с т и ч н о у п о р я д о ч е н н о е к о л ь ц о,— кольцо R (не обязательно ассоциативное), являющееся *частично упорядоченной группой* по сложению, в к-ром для любых $a,\ b,\ c\in R$ неравенства $a\leqslant b$ и $c\geqslant 0$ влекут за собой неравенства $ac\leqslant bc$ и $ca\leqslant cb$. Всякое кольцо является У. к. с тривиальным порядком. Примерами У. к. служат также *упорядоченные поля*; кольцо действительных функций на множестве X, где $f\leqslant g$ означает, что $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in X$; кольцо матриц над У. к. R, где, по определению, $\|a_{ij}\|\leqslant\|b_{ij}\|$, если $a_{ij}\leqslant b_{ij}$ для всех $i,\ j$. Если R — У. к., то множество

$$P=\{x\mid x\in R,\quad x\geqslant 0\}$$

наз. его п о л о ж и т е л ь н ы м к о н у с о м. Положительный конус У. к. однозначно определяет его порядок: $x\leqslant y$ тогда и только тогда, когда $y-x\in P$. Подмножество P кольца R служит положительным конусом для нек-рого порядка в том и только в том случае, когда

$$P\cap(-P)=\{0\},\quad P+P\subseteq P\quad\text{и}\quad PP\subseteq P.$$

Равенство $P\cup(-P)=R$ равносильно линейности этого порядка.

У. к., являющееся линейно упорядоченным множеством или решеткой (структурой), наз. соответственно л и н е й н о у п о р я д о ч е н н ы м или с т р у к т у р н о у п о р я д о ч е н н ы м (р е ш е т о ч н о у п о р я д о ч е н н ы м) к о л ь ц о м (см. также *Архимедово кольцо*). Решеточно упорядоченное кольцо оказывается дистрибутивной решеткой, а его аддитивная группа не имеет кручения (ср. *Структурно упорядоченная группа*). Нек-рые вопросы теории ассоциативных колец и, в частности, теория радикалов имеют аналоги в ассоциативных структурно У. к. Класс колец, допускающих превращение в структурно У. к., не аксиоматизируем. Если $a,\ b,\ c$ — элементы структурно У. к. и $c\geqslant 0$, то справедливы соотношения

$$(a\vee b)c\geqslant ac\vee bc,\quad c(a\vee b)\geqslant ca\vee cb,$$
$$(a\wedge b)c\leqslant ac\wedge bc,\quad c(a\wedge b)\leqslant ca\wedge cb.$$

Идеалы структурно У. к., являющиеся *выпуклыми подгруппами* аддитивной группы, наз. l-и д е а л а м и. Факторкольцо по l-идеалу естественным образом превращается в структурно У. к. Остается справедливой теорема о гомоморфизме.

Структурно У. к. R наз. ф у н к ц и о н а л ь н ы м к о л ь ц о м, или f-к о л ь ц о м, если выполнено любое из следующих эквивалентных друг другу условий: (1) R изоморфно структурно упорядоченному подкольцу прямого произведения линейно У. к.; (2) для любых $a,\ b,\ x\in R$ справедлива импликация

$$(a\wedge b=0)\Rightarrow(a\wedge bx=a\wedge xb=0);$$

(3) для любого подмножества $X\subseteq R$ множество

$$\{y\mid y\in R,\quad \forall x\in X\ x\wedge y=0\}$$

является l-идеалом; (4) для любых $a,\ b\in R$

$$(a\vee 0)(b\vee 0)\wedge(-a\vee 0)=(b\vee 0)(a\vee 0)\wedge(-a\vee 0)=0.$$

Условие (4) показывает, что f-кольца образуют многообразие сигнатуры $\{+,\ -,\ 0,\ \cdot,\ \vee,\ \wedge\}$. Входящие в это условие равенства не вытекают одно из другого. Не всякое f-кольцо вложимо в f-кольцо с единицей. Если $a,\ b,\ c$ — элементы f-кольца и $c\geqslant 0$, то справедливы соотношения

$$(a\vee b)c=ac\vee bc,\quad c(a\vee b)=ca\vee cb,$$
$$(a\wedge b)c=ac\wedge bc,\quad c(a\wedge b)=ca\wedge cb,$$
$$(a\vee(-a))(b\vee(-b))=ab\vee(-ab),\qquad a^2\geqslant 0,$$

а также импликация $(a\wedge b=0)\Rightarrow(ab=0)$.

Порядок У. к. R с положительным конусом P можно продолжить до линейного так, что R становится линейно У. к. в том и только в том случае, когда для любого

конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ из R можно выбрать $\varepsilon_i = 1$ или -1 так, что в полукольце, порожденном конусом P и элементами $\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n$, сумма любых двух ненулевых элементов отлична от нуля. При $P = \{0\}$ получается критерий возможности превращения данного кольца в линейно упорядоченное.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984, [2] Виноградов А. А., «Матем. заметки», 1977, т. 21, № 4, с. 449—52; [3] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965; [4] Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S., Groupes et anneaux réticulés, B.—Hdlb.—N. Y., 1977, [5] Brumfiel G., Partially ordered rings and semi-algebraic geometry, Camb., 1979; [6] Steinberg S. A., «Symp. math. Ist. naz. alta mat», 1977, v. 21, p. 379—400; [7] его же, «J. Algebra», 1981, v. 72, № 1, p. 223—36.

Л. А. Скорняков.

УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество, на к-ром задано отношение *порядка*. См. также *Линейно упорядоченное множество*, *Частично упорядоченное множество*.

УПОРЯДОЧЕННОЕ ПОЛЕ — линейно *упорядоченное кольцо*, являющееся полем. Классич. пример — поле действительных чисел с обычным порядком. Напротив, поле комплексных чисел не может быть превращено в У. п., поскольку поле допускает порядок, превращающий его в У. п., тогда и только тогда, когда -1 не представима в нем как сумма квадратов. Такие поля наз. формально действительными; они возникают, напр., если к какому-либо У. п. присоединить все квадратные корни из всех его положительных элементов.

Расширение P У. п. k наз. упорядоченным, если P — У. п., содержащее k в качестве упорядоченного подполя. Это имеет место в том и только в том случае, когда -1 не представима в виде суммы элементов вида λx^2, где $\lambda \in k$, $\lambda \geqslant 0$ и $x \in P$. У. п. наз. действительно замкнутым, если оно не обладает отличными от себя самого упорядоченными расширениями. Порядок действительно замкнутого поля единствен. Эквивалентны следующие свойства У. п. k: (1) k действительно замкнуто; (2) расширение $k(i)$, где $i^2 = -1$, алгебраически замкнуто; (3) каждый положит. элемент из k является квадратом и каждый многочлен нечетной степени над k имеет корень в k. Каждое формально действительное поле обладает действительно замкнутым упорядоченным алгебраич. расширением.

Если k — У. п., то имеет смысл обычное определение фундаментальной последовательности (см. *Действительное число*). Совокупность фундаментальных последовательностей при надлежащем отождествлении и определении операций превращается в упорядоченное расширение $\bar{k}$ поля k. Если k архимедово, то $\bar{k}$ изоморфно У. п. действительных чисел.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979, [3] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

Л. А. Скорняков.

УПОРЯДОЧЕННЫЙ ГРУППОИД — группоид H, множество элементов к-рого частично упорядочено отношением $\leqslant$, и, кроме того, операция и порядок связаны аксиомой

$$a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc, \quad ca \leqslant cb \quad \forall c \in H.$$

Если У. г. H подчиняется более сильной аксиоме

$$a < b \Rightarrow ac < bc, \quad ca < cb \quad \forall c \in H,$$

то порядок в H наз. строгим, а H — строгим частично упорядоченным группоидом. Частично У. г. наз. сильным, если

$$ac \leqslant bc \wedge ca \leqslant cb \Rightarrow a \leqslant b.$$

Сильный частично У. г. всегда является строгим, а для линейно У. г. эти два понятия совпадают.

Элемент a У. г. H наз. положительным (строго положительным), если для всех $x \in H$ справедливы неравенства $ax \geqslant x$ и $xa \geqslant x$ (соответственно, $ax > x$ и $xa > x$). Отрицательные и строго отрицательные элементы определяются двойственными неравенствами. У. г. наз. положительно (отрицательно) упорядоченным, если все его элементы положительны (отрицательны). Интерес для изучения представляют специальные типы группоидов (см. *Естественно упорядоченный группоид*, *Упорядоченная полугруппа*, *Упорядоченная группа*).

О. А. Иванова.

УПОРЯДОЧИВАЕМАЯ ГРУППА — группа G, на к-рой может быть введено отношение линейного порядка $\leqslant$ такое, что $a \leqslant b$ влечет за собой $xay \leqslant xby$ для любых $a, b, x, y \in G$. Группа G тогда и только тогда является У. г., когда в ней существует подмножество P со свойствами: 1) $PP \subseteq P$; 2) $P \cap P^{-1} = \{1\}$; 3) $P \cup P^{-1} = G$; 4) $x^{-1}Px \subseteq P$ для любого $x \in G$.

Пусть $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — нормальная подполугруппа группы G, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Группа G тогда и только тогда является У. г., когда для любого конечного набора $a_1, \ldots, a_n$ элементов из G, отличных от единицы группы, найдется такой набор чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, равных ± 1, что подполугруппа $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ не содержит единицу. Всякая У. г. есть группа с однозначным извлечением корня. Абелевы группы без кручения, локально нильпотентные группы без кручения, свободные, свободные разрешимые группы суть У. г. Двуступенно разрешимая группа, для всякого неединичного элемента x к-рой $1 \notin S(x)$, является У. г.

Класс У. г. замкнут относительно подгрупп, фильтрованных произведений, локально замкнут и, следовательно, является квазимногообразием. Свободное произведение У. г. есть У. г.

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

В. М. Копытов.

УПРАВЛЯЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, вероятностные характеристики к-рого могут изменяться по ходу наблюдений в зависимости от поставленной цели, заключающейся в минимизации (максимизации) того или иного функционала, определяющего качество управления. Различают разные виды управляемых процессов как по способу их задания и описания, так и по типу целей управления. Наиболее продвинута теория управляемых скачкообразных марковских процессов и управляемых диффузионных процессов, в случае наблюдений по полным данным. Развивается также соответствующая теория в случае наблюдений по неполным данным (частично наблюдаемые процессы).

Управляемый скачкообразный марковский процесс (у.с.м.п.) — управляемый случайный процесс с непрерывным временем и кусочно постоянными траекториями, в к-ром выбор управления влияет на инфинитезимальные характеристики процесса. Обычно (см. [1], [2]), для построения у.с.м.п. задают: 1) борелевское множество E состояний; 2) борелевское множество A управлений и множества $A(x)$ управлений, допустимых в состоянии x, причем $A = \bigcup A(x)$, $\{(x, a): a \in A(x), x \in E\} \in \mathcal{B}(E \times A)$ ($\mathcal{B}(M)$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств борелевского множества M), и возможен измеримый выбор $a = \alpha(x) \in A(x)$; $x \in E$; 3) плотность $q(a, t, x, \Gamma)$ вероятности скачка из x в Γ в момент t при управлении a ($t \geqslant 0$, $x \in E$, $a \in A(x)$, $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$), являющуюся борелевской функцией (a, t, x) при любом Γ и счетноаддитивной функцией Γ при любых a, t и x, причем функция q ограничена, $q(a, t, x, \Gamma) \geqslant 0$ при $x \notin \Gamma$, $q(a, t, x, E) = 0$.

Пусть $\Omega = D([0, \infty), E)$ — пространство всех кусочно постоянных непрерывных справа функций $\omega =$

$= x_{[0,\infty)} = (x_t)_{t\geqslant 0}$ со значениями в E, и пусть N_t (N_{t-}) — минимальная σ-алгебра в Ω, относительно к-рой измеримы функции $x_s = x_s(\omega)$ при $s \leqslant t$ (при $s < t$) и $N = N_\infty$. Любая функция $\alpha_t(\omega)$ на $(0,\infty)\times\Omega$ со значениями $\alpha_t(\omega) \in A(x_{t-}(\omega))$, прогрессивно измеримая относительно семейства $\{N_{t-}\}$, наз. (естественной) стратегией. Из определения следует, что $\alpha_t(\omega) = \alpha(x_{[0,t)})$, где $x_{[0,t)} = (x_s)_{0\leqslant s<t}$. Если $\alpha_t(\omega) = \alpha(t, x_{t-})$, где $\alpha(t, x)$ — борелевская функция на $(0,\infty)\times E$ со свойством $\alpha(t,x) \in A(x)$, то стратегия α наз. марковской, а если $\alpha(t,x) = \alpha(x)$, то стационарной. Классы естественных, марковских и стационарных стратегий обозначаются соответственно $\mathfrak{A}_E$, $\mathfrak{A}_M$ и $\mathfrak{A}_S$. Ввиду возможности измеримого выбора из $A(x)$ класс $\mathfrak{A}_S$ (следовательно, $\mathfrak{A}_M$ и $\mathfrak{A}_E$) не пуст. Если q ограничена, то по любым $x \in E$ и $\alpha \in \mathfrak{A}_E$ строится единственная вероятностная мера P_x^α на (Ω, N) такая, что $\mathsf{P}_x^\alpha\{x_0 = x\} = 1$ и при любых $t' \geqslant t \geqslant 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{P}_x^\alpha\{\tau > t' \mid N_t\} = \\ &= \exp\left[\int_t^{t'} q\left(\alpha\left(x^*_{[0,s)}\right), s, x_t, x_t\right) ds\right] (\text{п. н. } \mathsf{P}_x^\alpha), \\ &\mathsf{P}_x^\alpha\{x_\tau \in \Gamma \mid N_t(\tau)\} = \\ &= -\frac{q\left(\alpha\left(x^*_{[0,\tau)}\right), \tau, x_t, \Gamma\right)}{q\left(\alpha\left(x^*_{[0,\tau)}\right), \tau, x_t, x_t\right)} (\text{п. н. } \mathsf{P}_x^\alpha), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $\tau = \tau(t,\omega)$ — момент первого скачка после t, $N_t(\tau)$ — минимальная σ-алгебра в Ω, содержащая N_t, относительно к-рой τ измеримо, $x^*_u = x_t$ при $0 \leqslant u \leqslant t$ и $x^*_u = x_t$ при $u > t$. Случайный процесс $\{(x_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P}_x^\alpha\}$ и есть у.с.м.п. *Марковское свойство* у.с.м.п. состоит в том, что при известном «настоящем» x_t, «прошлое» $(x_u)_{u<t}$ входит в правые части (1) лишь через стратегию α. При произвольной стратегии $\alpha \in \mathfrak{A}_E$ процесс $(x_t)_{t\geqslant 0}$, вообще говоря, не марковский, но если $\alpha \in \mathfrak{A}_M$, то он будет марковским процессом, а если $\alpha \in \mathfrak{A}_S$ и q не зависит от t, то — однородным марковским с плотностью вероятности скачка из x в Γ, равной $q(\alpha(x), x, \Gamma)$. Управление процессом состоит в выборе стратегии.

Типичная задача управления — максимизация функционала

$$v^\alpha(x) = \mathsf{E}_x^\alpha\left[\int_0^T f^{\alpha_t}(t, x_t)\, dt + g(x_T)\right], \quad (2)$$

где $f^a(t,x)$ и $g(x)$ — ограниченные борелевские функции на $A\times[0,\infty)\times E$ и на E, T — фиксированное число. С помощью перехода к другим функциям f и g и введения фиктивных состояний к виду (2) приводится более широкий класс функционалов, содержащих также члены $h^{\alpha_\tau}(\tau, x_{\tau-}, x_\tau)$, τ — момент скачка, и допускающих обрыв или остановку процесса. Функцией выигрыша (ценой) наз. функция

$$v(x) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}_E} v^\alpha(x), \quad x \in E. \quad (3)$$

Стратегия α наз. ε-оптимальной, если $v^\alpha(x) \geqslant v(x) - \varepsilon$ при всех $x \in E$, и (п. н. μ) ε-оптимальной, если то же верно при почти всех x относительно меры μ на E. 0-оптимальные стратегии наз. оптимальными. Пусть в модели, полученной из первоначальной схемы сокращением промежутка $[0,\infty)$ до $[t,\infty)$, символы $\mathfrak{A}(t)$ $\mathsf{E}_{t,x}^\alpha$ и $v(t,x)$ имеют тот же смысл, что $\mathfrak{A}$, E_x^α и $v(x)$ в первоначальной модели. Рассматривая скачки как последовательные шаги в управляемой марковской цепи с дискретным временем, можно установить существование (п. н. μ) ε-оптимальных стратегий в классе $\mathfrak{A}_E$ и получить свойство измеримости v в форме: $\{(t,x): v(t,x) > C\}$ — аналитич. множество. Это позволяет применить идеи *динамического программирования* и вывести соотношение

$$v(t,x) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}_E(t)} \mathsf{E}_{t,x}^\alpha\left[\int_t^{\tau_1} f^{\alpha_s}(s, x_s) + v(\tau_1, x_{\tau_1})\right], \quad (4)$$

где $\tau_1 = \min(\tau(t), t')$, $0 \leqslant t < t' \leqslant T$ (вариант принципа Беллмана). При $t' \downarrow t$ из (4) и (1) получается *Беллмана уравнение*

$$-\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \sup_{a\in A(x)}\left[f^a(t,x) + \int_E v(t,y)\, q(a,t,x,dy)\right] (\text{п. в.}). \quad (5)$$

Функция выигрыша $v(t,x)$ — единственная ограниченная абсолютно непрерывная по t функция на $[0,T]\times E$, удовлетворяющая (5) и условию $v(T,x) = g(x)$. Уравнение (5) можно решать методом последовательных приближений. При $\alpha \in \mathfrak{A}_M$ из *Колмогорова уравнения* для марковского процесса $(x_t)_{t\geqslant 0}$ следует, что если супремум в (5) достигается при измеримой функции $a = \alpha(t,x)$, то марковская стратегия α оптимальна. Так устанавливается существование марковских оптимальных стратегий в полунепрерывных моделях (в к-рых A, q, f и g удовлетворяют определенным условиям компактности и непрерывности), в частности в конечных моделях (с конечными E и A). В произвольных борелевских моделях с помощью теорем измеримого выбора выводится существование (п. н. μ) ε-оптимальных марковских стратегий при любом $\varepsilon > 0$. В счетных моделях получаются марковские ε-оптимальные стратегии. Результаты частично переносятся на случаи, когда $T = \infty$ и функции f и g не ограничены, но в общей ситуации достаточность марковских стратегий не доказана.

В однородных моделях, где g и f не зависят от t, наряду с (2) рассматривают функционалы

$$v^\alpha(x) = \mathsf{E}_x^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} f^{\alpha_t}(x_t)\, dt, \quad (6)$$

$$v^\alpha(x) = \lim_{T\to\infty} \mathsf{E}_x^\alpha \frac{1}{T}\int_0^T f^{\alpha_t}(x_t)\, dt, \quad (7)$$

причем ставится вопрос о достаточности класса $\mathfrak{A}_S$. Если $\lambda > 0$ и борелевская функция $f^a(x)$ ограничена, то уравнение (5) для функционала (7) обращается в

$$\lambda v(x) = \sup_{a\in A(x)}\left[f^a(x) + \int_E v(y)\, q(a,x,dy)\right]; \quad (8)$$

оно совпадает с уравнением Беллмана для аналогичной задачи с дискретным временем и имеет единственное ограниченное решение. Если супремум в (8) достигается при $a = \alpha(x)$, $\alpha \in \mathfrak{A}_S$, то α оптимальна. Точно так же с заменой $\mathfrak{A}_M$ на $\mathfrak{A}_S$ переносятся на случай функционала (6) и результаты о существовании ε-оптимальных стратегий в моделях разных типов. При критерии (7) законченные результаты получены лишь для конечных и специального вида эргодич. у.с.м.п. и подобны случаю дискретного времени: можно выбрать $\alpha \in \mathfrak{A}_S$ и функцию g на E так, чтобы α была оптимальна по критерию (2) сразу при всех T и, следовательно, оптимальна по критерию (7).

Управляемый диффузионный процесс (у.д.п.) — непрерывный управляемый случайный процесс в d-мерном евклидовом пространстве E_d, допускающий *стохастический дифференциал* по отношению к нек-рому *винеровскому процессу*, не зависящему от управлений. Теория у.д.п. возникла как обобщение теории управления детерминированным движением нек-рой точки $x_t \in E_d$, уравнение движения к-рой имеет вид $dx_t = b(\alpha_t, s+t, x_t)\, dt$, $t \geqslant 0$, где α_t — управляющий параметр.

Для формального описания у.д.п. применяется язык стохастич. уравнений Ито. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t,\ t\geqslant 0\}$ — семейство расширяющихся полных σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, вложенных в $\mathcal{F}$. Пусть $w_t=(w_t^i,\ i=1,\ \ldots,\ d_1)$ — d_1-мерный винеровский процесс относительно $\{\mathcal{F}_t\}$, определенный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ при $t\geqslant 0$ (т. е. процесс, для к-рого w_t^i являются одномерными непрерывными стандартными винеровскими процессами при каждом i, процессы $w_t^1,\ \ldots,\ w_t^{d_1}$ независимы, w_t^i $\mathcal{F}$-измеримо при всяких t, i и при $t,\ h\geqslant 0$ величины $\{w_{t+h}^i - w_t^i,\ i=1,\ \ldots,\ d_1\}$ не зависят от $\mathcal{F}_t$). Пусть A — нек-рое сепарабельное метрич. пространство. При $\alpha\in A,\ t\geqslant 0,\ x=(x^i,\ i=1,\ \ldots,\ d)\in E_d$ предполагаются заданными функции $\sigma(\alpha, t, x)$, $b(\alpha, t, x)$, причем $\sigma(\alpha, t, x)$ — матрица размера $d\times d_1$, $b(\alpha, t, x)$ есть d-мерный вектор. Считают, что σ, b — борелевские функции α, t, x, удовлетворяющие условию Липшица по x с постоянной, не зависящей от α, t, и такие, что $|\sigma^{ij}(\alpha, t, 0)|$ и $|b^i(\alpha, t, 0)$ ограничены. Произвольный процесс $\alpha_t=\alpha_t(\omega),\ t\geqslant 0,\ \omega\in\Omega$, прогрессивно измеримый относительно $\{\mathcal{F}_t\}$ и принимающий значения из A, наз. стратегией; $\mathfrak{A}$ — множество всех стратегий. Для всякого $s\geqslant 0$, $x\in E_d$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, существует и единственно решение стохастич. уравнения Ито

$$dx_t = b(\alpha_t,\ s+t,\ x_t)\,dt + \sigma(\alpha_t,\ s+t,\ x_t)\,dw_t, \qquad x_0=x \tag{9}$$

(теорема Ито). Это решение, обозначаемое $x_t^{\alpha,\ s,\ x}$, наз. управляемым диффузионным процессом (управляемым процессом диффузионного типа); оно управляется с помощью выбора стратегии $\alpha=\alpha_t$. Кроме стратегий из $\mathfrak{A}$ рассматриваются другие классы стратегий. Пусть $C([0, \infty), E_d)$ — пространство непрерывных функций на $[0, \infty)$ со значениями в E_d. Полуось $[0, \infty)$ интерпретируется как множество значений времени t. Элементы $C([0, \infty), E_d)$ обозначаются через $x_{[0, \infty)}$. И пусть N_t — наименьшая σ-алгебра подмножеств $C([0, \infty), E_d)$, относительно к-рой при $s\leqslant t$ измеримы функции x_s (являющиеся значением элемента $x_{[0, \infty)}$) пространства $C([0, \infty), E_d)$ в момент времени s. Функция $\alpha=\alpha_t(x_{[0, \infty)})$ со значениями в A наз. естественной стратегией, допустимой в точке (s, x), если она прогрессивно измерима относительно $\{N_t\}$ и при $\alpha_t=\alpha_t(x_{[0, \infty)})$ существует хотя бы одно решение уравнения (9), прогрессивно измеримое относительно $\{\mathcal{F}_t\}$. Множество всех естественных стратегий, допустимых в точке (s, x), обозначается $\mathfrak{A}_E(s, x)$, его подмножество, состоящее из всех естественных стратегий вида $\alpha_t(x_t)$, обозначается $\mathfrak{A}_M(s, x)$ и наз. множеством марковских стратегий, допустимых в точке (s, x). Принято говорить, что естественная стратегия определяет управление в момент времени t на основании наблюдений за процессом x_r на участке времени $[0, t]$, марковская стратегия — на основании наблюдений за процессом только в момент времени t. При $\alpha\in\mathfrak{A}_E(s, x)$ (даже при $\alpha\in\mathfrak{A}_M(s, x)$) решение (9) может не быть единственным. Поэтому для каждых $s\geqslant 0$, $x\in E_d$, $\alpha\in\mathfrak{A}_E(s, x)$, произвольным образом фиксируется к.-н. решение уравнения (9) и оно обозначается $x_t^{\alpha,\ s,\ x}$. После этого по формуле $\beta_t(\omega)=\alpha_t(x_{[0, \infty)}^{\alpha,\ s,\ x}(\omega))$ определяется вложение $\mathfrak{A}_E(s, x)\subset\mathfrak{A}$, при к-ром $x_t^{\beta,\ s,\ x}=x_t^{\alpha,\ s,\ x}$ (п. н.).

Целью управления, как правило, является максимизация или минимизация математич. ожидания того или иного функционала от траекторий $x_t^{\alpha,\ s,\ x}$. Более общей является следующая задача. Пусть на $A\times[0, \infty)\times E_d$ определены борелевские функции $C^\alpha(t, x)\geqslant 0$, $f^\alpha(t, x)$ и на $[0, \infty)\times E_d$ определена борелевская функция $g(t, x)$. Для $\alpha\in\mathfrak{A}$, $s\geqslant 0$, $x\in E_d$, момент первого выхода $(s+t,\ x_t^{\alpha,\ s,\ x})$ из Q,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_t^{\alpha,\ s,\ x} &= \int_0^t C^{\alpha_r}(s+r,\ x_r^{\alpha,\ s,\ x})\,dr,\\ v^\alpha(s, x) &= \mathsf{E}_{s,\ x}^{\alpha}\left[\int_0^{\tau_Q} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t,\ x_t)\,dt + \right.\\ &\quad \left. + g\left(s+\tau_Q,\ x_{\tau_Q}\right) e^{-\varphi_{\tau_Q}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где индексы α, s, x у знака математич. ожидания означают, что их нужно вставить под знаком математич. ожидания всюду, где это возможно. Тогда возникает задача о нахождении стратегии α, максимизирующей $v^\alpha(s, x)$, и о нахождении функции выигрыша (цены)

$$v(s, x) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} v^\alpha(s, x). \tag{11}$$

Стратегии α, для к-рых $v^\alpha(s, x)\geqslant v(s, x)-\varepsilon$, наз. ε-оптимальными для точки (s, x). Оптимальной наз. 0 стратегия. Если в (11) множество $\mathfrak{A}$ заменить на $\mathfrak{A}_E(s, x)$ ($\mathfrak{A}_M(s, x)$), то соответствующая верхняя грань обозначается $v_{(E)}(s, x)$ ($v_M(s, x)$). Поскольку имеют место вложения $\mathfrak{A}_M(s, x)\subset\mathfrak{A}_E(s, x)\subset\mathfrak{A}$, то $v_{(M)}(s, x)\leqslant v_{(E)}(s, x)\leqslant v(s, x)$. При нек-рых достаточно широких предположениях известно (см. [3]), что $v_{(E)}=v$ (это так, если, напр., σ, b, c, f, g непрерывны по (α, x), непрерывны по x равномерно относительно α при всяком t и абсолютные величины c, f, g не превосходят $K(1+|x|)^m$ при всех α, t, x, где K, m не зависят от α, t, x). Вопрос о равенстве $v_{(M)}=v$ в достаточно общей ситуации является открытым. Формальное применение идей динамич. программирования приводит к соотношению, наз. принципом Беллмана:

$$v(s, x) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathsf{E}_{s,\ x}^{\alpha}\left[\int_0^{\tau} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t,\ x_t)\,dt + v(s+\tau,\ x_\tau)\, e^{-\varphi_\tau}\right], \tag{12}$$

где $\tau^{\alpha,\ s,\ x}$ — произвольным образом определенные марковские моменты, не превосходящие $\tau_Q^{\alpha,\ s,\ x}$. Если в (12) в качестве τ взять $t\wedge\tau_Q=\min(t,\ \tau_Q)$, применить к $v(s+\tau,\ x_\tau)\,e^{-\varphi_\tau}$ формулу Ито, то после нек-рых нестрогих рассуждений можно прийти к уравнению Беллмана:

$$\sup_{\alpha\in A}(L^\alpha v + f^\alpha) = 0, \tag{13}$$

где

$$L^\alpha v = \frac{\partial v}{\partial s} + a^{ij}(a,\ s,\ x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i\,\partial x^j} + b^i(\alpha,\ s,\ x)\frac{\partial v}{\partial x^i} - c^\alpha(s,\ x)\,v,$$

по индексам i, j предполагается суммирование от 1 до d, матрица

$$a(\alpha,\ s,\ x) = (a^{ij}(\alpha,\ s,\ x)) = \frac{1}{2}\,\sigma(\alpha,\ s,\ x)\,\sigma^*(\alpha,\ s,\ x).$$

Уравнение Беллмана играет центральную роль в теории у.д.п., так как часто оказывается, что достаточно «хорошее» его решение, равное на ∂Q функции g, является функцией выигрыша, а если $\alpha=\alpha^0(s, x)$ при каждых (s, x) доставляет верхнюю грань в (13) и $\alpha_t^0=\alpha^0(s_0+t,\ x_t)$ — марковская стратегия, допустимая в (s_0, x_0), то стратегия $\alpha^0=\{\alpha_t^0\}$ является оптимальной в точке (s_0, x_0). Т. о., иногда удается показать, что $v_M(s_0, x_0)=v(s_0, x_0)$.

Строгое обоснование справедливости приведенных выше выводов наталкивается на серьезные трудности, связанные с нелинейным характером уравнения (13),

к-рое в общем случае оказывается нелинейным вырождающимся параболич. уравнением. Наиболее простым является случай, когда (13) есть невырождающееся квазилинейное уравнение (матрица a не зависит от α и равномерно невырождена в Q). Здесь при нек-рых дополнительных ограничениях на Q, a, b, c, f, g, удается воспользоваться результатами теории квазилинейных параболич. уравнений, доказать разрешимость (13) в гёльдеровских классах функций и дать способ построения ε-оптимальных стратегий, основанный на решении уравнений (13). Аналогичный подход используется (см. [3]), когда $Q=(-\infty, \infty)\times(r_1, r_2)$, a, b, c, f, g ограничены и не зависят от s, a — равномерно отделена от нуля. В этом случае (13) сводится к квазилинейному уравнению 2-го порядка на (r_1, r_2), т. к. $\frac{\partial v}{\partial s}=0$ и уравнение (13) можно разрешить относительно старшей производной v_{xx}. Методы теории дифференциальных уравнений помогают при исследовании уравнения (13) также, если $Q=(-\infty, \infty)\times D$, D — двумерная область, a, b, c, f, g не зависят от s (см. лит. в [3]). Здесь, как и в предыдущем случае, допускается зависимость a от α. Уместно упомянуть также случай уравнений Гамильтона — Якоби ($a\equiv 0$), изученный методами теории дифференциальных уравнений (см. [5]).

Методами теории случайных процессов удается доказать, что функция выигрыша v удовлетворяет уравнению (13) в довольно общем случае при нек-рых предположениях типа гладкости σ, b, c, f, g, если $Q=(-\infty, T)\times E_d$, $T\leqslant\infty$ (см. [3]).

Наряду с задачами управления движением, в теории у. д. п. рассматриваются также задачи об оптимальной остановке управляемого процесса одним или двумя лицами. Напр., для $\alpha\in\mathfrak{A}$ и произвольного марковского момента τ:

$$v^{\alpha,\tau}(s, x)=\mathsf{E}^{\alpha}_{s,x}\left[\int_0^{\tau_Q\wedge\tau} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t, x_t)\,dt+\right.$$
$$\left.+g\left(s+\tau_Q\wedge\tau,\ x_{\tau_Q\wedge\tau}\right) e^{-\varphi_{\tau_Q\wedge\tau}}\right],$$

теория у. д. п. имеет отношение к управляемым частично наблюдаемым процессам и к задачам управления случайными процессами, в к-рых управление осуществляется выбором меры на $(C([0, \infty), E_d), N_\infty)$ из того или иного заданного класса мер, отвечающих процессам диффузионного типа (см. [3], [4], [6]—[8]).

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977, [2] Юшкевич А. А., «Теория вероятностей и ее применения», 1980, т 25, № 2, с 247—70, [3] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [4] Fleming W. H., Rishel R. W., Deterministic and stochastic optimal control, B.— [a. o.], 1975; [5] Кружков С. Н., «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 3, с. 450—93, [6] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [7] Wonham W. M., «SIAM J. Control», 1968, v. 6, № 2, p. 312—26; [8] Davis M. H. A., «SIAM J. control and optimization», 1976, v. 14, № 1, p. 176—88. *Н. В. Крылов, А. Н. Ширяев, А. А. Юшкевич.*

УПРАВЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА — одно из центральных понятий кибернетики. Так наз. объекты, к-рые имеют определенную структуру и обладают нек-рыми функциональными свойствами, отражающими их информационную природу. Понятие У. с. относится к числу понятий, к-рые невозможно полностью объяснить, используя только математич. конструкции; поэтому для обсуждения этого понятия необходимо иметь интуитивное представление о нем. Вот примеры физических (неформальных) У. с.

Нервная ткань, представляющая определенную структуру из нейронов и осуществляющая преобразование раздражений, идущих из внешней среды, в определенные воздействия на органы.

ЭВМ, являющаяся нек-рым соединением элементов и способная выполнять данный перечень элементарных актов (команд).

Химич. молекула, характеризуемая определенной конфигурацией атомов и обладающая интересующим нас перечнем свойств (речь идет о свойствах вещества, построенного из данного типа молекул, в частности о цвете в нек-рой дискретной шкале, физич. состоянии при нормальных условиях и т. п.).

Шахматная позиция, задаваемая расположением фигур на доске и набором допустимых ходов одного из партнеров.

Фраза русского языка, представляющая определенное соединение грамматич. элементов (синтаксис) и обладающая нек-рым смыслом, заложенным автором (семантика).

Каждый из упомянутых объектов выступает как единство нек-рой структуры (или схемы) и определенных свойств, или функции. При рассмотрении объектов как У. с. интересуются, главным образом, их схемно-функциональными характеристиками, не принимая во внимание остальные их качества. Поэтому две У. с., имеющие в нек-ром смысле одинаковые схемы и одинаковое функционирование, не различаются.

Математич. развитие понятия У. с. состоит в уточнении понятия схемы и понятия функции, а также нек-рых других деталей, связанных с учетом информации и расположения частей У. с. Первое построение У. с. относится к 1955 (см. [1]). Позже появились другие, более частные, варианты У. с.— причинные сети Маркова [2], агрегаты Бусленко [3] и др. Полное определение понятия У. с. (см. [1]) устроено так, что включает в себя все известные определения отдельных классов У. с. Ввиду значительной сложности уточнения понятия У. с. ниже дано его краткое описание с выделением в нем четырех основных звеньев: схемы, информации, координат и функции.

Схема У. с. представляет собой нек-рое соединение элементов, каждый из к-рых связан с заданной памятью, образуя в ней т. н. элементарные подсхемы. Состояния памяти, принимаемые из нек-рого конечного (или счетного) множества, задают информацию У. с. Расположение схемы характеризуется набором координат (также из конечного или счетного множества) ее элементов. Наконец, функция У. с. определяет возможные преобразования У. с., происходящие (детерминированно или стохастически) в моменты времени, принадлежащие нек-рой дискретной (не более чем счетной) шкале. Эти преобразования могут изменять информацию (перерабатывая состояния памяти), осуществлять движение У. с. (изменяя координаты элементов), изменять схему (структуру) и функцию (поведение).

Примеры показывают, что схема и функция в У. с. могут иметь разнообразный смысл. Благодаря этому У. с. позволяют описывать физич. У. с. адекватным образом, т. е. с сохранением их функциональных свойств и их структуры (схемы). Поэтому У. с. являются мощным средством для моделирования, при к-ром достаточно точно копируется не только функция объекта, но также и его схема.

Поскольку каждая элементарная подсхема данной У. с. фактически определяет нек-рую элементарную У. с., то исходная У. с. может рассматриваться как некий комплекс, нек-рое соединение элементарных У. с. Вот почему говорят не об определении понятия У. с., а о его уточнении, при к-ром одни У. с. выражаются через другие, взятые в качестве неопределяемых, элементарных. Необходимо также отметить широту понятия У. с., к-рое пригодно для описания не только простейших дискретных преобразователей, но и объектов со сложной функцией и структурой. Напр., для описания ЭВМ, АСУ, роботов, систем с переменной структурой, систем с «обучением» и т. п.

У. с. как математич. модели исходных физич. У. с., изучаемых в кибернетике, обладают рядом характерных черт. Прежде всего они являются объектами дискретной природы. Дискретными являются и схема, и ее координаты, и информация, и функция, и время. Для У. с., требующих специальных кибернетич. рассмотрений, характерна большая сложность. Эта сложность проявляется в том, что У. с. может иметь большое количество элементов, сложную структуру их связей, большую и сложно организованную память (и тем самым сложную информацию), сложное функционирование. Реальные объекты можно рассматривать как У. с., вообще говоря, многими способами. Фиксация У. с. зависит от выбора элементарных У. с. и может осуществляться в различных «масштабах». Таким образом, У. с. обладают свойством относительности. Возможность выбора элементарных У. с. в разных масштабах (на различных уровнях) позволяет во многих случаях рассматривать исходную У. с. как иерархию У. с., в к-рой элементарные У. с. более высокого уровня являются У. с. относительно элементарных У. с. более низкого уровня. В этом случае говорят, что У. с. обладает свойством иерархичности. Наконец, как правило, У. с. описывает исходный объект не вполне точно, а с нек-рой погрешностью. Благодаря этому она выступает как нек-рое приближение к объекту.

Существуют попытки расширить трактовку понятия У. с., включив в него и непрерывные объекты. В результате этого появляются «непрерывные» У. с., а также «непрерывно-дискретные» У. с. Впрочем, родственные объекты изучаются давно в теории динамич. систем и в теории регулирования. Между дискретными и непрерывными У. с. существует внешнее сходство, но больше имеется различий. Коренное отличие состоит в том, что дискретные У. с. описывают информационные процессы, а непрерывные — «энергетические» процессы.

Исследование У. с. ведется на специальных классах У. с., на модельных объектах. Выбор типов модельных объектов основан на следующих соображениях: а) их число должно быть небольшим, б) они должны быть непохожими друг на друга, в) они должны охватывать наиболее часто встречающиеся типы, г) они должны давать возможность исследовать на основе данного набора типов другие типы У. с. Ниже приведен список типов модельных объектов.

1) Формулы *алгебры логики* в данном базисе и реализующие *булевы функции* (в частности, дизъюнктивные нормальные формы).

2) *Схемы из функциональных элементов* в данном базисе и реализующие системы булевых функций.

3) *Контактные схемы*, реализующие матрицы из булевых функций.

4) Автоматы в нек-ром автоматном базисе и реализующие преобразования «входных» последовательностей в «выходные» (см. *Автомат конечный*).

5) Операторные алгоритмы, реализующие *вычислимые функции*.

Для данных модельных объектов характерно то, что каждая У.с. U полностью определяется своей схемой Σ и функцией Φ, т. е. парой (Σ, Φ). Здесь $U=(\Sigma, \Phi)$. С другой стороны, для каждого класса $\mathfrak{U}$ модельных объектов существует функция φ такая, что $\Phi=\varphi(\Sigma)$, т. е. функция однозначно определяется схемой. Более того, функция φ является вычислимой функцией. В этом случае каждый из модельных классов может быть охарактеризован другим способом. Пусть $\mathfrak{S}=\{\Sigma\}$ и $\mathfrak{F}=\{\Phi\}$, где $(\Sigma, \Phi)\in\mathfrak{U}$. Класс $\mathfrak{U}$ полностью определен заданием множеств $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}$, а также заданием алгоритма A, вычисляющего φ.

Основная проблематика теории У. с. группируется вокруг трех проблем (см. [4]): проблема синтеза (см. *Синтеза задачи*), проблема *эквивалентных преобразований* У. с., проблема надежности У. с. (см. *Надежность и контроль управляющих систем*). Сопоставление результатов, полученных по этим проблемам для различных классов модельных объектов, показывает, что имеется четкая закономерность в формулировках соответствующих теорем, наблюдается сходство методов доказательств упомянутых теорем; доказательства теорем для более сложных У. с. часто используют соответствующие теоремы для более простых классов.

Лит · [1] Яблонский С. В., «Проблемы кибернетики», 1959, в 2, с 7—38; [2] Марков А. А., в сб. Кибернетика, мышление, жизнь, М., 1964, [3] Бусленко Н. П., «Изв. АН СССР. Сер. технич кибернетика», 1963, № 5, с. 7—18; [4] Ляпунов А. А., Яблонский С. В., «Проблемы кибернетики», 1963, в. 9, с 5—22. *С. В. Яблонский.*

УПРАВЛЯЮЩАЯ ФУНКЦИЯ, управление,— функция $u(t)$, входящая в дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u),\ x(t_0)=x_0,\quad f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

значения к-рой в каждый момент времени могут выбираться произвольным образом.

Обычно на область изменения $u(t)$ при каждом t налагается ограничение

$$u(t)\in U, \tag{2}$$

где U — заданное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$. Управление наз. допустимым, если при каждом t оно удовлетворяет ограничению (2). Различные допустимые управления $u(t)$ определяют соответствующие различные траектории $x(t)$, исходящие из начальной точки x_0.

Если задан функционал

$$J(x,\ u)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,\ x,\ u)\,dt \tag{3}$$

и граничные условия на правом конце траектории в момент времени t_1:

$$x(t_1)\in X_1, \tag{4}$$

где X_1 — нек-рое множество в $\mathbb{R}^n$ (в частном случае — точка), то можно поставить вопрос об определении оптимального управления $u(t)$, доставляющего оптимальное значение функционала к задаче (1)—(4). Вопросы, связанные с определением оптимальной У. ф., являются предметом теории оптимального управления и вариационного исчисления (см. [1], [2]).

В отличие от переменных $x=(x^1, \ldots, x^n)$, называемых фазовыми переменными (или фазовыми координатами), управления $u=(u^1, \ldots, u^m)$ входят в уравнение (1) без своих производных. Поэтому (1) имеет смысл не только при непрерывном, но и при кусочно непрерывном (и даже измеримом) управлении $u(t)$. Причем при каждом допустимом кусочно непрерывном управлении $u(t)$ уравнение (1) определяет непрерывную, кусочно гладкую траекторию $x(t)$.

В большинстве практич. задач оптимальное управление существует в классе кусочно непрерывных функций. Однако встречаются задачи, в к-рых оптимальное управление не является кусочно непрерывным, а принадлежит классу измеримых по Лебегу функций. В этих задачах оптимальное управление имеет бесконечное число точек разрыва, сгущающихся к нек-рой точке, напр. к точке входа на особый режим k-го порядка, $k>1$ (см. *Оптимальный режим особый*).

Необходимые условия, сформулированные в теории оптимального управления в виде принципа максимума Понтрягина, доказаны для самого общего случая, в к-ром исследуемая на оптимальность У. ф. предполагается измеримой (в частности, она может быть кусочно непрерывной или непрерывной).

Согласно принципу максимума для оптимальности управления $u(t)$ (в случае минимизации функционала (3)) необходимо, чтобы при каждом t управление $u(t)$ доставляло максимум функции Гамильтона

$$H(t,\ x,\ \psi,\ u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(t,\ x,\ u)$$

на множестве U, где $\psi=(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ — сопряженная вектор-функция, определяемая из сопряженной системы

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=1, \ldots, n, \quad \psi_0 = \text{const} \leqslant 0.$$

Аналогом принципа максимума в вариационном исчислении, позволяющим определить «свободные» функции в условиях связи, является уравнение Эйлера и необходимое условие Вейерштрасса.

Для существования оптимального измеримого по Лебегу управления, доставляющего минимум функционалу (3), достаточно, чтобы при каждом t, x множество значений вектора правых частей $\{f(t, x, U)\}$, получающееся, когда управление u пробегает всю допустимую область U, было выпуклым в $\mathbb{R}^n$, а точная нижняя граница $\inf\limits_{u \in U} \{f^0(t, x, U)\}$ множества значений, принимаемых подинтегральной функцией, была выпуклой вниз функцией по u. Если эти условия не выполняются, то могут быть случаи, когда минимизирующая последовательность управлений $u_n(t)$ не сходится даже в классе измеримых функций. В этих случаях говорят, что имеет место скользящий оптимальный режим. Скользящему оптимальному режиму можно придать строгий смысл как особому оптимальному управлению в расщепленной задаче, тесно связанной с исходной (см. *Оптимальный режим скользящий*).

Используя необходимые, а также достаточные условия оптимальности, установленные в теории оптимального управления и вариационном исчислении, можно определить оптимальную У. ф. и соответствующую оптимальную фазовую траекторию в рассматриваемой задаче. Имеются различные численные методы построения оптимального управления (см. *Вариационное исчисление*; численные методы).

В более общем случае У. ф. может зависеть от неск. аргументов. В этом случае говорят об У. ф. с распределенными параметрами.

Лит. [1] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969, [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950, [3] Вапнярский И. Б., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 2, с. 259—83; [4] Бутковский А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М., 1965. *И. Б. Вапнярский.*

УПРУГОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел механики, в к-ром изучаются перемещения, деформации и напряжения, возникающие в покоящихся или движущихся упругих телах под действием нагрузки.

Напряжение в любой точке тела характеризуется 6 величинами — компонентами напряжений: нормальными напряжениями σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} и касательными напряжениями σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx}, причем $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$ и т. д. Деформация в любой точке тела также характеризуется 6 величинами — компонентами деформаций: относительными удлинениями ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} и сдвигами ε_{xy}, ε_{yz}, ε_{zx}, причем $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}$ и т. д.

Основным физическим законом теории упругости является обобщенный закон Гука, согласно к-рому нормальные напряжения линейно зависят от деформаций. Для изотропных материалов эти зависимости имеют вид:

$$\sigma_{xx}=3\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy}=3\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_{yy}, \quad \sigma=3\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_{zz}, \qquad (1)$$
$$\sigma_{xy}=2\mu\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz}=2\mu\varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{zx}=2\mu\varepsilon_{zx},$$

где $\varepsilon=\frac{1}{3}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})$ — средняя (гидростатич.) деформация, λ и $\mu=G$ — *Ламе постоянные*. Равенство (1) можно также представить в виде:

$$\sigma_{xx}-\sigma=2\mu(\varepsilon_{xx}-\varepsilon), \ldots, \quad \sigma_{xy}=2\mu\varepsilon_{xy}, \ldots, \quad \sigma=3K\varepsilon, \qquad (2)$$

где $\sigma=\frac{1}{3}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$ — среднее (гидростатич.) напряжение, K — модуль всестороннего сжатия.

Для анизотропного материала 6 зависимостей между компонентами напряжений и деформаций имеют вид:

$$\sigma_{xx}=c_{11}\varepsilon_{xx}+c_{12}\varepsilon_{yy}+c_{13}\varepsilon_{zz}+c_{14}\varepsilon_{xy}+c_{15}\varepsilon_{yz}+c_{16}\varepsilon_{zx},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Из входящих сюда 36 коэффициентов c_{ij}, называемых модулями упругости, 21 между собой независимы и характеризуют упругие свойства анизотропного материала.

У. м. т. при равновесии состоит в том, чтобы, зная действующие внешние силы (нагрузки) и так наз. граничные условия, определить значения в любой точке тела компоненты напряжений и деформаций, а также компоненты u_x, u_y, u_z вектора перемещения каждой частицы тела, т. е. определить эти 15 величин в виде функций от координат x, y, z точек тела. Исходными для решения этой задачи являются дифференциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho X=0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+\rho Y=0, \qquad (3)$$
$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho Z=0,$$

где ρ — плотность материала, X, Y, Z — проекции на координатные оси действующей на каждую частицу тела массовой силы (напр., силы тяжести), отнесенные к массе этой частицы.

К 3 уравнениям равновесия присоединяются 6 равенств (1) в случае изотропного тела и еще 6 равенств вида:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}, \ldots, \quad 2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}, \ldots, \qquad (4)$$

устанавливающих зависимости между компонентами деформаций и перемещений.

Когда на часть S_1 граничной поверхности тела действуют заданные поверхностные силы (напр., силы контактного взаимодействия), проекции к-рых, отнесенные к единице площади, равны F_x, F_y, F_z, а для части S_2 этой поверхности заданы перемещения ее точек φ_x, φ_y, φ_z, граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{xx}l_1+\sigma_{xy}l_2+\sigma_{xx}l_3=F_x \quad (\text{на } S_1), \qquad (5)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_x=\varphi_x, \quad u_y=\varphi_y, \quad u_z=\varphi_z \quad (\text{на } S_2), \qquad (6)$$

где l_1, l_2, l_3 — косинусы углов между нормалью к поверхности и координатными осями. Первые условия означают, что искомые напряжения должны удовлетворять на границе S_1 трем равенствам (5), а вторые — что искомые перемещения должны удовлетворять на границе S_2 равенствам (6); в частном случае может быть $\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$ (часть поверхности S_2 жестко закреплена).

В общем случае поставленная задача представляет собой пространственную задачу, решение к-рой трудно осуществимо. Точные аналитические решения имеются лишь для нек-рых частных задач: об изгибе и кручении бруса, о контактном взаимодействии двух тел, о концентрации напряжений, о действии силы на вершину конического тела и др. Так как уравнения У. м. т. являются линейными, то решение задачи о совместном действии двух систем сил получается путем суммирования решений для каждой системы сил, действующих раздельно (принцип линейной суперпозиции). В частности, если для к.-н. тела найдено решение при действии сосредоточенной силы в к.-л. произвольной точке тела, то решение задачи при произвольном распределе-

нии нагрузок получается путем суммирования (интегрирования). Такие решения, называемые функциями Грина, получены лишь для небольшого числа тел (неограниченное пространство, полупространство, ограниченное плоскостью, и нек-рые др.). Предложен ряд аналитических методов решения пространственной задачи У. м. т.: вариационные методы (Ритца, Бубнова — Галеркина и др.), метод упругих потенциалов и др. Интенсивно разрабатываются численные методы (конечно-разностные, метод конечных элементов и др.).

При решении плоских задач (когда один из компонентов перемещения равен нулю, а два других зависят только от двух координат) широкое применение находят методы теории функций комплексного переменного. Для стержней, пластин и оболочек, часто используемых в технике, найдены приближенные решения многих практически важных задач на основе нек-рых упрощающих предположений (см. *Плоская задача* теории упругости, *Оболочек теория*).

В задаче термоупругости определяются напряжения и деформации, возникающие вследствие неоднородного распределения температуры. При постановке этой задачи в правую часть первых трех уравнений (1) добавляется член — $(3\lambda+2\mu)\alpha I$, где α — коэффициент линейного теплового расширения, $T(x_1, x_2, x_3)$ — заданное поле температуры. Аналогичным образом строится теория электромагнитоупругости и упругости подвергаемых облучению тел. Большой практический интерес представляют задачи У. м. т. для неоднородных тел. В этих задачах коэффициенты λ и μ в уравнении (1) являются не константами, а функциями координат, определяющими поле упругих свойств тела, к-рое иногда задают статистически (в виде нек-рых функций распределения). Применительно к этим задачам разрабатываются статистич. методы У. м. т., отражающие статистич. природу свойств поликристаллич. тел.

В динамических задачах теории упругости искомые величины являются функциями координат и времени. Исходными для матем. решения этих задач являются дифференциальные уравнения движения, отличающиеся от уравнений (3) тем, что правые части вместо нуля содержат инерционные члены и т. д.

Одной из проблем У. м. т. является постановка задач и разработка методов их решения при конечных (больших) упругих деформациях.

Лит.: [1] Лява А., Математическая теория упругости, пер. с англ., М.— Л., 1935, [2] Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, 2 изд., М.— Л., 1947; [3] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [4] Трехмерные задачи математической теории упругости, Тб., 1968; [5] Лурье А. И., Теория упругости, М., 1970; [6] Стретт Дж. В. [лорд Рэлей], Теория звука, пер. с англ., т. 1—2, М., 1955; [7] Теория температурных напряжений, пер. с англ., М., 1964; [8] Снеддон И. Н., Берри Д. С., Классическая теория упругости, пер. с англ., М., 1961; [9] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Н., Теория упругости, пер. с англ., М., 1975. *По материалам статьи Упругости теория из БСЭ-3.*

УРАВНЕНИЕ — аналитическая запись задачи о разыскании значений аргументов, при к-рых значения двух данных функций равны. Аргументы, от к-рых зависят эти функции, наз. обычно неизвестными, а значения неизвестных, при к-рых значения функций равны,— решениями, или корнями, У.; о таких значениях неизвестных говорят, что они удовлетворяют данному У.

Совокупность решений данного У. зависит от области M значений, допускаемых для неизвестных. У. может не иметь решений в M, тогда оно наз. неразрешимым в области M. Если У. разрешимо, то оно может иметь одно или несколько, или даже бесконечное множество решений. Напр., У. $x^4-4=0$ неразрешимо в области рациональных чисел, но имеет два решения: $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$ в области действительных чисел и четыре решения: $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=i\sqrt{2}$, $x_4=-i\sqrt{2}$ — в области комплексных чисел. У. $\sin x=0$ имеет бесконечное множество решений: $x_k=k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, в области действительных чисел.

Если У. имеет решениями все числа области M, то оно наз. тождеством в области M.

Совокупность У., для к-рых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем этим У., наз. системой У.; совокупность значений неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем У. системы, наз. решением системы. Две системы У. (или два У.) наз. равносильными, если каждое решение одной системы (одного У.) является решением другой системы (другого У.), и наоборот, причем обе системы (оба У.) рассматриваются в одной и той же области.

Процесс разыскания решений У. заключается обычно в замене У. равносильным. В нек-рых случаях приходится заменять данное У. другим, для к-рого совокупность корней шире, чем у данного У. Поэтому, если при решении У. делались действия, могущие привести к появлению посторонних корней, то все полученные корни преобразованного У. проверяют подстановкой в исходное У.

Наиболее полно изучены *алгебраические уравнения*; их решение было одной из важнейших задач алгебры в 16—17 вв. Если $f(x)$ — трансцендентная функция, то У. $f(x)=0$ наз. трансцендентным, причем в зависимости от вида $f(x)$ оно наз. тригонометрическим У., логарифмическим У., показательным У.

При практич. решении У. обычно применяются различные приближенные методы (см., напр., *Линейная алгебра*; численные методы).

Среди систем У. простейшими являются системы *линейных уравнений*. Решение системы У. (не обязательно линейных) сводится, вообще говоря, к решению одного У. при помощи т. н. исключения неизвестных (см. *Исключения теория*).

В теории чисел рассматриваются т. н. неопределенные У., изучение решений к-рых составляет предмет теории *диофантовых уравнений*.

В общем случае У. является записью задачи о разыскании таких элементов a нек-рого множества A, что $F(a)=\Phi(a)$, где F и Φ — заданные отображения множества A во множество B. Если A и B — множества чисел, то возникают У. рассмотренного выше вида. Если A и B — множества точек в многомерных пространствах, то получаются системы У. Если A и B — множества функций, то в зависимости от характера отображения могут получаться *дифференциальные уравнения обыкновенные*, *дифференциальные уравнения с частными производными*, *интегральные уравнения* и др. виды У.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

УРАВНЕНИЕ В ВАРИАЦИЯХ, система уравнений в вариациях,— линейное дифференциальное (или разностное) уравнение, решением к-рого является производная по параметру решения дифференциального (соотв. разностного) уравнения. Пусть $x(\cdot):(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ есть решение задачи Коши $\dot{x}=f(x, t)$, $x(t_0)=x_0$, график к-рого лежит в области G, в к-рой f и f'_x непрерывны. Тогда для всякого отрезка $[p, s]\subset(\alpha, \beta)$ и для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякой непрерывной функции g: $G \longrightarrow \mathbb{R}^n$, имеющей в G непрерывную производную g'_x и удовлетворяющей неравенству

$$\|g-f\|_{C(G)} \underset{\text{def}}{=} \sup_{(x, t)\in G} |g(x, t)-f(x, t)| < \delta,$$

и всякого $y_0 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего неравенству $|y_0 - x_0| < \delta$, задача Коши $\dot{y} = g(y, t)$, $y(t_0) = y_0$ имеет решение $y(\cdot)$, определенное в нек-рой окрестности отрезка $[p, s]$. Для разности решений $y(\cdot) - x(\cdot)$ имеет место формула

$$y(t) - x(t) = z(t) + o(|y_0 - x_0| + \|g - f\|_{C^1(G)}),$$

где $z(\cdot)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A(t)z + h(t), \qquad (1)$$

в к-ром $A(t) = f'_x(x_0(t), t)$, $h(t) = g(x_0(t), t) - f(x_0(t), t)$, с начальным значением $z(t_0) = y(t_0) - x(t_0)$; здесь $o(\cdot)$ — «o малое» — равномерно относительно $t \in [p, s]$, а норма $\|g - f\|_{C^1(G)}$, по определению, равна

$$\sup_{(x, t) \in G} \{|g(x, t) - f(x, t)| + \|g'_x(x, t) - f'_x(x, t)\|\}.$$

Уравнение (1) наз. уравнением в вариациях уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ вдоль решения $x(\cdot)$.

В литературе чаще приводится более слабая форма этой теоремы (в к-рой вместо дифференцируемости по Фреше устанавливается дифференцируемость в более слабом смысле): если функция $f(x, t, \mu): G \times (a, b) \to \mathbb{R}^n$ в произведении $G \times (a, b)$ области $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ и интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные f'_x, f'_μ, а функция $x_0(\cdot): (a, b) \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема, то решение $x(\cdot, \mu)$ задачи Коши $\dot{x} = f(x, t, \mu)$, $x(t_0) = x_0(\mu)$ непрерывно дифференцируемо по μ в интервале (a, b) и его производная $x'_\mu(\cdot, \mu)$ есть решение линейного дифференциального уравнения (У. в в. уравнения $\dot{x} = f(x, t, \mu)$ вдоль решения $x(\cdot, \mu)$)

$$\dot{z} = A(t)z + h(t),$$

где $A(t) = f'_x(x(t, \mu), t, \mu)$, $h(t) = f'_\mu(x(t, \mu), t, \mu)$, удовлетворяющее начальному условию $z(t_0) = x'_{0\mu}(\mu)$.

У. в в. k-го порядка — линейное дифференциальное (разностное) уравнение, решением к-рого является k-я производная по параметру решения дифференциального (разностного) уравнения. Линейное однородное уравнение, соответствующее У. в в. любого порядка,— одно и то же (т. е. не зависит от k), различие — в неоднородности $h(t)$.

Если правая часть дифференциального уравнения не варьируется ($g = f$ в первой формулировке, $f(x, t, \mu)$ не зависит от μ — во второй), то У. в в. (1-го порядка) однородно.

У. в в. автономной системы $\dot{x} = f(x)$ в неподвижной точке (т. е. вдоль решения $x(\cdot) \equiv x_0$) есть линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, причем если $f(\cdot)$ не варьируется, то эта система однородная для вариации 1-го порядка и «с квазимногочленом в правой части» — для вариаций высших порядков. У. в в. автономной системы вдоль периодического (почти периодического) решения есть *линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами* (соответственно, *линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*).

Приведенная в начале статьи дефиниция относится к уравнениям любого порядка. Напр., У. в в. (если варьируется только начальная точка в фазовом пространстве) уравнения маятника $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ в нижнем положении равновесия ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) есть уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, наз. уравнением малых колебаний маятника, а в верхнем положении равновесия ($x = \pi$, $\dot{x} = 0$) — уравнение $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$.

Для дифференциального уравнения на дифференцируемом многообразии У. в в. вдоль решения определяется аналогично тому, как выше это было сделано в $\mathbb{R}^n$; значения решений У. в в. принадлежат касательному расслоению многообразия. Существуют и редукции случая произвольного дифференцируемого многообразия к случаю $\mathbb{R}^n$, состоящие первая в том, что многообразие вкладывается в евклидово пространство достаточно большой размерности, а дифференциальное уравнение (векторное поле) продолжается в его окрестность, а вторая — в том, что дифференциальное уравнение, заданное на дифференцируемом многообразии, записывается в окрестности траектории в картах многообразия, причем, выбирая карты, гладко зависящие от точки (напр., для риманова многообразия — пользуясь экспоненциальными геодезич. отображениями), можно записать данное уравнение в виде дифференциального уравнения в $\mathbb{R}^n$, имеющего (как и в первой редукции) правую часть того же класса гладкости, что и правая часть (векторное поле) уравнения на многообразии. Для дифференциального уравнения $\dot{x} = F(x)$ на римановом многообразии У. в в. вдоль траектории $x(t)$, если F не варьируется, может быть записано в виде

$$\nabla_{F(x(t))} \xi = \nabla_\xi F(x(t)),$$

где ∇_a — *ковариантная производная*. У. в в. дифференцируемого отображения f: $V^n \to V^n$ (V^n — дифференцируемое многообразие) вдоль траектории $\{f^t x\}_{t \in \mathbb{Z}}$ является (если диффеоморфизм не варьируется) уравнение

$$\xi(t+1) = df_{f^t x}\, \xi(t);$$

значение решения $\xi(\cdot)$ этого уравнения в точке t принадлежит касательному пространству $T_{f^t x} V^n$ многообразия V^n в точке $f^t x$, а само решение есть последовательность

$$\{d(f^t)_x \xi\}_{t \in \mathbb{Z}}, \quad \xi \in T_x V^n,$$

где $d(f^m)_x$ — производная m-й степени диффеоморфизма f в точке x.

Пусть V^n — замкнутое дифференцируемое многообразие. Множество S всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n, наделяется C^1-топологией. Имеют место утверждения (см. [4]): 1) для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ характеристич. показатель Ляпунова

$$\lambda_{n-k+1}(f, x) \underset{\text{def}}{=} \inf_{R^k \in G_k(T_x V^n)} \sup_{\xi \in R^k_*} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |df^t \xi|, \qquad (2)$$

где $G_k(T_x V^n)$ — грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств касательного пространства $T_x V^n$, есть функция $\lambda_{n-k+1}(\cdot)$: $S \times V^n \to \mathbb{R}$ второго класса Бэра (см. *Бэра классы*); 2) в пространстве $S \times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ, обладающее свойствами: а) для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot)$: $S \times V^n \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке множества D; б) для всяких $(f, x) \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$ подпространство

$$l_\lambda(f, x) \underset{\text{def}}{=} \left\{ \xi \in T_x V^n : \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |df^t \xi| \leqslant \lambda \right\}$$

экспоненциально отделено от своего алгебраич. дополнения l^c_λ в касательном пространстве $T_x V^n$, т. е. существуют $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких $\xi \in l^c_\lambda$, $\eta \in l_\lambda(f, x)$ и любых целых $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|df^t \xi| \cdot |df^s \eta| \geqslant \alpha |df^s \xi| \cdot |df^t \eta| \exp(\beta(t - s)).$$

Множество S векторных полей F класса C^1 на замкнутом дифференцируемом многообразии V^n наделяется C^1-топологией. Векторное поле $F \in S$ индуцирует динамич. систему f^t (действие (класса C^1) группы $\mathbb{R}$) на V^n. Для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ показатель Ляпунова $\lambda_{n-k+1}(F, x)$, по определению, равен правой части равенства (2).

Имеют место утверждения:

а) при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot)\colon S \times V^n \longrightarrow \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра [4];

б) для всякого $F \in S$, для всякого инвариантного относительно динамич. системы f^t, индуцированной векторным полем F, распределения вероятностей на V^n (σ-алгебра к-рого содержит все борелевские множества) почти всякая точка x такова, что У. в в. уравнения $\dot{x} = F(x)$ вдоль траектории $\{f^t x\}$ есть правильная линейная система дифференциальных уравнений (см. [5], [6]);

в) для всякого $m \in \mathbb{N}$ пусть $S^{(m)}$ обозначает множество векторных полей класса C^m на V^n, наделенное C^m-топологией; пусть P — распределение вероятностей на V^n, σ-алгебра к-рого содержит все борелевские множества, и пусть $S_P^{(m)}$ обозначает подпространство пространства $S^{(m)}$, состоящее из тех векторных полей, для к-рых распределение P инвариантно относительно индуцированных ими динамич. систем; тогда (см. [7]):

1) для всяких $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{V^n} \lambda_i(\cdot, x)\, dP(x) : S_P^{(m)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(фазовое среднее суммы старших показателей Ляпунова У. в в.) полунепрерывна сверху,

2) для всякого $m \in \mathbb{N}$ в пространстве $S_P^{(m)}$ имеется всюду плотное множество типа G_δ, во всякой точке к-рого функция

$$\int_{V^n} \lambda_k(\cdot, x)\, dP(x) \cdot S_P^{(m)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

непрерывна (для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$), т. е. в пространствах $S_P^{(m)}$ типична непрерывность фазовых средних показателей Ляпунова У. в в.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [2] Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, пер. с англ., М.— Л., 1937; [3] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974, [4] Милльонщиков В. М., «Дифференц. уравнения», 1983, т 19, № 2, с. 215—20, [5] Оселедец В. И., «Тр. Моск. матем об-ва», 1968, т. 19, с 179—210, [6] Милльонщиков В. М., «Матем. сб.», 1968, т 77, с. 163—73; [7] его же, «Дифференц. уравнения», 1978, т. 14, № 4, с. 759—60.

В. М. Миллионщиков.

УРАВНЕНИЕ В КОНТИНГЕНЦИЯХ — соотношение

$$D^*x(t) \subset F(t, x(t)),$$

где $D^*x(t)$ — континг енция вектор-функции $x(t)$, т. е. множество всех частичных пределов отношения

$$[x(t') - x(t)]/(t' - t)$$

при $t' \to t$, а $F(t, x)$ — заданное непустое множество в $\mathbb{R}^n$, зависящее от t и x (см. [1], [2]). В случае когда множество $F(t, x)$ ограничено, замкнуто, выпукло и является полунепрерывной сверху относительно включения функцией точки (t, x), У. в к. равносильно уравнению в паратингенциях (определяемому аналогично У. в к., но с использованием отношения

$$[x(t') - x(t'')]/(t' - t'') \quad \text{при} \quad t' \longrightarrow t, \quad t'' \longrightarrow t,$$

см. [3]) и *дифференциальному включению*

$$dx/dt \in F(t, x)$$

(см. [4]). Свойства У. в к. подобны свойствам дифференциальных включений.

Лит.: [1] Marchaud A., «Bull. Soc. math France», 1934, t. 62, p. 1—38; [2] Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., «Изв. высших учебн. заведений. Математика», 1962, № 1, с. 3—13; [3] Zaremba S. C., «Bull. Sci. math.», 1936, ser. 2, t. 60, № 5, p. 139—60; [4] Ważewski T., «Bull. Acad. Polon. sci., Ser. math...», 1961, v. 9, № 12, p. 865—67.

А. Ф Филиппов.

УРАВНОВЕШЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество U действительного или комплексного векторного пространства X такое, что из $x \in U$ и $|\lambda| \leqslant 1$ следует $\lambda x \in U$. Примером У. м. может служить единичный шар нормированного векторного пространства и вообще окрестность нуля U базы окрестностей нуля топологич. векторного пространства. Эти окрестности нуля являются, кроме того, поглощающими множествами, т. е. такими, что для любого $x \in X$ существует $\alpha > 0$ такое, что $x \in \lambda U$ при $|\lambda| \geqslant \alpha$. Если U — выпуклое поглощающее У. м., то функционал $p_U(x) = \inf\limits_{x \in \lambda U} |\lambda|$ является *полунормой*, т. е. обладает свойствами

$$p_U(x+y) = p_U(x) + p_U(y), \quad p_U(\lambda x) = |\lambda|\, p_U(x).$$

У. м. наз. также центрированными.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

В И. Соболев.

УРНОВАЯ СХЕМА — одна из простейших моделей теории вероятностей. Описание У. с. таково: рассматривается некий сосуд — урна — с шарами белого и черного цвета. Из урны наугад извлекается один шар, а затем он возвращается в урну вместе с c шарами того же цвета, что и вынутый шар, и d шарами другого цвета. После перемешивания шаров в урне процедура повторяется любое нужное число раз. Предполагается, что первоначально урна содержала $a > 0$ и $b > 0$ белых и черных шаров соответственно. Числа c и d — параметры У. с.— могут быть и отрицательными.

У. с. дает удобную возможность вычисления нек-рых основных вероятностей через условные вероятности. При различных значениях параметров c и d получаются многие известные схемы теории вероятностей: при $c=0$, $d=0$ — схема случайного выбора с возвращением (см. *Бернулли испытания*), при $c=-1$, $d=0$ — схема случайного выбора без возвращения, при $c=-1$, $d=-1$ — модель диффузии Эренфестов, при $c>0$, $d=0$ — урновая схема Пойа и т. д. Эти частные случаи служат моделями многих реальных явлений или методов их исследования. Так, напр., У. с. Пойа используется для описания эпидемий, при к-рых осуществление к.-л. событий увеличивает вероятность их последующего появления. В рамках У. с. могут быть введены многие распределения теории вероятностей, такие, как биномиальное, гипергеометрическое, геометрическое, Пойа. Для описания предельных случайных процессов, возникающих в У. с., применяются отрицательное биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Лит [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

А. В Прохоров.

УРОВНЯ ЛИНИЯ функции Грина — множество точек

$$L_\lambda = \{z \in D : G(z, z_0) = \lambda = \text{const}\}, \quad 0 \leqslant \lambda < \infty,$$

где $G(z, z_0)$ — функция Грина области D комплексной плоскости с полюсом в точке $z_0 \in D$. Если область D односвязна, то структура этого множества легко выясняется при конформном отображении D на круг $|\zeta| < 1$, переводящем точку z_0 в $\zeta = 0$. Функция Грина инвариантна при этом отображении, а У. л. функции Грина круга $|\zeta| < 1$ с полюсом в $\zeta = 0$, т. е. $\log \frac{1}{|\zeta|}$, служат окружности $|\zeta| = \text{const}$. Таким образом, в случае односвязной области У. л. $G(z, z_0) = \lambda$ являются простые замкнутые кривые, совпадающие при $\lambda = 0$ с границей области D и стремящиеся при $\lambda \to +\infty$ к точке z_0. Если область D m-связна и граница ее состоит из жордановых кривых C_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, то: если $\lambda > 0$ достаточно велико, то У. л. является жордановой кривой; при $\lambda \to +\infty$ соответствующая У. л. стремится к точке z_0, а при убывании λ эта кривая удаляется от z_0; если $m > 1$, то при нек-ром

значении λ У. л. имеет самопересечение, а затем распадается на непересекающиеся простые замкнутые кривые; при достаточно малом λ У. л. состоит из m жордановых кривых, и при $\lambda \to 0$ каждая из этих кривых стремится к одной из граничных кривых области D.

В вопросах приближения функций многочленами на замкнутом ограниченном множестве B с односвязным дополнением большую роль играют оценки расстояния от точки границы множества B до У. л. дополнения множества B (см. [4], [5]).

При однолистных конформных отображениях круга $|z|<1$ функциями класса

$$S=\{f : f(z)=z+\dots,\ f \text{ регулярна и однолистна в } |z|<1\}$$

поведение У. л. $L(f, r)$ (образов окружностей $|z|=r<1$) наглядно выясняет степень искажения. Любой функцией класса S круг $|z|<r$, $0<r<2-\sqrt{3}$, отображается на выпуклую область, а круг $|z|<r$, $0<r<\operatorname{th}\pi/4$,— на звездообразную область. У. л. $L(f, r)$, $f\in S$, $0<r<1$, принадлежат кольцу

$$K_r=\{w : r(1+r)^{-2}\leqslant |w|\leqslant r(1-r)^{-2}\}$$

и ограничивают односвязную область, содержащую начало координат.

Для кривизны $K(f, r)$ У. л. $L(f, r)$ в классе S имеет место точная оценка:

$$K(f, r)\geqslant \frac{1-4r+r^2}{r}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2,$$

и знак равенства имеет место для функции $f(z)=\frac{z}{(1+z)^2}$ в точке $z=r$. Точная верхняя оценка для $K(f, r)$ в классе S пока (1984) неизвестна. Точная оценка сверху для $K(f, r)$ в подклассе звездообразных функций из S имеет вид:

$$K(f, r)\leqslant \frac{1+4r+r^2}{r}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2,$$

и знак равенства имеет место для функции $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ в точке $z=r$.

При отображении круга $|z|<1$ функцией класса S число точек перегиба У. л. $L(f, r)$ и число точек нарушения ее звездности (т. е. точек У. л., в к-рых меняется направление вращения радиуса-вектора, когда точка z пробегает окружность $|z|=r$ в определенном направлении) могут изменяться немонотонно при возрастании r, т. е. если $r_1<r_2$, то может оказаться, что У. л. $L(f, r_1)$ имеет больше точек перегиба и больше точек нарушения звездности, чем $L(f, r_2)$.

Лит. [1] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (Добавление), [3] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976, [4] Дзядык В. К., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 5, с. 697—763, [5] Лебедев Н. А., Широков Н. А., «Изв. АН Арм. ССР. Сер. математика», 1971, т. 6, № 4, с. 311—41

Е. Г. Голузина.

УРОВНЯ МНОЖЕСТВО функции f — множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, на к-ром $f=\text{const}$. Если функция f задана в квадрате Q плоскости $\mathbb{R}^2$ и имеет там частные производные, удовлетворяющие условию Липшица, то для почти всех C из интервала $\min_Q f \subset f \subset \max_Q f$ У. м.

$$M_c=\{x\in Q : f=c\}$$

состоит из конечного числа регулярных (на них $\operatorname{grad} f\neq 0$) кривых. См. также *Сарда теорема.*

М. И. Войцеховский.

УРЫСОНА ЛЕММА: для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B нормального пространства X существует действительная и непрерывная во всех точках этого пространства функция f, принимающая во всех точках множества A значение 0, во всех точках множества B значение 1 и удовлетворяющая во всех точках $x\in X$ неравенству $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. Эта лемма выражает не только необходимое, но и достаточное условие для того, чтобы T_1-пространство X было нормальным.

П. С. Александров.

УРЫСОНА МЕТРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА: 1) Бикомпактное или счетнокомпактное хаусдорфово пространство тогда и только тогда метризуемо, когда оно имеет счетную базу.

2) Топологическое пространство со счетной базой тогда и только тогда метризуемо, когда оно нормально или (добавление А. Н. Тихонова) когда оно регулярно.

П. С. Александров.

УРЫСОНА ПРОСТРАНСТВО, пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости Урысона,— топологич. пространство, в к-ром всякие две различные точки имеют окрестности с дизъюнктными замыканиями.

Лит. [1] Александров П. С., Урысон П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд., М., 1971, с. 40; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

Б. А. Ефимов.

УРЫСОНА УРАВНЕНИЕ — нелинейное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x)=\lambda\int_\Omega K[x, s, \varphi(s)]\,ds+f(x),\quad x\in\Omega, \qquad (*)$$

где Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, $K[x, s, t]$, $f(x)$ — заданные функции при x, $s\in\Omega$, $-\infty<t<\infty$. Пусть функция $K[x, s, t]$ непрерывна по совокупности переменных x, $s\in\Omega$, $|t|\leqslant\rho$ (ρ — нек-рое положительное число) и пусть

$$\left|\frac{\partial K[x, s, t]}{\partial t}\right|\leqslant M=\text{const},\quad x, s\in\Omega,\quad |t|\leqslant\rho.$$

Тогда, если

$$|\lambda| M \operatorname{mes}\Omega<1,$$

$$|\lambda|\max_{x\in\Omega}\int_\Omega \max_{|t|\leqslant\rho}|K[x, s, t]|\,ds\leqslant\rho,$$

то уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_\Omega K[x, s, \varphi(s)]\,ds$$

имеет единственное непрерывное решение $\varphi(x)$, $x\in\Omega$, удовлетворяющее неравенству $|\varphi(x)|\leqslant\rho$. Если φ_0 — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|\varphi_0(x)|\leqslant\rho$ ($x\in\Omega$), то последовательные приближения

$$\varphi_n(x)=\lambda\int_\Omega K[x, s, \varphi_{n-1}(s)]\,ds,$$
$$n=1, 2, \dots,$$

равномерно на Ω сходятся к $\varphi(x)$.

Пусть оператор Урысона

$$A\varphi(x)=\int_\Omega K[x, s, \varphi(s)]\,ds$$

действует в пространстве $L_p(\Omega)$, $p>1$, для всех t_1, t_2, $x, s\in\Omega$ выполняется неравенство

$$|K(x, s, t_1)-K(x, s, t_2)|\leqslant K_1(x, s)\,|t_1-t_2|,$$

где K_1 — измеримая функция

$$\Delta^p=\int_\Omega\left(\int_\Omega K_1^{\frac{p}{p-1}}(x, s)\,ds\right)^{p-1}dx<\infty.$$

Тогда, при $|\lambda|<\Delta^{-1}$ и $f\in L_p(\Omega)$, уравнение $(*)$ имеет в $L_p(\Omega)$ единственное решение.

Уравнение $(*)$ при определенных предположениях впервые было изучено П. С. Урысоном (см. *Нелинейное интегральное уравнение*).

Лит.: [1] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956, [2] Интегральные уравнения, М., 1968 (Справочная матем. б-ка)

Б. В. Хведелидзе.

УРЫСОНА — БРАУЭРА ЛЕММА, Урысона — Брауэра — Тице лемма,— утверждение о возможности продолжения непрерывных функций с подпространства топологич. пространства на все пространство. Пусть X — нормальное пространство и F — его замкнутое подмножество. Тогда любую непрерывную функцию $f: F \to \mathbb{R}$ можно продолжить непрерывно до функции $g: X \to \mathbb{R}$, т. е. можно найти такую непрерывную функцию g, что $g(x)=f(x)$ для всех $x \in F$. При этом если функция f ограничена, то существует такое ее продолжение g, что

$$\sup_{x \in F} |f(x)| = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

У.— Б. л. была доказана Л. Брауэром (L. Brouwer) и А. Лебегом (H. Lebesgue) для $X=\mathbb{R}^n$, А. Тице (A. Titze) для произвольного метрич. пространства X и П. С. Урысоном — в приведенной выше формулировке (к-рая может служить характеризацией нормальных пространств и является, таким образом, окончательной).

Лит.: [1] Урысон П. С., «Math. Ann.», 1925, Bd 94, S 262—95 (на рус. яз.: Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.— Л., 1951, с. 177—218).

И. Г. Кошевникова.

УСЕЧЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, получаемое из данного распределения перенесением массы, заключенной вне нек-рого фиксированного отрезка, на этот отрезок. Пусть вероятностное распределение на прямой задано функцией распределения $F(x)$. Усеченным распределением, отвечающим F, наз. распределение с функцией распределения

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant a, \\ \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{при } a < x \leqslant b, \\ 1 & \text{при } x > b,\ a < b. \end{cases} \qquad (1)$$

В частном случае $a=-\infty$ ($b=\infty$) У. р. наз. усеченным справа (слева).

Наряду с (1) рассматриваются У. р. вида

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant a, \\ F(x)-F(a) & \text{при } a < x < c, \\ F(x)+1-F(b) & \text{при } c \leqslant x < b, \\ 1 & \text{при } x \geqslant b, \end{cases} \qquad (2)$$

или

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ F(x) & \text{при } a \leqslant x < b, \\ 1 & \text{при } x \geqslant b. \end{cases} \qquad (3)$$

В (1) масса, сосредоточенная вне $[a, b]$, распределяется по всему отрезку $[a, b]$, в (2) — помещается в точку $c \in (a, b]$ (в том случае, когда $a<0<b$ в качестве c чаще всего берется точка $c=0$), а в (3) эта масса помещается в крайние точки a и b.

У. р. вида (1) могут интерпретироваться следующим образом. Пусть X — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Тогда У. р. совпадает с условным распределением случайной величины при условии $a< <X \leqslant b$.

С понятием У. р. тесно связано понятие усеченной случайной величины: если X — случайная величина, то усеченной случайной величиной наз. величина

$$X^c = \begin{cases} X, & \text{если } |X| \leqslant c, \\ 0, & \text{если } |X| > c. \end{cases}$$

Распределение X^c является У. р. типа (3) по отношению к распределению X.

Операция усечения — переход к У. р. или усеченным случайным величинам — является весьма распространенным технич. приемом. Она позволяет, «немного» изменяя исходное распределение, получить аналитич. свойство — наличие всех моментов.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973, [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967, [4] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962

И. Г. Ушаков.

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — 1) У. в. относительно события — характеристика связи двух событий. Если A и B — события и $P(B)>0$, то У. в. $P(A|B)$ события A относительно (или при условии) B определяется равенством

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

У. в. $P(A|B)$ может рассматриваться как вероятность осуществления события A при условии, что событие B осуществилось. Для независимых событий A и B У. в. $P(A|B)$ совпадает с безусловной вероятностью $P(A)$.

О связи условных и безусловных вероятностей событий см. *Бейеса формула* и *Полной вероятности формула*.

2) У. в. события A относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ — случайная величина $P(A \mid \mathfrak{B})$, измеримая относительно $\mathfrak{B}$, для к-рой

$$\int_B P(A \mid \mathfrak{B})\, P(d\omega) = P(A \cap B)$$

при любом $B \in \mathfrak{B}$. У. в. относительно σ-алгебры определяется с точностью до эквивалентности.

Если σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождена счетным числом непересекающихся событий $B_1, B_2, \ldots$, имеющих положительные вероятности и в сумме составляющих все пространство Ω, то

$$P(A \mid \mathfrak{B}) = P(A \mid B_k) \quad \text{при} \quad \omega \in B_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

У. в. события A относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ может быть определена как *условное математическое ожидание* $\mathsf{E}(I_A \mid \mathfrak{B})$ индикатора A.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{B}$ — под-σ-алгебра $\mathcal{A}$. У. в. $P(A \mid \mathfrak{B})$ наз. регулярной, если существует функция $p(\omega, A)$, $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{A}$, такая, что

а) при фиксированном ω функция $p(\omega, A)$ является вероятностью на σ-алгебре $\mathcal{A}$,

б) $P(A \mid \mathfrak{B}) = p(\omega, A)$ с вероятностью единица.

Для регулярных У. в. условные математич. ожидания выражаются интегралами с У. в. в качестве мер.

У. в. относительно случайной величины X определяется как У. в. относительно σ-алгебры, порожденной X.

Лит [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974, [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973, [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

В. Г. Ушаков

УСЛОВНАЯ ПЛОТНОСТЬ — плотность *условного распределения*. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств на прямой, $\mathfrak{F}$ — под-σ-алгебра $\mathcal{A}$,

$$Q(\omega, B) = \mathsf{P}\{X \in B \mid \mathfrak{F}\}, \quad \omega \in \Omega, \quad B \in \mathfrak{B},$$

— условное распределение X относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$ и

$$F_X(x \mid \mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x))$$

— условная функция распределения X относительно $\mathfrak{F}$. Если

$$F_X(x \mid \mathfrak{F}) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t \mid \mathfrak{F})\, dt,$$

то $f_X(x \mid \mathfrak{F})$ наз. условной плотностью распределения X относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$.

Если X и Y — случайные величины, $f_Y(y)$ — плотность распределения Y, $f_{X,Y}(x, y)$ — совместная плотность распределения X и Y, то

$$f_X(x \mid Y=y) = \frac{1}{f_Y(y)} f_{X,Y}(x, y)$$

определяет У. п. распределения случайной величины X при фиксированном значении Y.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973. *В. Г. Ушаков.*

УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ ряда — свойство ряда, заключающееся в том, что существует сходящийся ряд, полученный из данного нек-рой перестановкой его членов. Числовоїї ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (*)$$

безусловно сходится, если он сходится, и сходится любой ряд, полученный перестановкой его членов, причем сумма любого такого ряда одна и та же, иначе говоря, сумма безусловно сходящегося ряда не зависит от порядка его членов. Если ряд (*) сходится, но не безусловно, то он наз. условно сходящимся. Для того чтобы ряд (*) условно сходился, необходимо и достаточно, чтобы он сходился, но не абсолютно, т. е. чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = +\infty$.

Если члены ряда (*) являются действительными числами, через $u_1^+, u_2^+, \ldots, u_n^+, \ldots$ обозначены его неотрицательные члены, а через $-u_1^-, -u_2^-, \ldots, -u_n^-, \ldots$ — отрицательные, то ряд (*) будет условно сходиться тогда и только тогда, когда оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ расходятся (при этом порядок слагаемых в этих рядах безразличен).

Пусть ряд (*) с действительными членами сходится условно и $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, тогда существует такой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$, полученный перестановкой членов ряда (*), что если обозначить через $\{s_n^*\}$ последовательность его частичных сумм, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n^* = \alpha, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n^* = \beta$$

(это есть обобщение теоремы Римана).

Произведение условно сходящихся рядов зависит от порядка, в к-ром суммируются результаты почленного умножения членов данных рядов.

Понятие условной и безусловной сходимости ряда обобщается на ряды, члены к-рых являются элементами нек-рого нормированного векторного пространства X. Если X — конечномерное пространство, то аналогично случаю числовых рядов сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, условно сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X$ расходится. Если же пространство X бесконечномерное, то в нем существуют безусловно сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, не являющиеся абсолютно сходящимися, т. е. такие, что для них $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X = +\infty$. *Л. Д. Кудрявцев.*

УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ точки относительно семейства отображений

$$\{f_t\}_{t\in G^+} : E \longrightarrow E \qquad (1)$$

— равностепенная непрерывность в этой точке семейства $\{f_t|_V\}_{t\in G^+}$ сужений отображений f_t на нек-рое вложенное в E многообразие V; здесь G^+ — множество неотрицательных чисел: действительных ($G = \mathbb{R}$) или целых ($G = \mathbb{Z}$).

У. у. точки относительно отображения определяется как ее У. у. относительно семейства неотрицательных степеней этого отображения. У. у. точки относительно динамич. системы f^t есть У. у. этой точки относительно семейства отображений $\{f^t\}_{t\in G^+}$. У. у. заданного на $t_0 + \mathbb{Z}^+$ решения $x_0(\cdot)$ уравнения

$$x(t+1) = g_t x(t)$$

есть У. у. точки $x_0(t_0)$ относительно семейства отображений

$$\left\{ f_t \underset{\text{def}}{=} g_{t_0+t} \cdots g_{t_0+1} g_{t_0} \right\}_{t\in\mathbb{Z}^+}.$$

У. у. заданного на $t_0 + \mathbb{R}^+$ решения $x_0(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x, t) \qquad (2)$$

есть У. у. точки $x_0(t_0)$ относительно семейства отображений $\{X(t_0+t, t_0)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, где $X(\theta, \tau)$ — *Коши оператор* этого уравнения. У. у. заданного на $t_0 + \mathbb{R}^+$ решения $y(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$y^{(m)} = g(y, \dot{y}, \ldots, y^{(m-1)}, t)$$

порядка m есть У. у. заданного на $t_0 + \mathbb{R}^+$ решения $x(\cdot) = (y(\cdot), \dot{y}(\cdot), \ldots, y^{(m-1)}(\cdot))$ соответствующего дифференциального уравнения 1-го порядка вида (2), где

$$x = (x_1, \ldots, x_m),$$

$$f(x, t) = (x_2, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m, t)).$$

Приведенные ниже определения 1—5 являются нек-рыми конкретизациями этих и родственных им определений.

1. Пусть дано дифференциальное уравнение (2), где $x \in E$, E — нормированное n-мерное пространство. Решение $x_0(\cdot)$: $t_0 + \mathbb{R}^+ \longrightarrow E$ этого уравнения наз. условно устойчивым с индексом $k \in \{0, \ldots, n\}$, если найдется вложенный в E k-мерный диск D^k (рассматриваемый как многообразие нек-рого класса C^m), содержащий точку $x_0(t_0)$ и обладающий свойством: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in D^k$, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0(t_0)| < \delta$, решение $x(\cdot)$ того же уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x$, единственно, определено на $t_0 + \mathbb{R}^+$ и при всяком $t \in t_0 + \mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$. Если диск D^k, имеющий указанные свойства, может быть выбран так, что

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0$$

(соответственно,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t) - x_0(t)| < 0;$$

здесь и далее считается, что $\ln 0 = -\infty$) для всякого решения того же уравнения, начинающегося в этом диске (т. е. такого, что $x(t_0) \in D^k$), то решение $x_0(t)$ наз. асимптотически (соответственно, экспоненциально) условно устойчивым (с индексом k).

Решение уравнения (2) ($x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{C}^n$) наз. условно (асимптотически, экспоненциально условно) устойчивым с индексом k, если оно становится таковым в результате наделения пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) нек-рой нормой. От выбора нормы это свойство решения не зависит.

2. Пусть дано n-мерное риманово многообразие V^n (расстояние в к-ром обозначается через $d(\cdot, \cdot)$). Точка $x_0 \in V^n$ наз. условно устойчивой (с индексом

$k \in \{0, \ldots, n\}$) относительно отображения f: $V^n \longrightarrow V^n$, если найдется вложенный (обычно гладко вложенный) в V^n k-мерный диск D^k, содержащий точку x_0 и обладающий свойством: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in D^k$, удовлетворяющего неравенству $d(x, x_0) < \delta$, имеет место неравенство $d(f^t x, f^t x_0) < \varepsilon$ для всякого $t \in \mathbb{N}$. Если диск D^k, имеющий указанные свойства, может быть выбран так, что

$$d(f^t x, f^t x_0) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty$$

(соответственно,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln d(f^t x, f^t x_0) < 0)$$

для всякого $x \in D^k$, то точка x_0 наз. асимптотически (соответственно, экспоненциально) условно устойчивой (с индексом k) относительно отображения f.

Пусть V^n — компактное дифференцируемое многообразие. Точка $x_0 \in V^n$ наз. условно устойчивой (асимптотически, экспоненциально условно устойчивой) с индексом k относительно отображения f: $V^n \longrightarrow V^n$, если она становится таковой в результате наделения V^n нек-рой римановой метрикой. От выбора римановой метрики на V^n это свойство точки x_0 не зависит.

3. Пусть дано дифференциальное уравнение (2) на римановом (или на финслеровом) n-мерном многообразии V^n, расстояние в к-ром обозначается $d(\cdot, \cdot)$. Решение $x_0(\cdot)$: $t_0 + \mathbb{R}^+ \longrightarrow V^n$ этого уравнения наз. условно устойчивым (с индексом k), если найдется k-мерный диск D^k, вложенный в V^n (рассматриваемый как многообразие нек-рого класса C^m, обычно $m \geqslant 1$), содержащий точку $x_0(t_0)$ и обладающий свойством: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in D^k$, удовлетворяющего неравенству $d(x, x_0(t_0)) < \delta$, решение $x(\cdot)$ того же уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x$, единственно, определено на $t_0 + \mathbb{R}^+$ и при всяком $t \in t_0 + \mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству $d(x(t), x_0(t)) < \varepsilon$. Если диск D^k, имеющий указанные свойства, может быть выбран так, что

$$d(x(t), x_0(t)) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty$$

(соответственно,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln d(x(t), x_0(t)) < 0)$$

для всякого решения $x(\cdot)$ этого же уравнения, начинающегося в этом диске (т. е. такого, что $x(t_0) \in D^k$), то решение $x_0(\cdot)$ наз. асимптотически (соответственно, экспоненциально) условно устойчивым (с индексом k).

4. Пусть V^n есть n-мерное многообразие класса C^m, U — открытое множество в нем. Пусть точка $x_0 \in U$ неподвижна при отображениях f_t: $U \longrightarrow V^n$ класса C^m ($t \in G^+$, где G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$). Неподвижная точка x_0 наз. условно устойчивой (с индексом k) относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t \in G^+}$, если найдется k-мерный диск D^k, гладко вложенный (вложение класса C^m) в V^n и такой, что для всякой окрестности $V \subset V^n$ точки x_0 найдется окрестность W той же точки такая, что $f_t(D^k \cap W) \subset V$ при всяком $t \in G^+$. Если диск D^k, имеющий указанные свойства, может быть выбран так, что $\lim_{t \to +\infty} f_t x = x_0$ для всякого $x \in D^k$, то неподвижная точка x_0 наз. асимптотически условно устойчивой (с индексом k) относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t \in G^+}$.

5. Условная (условная асимптотическая, условная экспоненциальная) устойчивость (с индексом k) решения $y_0(\cdot)$ уравнения произвольного порядка $y^{(m)} = g(y, \dot{y}, \ldots, y^{(m-1)}, t)$ определяется как условная (условная асимптотическая, экспоненциальная) устойчивость (с индексом k) решения $x_0(\cdot) = (y_0(\cdot), \dot{y}_0(\cdot), \ldots, y_0^{(m-1)}(\cdot))$ соответствующего уравнения 1-го порядка (2), где

$$x = (x_1, \ldots, x_m),$$
$$f(x, t) = (x_2, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m, t)).$$

Иногда (см., напр., [3]) в определении У. у. требуют, чтобы индекс k был отличен от нуля: У. у. с индексом нуль всегда имеет место. У. у. (условная асимптотическая, условная экспоненциальная устойчивость) с индексом n (размерность фазового пространства) есть то же, что *устойчивость по Ляпунову* (соответственно, асимптотическая, экспоненциальная).

Исследование положения равновесия на У. у. Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задано автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \tag{3}$$

правая часть к-рого непрерывно дифференцируема и в точке x_0 обращается в нуль. Если в открытой левой комплексной полуплоскости лежат k собственных значений пропзводной df_{x_0}, то неподвижная точка уравнения (3) экспоненциально условно устойчива с индексом k (теорема Ляпунова об условной устойчивости). Напр., верхнее положение равновесия $y = \pi$, $\dot{y} = 0$ уравнения колебаний маятника $\ddot{y} + \omega^2 \sin y = 0$ экспоненциально условно устойчиво с индексом 1, так как один из корней характеристического уравнения $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ *уравнения в вариациях* $\ddot{y} - \omega^2 y = 0$ отрицателен.

Неподвижная точка x_0 дифференцируемого отображения f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ экспоненциально условно устойчива с индексом k относительно f, если k собственных значений производной df_{x_0} лежат в открытом единичном круге. Периодич. точка x_0 дифференцируемого отображения f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, имеющая период m, условно (асимптотически условно, экспоненциально условно) устойчива с индексом k относительно f тогда и только тогда, когда она обладает этим свойством относительно отображения f^m.

Периодич. решение автономного дифференциального уравнения (3) с гладкой правой частью $f(x)$, имеющее период T, (асимптотически, экспоненциально) условно устойчиво с индексом k в том и только в том случае, если его значение в точке $t = 0$ (соответственно, асимптотически, экспоненциально) условно устойчиво с индексом k относительно отображения $X(T, 0)$, где $X(\theta, \tau)$ — оператор Коши уравнения (3).

Пример Перрона (см. *Устойчивость по Ляпунову*) показывает, что из отрицательности k показателей Ляпунова уравнения в вариациях вдоль решения уравнения (3) не следует У. у. с индексом k этого решения. Однако имеют место следующие теоремы, показывающие, что ситуация, описываемая примером Перрона, нетипична.

1) Пусть S — множество всех диффеоморфизмов f евклидова пространства E^n, имеющих равномерно непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$\sup_{x \in E^n} \max \{\| df_x \|, \quad \| (df_x)^{-1} \|\} < +\infty.$$

Для всякого диффеоморфизма $j \in S$ через S_j обозначается множество диффеоморфизмов $f \in S$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x \in E^n} | fx - jx | < +\infty;$$

в множестве S_f задается расстояние

$$d(f, g)=\sup_{x\in E^n}(|fx-gx|+\|df_x-dg_x\|).$$

При всяком $f\in S$ в пространстве $S_f\times E^n$ имеется всюду плотное множество D_f типа G_δ, обладающее свойством: для всякого $(f, x)\in D_f$ точка x условно экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма f с индексом

$$\dim\left\{\xi\in T_xE^n:\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{1}{m}\ln|df^m\xi|<0\right\},$$

т. е. с индексом, равным числу отрицательных *Ляпунова характеристических показателей* уравнения в вариациях.

2) Для динамич. систем, заданных на замкнутом дифференцируемом многообразии, аналогичная теорема формулируется проще и является дифференциально-топологически инвариантной. Пусть V^n — замкнутое дифференцируемое многообразие. Множество S всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n, наделяется C^1-топологией. В пространстве $S\times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ, обладающее свойством: для всякого $(f, x)\in D$ точка x условно экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма f с индексом

$$k(x)=\dim\left\{\xi\in T_xV^n:\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{1}{m}\ln|df^m\xi|<0\right\}. \quad (4)$$

3) Для всякого диффеоморфизма f: $V^n\longrightarrow V^n$ замкнутого дифференцируемого многообразия V^n для всякого инвариантного относительно f распределения вероятностей на V^n (σ-алгебра к-рого содержит все борелевские множества) множество точек $x\in V^n$, условно экспоненциально устойчивых с индексом (4) относительно диффеоморфизма f, имеет вероятность 1.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967, [4] Изобов Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146; [5] Песин Я. Б., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 4, с. 55—112.

В. М. Миллионщиков.

УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $A\circ\varphi$, являющаяся композицией 2π-периодич. функции A: $T^n\longrightarrow\mathbb{C}$, где T^n есть n-мерный тор, и функции φ: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ такой, что $\dot\varphi=\omega$, где $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — постоянный вектор с рационально линейно независимыми компонентами. Примером У. п. ф. служит отрезок ряда Фурье

$$\sum_{i=1}^n[A_i\sin(\omega_it+\psi_i)+B_i\cos(\omega_it+\psi_i)],$$

где

$$A:=\sum_{i=1}^n[A_i\sin\varphi_i+B_i\cos\varphi_i],$$

$$\varphi:=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))=(\omega_1t+\psi_1, \ldots, \omega_nt+\psi_n).$$

Если У. п. ф.— непрерывная функция, то она совпадает с *квазипериодической функцией* с периодами $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Ю. В. Комленко.

УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ — прямолинейное движение материальной точки, закон к-рого выражается действительной *условно периодической функцией*.

УСЛОВНО ПОЛНАЯ РЕШЕТКА — решетка, в к-рой каждое непустое ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань. Примером У. п. р. может служить множество всех действительных чисел с обычным порядком.

Т. С. Фофанова.

УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ случайной величины — функция элементарного события, характеризующая случайную величину по отношению к нек-рой σ-алгебре. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, X — заданная на нем случайная величина с конечным математич. ожиданием, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра, $\mathfrak{B}\subseteq\mathcal{A}$. У. м. о. случайной величины X относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ наз. случайная величина $\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B})$, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ и такая, что

$$\int_B XP(d\omega)=\int_B\mathsf{E}(X\mid B)P(d\omega) \quad (*)$$

для каждого $B\in\mathfrak{B}$. Если математич. ожидание случайной величины X бесконечно (но определено), т. е. конечна только одна из величин $\mathsf{E}X^+=\mathsf{E}\max(0, X)$ и $\mathsf{E}X^-=-\mathsf{E}\min(0, X)$, то определение У. м. о. посредством (*) имеет смысл, но $\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B})$ может принимать бесконечные значения.

У. м. о. определяется однозначно с точностью до эквивалентности. В отличие от *математического ожидания*, являющегося числом, У. м. о. представляет собой функцию (случайную величину).

Свойства У. м. о. аналогичны свойствам математич. ожидания:

1) $\mathsf{E}(X_1\mid\mathfrak{B})\leqslant\mathsf{E}(X_2\mid\mathfrak{B})$, если почти наверное $X_1(\omega)\leqslant X_2(\omega)$;

2) $\mathsf{E}(c\mid\mathfrak{B})=c$ для любого действительного c;

3) $\mathsf{E}(\alpha X_1+\beta X_2\mid\mathfrak{B})=\alpha\mathsf{E}(X_1\mid\mathfrak{B})+\beta\mathsf{E}(X_2\mid\mathfrak{B})$ для любых действительных α и β;

4) $|\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B})|\leqslant\mathsf{E}(|X|\mid\mathfrak{B})$;

5) $g(\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B}))\leqslant\mathsf{E}(g(X)\mid\mathfrak{B})$ для выпуклых функций $g(x)$.

Кроме того, имеют место следующие специфические для У. м. о. свойства:

6) если $\mathfrak{B}=\{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная σ-алгебра, то $\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B})=\mathsf{E}X$;

7) $\mathsf{E}(X\mid\mathcal{A})=X$;

8) $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B}))=\mathsf{E}X$;

9) если X не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{B}$, то $\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B})=\mathsf{E}X$;

10) если Y измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, то $\mathsf{E}(XY\mid\mathfrak{B})=Y\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B})$.

Имеет место теорема о сходимости под знаком У. м. о.: если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $|X_n|\leqslant Y$, $n=1, 2, \ldots$, $\mathsf{E}Y<\infty$ и $X_n\longrightarrow X$ почти наверное, то почти наверное $\mathsf{E}(X_n\mid\mathfrak{B})\longrightarrow\mathsf{E}(X\mid\mathfrak{B})$.

У. м. о. случайной величины X относительно случайной величины Y определяется как У. м. о. X относительно σ-алгебры, порожденной Y.

Частным случаем У. м. о. является *условная вероятность*.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973, [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969, [4] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

Н. Г. Ушаков.

УСЛОВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — функция элементарного события и борелевского множества, при каждом фиксированном элементарном событии являющаяся *распределением вероятностей*, а при каждом фиксированном борелевском множестве — *условной вероятностью*.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств на прямой, X — случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathfrak{F}$ — под-σ-алгебра $\mathcal{A}$. Функция $Q(\omega, B)$, определенная на $\Omega\times\mathfrak{B}$, наз. (регулярным) условным распределением случайной величины X относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$, если:

а) при фиксированном $B\in\mathfrak{B}$ функция $Q(\omega, B)$ $\mathfrak{F}$-измерима,

б) с вероятностью единица при фиксированном ω функция $Q(\omega, B)$ является вероятностной мерой на $\mathfrak{B}$,

в) для произвольного $F\in\mathfrak{F}$

$$\int_F Q(\omega, B)\,\mathsf{P}(d\omega)=\mathsf{P}\{(X\in B)\cap F\}.$$

Аналогично определяется У. р. случайного элемента $\mathfrak{Y}$ со значениями в произвольном измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. Если $\mathfrak{X}$ — полное сепарабельное метрич. пространство, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств, то У. р. случайного элемента $\mathfrak{Y}$ относительно любой σ-алгебры $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\subset\mathcal{A}$, существует.

Функцию $F_X(x\,|\,\mathfrak{F})=Q(\omega, (-\infty, x))$ наз. условной функцией распределения случайной величины X относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$.

У. р. (условная функция распределения) случайной величины X относительно случайной величины Y определяется как У. р. (условная функция распределения) X относительно σ-алгебры, порожденной Y.

Условная функция распределения $F_X(x\,|\,Y)$ случайной величины X относительно Y является борелевской функцией от Y; при $Y=y$ ее значение $F_X(x\,|\,Y=y)$ наз. условной функцией распределения X при фиксированном значении Y. Пусть Y имеет плотность распределения $f_Y(y)$, тогда

$$F_X(x\,|\,Y=y)=\frac{1}{f_Y(y)}\frac{\partial}{\partial y}F_{X,Y}(x, y),$$

где $F_{X,Y}(x, y)$ — совместная функция распределения X и Y.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973, [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

В. Г. Ушаков.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ — минимальное или максимальное значение, достигаемое данной функцией (или функционалом) при условии, что нек-рые другие функции (функционалы) принимают значения из заданного допустимого множества. Если условия, ограничивающие в указанном смысле область изменения независимых переменных (функций), отсутствуют, то говорят о безусловном экстремуме.

Классич. задачей на У. э. является задача определения минимума функции многих переменных

$$f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

при условии, что нек-рые другие функции принимают заданные значения:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n)=c_i, \quad i=1, \ldots, m, \quad m<n, \qquad (2)$$

В этой задаче множество G, к-рому должны принадлежать значения вектор-функции $g=(g_1, \ldots, g_m)$, входящей в дополнительные условия (2), есть фиксированная точка $c=(c_1, \ldots, c_m)$ в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Если в (2) наряду со знаком равенства допускаются знаки неравенства

$$\left.\begin{aligned} &g_i(x_1, \ldots, x_n)=c_i, && i=1, \ldots, m_1, \ m_1<n,\\ &g_i(x_1, \ldots, x_n)\leqslant c_i, && i=m_1+1, \ldots, m_2,\\ &g_i(x_1, \ldots, x_n)\geqslant c_i, && i=m_2+1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

то это приводит к задаче *нелинейного программирования* (1), (3). В задаче (1), (3) множество G допустимых значений вектор-функции g представляет собой нек-рый криволинейный многогранник, принадлежащий $(n-m_1)$-мерной гиперповерхности, задаваемой m_1, $m_1<n$, условиями типа равенства (3). Границы указанного криволинейного многогранника строятся с учетом $n-m_1$ неравенств, входящих в (3).

Частным случаем задачи (1), (3) на У. э. является задача *линейного программирования*, в к-рой все рассматриваемые функции f и g_i являются линейными по x_1, ..., x_n. В задаче линейного программирования множество G допустимых значений вектор-функции g, входящей в условия, ограничивающие область изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$, представляет собой выпуклый многогранник, принадлежащий $(n-m_1)$-мерной гиперплоскости, задаваемой m_1 условиями типа равенства в (3).

Аналогичным образом большинство задач оптимизации функционалов, представляющих практич. интерес, сводится к задачам на У. э. (см. *Изопериметрическая задача*, *Больца задача*, *Лагранжа задача*, *Майера задача*). Так же, как и в математич. программировании, основными задачами вариационного исчисления и теории оптимального управления являются задачи на У. э.

При решении задач на У. э., особенно при рассмотрении теоретич. вопросов, связанных с задачами на У. э., весьма полезным оказывается использование неопределенных *Лагранжа множителей*, позволяющих свести задачу на У. э. к задаче на безусловный экстремум и упростить вывод необходимых условий оптимальности. Использование множителей Лагранжа лежит в основе большинства классич. методов решения задач на У. э.

Лит.: [1] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950, [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

И. Б. Вапнярский.

УСРЕДНЕНИЕ — то же, что *осреднение*.

УСТАНОВЛЕНИЯ МЕТОД — метод, заключающийся в том, что решение u нек-рых стационарных задач

$$Au=f \qquad (1)$$

можно рассматривать как результат установления (при $t\to\infty$) развивающегося во времени $t>0$ процесса $u(t)$ — решениях *Коши задачи* для нек-рого нестационарного эволюционного уравнения с тем же оператором A, напр. вида

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} C_i\frac{d^iu(t)}{dt^i}=f-Au(t),\\ &\frac{d^ku}{dt^k}\Big|_{t=0}=u_{0k}, \quad k=0, 1, \ldots, m-1, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

здесь C_i — нек-рые операторы, гарантирующие существование процесса установления: $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=u$.

Эффект установления позволяет использовать приближенные методы решения задачи (2) для построения *итерационных алгоритмов* решения уравнения (1). Так, если для нестационарного уравнения (2) определен разностный по t метод решения, обеспечивающий сходимость и устойчивость приближенного решения, напр. при $m=1$ явный метод вида

$$C_1\frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{\tau_n}=f-Au(t_n),$$

где $\tau_n=t_{n+1}-t_n>0$, то этот метод можно интерпретировать как итерационный алгоритм

$$C_1(u^{n+1}-u^n)=\tau_n(f-Au^n), \quad n=0, 1, \ldots, u^0=u_{00},$$

для решения уравнения (1), в к-ром C_1 и τ_n рассматриваются уже как характеристики метода.

Варьирование вида операторов C_i и рассмотрение различных аппроксимаций по t в уравнении (2) (явные, неявные схемы, схемы расщепления и т. п.) дают возможность получать достаточно разнообразные семейства итерационных методов решения уравнения (1). Для этих методов уравнение (2) будет *замыканием вычислительного алгоритма*.

Обобщением У. м. является *продолжения по параметру метод*.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975, [2] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977, [3] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., 1971.

В. И. Лебедев.

УСТОЙЧИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, обладающих свойством, что для любых $a_1>0$, b_1, $a_2>0$, b_2 имеет место соотношение

$$F(a_1x+b_1) * F(a_2x+b_2)=F(ax+b), \qquad (1)$$

где $a>0$ и b — нек-рые постоянные, F — функция распределения У. р., $*$ — символ операции свертки двух функций распределения.

Характеристическая функция У. р.

$$\varphi(t)=\exp\left\{i\,dt+c\,|\,t\,|^{\alpha}\left[1+i\beta\frac{t}{|t|}\,\omega(t,\,\alpha)\right]\right\}, \qquad (2)$$

где $0<\alpha\leqslant 2$, $-1\leqslant\beta\leqslant 1$, $c\geqslant 0$, d — любое действительное число, и

$$\omega(t,\,\alpha)=\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}, & \text{при } \alpha\neq 1,\\ \frac{2}{\pi}\ln|\,t\,|, & \text{при } \alpha=1.\end{cases}$$

Число α наз. показателем устойчивого распределения. У. р. с показателем $\alpha=2$ является *нормальное распределение*, примером У. р. с показателем $\alpha=1$ служит *Коши распределение*, У. р. является *вырожденное распределение* на прямой, У. р.— *безгранично делимое распределение*, и У. р. с показателем α, $0<\alpha<2$, имеет *Леви каноническое представление* с характеристиками $\sigma^2=0$,

$$M(x)=c_1/(x)^{\alpha},\quad N(x)=-c_2/x^2,$$
$$c_1\geqslant 0,\quad c_2\geqslant 0,\quad c_1+c_2>0,$$

γ — любое действительное число.

Для У. р., за исключением вырожденного распределения, существуют плотности. Эти плотности бесконечно дифференцируемы, одновершинны и отличны от нуля или на всей прямой, или на полупрямой. Для У. р. с показателем α, $0<\alpha<2$, при $\delta<\alpha$ выполняются соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\,x\,|^{\delta}p(x)\,dx<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|\,x\,|^{\alpha}p(x)\,dx=\infty,$$

$p(x)$ — плотность У. р. Явный вид плотностей У. р. известен лишь в немногих случаях. Одной из основных задач теории У. р. является описание их *притяжения областей*.

В совокупности У. р. выделяется класс строго устойчивых распределений, для к-рых имеет место равенство (1) при $b_1=b_2=b=0$. Характеристич. функции строго У. р. с показателем α ($\alpha\neq 1$) даются формулой (2) при $d=0$. При $\alpha=1$ строго У. р. является лишь распределение Коши. Спектрально положительные (отрицательные) У. р. характеризуются тем, что в канонич. представлении Леви $M(x)\equiv 0$ ($N(x)\equiv 0$). Для спектрально положительных У. р. существует преобразование Лапласа при $\operatorname{Re} s\geqslant 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}p(x)\,dx=\begin{cases}\exp\{-cs^{\alpha}-ds\}, & \text{при } \alpha<1,\\ \exp\{cs\ln s-ds\}, & \text{при } \alpha=1,\\ \exp\{cs^{\alpha}-ds\}, & \text{при } \alpha>1,\end{cases}$$

где $p(x)$ — плотность спектрально положительного У. р. с показателем α, $0<\alpha<2$, $c>0$, d — действительное число, у многозначных функций $\ln s$; s^{α} выбираются те ветви, для к-рых $\ln s$ действительный, а $s^{\alpha}>0$ при $s>0$.

У. р., как безгранично делимому распределению, соответствует однородный случайный процесс с независимыми приращениями. Стохастически непрерывный однородный случайный процесс с независимыми приращениями $\{x(\tau),\ \tau\geqslant 0\}$ наз. устойчивым, если приращение $x(1)-x(0)$ имеет У. р.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964; [5] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

Б. А. Рогозин.

УСТОЙЧИВОСТИ КРИТЕРИИ — необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей всех корней уравнения

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0. \qquad (*)$$

У. к. используются, когда применяется теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению неподвижной точки автономной системы дифференциальных уравнений (см. *Устойчивость по Ляпунову*). Наиболее употребителен следующий У. к., наз. критерием Рауса — Гурвица или критерием Гурвица: для отрицательности действительных частей всех корней уравнения (*) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась совокупность неравенств $\Delta_i>0$, $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, где

$$\Delta_1=a_1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & 1\\ a_3 & a_2\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix},\ \ldots$$

— главные диагональные миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix}a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n\end{Vmatrix}$$

(на главной диагонали этой матрицы стоят $a_1,\ \ldots,\ a_n$; при $i>n$ полагают $a_i=0$).

При $n=2$ У. к. Рауса—Гурвица выглядит особенно просто: для отрицательности действительных частей корней уравнения $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнения были положительны: $a_1>0$, $a_2>0$.

При всяком $n\in\mathbb{N}$ для отрицательности действительных частей всех корней уравнения (*) необходимо (но при $n>2$ недостаточно), чтобы все коэффициенты уравнения были положительны: $a_i>0$, $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$. Если хоть один из определителей Δ_i, $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, отрицателен, то у уравнения (*) найдется корень, действительная часть к-рого положительна (это утверждение используется при применении теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению неподвижной точки автономной системы дифференциальных уравнений, см. *Устойчивость по Ляпунову*). Если $\Delta_i\geqslant 0$ для любого $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, но $\Delta_i=0$ для некоторого $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, то расположение корней уравнения (*) относительно мнимой оси тоже можно выяснить, не находя самих корней (см. [5], [8] гл. XVI, § 8).

Более простым для применения является критерий Льенара—Шипара: для отрицательности действительных частей всех корней уравнения (*) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась совокупность неравенств $a_i>0$, $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\Delta_{n-2i+1}>0$, $i\in\left\{1,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ (определители Δ_i — те же, что в критерии Рауса—Гурвица).

Критерий Эрмита (исторически первый, см. [1], [10] § 3.1) позволяет с помощью конечного числа арифметич. действий над коэффициентами уравнения (*) определить, все ли корни этого уравнения имеют отрицательную действительную часть. Сформулированный выше критерий Рауса — Гурвица — это модификация критерия Эрмита, найденная А. Гурвицем. Известен также У. к. Ляпунова (см. [3], [8] гл. XVI, § 5, [10] § 3.5).

При исследовании устойчивости неподвижной точки дифференцируемого отображения (автономной системы

с дискретным временем), а также при исследовании *орбитальной устойчивости* замкнутой траектории автономной системы дифференциальных уравнений применяются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы модули всех корней уравнения (*) были меньше единицы. Эти критерии получаются из У. к., указанных выше, отображением $\lambda \mapsto \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ открытого единичного круга на открытую левую полуплоскость (см. [10] § 3.2).

Лит.: [1] Hermite Ch., «J. reine und angew. Math.», 1856, Bd 52, S. 39—51, [2] Routh E. J., A treatise on the stability of a given state of motion, L., 1877; [3] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956; [4] Hurwitz A., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 273—84, [5] Orlando L., там же, 1911, Bd 71, S. 233—45, [6] Liénard A., Chipart M. H., «J. math. pure et appl.», Sér. 6, 1914, t. 10, p. 291—346; [7] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, М.— Л., 1946; [8] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; [9] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [10] Джури Э., Инноры и устойчивость динамических систем, пер. с англ., М., 1979.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТИ ОБЛАСТЬ — множество в пространстве значений параметра, от к-рого зависит задача Коши. Это множество (не являющееся, вообще говоря, областью) есть объединение компоненты связности внутренности множества S значений параметра, при к-рых решение задачи Коши устойчиво по Ляпунову, и множества тех точек границы этой компоненты, к-рые принадлежат S. Приведенное определение является попыткой вложить точный смысл в понятие, обычно описываемое в той или иной степени расплывчатым образом (ср. [1] с. 194, 195, 197).

Пример. Нулевое решение уравнения Матьё

$$\ddot{y}+(\delta+\varepsilon\cos t)\,y=0,$$

зависящего от параметра $(\delta, \varepsilon)\in\mathbb{R}^2$, имеет счетное множество У. о. (см. [1] рис. 78). Среди этих областей имеются пересекающиеся с полуплоскостью $\delta<0$, чем объясняется возможность стабилизации верхнего положения равновесия маятника с помощью периодич. (синусоидального) колебания точки подвеса в вертикальном направлении (см. [1] гл. VI. §§ 1, 4).

Лит. [1] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [2] Баутин Н. Н., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, 2 изд., М., 1984.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТИ ТЕОРЕМЫ — теоремы, заключением к-рых является утверждение об *устойчивости*.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТИ ТЕОРИЯ — совокупность взглядов, представлений, идей, понятий, рассуждений, методов, теорий (содержащих определения, леммы, теоремы и доказательства), возникших и возникающих с целью изучения *устойчивости* движения (понимаемого в самом общем виде). Таким образом, У. т. является теорией в широком смысле этого слова. Среди различных понятий устойчивости движения наиболее известны следующие.

1. Понятия устойчивости, введенные А. М. Ляпуновым, и их модификации: *устойчивость по Ляпунову* (в частности, асимптотич. устойчивость и экспоненциальная устойчивость), *условная устойчивость* (в частности, асимптотическая условная устойчивость и экспоненциальная условная устойчивость), *устойчивость по части переменных*, *равномерная устойчивость*, *устойчивость при постоянно действующих возмущениях*, *орбитальная устойчивость*, наличие аттракторов (см. *Предельный цикл*, *Лоренца аттрактор*), стохастич. устойчивость, *устойчивость абсолютная*. См. также *Устойчивости критерии*, *Устойчивости область*.

2. *Устойчивость по Лагранжу*.

3. *Устойчивость по Пуассону* и связанные с ней понятия (*блуждающая точка*, *полная неустойчивость*).

4. Структурная устойчивость (см. *Грубая система*) — понятие, введенное А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным.

5. Сохранение большинства инвариантных торов интегрируемой гамильтоновой системы при малых возмущениях функции Гамильтона, открытое А. Н. Колмогоровым (см. также *Малые знаменатели*).

В У. т. по Ляпунову (см. [1] т. 2, а также [2] — [4]) выделяют вопросы, связанные с первым методом Ляпунова. Сюда обычно относят теорию линейных систем дифференциальных уравнений (см. *Уравнение в вариациях*, *Линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*, *Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*, *Правильная линейная система* дифференциальных уравнений, *Неправильности коэффициенты*, *Почти приводимая линейная система* дифференциальных уравнений, *Приводимая линейная система* дифференциальных уравнений, *Мультипликаторы*, *Гамильтонова система линейная*) и имеющую большое пересечение с теорией линейных систем теорию *Ляпунова характеристических показателей* (см. также *Особые показатели*, *Центральные показатели*, *Интегральной разделенности условие*, *Устойчивость характеристических показателей*). По второму методу Ляпунова см. *Ляпунова функция*, а также [5]—[9].

В теории структурной устойчивости выделяют теорию систем Аносова (см. [10]), а также критерии структурной устойчивости (см. [11], [12]).

При исследовании устойчивости по Ляпунову в механике затрагивают вопросы: устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости (см. [1] тт. 3—4), других гравитирующих систем (см. [13]), устойчивость движения жидкости (см. [14], [15]), устойчивость движения деформируемого твердого тела (см. *Устойчивость упругих систем*, а также [16]—[19]), устойчивость движения тел с полостями, содержащими жидкость [20], устойчивость в системах автоматич. управления [21], устойчивость решений уравнений с запаздыванием [22].

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 1—5, М.[—Л.], 1954—65; [2] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1954, [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967, [4] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970, [5] Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, пер с англ., М., 1964, [6] Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, Л., 1957; [7] Румянцев В. В, в кн. Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, [8] Валеев К. Г., Финин Г. С., Построение функций Ляпунова, К., 1981, [9] Шестаков А. А., «Дифференц. уравнения», 1982, т. 18, № 12, с. 2069—97; [10] Аносов Д. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 90, [11] Плисс В. А., Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М., 1977, [12] его же, «Дифференц. уравнения», 1980, т. 16, № 10, с. 1891—92, [13] Поляченко В. Л., Фридман А. М., Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М., 1976, [14] Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, пер. с англ., М., 1958; [15] Джозеф Д., Устойчивость движения жидкости, пер. с англ., М., 1981, [16] Болотин В. В, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961, [17] Болотин В. В., Григолюк Э. И., в кн.. Механика в СССР за 50 лет, т. 3, М, 1972; [18] Вольмир А. С., Устойчивость деформируемых систем, 2 изд., М., 1967; [19] Клюшников В. Д., Устойчивость упруго-пластических систем, М., 1980, [20] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, М., 1965, [21] Narenda K. S, Taylor J. H, Frequency domain criteria for absolute stability, N. Y.— L., 1973, [22] Hale J, Functional-differential equations, N. Y.— [a. o.], 1971.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ — термин, не имеющий четко определенного содержания.

1) У. применительно к движению — характер поведения системы на бесконечном промежутке времени. Этот характер движения выражается следующим образом.

а) Как свойство движущейся системы в том или ином смысле мало отклоняться от нек-рого движения при

малых возмущениях начального положения системы (в *фазовом пространстве*), причем малость отклонения равномерна по $t \geqslant 0$ (см. *Устойчивость по Ляпунову*, *Орбитальная устойчивость*, *Равномерная устойчивость*). В других рассмотрениях У. движения есть свойство движущейся системы мало отклоняться от нек-рого движения при малых возмущениях как начального положения системы (в фазовом пространстве), так и самого закона движения (см. *Устойчивость при постоянно действующих возмущениях*). Иногда малые возмущения начального положения берутся не любые, а подчиненные нек-рому дополнительному условию (см. *Условная устойчивость*); иногда малость возмущения и отклонения измеряется лишь по нек-рым параметрам (см. *Устойчивость по части переменных*).

б) У. движения системы как свойство системы сохранять нек-рые черты фазового портрета при малых возмущениях закона движения (см. *Устойчивости теория*, *Грубая система*).

в) Как свойство системы в процессе движения оставаться в ограниченной области фазового пространства (см. *Устойчивость по Лагранжу*).

г) Как свойство системы в процессе движения сколь угодно поздно возвращаться как угодно близко к своему начальному положению (в фазовом пространстве; см. *Устойчивость по Пуассону*).

2) У. применительно к геометрическим или иным объектам, зависящим от параметров,— непрерывная зависимость этих объектов от параметров (см. [1], [2]).

Однако все эти значения термина «У.» не исчерпывают его содержания.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, М., 1967; [2] Решетняк Ю. Г., Теоремы устойчивости в геометрии и анализе, Новосиб., 1982.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ в теории игр — принцип оптимальности, отражающий прямо или косвенно идею устойчивости ситуации (или множества ситуаций). Выделяют следующие основные концепции У.

1. φ-устойчивость — см. *Коалиционная игра*.

2. ψ-устойчивость — принцип оптимальности в *кооперативных играх*, связанный с понятием У. пары, состоящей из разбиения множества игроков I на коалиции и дележа относительно образования новых коалиций. Разбиение $\mathcal{T}=(T_1, \ldots, T_m)$ множества игроков I наз. коалиционной структурой. Пусть $\langle I, v\rangle$ — кооперативная игра и ψ — функция, сопоставляющая всякой коалиционной структуре $\mathcal{T}$ множество коалиций $\psi(\mathcal{T})$. Пара $(x, \mathcal{T})$, где x — дележ, наз. ψ-устойчивой, если $\sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S)$ для всех $S \in \psi(\mathcal{T})$ и $x_i > v(\{i\})$, когда $\{i\} \notin \mathcal{T}$.

3. k-устойчивость — частный случай ψ-устойчивости, когда в качестве $\psi(\mathcal{T})$ берется множество коалиций, каждая из к-рых отличается от какого-либо элемента $\mathcal{T}$ не более чем на k игроков.

4. M-устойчивость — принцип оптимальности в теории кооперативных игр, формализующий интуитивное понимание У. образования коалиций и дележей значений $v(T)$ характеристич. функции v на образующихся коалициях T между игроками из T относительно возможных угроз одних коалиций против других. Пара $(x, \mathcal{T})$, где $x=(x_i)_{i\in I}$ — вектор, удовлетворяющий условиям $\sum_{i\in T_k} x_i = v(T_k)$, $k=1, \ldots, m$, а $\mathcal{T}=(T_1, \ldots, T_m)$ — коалиционная структура, наз. конфигурацией. Конфигурация наз. индивидуально рациональной (и. р. к.), если $x_i \geqslant v(\{i\})$, $i \in I$. Конфигурация $(x, \mathcal{T})$ наз. коалиционно рациональной (к. р. к.), если вектор x удовлетворяет условию $\sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S)$ для любой коалиции $S \subset T_k$, $k=1, \ldots, m$. В случае, когда $\sum_{k=1}^{m} v(T_k) = v(I)$, в частности когда $\mathcal{T}=\{I\}$, для всякой и. р. к. $(x, \mathcal{T})$ вектор x является дележом.

Множество $P(K; \mathcal{T}) = \{i \in I \mid i \in T_k \text{ и } T_k \cap K \neq \varnothing\}$ наз. множеством партнеров коалиции $K \subset I$ в коалиционной структуре $\mathcal{T}$. Пусть $(x, \mathcal{T})$ — к. р. к. и K, $L \subset I$ — непересекающиеся коалиции. К. р. к. (y, U), удовлетворяющая условиям

$$P(K; U) \cap L = \varnothing,$$
$$y_i > x_i \text{ для всех } i \in K,$$
$$y_i \geqslant x_i \text{ для всех } i \in P(K; U),$$

наз. угрозой коалиции K против L. Контругрозой коалиции L против K наз. к. р. к. (z, V), удовлетворяющая условиям

$$K \not\subset P(L; V),$$
$$z_i \geqslant x_i \text{ для всех } i \in P(L; V),$$
$$z_i \geqslant y_i \text{ для всех } i \in P(L; V) \cap P(K; U).$$

К. р. к. $(x, \mathcal{T})$ наз. M-устойчивой, если для любой пары непересекающихся коалиций K, L на всякую угрозу K против L существует контругроза L против K. Множество всех M-устойчивых конфигураций для коалиционной структуры $\mathcal{T}$ наз. M-устойчивым множеством и обозначается через M или $M(\mathcal{T})$. В случае, когда $\sum_k v(T_k) = v(I)$, множество M содержит c-ядро (см. *Ядро* в теории игр) кооперативной игры $\langle I, v\rangle$. Множество M часто оказывается пустым, и поэтому чаще рассматривают множество $M_1^{(i)}$, к-рое определяется аналогично M со следующими изменениями: рассматриваются не только к. р. к., но и все и. р. к. и допускаются лишь угрозы и контругрозы между одноэлементными коалициями, т. е. между отдельными игроками. Было показано, что множество $M_1^{(i)}$ не пусто для любой коалиционной структуры. Множество $M_1^{(i)}$ для $\mathcal{T}=\{I\}$ содержит k-ядро и совпадает с ним и c-ядром для *выпуклых игр* $\langle I, v\rangle$.

Понятия M-устойчивости и $M_1^{(i)}$-устойчивости имеют естественное обобщение на кооперативные игры без побочных платежей. Известно, что в этом случае множество $M_1^{(i)}$ может быть пустым; имеются нек-рые условия для непустоты $M_1^{(i)}$.

Лит.: [1] Aumann R. J., Maschler M., в сб.: Advances in game theory, Princeton, 1964, p. 443—76; [2] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 81—140; [3] Luce R. D., в сб.: Mathematical models of human behavior, Stanford, 1955, p. 32—44; [4] Льюс Р. Д., Райфа Х., Игры и решения, пер. с англ., М., 1961; [5] Peleg B., «Bull Amer. math. soc.», 1963, v. 69, p. 109—10; [6] его же, «Israel J. math.», 1963, v. 1, p. 48—53; [7] Оуэн Г., Теория игр, пер. с англ., М., 1971.

А. Я. Кирута.

УСТОЙЧИВОСТЬ АБСОЛЮТНАЯ — устойчивость в целом тривиального решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (или уравнений другого типа), равномерная для всех систем некоторого класса. Термин «У. а.» подразумевает задание класса систем и указание, в каком смысле понимается устойчивость и равномерность. Кроме обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются также уравнения в конечных разностях, интегральные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, уравнения с частными производными.

Пусть рассматривается система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\xi(t) \qquad (1)$$

и нек-рым множеством $\mathfrak{M}$ пар функций $\{x(\cdot), \xi(\cdot)\}$. Здесь A, B — постоянные комплексные матрицы размеров $N \times N$ и $N \times n$ соответственно; $x(t)$ и $\xi(t)$ — век-

торные комплекснозначные функции порядков N и n соответственно, причем $\xi(t)$ локально суммируема, а $x(t)$ абсолютно непрерывна. В приложениях обычно A, B, $x(t)$, $\xi(t)$ действительны, уравнение (1) описывает линейную часть системы, а множество $\mathfrak{M}$ определяется свойствами нелинейных блоков системы. В простейшем случае имеется один фиксированный нелинейный блок, к-рый описывается уравнением

$$\xi(t) = \varphi[\sigma(t),\ t], \quad \text{где } \sigma(t) = Cx(t) \tag{2}$$

($\sigma(t)$ и $\xi(t)$ — скалярные функции, C — $(1\times N)$-матрица; $\sigma(t)$, $\xi(t)$, C действительны). В этом случае $\mathfrak{M}$ — множество всех пар $\{x(\cdot), \xi(\cdot)\}$, для которых выполнено (2).

Многочисленные исследования конкретных нелинейных систем привели к пониманию того, что в первую очередь следует учитывать квадратичные соотношения, связывающие $\xi(t)$ и $x(t)$, описываемые несколько специфически. Пусть, напр., относительно функций $\varphi(\sigma, t)$ в (2) известно лишь, что для всех $t\geqslant 0$ и σ

$$\mu_1 \leqslant \varphi(\sigma, t)/\sigma \leqslant \mu_2.$$

В этом случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}[\mu_1, \mu_2]$ есть множество всех $x(t)$ и $\xi(t)$, для к-рых почти всюду $\mu_1 \leqslant \xi(t)/\sigma(t) \leqslant \mu_2$, где $\sigma(t) = Cx(t)$, или, иначе

$$[\mu_2\sigma(t) - \xi(t)][\xi(t) - \mu_1\sigma(t)] \geqslant 0. \tag{3}$$

Ниже $n \geqslant 1$, $F(x, \xi)$ — эрмитова форма на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^n$. В общем случае рассматривается класс $\mathfrak{M}_{F,\,\text{л}}$ пар функций $x(t)$, $\xi(t)$, удовлетворяющих почти всюду локальной связи

$$F[x(t),\ \xi(t)] \geqslant 0, \tag{4}$$

а также класс $\mathfrak{M}_{F,\,\text{и}}(\gamma)$ пар функций $x(t)$, $\xi(t)$, удовлетворяющих интегральной связи

$$\exists T_k \longrightarrow \infty : \int_0^{T_k} F[x(t),\ \xi(t)]\, dt \geqslant -\gamma \tag{5}$$

(числа T_k зависят от $x(\cdot)$, $\xi(\cdot)$). Разнообразные практически важные нелинейные блоки («люфт», гистерезисные нелинейности, импульсные модуляторы разных типов) удовлетворяют связи (5) с подходяще выбранной формой $F(x, \xi)$.

Ниже предполагается, что уравнение (1) управляемо (см. [1]), т. е. что ранг $(N\times Nn)$-матрицы

$$\|B,\ AB,\ \ldots,\ A^{N-1}B\|$$

равен N и что выполнено следующее условие минимальной устойчивости: существует такая $(n\times N)$-матрица R, что $A+BR$ — матрица Гурвица и

$$F(x, Rx) \geqslant 0 \quad \text{для любого } x,$$

где F — форма в (4) или (5). Пусть D, E — произвольные матрицы порядков $m\times N$ и $m\times n$ соответственно, $\|D\|+\|E\|\neq 0$, и по ним формируется «выход» системы (1):

$$\eta(t) = Dx(t) + E\xi(t). \tag{6}$$

Различают действительный случай, когда все величины в (1), (6) и коэффициенты формы $F(x, \xi)$ действительны, и комплексный случай, когда они, вообще говоря, комплексны. Множество всех действительных $x(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, удовлетворяющих (4) (или (5)), ниже обозначено $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,\,\text{л}}$ соответственно $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,\,\text{и}}(\gamma)$). Пусть

$$\|\eta(\cdot)\|^2 = \int_0^\infty |\eta(t)|^2\, dt.$$

Система (1) наз. абсолютно устойчивой по выходу (6) в классе $\mathfrak{M}$, если существуют такие постоянные $C_1 \geqslant 0$, $C_2 \geqslant 0$, что из (1), (6) и $[x(\cdot), \xi(\cdot)] \in \mathfrak{M}$ следует конечность $\|\eta(\cdot)\|$ и оценка

$$\|\eta(\cdot)\|^2 \leqslant C_1 |x(0)|^2 + C_2. \tag{7}$$

Квадратичный критерий У. а.: для У. а. системы (1) по выходу (6) в классе $\mathfrak{M}_{F,\,\text{и}}(\gamma)$ (в действительном случае — в классе $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,\,\text{и}}(\gamma)$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists \delta > 0 :\ F(\tilde{x},\ \tilde{\xi}) \leqslant -\delta |\tilde{\eta}|^2 \tag{8}$$

для всех комплексных $\tilde{x}$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ и действительных ω, связанных соотношениями

$$i\omega\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{\xi}, \quad \tilde{\eta} = D\tilde{x} + E\tilde{\xi}. \tag{9}$$

При выполнении (8), (9) в (7) $C_2 = C_2'\gamma$, причем числа C_1 и C_2' не зависят от γ в (5). Если $\eta(t) = x(t)$ и выполнено (4), а также (8) (для $\tilde{\eta} = \tilde{x}$), то имеет место экспоненциальная устойчивость в целом:

$$\exists C > 0,\ \varepsilon > 0:$$
$$|x(t)| \leqslant Ce^{-\varepsilon(t-t_0)}|x(t_0)| \text{ (для всех } x(\cdot),\ t \geqslant t_0). \tag{10}$$

Пусть $\det\|A - i\omega I\| \neq 0$ для всех ω (здесь I — единичная $(N\times N)$-матрица). Для У. а. системы (1) по выходу $\eta(t) = [x(t), \xi(t)]$ в классе $\mathfrak{M}_{F,\,\text{л}}$ необходимо и достаточно, чтобы для любых ω, $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$, и любых комплексных $\tilde{\xi} \neq 0$ было выполнено неравенство

$$F[\|A - i\omega I\|^{-1} B\tilde{\xi},\ \tilde{\xi}] < 0. \tag{11}$$

Для класса $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,\,\text{л}}$ аналогичное утверждение справедливо лишь в отношении достаточности. Необходимые и достаточные условия У. а. в классе $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,\,\text{л}}$ известны лишь для специальных форм F, а эффективно проверяемые условия — лишь для $N = 2$ (см. [3], [7]).

Из соотношений (9) следует

$$\tilde{\eta} = W^{(\eta)}(i\omega)\tilde{\xi}, \quad \text{где } W^{(\eta)}(i\omega) = E + D\|i\omega I - A\|^{-1}B;$$

элемент $W^{(\eta)}_{jk}$ матрицы $W^{(\eta)}(i\omega)$ наз. частотной характеристикой от входа ξ_k к выходу η_j. Критерии, устанавливающие те или иные свойства системы, выраженные через частотные характеристики, наз. частотными критериями устойчивости. Достоинствами частотных критериев являются их удобство в практич. применениях и инвариантность относительно преобразований $x' = Sx$ ($S = \text{const}$, $\det S \neq 0$) системы (1).

В действительном случае с $n = 1$ для класса $\mathfrak{M}[\mu_1, \mu_2]$, определенного соотношением (3), условие (11) приобретает вид

$$\operatorname{Re}\{[\mu_2\overline{W(i\omega)} - 1][1 - \mu_1 W(i\omega)]\} > 0, \tag{12}$$

где $W(i\omega) = C(A - i\omega I)^{-1}B$ — частотная характеристика от входа $\xi(t)$ к выходу $[-\sigma(t)]$. Частотный критерий (12) (круговой критерий) означает, что частотная характеристика $W(i\omega)$, $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$, не пересекается с окружностью, имеющей центр в точке $(-\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1})/2$ и проходящей через точки $(-\mu_1^{-1})$, $(-\mu_2^{-1})$. Условие минимальной устойчивости в этом случае означает, что асимптотически устойчива линейная система (1) с $\xi = \mu\sigma$, $\sigma = Cx$ с каким-либо $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Критерий (12) является естественным распространением критерия Михайлова — Найквиста на нелинейные системы.

Исторически первым частотным критерием У. а. для нелинейных систем был критерий Попова для $n = 1$ и класса $\mathfrak{M}$ стационарных нелинейностей $\xi(t) = \varphi[\sigma(t)]$, где $0 \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0\sigma^2$ (см. [2]). Он имеет вид:

$$\exists \vartheta :\ \mu_0^{-1} + \operatorname{Re} W(i\omega) + \vartheta \operatorname{Re}[i\omega W(i\omega)] > 0,$$
$$0 \leqslant \omega \leqslant \infty. \tag{13}$$

Условие минимальной устойчивости в этом случае равносильно тому, что матрица A в (1) — матрица Гурвица.

Существует определенная связь частотных критериев (6), (12), (13) и других с фактом существования глобаль-

ной функции Ляпунова. Частотные критерии У. а. обычно охватывают все критерии, к рые могут быть получены с помощью функций Ляпунова из нек-рых многопараметрич. классов функций. Напр., критерий (12) — необходимое и достаточное условие существования функции

$$V(x)=x^*Hx$$

($H=H^*=\text{const}$ — $(N\times N)$-матрица, $*$ — знак эрмитова сопряжения) такой, что ее производная в силу системы (11), (2) с произвольной нелинейностью (2) (для к-рой $\mu_1\leqslant\varphi(\sigma, t)/\sigma\leqslant\mu_2$) удовлетворяет условию

$$dV(x)/dt<0 \text{ при } x\neq 0.$$

Аналогично, частотное условие Попова (13) охватывает все критерии, к-рые можно установить, используя функции Ляпунова вида

$$V(x)=x^*Hx+\vartheta\int_0^\sigma\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Известно много других частотных критериев У. а. для разных классов нелинейностей (см. [3]—[6]). Они распространены, в частности, на важные для приложений случаи неединственного состояния равновесия (см. [1]). Частотные критерии У. а. позволили выделять классы нелинейных систем общего вида, для к-рых факт устойчивости в целом устанавливается особенно просто. Напр., для системы (1) с $\xi=\varphi(\sigma)$, $\sigma=Cx$, $N\leqslant 3$, $n=1$ (т. е. для произвольной системы не выше 3-го порядка с одной нелинейностью) имеет место асимптотическая устойчивость в целом, если $\mu_1\leqslant\varphi'(\sigma)\leqslant\mu_2$ и если любая линейная система с $\xi=\mu\sigma$, $\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2$, асимптотически устойчива. Для систем 4-го (и более высокого) порядка аналогичное утверждение ошибочно. Более того, при $N\geqslant 4$, $n=1$ существуют такие системы (1) и нелинейности $\xi=\varphi(\sigma)$, $\mu_1\leqslant\varphi'(\sigma)\leqslant\mu_2$, что матрица любой линеаризованной системы с $\xi=\mu\sigma$, $\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2$,— матрица Гурвица, а нелинейная система имеет периодическое решение.

При замене условия минимальной устойчивости аналогичным условием минимальной неустойчивости неравенства (8), (11), (12), (13) становятся критериями абсолютной неустойчивости (при соответствующем понимании последнего термина). Пусть, напр., в действительном случае с $n=1$ матрица коэффициентов системы (1) с $\xi=\mu\sigma$, $\sigma=Cx$ (т. е. матрица $A+BC$) при нек-ром μ, $\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2$, имеет $k\geqslant 1$ собственных значений в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$ и выполнено частотное условие (12). Тогда у системы (1), (2) с функцией $\varphi(\sigma, t)$, удовлетворяющей условию $\mu_1\leqslant\varphi(\sigma, t)/\sigma\leqslant\mu_2$ (а также у системы (1), (3)), имеются решения $x(t)$, для к-рых

$$|x(t)|\geqslant Ce^{\varepsilon t}|x(0)| \text{ при } t\geqslant 0,$$

где постоянные $C>0$, $\varepsilon>0$ — одни и те же для всех систем указанного класса. Соответствующие векторы $x(0)$ заполняют конус $x(0)^*Hx(0)<0$, где $H=H^*$ — нек-рая матрица, имеющая k отрицательных собственных значений.

Аналогично, при $n=1$ условие (13) является частотным критерием абсолютной неустойчивости системы (1) с $\sigma=Cx$ в классе стационарных нелинейностей $\xi(t)=\varphi[\sigma(t)]$, где $0\leqslant\sigma\varphi(\sigma)\leqslant\mu_0\sigma^2$, если в (1) матрица A имеет собственные значения в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$.

В теории У. а. установлены также аналогичные частотные критерии диссипативности, конвергенции, существования периодич. движений (автоколебаний и вынужденных режимов) и др. (см., напр., [3], [5] и литературу в [1], [3], [5]).

Лит.: [1] Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А., Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, М., 1978; [2] Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем, М., 1963; [3] Якубович В. А., в кн.: Методы исследования нелинейных систем автоматического управления, М., 1975, с. 74—180; [4] Попов В. М., Гиперустойчивость автоматических систем, пер. с рум., М., 1970; [5] Воронов А. А., Устойчивость, управляемость, наблюдаемость, М., 1979; [6] Резван В., Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием, пер. с рум., М., 1983; [7] Пятницкий Е. С., «Автоматика и телемеханика», 1968, № 6, с. 5—36.

В. А. Якубович.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА — равномерная относительно h и m ограниченность частично разрешающих операторов L_m^h, описывающих последовательные этапы вычислительного алгоритма решения уравнения

$$L^hu^h=f^h,$$

напр. сеточного уравнения с шагом h (см. *Замыкание вычислительного алгоритма*). У. в. а. является гарантией слабого влияния вычислительной погрешности на результат вычислений. Однако не исключена возможность, что величина $p(h)=\sup\limits_m\|L_m^h\|$ растет сравнительно медленно и соответствующее усиление влияния вычислительной погрешности при $h\to 0$ оказывается практически допустимым. Понятие У. в. а. конкретизируется в применении к проекционно-сеточным методам (см. [4]) и в применении к итерационным методам (см. [6]). Имеются и другие определения У. в. а. (см., напр., [1], [3]).

Лит.: [1] Бабушка И., Витасек Э., Прагер М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1969; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Гавурин М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971; [4] Марчук Г. И., Агошков В. И., Введение в проекционно-сеточные методы, М., 1981; [5] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [6] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА — свойство, характеризующее скорость накопления суммарной вычислительной погрешности. Понятие У. в. п. было введено потому, что в реальных расчетах невозможно оперировать с точными числами, ибо нельзя избежать округления, к-рое иногда может быть причиной быстрой потери точности.

Вычислительный процесс есть последовательность арифметич. операций над числами. Пусть X_i — нормированное линейное пространство и A_i — непрерывный оператор $A_i: X_1\times X_2\times\ldots\times X_i\longrightarrow X_{i+1}$. Тогда последовательность уравнений

$$x_{i+1}=A_i(x_1, x_2, \ldots, x_i),$$
$$x_{i+1}\in X_{i+1},\ i=1, 2, \ldots, N-1, \qquad (1)$$

задает вычислительный процесс с исходным данным x_1 и промежуточными результатами x_i, $i=2, 3, \ldots, N-1$. Обычно $X_i=\mathbb{R}^n$, а оператор A_i состоит из конечного числа арифметич. операций. Как правило, x_{i+1} зависит не от всех ранее полученных промежуточных результатов. Число N может быть задано заранее или определено в самом вычислительном процессе. В последнем случае N зависит от x_1 (напр., если N — число итераций, необходимых для достижения заданной точности).

Реальный вычислительный процесс не может быть проведен в точном соответствии с определением (1), так как при выполнении арифметич. операций допускаются ошибки округления и x_{i+1} получается из неточных предыдущих результатов. Это значит, что вместо элемента x_{i+1} фактически вычисляется элемент

$$\tilde{x}_{i+1}=A_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_i)+\delta_i,\ \delta_i\in X_{i+1}, \qquad (2)$$

где малая аддитивная ошибка δ_i возникает из-за округлений в ходе выполнения оператора A_i. Значение δ_i определяется значениями $\tilde{x}_j$, $j=1, 2, \ldots, i$, спосо-

бом округления, рабочей машинной программой и т. п. Однако даже если $\|\delta_j\|$ малы для $j=1, 2, \ldots, i$, это еще не гарантирует, что мала $\|x_{i+1}-\tilde{x}_{i+1}\|$. Она будет малой только для так наз. устойчивого вычислительного процесса, при этом она не будет сильно зависеть от i.

Лит.: [1] Бабушка И., Витасек Э., Прагер М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1969, [2] Воеводин В. В., Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры, М., 1969; [3] Гавурин М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971. *А. Ф. Шапкин.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛАГРАНЖУ — свойство точки x (траектории $f^t x$) динамич. системы f^t (или $f(t, \cdot)$, см. [2]), заданной на метрич. пространстве S, состоящее в том, что все точки траектории $f^t x$ содержатся в нек-ром предкомпактном множестве (см. *Предкомпактное пространство*).

Если $S=\mathbb{R}^n$, то У. по Л.— то же, что ограниченность траектории. Если при всех $t\in\mathbb{R}^+$ (соответственно, при всех $t\in\mathbb{R}^-$) точки $f^t x$ содержатся в нек-ром предкомпактном множестве, то траектория $f^t x$ (точка x) наз. положительно (соответственно отрицательно) устойчивой по Лагранжу. Понятие У. по Л. введено А. Пуанкаре (H. Poincaré) в связи с анализом результатов Ж. Лагранжа (J. Lagrange) по устойчивости планетных орбит.

Теорема Биркгофа: если S полно, то замыкание положительно или отрицательно устойчивой по Лагранжу траектории содержит хотя бы одно *минимальное множество*. Всякая точка минимального множества является *рекуррентной точкой*.

Лит. [1] Пуанкаре А., Избранные труды, пер с франц., т. 2, М., 1972, гл 26, с. 130—58, [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ точки относительно семейства отображений нек-рого пространства E

$$\{f_t\}_{t\in G^+}: E \longrightarrow E \qquad (1)$$

— равностепенная непрерывность этого семейства отображений в этой точке (здесь G^+ — множество неотрицательных чисел: действительных $G=\mathbb{R}$ или целых $G=\mathbb{Z}$). У. по Л. точки относительно семейства отображений (1) эквивалентна непрерывности в этой точке отображения $x\mapsto x(\cdot)$ ее окрестности во множество функций $x(\cdot)$, определенных формулой $x(t)=f_t(x)$, наделенное топологией равномерной сходимости на G^+. У. по Л. точки относительно отображения определяется как ее У. по Л. относительно семейства неотрицательных степеней этого отображения. У. по Л. точки относительно динамич. системы f^t есть У. по Л. этой точки относительно семейства отображений $\{f^t\}_{t\in G^+}$. У. по Л. заданного на $t_0+\mathbb{Z}^+$ решения $x_0(\cdot)$ уравнения $x(t+1)=g_t x(t)$ есть У. по Л. точки $x_0(t_0)$ относительно семейства отображений $\{f_t \overset{\text{det}}{=} g_{t_0+t}\cdots g_{t_0+1}g_{t_0}\}_{t\in\mathbb{Z}^+}$.

У. по Л. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $x_0(\cdot)$ дифференциального уравнения $\dot{x}=f(x, t)$ есть У. по Л. точки $x_0(t_0)$ относительно семейства отображений $\{X(t_0+t, t_0)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, где $X(\theta, \tau)$ — *Коши оператор* этого уравнения. У. по Л. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $y(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$y^{(m)}=g(y, \dot{y}, \ldots, y^{(m-1)}, t)$$

порядка m есть У. по Л. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $x(\cdot)=(y(\cdot), \dot{y}(\cdot), \ldots, y^{(m-1)}(\cdot))$ соответствующего дифференциального уравнения 1-го порядка $\dot{x}=f(x, t)$, где

$$x=(x_1, \ldots, x_m),$$

$$f(x, t)=(x_2, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m, t)).$$

Приводимые ниже определения 1—7 являются нек-рыми конкретизациями этих и родственных им определений.

1. Пусть дано дифференциальное уравнение $\dot{x}=f(x, t)$, где x принадлежит n-мерному нормированному пространству E. Решение $x_0(\cdot): t_0+\mathbb{R}^+ \longrightarrow E$ этого уравнения наз. устойчивым по Ляпунову, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $x\in E$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0(t_0)|<\delta$, решение $x(\cdot)$ задачи Коши

$$\dot{x}=f(x, t),\ x(t_0)=x$$

единственно, определено на $t_0+\mathbb{R}^+$ и при всяком $t\in t_0+\mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству $|x(t)-x_0(t)|<\varepsilon$. Если, сверх того, найдется $\delta_0>0$ такое, что для всякого решения $x(\cdot)$ уравнения $\dot{x}=f(x, t)$, начальное значение к-рого удовлетворяет неравенству

$$|x(t_0)-x_0(t_0)|<\delta_0,$$

имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=0$$

(соответственно неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|x(t)-x_0(t)|<0;$$

здесь и далее полагают $\ln 0=-\infty$), то решение $x_0(\cdot)$ наз. асимптотически (соответственно экспоненциально) устойчивым.

Решение уравнения

$$\dot{x}=f(x, t), \qquad (2)$$

где $x\in\mathbb{R}^n$ или $x\in\mathbb{C}^n$, наз. устойчивым по Ляпунову (асимптотически, экспоненциально устойчивым), если оно становится таковым в результате наделения пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) нек-рой нормой. От выбора нормы это свойство решения не зависит.

2. Пусть дано отображение $f: S\to S$, где (S, d) — метрич. пространство. Точка $x_0\in S$ наз. устойчивой по Ляпунову относительно отображения f, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $x\in S$, удовлетворяющего неравенству $d(x, x_0)<\delta$, выполнено неравенство

$$d(f^t x, f^t x_0)<\varepsilon$$

для всякого $t\in\mathbb{N}$. Если, сверх того, найдется $\delta_0>0$ такое, что для всякого $x\in S$, удовлетворяющего неравенству $d(x, x_0)<\delta_0$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} d(f^t x, f^t x_0)=0$$

(неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln d(f^t x, f^t x_0)<0),$$

то точка x_0 наз. асимптотически (соответственно экспоненциально) устойчивой относительно отображения f.

Пусть дано отображение f компактного топологич. пространства S в себя. Точка $x_0\in S$ наз. устойчивой по Ляпунову (асимптотически устойчивой) относительно отображения f, если она становится таковой в результате наделения пространства S нек-рой метрикой. От выбора метрики это свойство точки не зависит.

Если S — компактное дифференцируемое многообразие, то точка $x_0\in S$ наз. экспоненциально устойчивой относительно отображения $f: S\to S$, если она становится таковой в результате наделения S нек-рой римановой метрикой. От выбора римановой метрики на S это свойство точки не зависит.

3. Пусть дано дифференциальное уравнение (2), где x принадлежит векторному топологич. пространству E. Решение $x_0(\cdot): t_0+\mathbb{R}^+ \to E$ этого уравнения наз. устойчивым по Ляпунову, если для всякой окрестности нуля $U\subset E$ множество тех $x\in E$, для к-рых решение $x(\cdot)$ задачи Коши (2), $x(t_0)=x$ единственно, определено на $t_0+\mathbb{R}^+$ и при всяком $t\in t_0+\mathbb{R}^+$ удовлетворяет соотношению $x(t)-x_0(t)\in U$, есть окрестность точки $x_0(t_0)$ в пространстве E. Если, сверх того, найдется окрестность $V_0\subset E$ точки $x_0(t_0)$ такая, что для всякого решения $x(\cdot)$ уравнения (2), удовлетворяющего условию $x(t_0)\in V_0$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t)-x_0(t))=0$$

(равенство

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t}(x(t)-x_0(t))=0$$

для нек-рого $\alpha>0$), то решение $x_0(\cdot)$ наз. асимптотически (соответственно экспоненциально) устойчивым. Если пространство E нормируемо, то это определение формулируется так же, как в п. 1, если в качестве нормы $|\cdot|$ взять любую норму, согласующуюся с топологией пространства E.

4. Пусть дано дифференциальное уравнение (2) на римановом многообразии U (моделью к-рого служит евклидово или гильбертово пространство) или (более общая ситуация) на финслеровом многообразии U (моделью к-рого служит нормированное пространство); расстояние в U обозначается через $d(\cdot,\cdot)$. Решение $x_0(\cdot): t_0+\mathbb{R}^+\to U$ этого уравнения наз. устойчивым по Ляпунову, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $x\in U$, удовлетворяющего неравенству $d(x, x_0(t_0))<\delta$, решение $x(\cdot)$ задачи Коши (2), $x(t_0)=x$ единственно, определено на $t_0+\mathbb{R}^+$ и при всяком $t\in t_0+\mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству $d(x(t), x_0(t))<\varepsilon$. Если, сверх того, найдется $\delta_0>0$ такое, что для всякого решения $x_0(\cdot)$ уравнения (2), начальное значение к-рого удовлетворяет неравенству $d(x(t_0), x_0(t_0))<\delta_0$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} d(x(t), x_0(t))=0$$

(неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln d(x(t), x_0(t))<0),$$

то решение $x_0(\cdot)$ наз. асимптотически (соответственно экспоненциально) устойчивым.

Пусть дано дифференциальное уравнение (2) на компактном дифференцируемом многообразии V^n. Решение этого уравнения наз. устойчивым по Ляпунову (асимптотически, экспоненциально устойчивым), если оно становится таковым в результате наделения многообразия V^n нек-рой римановой метрикой. От выбора римановой метрики это свойство решения не зависит.

5. Пусть E — равномерное пространство. Пусть

$$f_t: U\to E,\ t\in G^+\ (G=\mathbb{R}\text{ или }G=\mathbb{Z}),$$

— отображения, определенные на открытом множестве $U\subset E$. Точка $x_0\in U$ наз. устойчивой по Ляпунову относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t\in G^+}$, если для всякого окружения W найдется окрестность V точки x_0 такая, что множество тех $x\in U$, для к-рых $(f_t x, f_t x_0)\in W$ при всяком $t\in G^+$, есть окрестность точки x_0. Если, сверх того, найдется окрестность V_0 точки x_0 такая, что для всякого $x\in V_0$ для всякого окружения W найдется $t(x, W)\in G^+$ такое, что $(f_t x, f_t x_0)\in W$ при всяком $t\in t(x, W)+\mathbb{R}^+$, то точка x_0 наз. асимптотически устойчивой.

Если E — компактное топологич. пространство, а $f_t: U\to E$, $t\in G^+$, — отображения, заданные на нек-ром открытом множестве $U\subset E$, то точка $x_0\in U$ наз. устойчивой по Ляпунову (асимптотически устойчивой) относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t\in G^+}$, если она становится таковой в результате наделения пространства E той единственной равномерной структурой, к-рая согласуется с топологией пространства E.

6. Пусть E — топологич. пространство, U — открытое множество в нем. Пусть $f_t: U\to E$, $t\in G^+$, где G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$, — отображения, имеющие неподвижную точку x_0. Неподвижная точка x_0 наз. устойчивой по Ляпунову относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t\in G^+}$, если для всякой окрестности V точки x_0 найдется окрестность W той же точки такая, что $f_t W\subset V$ при всяком $t\in G^+$. Если, сверх того, найдется окрестность V_0 точки x_0 такая, что $\lim\limits_{t\to+\infty} f_t x=x_0$ для всякого $x\in V_0$, то неподвижная точка x_0 наз. асимптотически устойчивой относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t\in G^+}$.

7. У. по Л. (асимптотическая, экспоненциальная устойчивость) решения $y_0(\cdot)$ уравнения произвольного порядка $y^{(m)}=g(y, \dot y, \ldots, y^{(m-1)}, t)$ определяется как У. по Л. (соответственно асимптотическая, экспоненциальная устойчивость) решения $x_0(\cdot)=(y_0(\cdot), \dot y_0(\cdot), \ldots, y_0^{(m-1)}(\cdot))$ соответствующего уравнения 1-го порядка (2), где $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $f(x, t)=(x_2, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m, t))$.

Определения 1, 2, 4, 6, 7 охватывают устойчивые движения систем с конечным числом степеней свободы (причем уравнения на многообразиях естественно возникают при рассмотрении механич. систем со связями). Определения 2—7 охватывают устойчивые движения в механике сплошной среды и в других разделах физики, устойчивые решения операторных, функционально-дифференциальных (в частности, уравнений с запаздыванием) и др. уравнений.

Исследование на устойчивость *равновесия положения* автономной системы. Пусть в окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}^n$ задано автономное дифференциальное уравнение $\dot x=f(x)$, причем функция $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и обращается в этой точке в нуль. Если действительные части всех собственных значений производной df_{x_0} отрицательны, то неподвижная точка x_0 дифференциального уравнения $\dot x=f(x)$ экспоненциально устойчива (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению); для облегчения проверки условия этой теоремы применяются критерии устойчивости. Если при тех же условиях хоть одно из собственных значений производной df_{x_0} имеет положительную действительную часть (это условие можно проверить, не находя самих собственных значений, см. *Устойчивости критерии*), то неподвижная точка x_0 дифференциального уравнения $\dot x=f(x)$ неустойчива.

Пример. Уравнение колебаний маятника с трением

$$\ddot y+a\dot y+b\sin y=0,\ a>0,\ b>0.$$

Нижнее положение равновесия $y=\dot y=0$ экспоненциально устойчиво, т. к. корни характеристич. уравнения $\lambda^2+a\lambda+b=0$ *уравнения в вариациях* имеют отрицательные действительные части. Верхнее положение равновесия $y=\pi$, $\dot y=0$ неустойчиво, т. к. характеристич. уравнение $\lambda^2+a\lambda-b=0$ уравнения в вариациях $\ddot y+a\dot y-by=0$ имеет положительный корень. Эта неустойчивость имеет место и в отсутствии трения ($a=0$). Нижнее положение равновесия маятника без

трения — один из т. н. критических случаев, когда все собственные значения производной df_{x_0} лежат в левой комплексной полуплоскости, причем хоть один из них лежит на мнимой оси.

Для исследования устойчивости в критич. случаях А. М. Ляпунов предложил т. н. второй метод исследования устойчивости (см. *Ляпунова функция*). Для маятника без трения

$$\ddot{y}+b\sin y=0,\quad b>0,$$

нижнее положение равновесия устойчиво по Ляпунову, т. к. существует функция Ляпунова

$$V(y,\ \dot{y})=\frac{1}{2}\dot{y}^2+b(1-\cos y)$$

— полная энергия маятника; условие неположительности производной этой функции — следствие закона сохранения энергии.

Неподвижная точка x_0 дифференцируемого отображения $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ экспоненциально устойчива относительно f, если все собственные значения производной df_{x_0} по модулю меньше 1, и неустойчива, если хоть одно из них имеет модуль >1.

Исследование устойчивости периодич. точки дифференцируемого отображения сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки относительно степени этого отображения. Периодич. решение автономного дифференциального уравнения не бывает асимптотически устойчивым (см. *Орбитальная устойчивость*, *Андронова — Витта теорема*).

Не следует думать, что из экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения в вариациях автономного дифференциального уравнения $\dot{x}=f(x)$ вдоль решения $x(\cdot)$ вытекает устойчивость решения. Это показывает пример Перрона (см. [2], [3]):

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-au,\\ \dot{v}&=(\sin\ln t+\cos\ln t-2a)v+u^2.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

При $a>1/2$ нулевое решение системы уравнений в вариациях

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-au,\\ \dot{v}&=(\sin\ln t+\cos\ln t-2a)v\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

системы (3) (вдоль нулевого решения) экспоненциально устойчиво (*Ляпунова характеристические показатели* системы (4) равны $-a$, $1-2a$), но при $a\in\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-\pi}\right)$ нулевое решение системы (3) неустойчиво. Однако устойчивость по первому приближению типична в смысле, разъясняемом ниже.

Пусть S — множество диффеоморфизмов f евклидова пространства E^n на себя, имеющих равномерно непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$\sup_{x\in E^n}\max\{\|df_x\|,\ \|(df_x)^{-1}\|\}<+\infty.$$

Для всякого диффеоморфизма $j\in S$ через S_j обозначается множество диффеоморфизмов $f\in S$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x\in E^n}|fx-jx|<+\infty;$$

в множестве S_j задается расстояние

$$d(f,\ g)=\sup_{x\in E^n}(|fx-gx|+\|df_x-dg_x\|).$$

При всяком $j\in S$ в пространстве $S_j\times E^n$ имеется всюду плотное множество D_j типа G_δ, обладающее свойством: если для нек-рого $(f,\ x)\in D_j$ для всякого $\xi\in T_xE^n$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m\xi|<0,$$

то найдется окрестность U точки $(f,\ x)$ в пространстве $S_j\times E^n$ такая, что для всякого $(g,\ y)\in U$ точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g.

Для динамич. систем, заданных на компактном дифференцируемом многообразии, аналогичная теорема формулируется проще и является дифференциально-топологически инвариантной. Пусть V^n — замкнутое дифференцируемое многообразие. Множество S всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n, наделяется C^1-топологией. В пространстве $S\times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ, обладающее свойством: если для нек-рого $(f,\ x)\in D$ для всякого $\xi\in T_xV^n$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m\xi|<0,$$

то найдется окрестность U точки $(f,\ x)$ в пространстве $S\times V^n$ такая, что для всякого $(g,\ y)\in U$ точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g.

Понятия У. по Л., асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости были введены А. М. Ляпуновым [1], разработавшим методы исследования устойчивости, понимаемой в смысле этих определений (см. также *Ляпунова теория устойчивости*).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [2] Perron O., «Math. Z.», 1928, Bd 29, S. 129—60, [3] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1954.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПУАССОНУ — свойство точки x (траектории f^tx) динамич. системы f^t (или $f(t,\ \cdot)$, см. [2]), заданной на топологич. пространстве S, состоящее в следующем: найдутся последовательности $t_k\longrightarrow+\infty$, $\tau_k\longrightarrow-\infty$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}f^{t_k}x=\lim_{k\to\infty}f^{\tau_k}x=x.$$

Иными словами, x является α- и ω-*предельной точкой* траектории f^tx. Понятие У. по П. введено А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]) на основе анализа результатов С. Пуассона (S. Poisson) по устойчивости планетных орбит.

Всякая точка, устойчивая по Пуассону,— неблуждающая; обратное неверно (см. *Блуждающая точка*). Всякая неподвижная и всякая периодич. точка, вообще всякая *рекуррентная точка*, устойчивы по Пуассону. Если $S=\mathbb{R}^2$ и динамич. система гладкая (т. е. задана векторным полем класса C^1), то всякая точка, устойчивая по Пуассону, является либо неподвижной, либо периодической.

Теорема Пуанкаре о возвращении: если динамич. система задана на ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$ и лебегова мера является инвариантной мерой системы, то устойчивы по Пуассону все точки, кроме точек нек-рого множества первой категории меры нуль (см. [1], [3]). Обобщением этой теоремы на динамич. системы, заданные на пространстве бесконечной меры, является теорема Хопфа о возвращении (см. [2]): если динамич. система задана на произвольной области пространства $\mathbb{R}^n$ (напр., на всем $\mathbb{R}^n$) и лебегова мера является инвариантной мерой системы, то каждая точка x, кроме точек нек-рого множества меры нуль, или устойчива по Пуассону или является уходящей, т. е.

$$|f^tx|\longrightarrow\infty\ \text{при}\ |t|\longrightarrow\infty.$$

Имеются и более общие формулировки теорем Пуанкаре и Хопфа (см. [2]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избранные труды, т. 2, М., 1972, гл. 26, с. 130—58; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [3] Окстоби Дж., Мера и категория, пер. с англ., М., 1974. *В. М. Миллионщиков.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ — устойчивость в смысле Ляпунова решения $x=0$ по отношению не ко всем, а лишь к нек-рым переменным $x_1, \ldots, x_k$, $k<n$, системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s=1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $X_s(t, x)$ — данные действительные непрерывные функции, удовлетворяющие в области

$$t \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leqslant H = \text{const}, \quad \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 < \infty \tag{2}$$

условиям существования и единственности решения $x(t; t_0, x_0)$, причем

$$X_s(t, 0) \equiv 0, \quad s=1, \ldots, n,$$

и любое решение определено для всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, при к-рых $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leqslant H$.

Пусть $x_i = y_i$ при $i=1, \ldots, k$; $x_{k+j} = z_j$ при $j=1, \ldots, m$, $n=k+m$ и $m \geqslant 0$;

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{k} y_i^2\right)^{1/2}, \quad \|z\| = \left(\sum_{j=1}^{m} z_j^2\right)^{1/2},$$

$$\|x\| = \left(\sum_{s=1}^{n} x_s^2\right)^{1/2}.$$

Решение $x=0$ системы (1) наз.: а) устойчивым по отношению к $x_1, \ldots, x_k$, или y-устойчивым, если

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall t_0 \in I)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x_0 \in B_\delta)\,(\forall t \in J^+),$$

$$\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon,$$

т. е. при всяких произвольно задаваемых числах $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < H$) и $t_0 \geqslant 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при всяких возмущениях x_0, удовлетворяющих условию $\|x_0\| \leqslant \delta$, и при всяком $t > t_0$ для решения $x(t; t_0, x_0)$ выполняется условие $\|y\| < \varepsilon$;

б) y-неустойчивым в противном случае, т. е. если

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\exists t_0 \in I)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x_0 \in B_\delta)\,(\exists t \in J^+),$$

$$\|y(t; t_0, x_0)\| \geqslant \varepsilon;$$

в) y-устойчивым равномерно по t_0, если в определении а) для каждого $\varepsilon > 0$ число $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать не зависящим от t_0;

г) асимптотически y-устойчивым, если оно y-устойчиво и для каждого $t_0 \geqslant 0$ существует число $\delta_1(t_0) > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t; t_0, x_0)\| = 0 \quad \text{при} \quad \|x_0\| \leqslant \delta_1.$$

Здесь $I=[0, \infty)$, J^+ — максимальный правый интервал, где $x(t; t_0, x_0)$ определено, $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$; в случае г), кроме указанных выше условий, предполагается, что все решения системы (1) существуют на $[t_0, \infty)$.)

Постановка задачи об У. по ч. п. дана А. М. Ляпуновым [1] как обобщение задачи устойчивости по всем переменным ($k=n$). При решении этой задачи особенно эффективным оказался метод *Ляпунова функции*, модифицированный (см. [2]) применительно к задачам y-устойчивости. В основе метода лежит ряд теорем, обобщающих классич. теоремы Ляпунова.

Пусть рассматриваются действительные однозначные функции $V(t, x) \in C^1$, $V(t, 0) \equiv 0$, а также их полные производные по времени в силу (1):

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s.$$

Знакопостоянная функция $V(t, x)$ наз. y-знакоопределенной, если существует положительно-определенная функция $W(y)$ такая, что в области (2)

$$V(t, x) \geqslant W(y) \text{ или } -V(t, x) \geqslant W(y).$$

Ограниченная функция $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел по $x_1, \ldots, x_p$, если для всякого числа $l>0$ найдется $\lambda(l)>0$ такое, что

$$|V(t, x)| < l$$

при $t \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 < \lambda$, $-\infty < x_{p+1}, \ldots, x_n < \infty$.

Теорема 1. Если система (1) такова, что существует y-положительно-определенная функция $V(t, x)$, производная к-рой $\dot{V} \leqslant 0$, то решение $x=0$ является y-устойчивым.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, V допускает бесконечно малый высший предел по x, то решение $x=0$ системы (1) y-устойчиво равномерно по t_0.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, V допускает бесконечно малый высший предел по y, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta_2(\varepsilon)>0$ такое, что из $t_0 \geqslant 0$, $\|y_0\| \leqslant \delta_2$, $0 \leqslant \|z_0\| < \infty$ следует справедливость неравенства

$$\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

Теорема 4. Если система (1) такова, что существует y-положительно-определенная функция V, допускающая бесконечно малый высший предел по $x_1, \ldots, x_p$ ($k \leqslant p \leqslant n$), производная к-рой $\dot{V}$ отрицательно-определенная по $x_1, \ldots, x_p$, то решение $x=0$ системы (1) асимптотически y-устойчиво.

Для исследования y-неустойчивости успешно применяются теорема о неустойчивости Четаева (см. *Четаева функция*), а также нек-рые другие теоремы. Установлены условия обратимости ряда теорем об y-устойчивости, напр. обратимость теорем 1, 2, а также теоремы 4 при $p=k$. Применяются методы дифференциальных неравенств и вектор-функций Ляпунова; установлены теоремы об асимптотической y-устойчивости в целом, по 1-му приближению и т. п. (см. [3]).

Лит. [1] Ляпунов А. М., «Матем. сб.», 1893, т. 17, № 2, с. 253—333, [2] Румянцев В. В., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астроном., физ., хим.», 1957, № 4, с. 9—16, [3] Озиранер А. С., Румянцев В. В., «Прикл. матем. и механ.», 1972, т. 36, в. 2, с. 364—84. *В. В. Румянцев.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ — свойство решения $x_0(t)$, $t \geqslant t_0$, начальной задачи

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{*}$$

состоящее в следующем. Для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякой точки y_0, удовлетворяющей неравенству $|y_0 - x_0| < \delta$, и всякого отображения $g(x, t)$, удовлетворяющего условиям:

а) g и g_x' непрерывны на множестве

$$E_\varepsilon = \{(x, t) : t \geqslant t_0, \ |x - x_0(t)| < \varepsilon\},$$

б) $\sup\limits_{(x, t) \in E_\varepsilon} |g(x, t) - f(x, t)| < \delta$,

решение $y_0(t)$ начальной задачи

$$\dot{y} = g(y, t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

определено при всех $t \geqslant t_0$ и удовлетворяет неравенству

$$\sup_{t \geqslant t_0} |y_0(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Теорема Боля [1]. Пусть начальная задача (*), имеющая решение $x_0(t)$, $t \geqslant t_0$, удовлетворяет условиям:

а) f и f'_x непрерывны на E_{ε_0} при нек-ром $\varepsilon_0 > 0$,

б) $\sup\limits_{t \geqslant t_0} \| f'_x(x_0(t), t) \| < +\infty$,

в) отображение f дифференцируемо по x в точках $(x_0(t), t)$ при $t \geqslant t_0$ равномерно относительно $t \geqslant t_0$, т. е.

$$\sup_{t \geqslant t_0} \frac{1}{|y|} | f(x_0(t)+y, t) - f(x_0(t), t) - f'_x(x_0(t), t)\, y | \longrightarrow 0 \text{ при } y \longrightarrow 0.$$

Тогда для того чтобы решение этой начальной задачи было устойчиво при постоянно действующих возмущениях, необходимо и достаточно, чтобы верхний *особый показатель* системы уравнений в вариациях системы $\dot{x} = f(x, t)$ вдоль решения $x_0(t)$ был меньше нуля.

Если $f(x, t)$ не зависит от t (автономная система) и решение $x_0(t)$ — периодическое или постоянное, а также если $f(x, t)$ — периодическая по t функция и решение $x_0(t)$ — периодическое с тем же (или с соизмеримым) периодом или постоянное, то: а) указанное в теореме Боля условие равномерной дифференцируемости лишнее (оно вытекает из остальных условий теоремы), б) верхний особый показатель системы уравнений в вариациях системы $\dot{x} = f(x, t)$ вдоль решения $x_0(t)$ вычисляется эффективно.

Лит. [1] Bohl P., «J. reine und angew. Math.», 1914, Bd 144, S. 284—318; [2] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966, [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ — одно из важных понятий теории разностных (сеточных) методов, характеризующее непрерывную зависимость решений разностных схем по отношению к входной информации. Точнее, пусть разностная схема (разностный или сеточный аналог исходной задачи) использует множество сеток Ω_h с $h \in \{h\}$ в пространстве независимых переменных для исходной задачи, где параметр h является элементом нек-рого линейного нормированного пространства и характеризует конкретную используемую сетку. Пусть каждой такой сетке Ω_h соответствует N_h-мерное линейное пространство U_h и операторное уравнение в U_h (система разностных уравнений)

$$L_h(u_h) = f_h, \quad h \in \{h\}, \tag{1}$$

в к-ром $f_h \in U_h$ и оператор L_h заданы. Обычно h связывается с размерами ячеек сетки и N_h неограниченно возрастает при $\|h\| \longrightarrow 0$. Пусть u_h и f_h — элементы нормированных пространств H_h и F_h, а оператор L_h — линейный. Тогда говорят, что разностная схема устойчива, если: 1) для любого $h \in \{h\}$ существует L_h^{-1}; 2) существует константа $K > 0$, не зависящая от h и такая, что

$$\| L_h^{-1} \|_{F_h \to H_h} \leqslant K, \quad h \in \{h\}. \tag{2}$$

Это определение равносильно корректности (1): решение (1) существует и единственно при любой правой части f_h и равномерно (по h) непрерывно зависит от f_h в смысле пространств H_h и F_h. Оно же на языке априорных оценок означает наличие константы K, не зависящей от h и такой, что для любого решения (1) имеет место априорная оценка

$$\| u_h \|_{H_h} \leqslant K \| f_h \|_{F_h}. \tag{3}$$

Таким образом, если для устойчивой разностной схемы по той или иной причине (напр., в силу приближенного решения (1)) реально отыскивалась не функция u_h из (1), а функция $\tilde{u}_h$ из возмущенного уравнения $L_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$, то погрешность легко оценивается сверху:

$$\| u_h - \tilde{u}_h \|_{H_h} \leqslant K \| f - \tilde{f}_h \|_{F_h}. \tag{4}$$

Кроме того, если разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу в смысле пространства F_h, то она является и сходящейся с оценкой погрешности

$$\| z_h \|_{H_h} \leqslant K \| \xi_h \|_{F_h}, \tag{5}$$

где z_h — погрешность схемы, а ξ_h — погрешность аппроксимации (см. [1], [3], [7]). Приведенная теорема объясняет и причину того, что f_h рассматривается как элемент нормированного пространства F_h: от выбора пространства F_h существенно зависит и погрешность аппроксимации. Поэтому при фиксированном пространстве H_h целесообразны теоремы устойчивости типа (3) с использованием наиболее слабых норм $\| f_h \|_{F_h}$, в к-рых порядок аппроксимации возрастает. При фиксированном же F_h целесообразно изучать устойчивость (1) с использованием наиболее сильных норм $\| u_h \|_{H_h}$. В этом отношении имеет место полная аналогия с задачей изучения корректности исходной краевой задачи. Поэтому и сами пространства H_h и F_h обычно строятся как сеточные аналоги известных функциональных пространств (напр., $C(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $W_2^m(\Omega)$ и т. п., см. [3]—[5]) и допускают соответствующие предельные переходы при $\| h \| \longrightarrow 0$. Примеры выбора таких сеточных пространств, различные приемы изучения У. р. с. в этих пространствах, а также обзор результатов см. [1]—[15]. В проекционно-сеточных методах (методах конечных элементов, проекционно-разностных, вариационно-разностных) для стационарных задач наиболее распространен прием изучения сходимости на основе оценок погрешности через расстояние до аппроксимирующих подпространств (см. [3]—[5], [7], [10], [12], [13]). Тогда теоремы устойчивости типа (3) нужны лишь для получения оценок (4) и изучение последних при H_h и F_h, совпадающих с евклидовым пространством сеточных функций, часто заменяется традиционным алгебраич. подходом, связанным с изучением чисел обусловленности матриц L_h (см. [10]—[12]).

В нестационарных задачах роль независимой переменной t существенно отлична от роли пространственных переменных, и это обстоятельство приводит к отдельному рассмотрению сетки по времени ω_t и сетки ω_x — по пространственным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Оно же определяет и специфику разностных схем для нестационарных задач, связанную с их расслоением (см. [1]—[6]). Для простоты описания будем считать, что $\omega_t = \omega_{t,\tau}$ определяется шагом $\tau > 0$, т. е.

$$\omega_t \equiv \{ t = n\tau \equiv t_n, \quad n = 0, 1, \ldots, [T\tau^{-1}] \},$$

а сетка ω_x определяется вектором $(h_1 h_2, \ldots, h_d)$ шагов по пространственным переменным, $h_r > 0$, $r = 1, 2, \ldots, d$. Тогда сетка Ω из (1) определяется как $\omega_t \times \omega_x$, где $h \equiv \{\tau, h_1, h_2, \ldots, h_d\}$, а пространство U_h состоит из векторов $u \equiv \{u(0), u(\tau), \ldots, u([T\tau^{-1}])\}$, где каждое $u(n\tau) \equiv u^n$ принадлежит линейному пространству $U = U_{(h_1, h_2, \ldots, h_d)}$ сеточных функций заданных на сетке ω_x. Поэтому нормы в пространствах H_h и F_h, встречающиеся в (2)—(5), обычно определяются через различные нормы $\| u \|_H$ и $\| f \|_F$ для линейного пространства U сеточных функций, заданных на сетке ω_x. Напр., в роли $\| u_h \|_{H_h}$ часто берутся выражения типа $\max\limits_{t^n \in \omega_t} \| u^n \|_H$, $\tau \sum\limits_n \| u^n \|_H$ и т. п. (см. [1]—[6]). Наиболее детально изучен при этом случай, когда H и F явля-

ются евклидовыми или унитарными пространствами и получение оценок типа (3) возможно на основе относительно простых средств. Напр., пусть рассматривается линейная двухслойная разностная схема вида

$$\left.\begin{array}{c} A_1 u^{n+1} = A_0 u^n + \tau f^{n+1},\ n \geqslant 0, \\ u^0 = \varphi, \end{array}\right\} \quad (6)$$

где векторы φ и f^{n+1} определяются начальным условием и правой частью уравнения, а операторы A_1 и A_0 в евклидовом пространстве H таковы, что $\| A_1^{-1} \| \leqslant C_0$, $\| A_1^{-1} A_0 \| \leqslant 1 + C_1\tau$, где неотрицательные константы C_0 и C_1 не зависят от сетки. Тогда для решения (6) справедлива априорная оценка

$$\max_{n,\ t \in \omega_t} \| u^n \|_H \leqslant e^{C_1 T} \left\{ \| \varphi \|_H + C_0 \sum_{n,\ t_{n+1} \in \omega_t} \tau \| f^{n+1} \|_H \right\}, \quad (7)$$

Весьма часто анализ таких схем проводится после записи их в канонич. виде

$$B\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}\right) + Au^n = f^{n+1}$$

на основе изучения свойств оператора перехода $R \equiv E - \tau B^{-1} A$ (E — тождественный оператор) в предположении, что имеется нек-рая относительно простая информация типа операторных неравенств об операторах B и A в евклидовом пространстве H. Напр., если $B = B^* > 0$, $A = A^*$ и $B \geqslant \tau(1+\rho)^{-1} A$, то (см. [3], [6]) существует константа $C \equiv C(T, \rho)$ такая, что

$$\| u^{n+1} \|_B \leqslant C \left(\| u^0 \|_B + \tau \sum_{k=0}^{n} \| f^{k+1} \|_{B^{-1}} \right), \quad t_{n+1} \in \omega_t, \quad (8)$$

где $\| u^n \|_B \equiv (Bu^n, u^n)_H^{1/2}$. Подобные результаты получены для достаточно широкого круга разностных схем, включая трехслойные и нек-рые многослойные схемы (см. [6]). При этом изучены и нек-рые частные случаи устойчивости (устойчивость по начальным данным, устойчивость по правой части) и их взаимоотношения.

Имеются нек-рые результаты, связанные с изучением необходимых условий подобной устойчивости или близких к ним (см. [3], [6]). Использование энергетич. неравенств (см. [4], [5]) вместо (8) позволяет при родственных условиях получить оценку типа

$$\| u^{n+1} \|_B^2 + \tau \sum_{k=0}^{n} \| u^{k+1} \|_H^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left(\| u^0 \|_B^2 + \tau \sum_{k=0}^{n} \| f^{k+1} \|_{B^{-1}}^2 \right), \quad (9)$$

приводящую к устойчивости в несколько более сильной норме для u_h и переходящей в пределе в оценку, часто встречающуюся в теории эволюционных уравнений. Подобные оценки также получены для весьма широкого круга схем (см. [4], [5], [13]).

При изучении У. р. с. выделяют условно устойчивые разностные схемы типа явных схем для уравнения теплопроводности, в к-рых устойчивость имеется лишь при ограничениях типа $\tau (h_s)^{-2} \leqslant \varkappa_0$, и схемы абсолютно устойчивые, в к-рых шаги по времени и по пространственным переменным могут меняться независимо друг от друга, не нарушая устойчивости. Схемы последнего типа часто являются предпочтительными, если они не требуют решения сложных систем на каждом шаге. К таким экономичным разностным схемам для многомерных задач относятся неявные схемы переменных направлений, схемы расщепления, схемы с расщепляющимся оператором и аддитивные схемы (см. [3] — [6]).

Теоремы устойчивости и оценки типа (3), (9) находят применение и в случае, когда погрешность аппроксимации и оценка (5) не рассматриваются, а строятся соответствующие восполнения решений сеточных задач и устанавливается на основе теорем компактности сходимость к решению исходной задачи (см. [4], [5]). Использование различных априорных оценок и упомянутого принципа компактности особенно характерно для сложных нелинейных задач, в к-рых решение может быть и неединственно, а сходимость устанавливается лишь к нек-рому решению исходной задачи. Иногда изучение нелинейных задач математич. физики по причине их сложности вообще заменяется изучением их линеаризацией, а для разностных схем обращается особое внимание на справедливость сеточных аналогов важнейших физич. законов сохранения (см. [8]). Для слабо же нелинейных задач изучение корректности разностных схем часто проводится с достаточной полнотой, характерной для линейного случая (см. [5] — [7] и *Нелинейная краевая задача*; численные методы решения).

В случае задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений изучение устойчивости разностных схем часто сводится в модельных ситуациях к изучению корней характеристич. уравнения (см. [2], [14], [15]).

Лит.: [1] Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956, [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, 2 изд., М., 1962; [3] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977, [4] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [5] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1—2, М., 1971—72; [6] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [7] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [8] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные методы решения задач газовой динамики, 2 изд., М., 1980; [9] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [10] Оганесян Л. А., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ер., 1979; [11] Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [12] Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [13] Злотник А. А., «Вестн. Моск. ун-та», сер. 15, 1980, № 1, с. 27—35; [14] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975, [15] Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г., Численные методы решения жестких систем, М., 1979.

Е. Г. Дьяконов.

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ — 1) У. у. с.— свойство упругих систем (упругих тел или совокупностей взаимодействующих упругих тел) мало отклоняться от состояния равновесия (движения) при достаточно малых возмущающих воздействиях. Роль возмущающих воздействий играют флуктуации внешних сил, отклонения от идеальной геометрич. формы, дефекты материала и т. п.

2) У. у. с.— раздел механики деформируемого твердого тела, предметом к-рого является изучение У. у. с. В более широкой трактовке этот раздел включает изучение устойчивости вязкоупругих, упруго-пластических и др. деформируемых систем; часто употребляют также термин устойчивость деформируемых систем.

Понятие У. у. с. тесно связано с общим понятием устойчивости движения, в частности с понятием *устойчивости по Ляпунову*. Центральная задача теории У. у. с.— нахождение области в пространстве параметров системы и внешних воздействий, в пределах к-рой рассматриваемое состояние равновесия (движения) остается устойчивым. Поверхность, ограничивающая область устойчивости, наз. критической поверхностью. Часто воздействие на упругую систему задают с точностью до одного параметра β. Без ограничения общности можно принять, что $0 \leqslant \beta < \infty$, причем при $\beta = 0$ имеет место устойчивость. Нижняя грань β_* значений параметра β, при к-рых исследуемое равновесие (движение) перестает быть устойчивым, наз. критическим параметром. Задачи

У. у. с. имеют большое прикладное значение: потеря устойчивости элементов конструкций, машин и приборов, как правило, влечет утрату несущей способности или нарушение нормальных условий эксплуатации.

Строгая теория У. у. с. основана на распространении классич. *устойчивости теории* на континуальные системы и может рассматриваться как приложение теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Близость исследуемого состояния и возмущенных состояний оценивается по нек-рой норме. В практич. расчетах широко применяют аппроксимацию континуальных систем конечномерными системами с широким привлечением вариационных, сеточных и т. п. приближенных методов.

В случае упругой системы с идеальными связями, нагруженной потенциальными не зависящими от времени силами, система в целом консервативная. Условия устойчивости равновесия даются теоремой Лагранжа — Дирихле, согласно к-рой в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия системы Π имеет изолированный минимум. На этой теореме основан энергетический метод исследования У. у. с., состоящий в изучении изменения потенциальной энергии системы Π при изменении параметров. При этом $\Pi[u]$ — функционал от поля перемещений u. В однопараметрич. задачах У. у. с. критич. параметр β_* есть нижняя грань значений β, при к-рых нарушается неравенство $\delta^2\Pi>0$ при условии $\delta\Pi=0$. В окрестности критич. значений β_* происходит бифуркация форм равновесия.

Для вычисления критич. параметров, отвечающих точкам бифуркации, вместо энергетич. метода обычно используют статический метод. При этом задача У. у. с. сводится к линейной задаче о собственных значениях для операторного уравнения, соответствующего вариационному условию $\delta I=0$. Здесь $I[u]$ — квадратичный функционал от поля перемещений, к-рый формально совпадает с $\delta^2\Pi$, если вариацию δu заменить на u. Минимальное собственное значение принимают за критич. параметр. Как правило, дополнительный анализ подтверждает, что при достижении минимального собственного значения происходит бифуркация форм равновесия.

Оба метода берут начало от работ Л. Эйлера (L. Euler) по основам классич. вариационного исчисления (1744—1757). Им же решены простейшие задачи об устойчивости призматич. упругих стержней при осевом сжатии, а также изучено поведение стержней после потери устойчивости. Для стержня, шарнирно опертого по концам, критич. сила равна

$$N_*=\pi^2EJ/l^2,$$

где E — модуль Юнга материала, J — момент инерции поперечного сечения, l — длина стержня. Накоплено большое количество конкретных результатов для стержней, стержневых систем, пластин, оболочек, а также тел, все характерные размеры к-рых имеют одинаковый порядок (см. [1]).

В случае непотенциальных сил энергетич. и статич. методы, вообще говоря, неприменимы (см. [2]). Они неприменимы также в динамических задачах У. у. с. (см. [3]). Во всех этих случаях используют динамический метод, состоящий в рассмотрении малых движений системы в окрестности исследуемого равновесия (движения). При постоянных во времени внешних воздействиях изучение устойчивости сводится к обобщенной задаче о собственных значениях относительно параметров системы, а также характеристич. показателей или комплексных собственных частот. Динамич. метод основан на распространении теорем об устойчивости по первому приближению на континуальные системы. Если при постановке конкретной задачи не допущено переупрощений, то такой метод дает правильные результаты. В противном случае возможны явления, известные под названием парадоксов стабилизации и дестабилизации (см. [4]). Среди неконсервативных задач теории У. у. с. значительное место принадлежит задачам аэроупругости и гидроупругости (см. [2], [5], [6]), а также задачам устойчивости при периодических внешних воздействиях (см. [3]). Последние тесно связаны с теорией параметрич. резонансов для континуальных систем.

Обобщение теории У. у. с. на упруго-пластические системы связано с преодолением серьезных трудностей исследования устойчивости существенно нелинейных неголономных континуальных систем (см. [7]). Для систем из материалов, подверженных ползучести и другим явлениям, протекающим во времени, требуется исследование устойчивости на конечном интервале времени [8].

Лит.: [1] Вольмир А. С., Устойчивость деформируемых систем, 2 изд., М., 1967; [2] Болотин В. В., Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961, [3] его же, Динамическая устойчивость упругих систем, М., 1956; [4] его же, в кн.. Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением, Новосиб., 1979, с. 7—17, [5] Вольмир А. С., Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости, М., 1976; [6] его же, Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, М., 1979, [7] Клюшников В. Д., Устойчивость упруго-пластических систем, М., 1980, [8] Работнов Ю. Н., Элементы наследственной механики твердых тел, М., 1977.

В. В. Болотин.

УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ — свойство *Ляпунова характеристических показателей* линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(\cdot)$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^+\longrightarrow\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ (или $\mathbb{R}^+\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$), удовлетворяющее условию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|A(t)\|<+\infty.$$

Говорят, что характеристич. показатели Ляпунова системы (1) устойчивы, если каждая из функций

$$\lambda_i(\cdot):M_n\longrightarrow\mathbb{R},\quad i=1,\ldots,n,$$

непрерывна в точке A. Здесь $\lambda_1(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A)$ — характеристич. показатели Ляпунова системы (1), а M_n — множество систем (1), наделенное структурой метрич. пространства заданием расстояния

$$d(A,B)=\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|A(t)-B(t)\|$$

(для удобства система (1) отождествляется с отображением $A(\cdot)$, причем вместо $A(\cdot)$ пишется A).

Были обнаружены (см. [2], [3]) системы (1) с неустойчивыми характеристич. показателями. Напр., характеристич. показатели системы

$$\dot{u}=0,$$

$$\dot{v}=(\sin\ln(1+t)+\cos\ln(1+t))\,v+\delta u$$

при $\delta=0$ неустойчивы, т. к. при $\delta=0$ ее старший характеристич. показатель $\lambda_1=1$, а при $\delta\neq0$ показатель $\lambda_1>1$ и не зависит от $\delta\neq0$. Для устойчивости характеристич. показателей достаточно, чтобы выполнялось *интегральной разделенности условие* (теорема Перрона). Множество систем (1), удовлетворяющих этому условию, совпадает с внутренностью (в пространстве M_n) множества всех систем (1) с устойчивыми характеристич. показателями.

Если $A(t)\equiv A(0)$ при всех $t\in\mathbb{R}^n$ или $A(t+T)=A(t)$ при всех $t\in\mathbb{R}^n$ (при нек-ром $T>0$) (т. е. система (1) имеет постоянные или периодич. коэффициенты), то характеристич. показатели системы (1) устойчивы.

Если $A(\cdot)$ — почти периодич. отображение (см. *Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*), то для У. х. п. системы (1) необходимо и достаточно, чтобы система (1) была почти приводима.

Для того чтобы характеристич. показатели системы (1) были устойчивы, достаточно, чтобы нашлось *Ляпунова преобразование*, приводящее систему (1) к клеточно-диагональному виду

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_i &= B_i(t)\,y_i, \\ y_i &\in \mathbb{R}^{k_i},\ i=1,\ \ldots,\ m,\ \textstyle\sum_{i=1}^{m} k_i = n, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

такому, что: а) клетки интегрально разделены, т. е. найдутся числа $d>0$, $a>0$ такие, что

$$\|Y_i(\tau,\theta)\|^{-1} \geqslant d\,(\exp[a\cdot(\theta-\tau)])\,\|Y_{i+1}(\theta,\tau)\|$$

для всех $\theta\geqslant\tau\geqslant 0$, $i=1,\ \ldots,\ m-1$ (здесь $Y_i(\theta,\tau)$ — *Коши оператор* системы (2)); б) верхний и нижний *центральные показатели* системы (2) равны друг другу:

$$\Omega(B_i)=\omega(B_i) \text{ при всяком } i=1,\ \ldots,\ m.$$

Условия этой теоремы являются и необходимыми условиями У. х. п. системы (1) (см. [6]). Системы с неустойчивыми характеристич. показателями могут обладать свойством стохастической У. х. п.

Характеристич. показатели системы (1) наз. стохастически устойчивыми (или устойчивыми почти наверное), если при $\sigma\to 0$ характеристич. показатели Ляпунова системы

$$\dot{y}=A(t)\,y+\sigma^2 C(t,\omega)\,y$$

стремятся с вероятностью 1 к характеристич. показателям Ляпунова системы (1); здесь элементы матрицы, задающей линейные операторы $C(t,\omega):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ (в нек-ром — не зависящем от (t,ω) — базисе пространства $\mathbb{R}^n$) суть независимые ненулевые *белые шумы*.

Если отображение $A(\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывно и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\|<+\infty,$$

то для почти всякого отображения $\tilde{A}(\ )$, где

$$\tilde{A}(t)=\lim_{k\to\infty} A(t_k+t),$$

характеристич. показатели системы $\dot{x}=\tilde{A}(t)\,x$ стохастически устойчивы (для *сдвигов динамической системы* $(S=\mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n))$ рассматривают нормированную инвариантную меру, сосредоточенную на замыкании траектории точки $A(\cdot)$; под почти всяким $\tilde{A}(\cdot)$ понимается почти всякое $\tilde{A}(\cdot)$ в смысле всякой такой меры).

Пусть динамич. система на гладком замкнутом многообразии V^n задана гладким векторным полем. Тогда для почти всякой (в смысле всякой нормированной инвариантной меры) точки $x\in V^n$ характеристич. показатели системы *уравнений в вариациях* вдоль траектории точки x стохастически устойчивы.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [2] Perron O., «Math. Z.», 1930, Bd 31, S. 748—66; [3] его же, «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 142, S. 254—70; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949, [5] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [6] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146. *В. М. Миллионщиков.*

УСТРАНИМАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА однозначной аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного z — термин для обозначения такой точки a, в проколотой окрестности $V(a)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-a|<\delta\}$ к-рой функция $f(z)$ аналитическая и ограниченная.

При этих условиях существует конечный предел

$$\lim_{z\to a,\ z\neq a} f(z)=f(a).$$

Этот предел принимают за значение $f(z)$ в точке a и получают аналитич. функцию во всей окрестности точки a. *Е. Д. Соломенцев.*

УСТРАНИМОЕ МНОЖЕСТВО E точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$ для нек-рого класса K однозначных аналитических функций относительно области $G\subset\mathbb{C}$ — такое компактное множество $E\subset G$, что любая функция $f(z)$ класса K в $G\setminus E$ продолжается как функция класса K на всю область G. Иначе эту ситуацию описывают словами «множество E стирается для класса K» или «E есть нуль-множество для класса K», сокращенно: $E\in N(K,G)$. Предполагается, что дополнение $G\setminus E$ есть область и что класс K определен для любой области.

Согласно другому определению, множество E устранимо для класса K, $E\in N(K)$, если из того, что $f(z)$ есть функция класса K в дополнении $\overline{\mathbb{C}\setminus E}$, следует, что $f(z)=\mathrm{const}$. При этом включения $E\in N(K,G)$ и $E\in N(K)$, вообще говоря, не равносильны.

Первым результатом об У. м. можно считать классич. теорему Коши — Римана об устранимой особенности: если функция $f(z)$ аналитическая и ограниченная в проколотой окрестности $V(a)=\{z:0<|z-a|<\delta\}$ точки $a\in\mathbb{C}$, то она продолжается аналитически в точку a. Более широкая постановка вопроса (проблема Пенлеве) принадлежит П. Пенлеве (P. Painlevé): найти условия на множество E, необходимые и достаточные для того, чтобы $E\in N(AB,G)$, где $K=AB$ — класс ограниченных аналитич. функций (см. [1]). Сам П. Пенлеве нашел достаточное условие: E должно иметь нулевую линейную меру Хаусдорфа. Необходимое и достаточное условие в проблеме Пенлеве получено Л. Альфорсом (см. [2]): $E\in N(AB,G)$ тогда и только тогда, когда E имеет нулевую *аналитическую емкость*. Существует пример множества E положительной длины, но нулевой аналитич. емкости. Об У. м. для различных классов аналитич. функций одного комплексного переменного и относящихся к ним нерешенных проблемах см. [3], [4], [6], [9].

В случае аналитич. функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, $n\geqslant 2$, постановка задач об У. м. изменяется в силу классич. теоремы Осгуда — Брауна: если $f(z)$ — регулярная аналитическая в области $G\subset\mathbb{C}^n$ функция, за исключением, быть может, компактного множества $E\subset G$ такого, что дополнение $G\setminus E$ связно, то $f(z)$ аналитически продолжается на всю область G. Другие теоремы об У. м. при $n\geqslant 2$, а также их связь с понятием *голоморфности области* см., напр., в [7], [10].

Задачи об У. м. ставятся также для гармонич., субгармонич. функций и др. Так, напр., пусть G — область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, E — компакт, $E\subset G$, HB — класс ограниченных гармонич. функций, HD — класс гармонич. функций с конечным интегралом Дирихле. Тогда включения $E\in N(HB,G)$ и $E\in N(HD,G)$ равносильны и имеют место тогда и только тогда, когда *емкость* E равна нулю (см. [5], [8]).

Лит.: [1] Zoretti L., Leçons sur le prolongement analytique, P., 1911; [2] Ahlfors L., «Duke Math. J.», 1947, v. 14, № 1, p. 1—11, [3] Носиро К., Предельные множества, пер. с англ., М., 1963; [4] Хавинсон С. Я., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [5] Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств, пер. с англ., М., 1971; [6] Мельников М. С., Синанян С. О., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 143—250; [7] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [8] Хейман У. К., Кеннеди П. Б., Субгармонические функции, пер. с англ., [т. 1], М., 1980; [9] Долженко Е. П., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 4, с. 135—42; [10] Riihentaus J., «Math. Z.», 1978, Bd 158, S. 45—54. *Е. Д. Соломенцев.*

Ф

ФАБЕРА МНОГОЧЛЕНЫ — классическая базисная система, служащая для представления аналитич. функций в комплексной области. Пусть дополнение ограниченного континуума K, содержащего более одной точки, есть односвязная область D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а функция $w=\Phi(z)$, $z\in D$, отображает конформно и однолистно область D на область $|w|>1$ при условиях $\Phi(\infty)=\infty$ и $\Phi'(\infty)>0$. Тогда Ф. м. $\{\Phi_n(z)\}$ можно определить как суммы членов с неотрицательными степенями z в разложениях Лорана функций $\{\Phi^n(z)\}$ в окрестности точки $z=\infty$. Ф. м. для континуума K можно определить так же, как коэффициенты разложения

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}},\quad z\in K,\quad |w|>1, \tag{1}$$

где функция $\zeta=\Psi(w)$ — обратная функции $w=\Phi(\zeta)$. Если континуум K — круг $|z|\leqslant 1$, то $\Phi_n(z)=z^n$. А в случае когда K — отрезок $[-1, 1,]$, Ф. м. суть *Чебышева многочлены* 1-го рода. Эти многочлены были введены Г. Фабером [1].

Если континуум K есть замыкание односвязной области G, ограниченной спрямляемой жордановой кривой Γ, а функция $f(z)$ — аналитическая в области G, непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$ и имеющая ограниченную вариацию на Γ, то в области G эта функция разлагается в ряд Фабера

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z),\quad z\in G, \tag{2}$$

сходящийся равномерно внутри области G, т. е. на всяком замкнутом подмножестве области G, причем коэффициенты разложения определяются по формуле

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}\,d\zeta.$$

Ряд Фабера (2) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}$, если, напр., кривая Γ имеет непрерывно вращающуюся касательную, угол наклона к-рой к действительной оси как функция длины дуги удовлетворяет условию Липшица. При этом же условии на кривую Γ для всякой функции $f(z)$, аналитической в области G и непрерывной в замкнутой области $\overline{G}$, имеет место неравенство Лебега

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(z)\right|\leqslant c_1E_n(f,\overline{G})\ln n,$$
$$z\in\overline{G},$$

где постоянная c_1 не зависит от n и z, а $E_n(f,\overline{G})$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(z)$ многочленами степени не старше n в замкнутой области $\overline{G}$.

В числителе левой части формулы (1) можно ввести весовую функцию вида $g[\Psi(w)]$, где функция $g(z)$, аналитическая в области D, отлична от нуля и $g(\infty)>0$. Тогда коэффициенты разложения (1) наз. обобщенными многочленами Фабера.

Лит.: [1] Faber G., «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 389—408, [2] Суетин П. К., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 5, М., 1975, с. 73—140.

П. К. Суетин.

ФАБЕРА — ШАУДЕРА СИСТЕМА — система функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, построенная на отрезке $[a, b]$ с помощью любой счетной всюду плотной на этом отрезке последовательности точек $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, $w_1=a$, $w_2=b$, следующим образом. Полагают $\varphi_1(t)\equiv 1$ на $[a, b]$. Функция $\varphi_2(t)$ линейна на отрезке $[a, b]$ и такая, что $\varphi_2(a)=0$, $\varphi_2(b)=1$. Если же $n>2$, то отрезок $[a, b]$ делится на $n-2$ части точками $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ и выбирается отрезок $[w_i, w_k]$, $w_i<w_k$, содержащий точку w_n. Затем полагают $\varphi_n(w_i)=\varphi_n(w_k)=0$, $\varphi_n(w_n)=1$ и продолжают функцию $\varphi_n(t)$ линейно на отрезки $[w_i, w_n]$ и $[w_n, w_k]$. Вне интервала (w_i, w_k) функцию $\varphi_n(t)$ полагают равной нулю.

В случае когда $a=0$, $b=1$, а $\{w_n\}$ — последовательность всех двоично рациональных точек отрезка $[0, 1]$, занумерованных естественным образом (т. е. в порядке $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{2^m}, \frac{3}{2^m}, \ldots, \frac{2^m-1}{2^m}, \ldots$), система $\{\varphi_n(t)\}$ (ее обозначение $\{F_n(t)\}$) впервые встречается в работе Г. Фабера [1]. Он рассматривал ее (с другой нормировкой) как систему неопределенных интегралов от *Хаара системы*, дополненную функцией, тождественно равной единице. В общем случае построение системы $\{\varphi_n(t)\}$ осуществлено Ю. Шаудером [2], поэтому Ф.—Ш. с. наз. также системой Шаудера.

Система $\{\varphi_n(t)\}$ является базисом в пространстве $C[a, b]$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(t)$ с нормой $\|f\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|$ (см. [1], [2] или [3]). Если к системе Фабера $\{F_n(t)\}$ применить процесс ортогонализации Шмидта на отрезке $[0, 1]$, то получится *Франклина система*.

Ф.— Ш. с.— первый пример базиса в пространстве непрерывных функций.

Лит.: [1] Faber G., «Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.», 1910, Bd 19, S. 104—12; [2] Schauder J., «Math. Z.», 1928, Bd 28, S. 317—20, [3] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958, с. 63. *Б. И. Голубов.*

ФАБРИ ТЕОРЕМА — 1) Ф. т. о лакунах: если в степенном ряде

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{\lambda_n}$$

с радиусом сходимости R, $0<R<\infty$, показатели λ_n удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=0,$$

то все точки окружности $|z|=R$ суть особые точки для функции $f(z)$. Теорема обобщается на ряды Дирихле.

2) Ф. т. об отношении: если в степенном ряде

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

с единичным радиусом сходимости коэффициенты удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=s,$$

то $z=s$ — особая точка функции $f(z)$.

Теоремы 1) и 2) получены Э. Фабри [1].

Лит.: [1] Fabry E., «Ann. scient. École norm. supér.», 1896, t. 13, p. 367—99; [2] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [3] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976. *А. Ф. Леонтьев.*

ФАВАРА ЗАДАЧА — задача, состоящая в вычислении точной верхней грани

$$\sup_{f\in W^rMX}\ \inf_{t_n}\|f(x)-t_n(x)\|_X, \qquad (*)$$

где $t_n(x)$ — тригонометрич. полиномы порядка не выше n, W^rMX — класс периодич. функций, у к-рых r-я производная в смысле Вейля (см. *Дробное интегрирование и дифференцирование*) удовлетворяет неравенству $\|f^{(r)}\|_X\leqslant M$, $X=C[0, 2\pi]$. Ф. з. была поставлена Ж. Фаваром [1]. В последующем рассматривались более широкие классы функций и полное решение Ф. з. при $X=C, L$ и произвольном $r>0$ было получено как следствие более общих результатов (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Favard J., «Bull sci. math.», 1937, t. 61, p. 209—24, p. 243—56; [2] Стечкин С. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, т. 20, № 5, с. 643—48, [3] Дзядык В. К., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 6, с. 933—50; [4] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976. *Ю. Н. Субботин.*

ФАВАРА МЕРА порядка p подмножества M евклидова пространства E^n размерности $n>p$ — обобщение *Хаусдорфа меры*; введена Ж. Фаваром [1]. Точное определение: на совокупности $(n-p)$-мерных аффинных подпространств пространства E^n его группа движений индуцирует единственную с точностью до нормировки левоинвариантную *Хаара меру* μ, а множество M индуцирует функцию f_M, значение к-рой на плоскости τ есть число точек пересечения $\tau\cap M$. Мера Фавара множества M — значение меры μ на функции f_M, если нормирующая константа выбрана так, чтобы $\mu(f_I)=1$ для единичного p-мерного куба I.

Ф.м. порядка p множества M не превосходит его p-меры Хаусдорфа α и, в случае $\alpha<\infty$, совпадает с α тогда и только тогда, когда M распадается на счетное число частей, у одной из к-рых p-мера Хаусдорфа равна нулю, а каждая из остальных расположена на гладком p-мерном многообразии.

Лит. Favard J., «C. r. Acad. sci.», 1932, t. 194, p. 344—346; [2] Federer H., Geometric measure theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1969. *Л. Д. Иванов.*

ФАВАРА НЕРАВЕНСТВО — неравенство

$$\|x\|_{C[0,\,2\pi]}\leqslant MK_rn^{-r},\quad r=1,\,2,\,\ldots, \qquad (*)$$

где

$$K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k(r+1)}(2k+1)^{-r-1},$$

функция $x(t)\in W^rMC$ и ортогональна любому тригонометрич. полиному порядка не выше $n-1$. При $r=1$ неравенство $(*)$ было доказано Х. Бором (H. Bohr, 1935), поэтому его наз. также неравенством Бора и *Бора — Фавара неравенством*. Для произвольного натурального r Ф. н. было доказано Ж. Фаваром [1].

Лит.: [1] Favard J., «C. r. Acad. sci.», 1936, t 203, p. 1122—24, [2] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976. *Ю. Н. Субботин.*

ФАВАРА ТЕОРЕМА об ортогональных системах: если для действительных чисел α_n и β_n выполняется рекуррентное соотношение

$$P_n(r)=(x-\alpha_n)P_{n-1}(x)-\beta_nP_{n-2}(x),$$
$$P_{-1}(x)=0,\quad P_0=1,$$

то существует функция $\alpha(x)$ ограниченной вариации такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_n(x)P_m(x)\,d\alpha(x)=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ h_n>0, & m=n.\end{cases}$$

Установлена Ж. Фаваром [1]. Иногда этот результат связывают также с именем И. Шохата (J. Shohat).

Лит.: [1] Favard J., «C. r. Acad. sci.», 1935, t. 200, p. 2052—53, [2] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962. *Ю. Н. Субботин.*

ФАДДЕЕВА УРАВНЕНИЕ — линейное интегральное уравнение квантовой механики, описывающее рассеяние трех частиц.

Рассеяние трех частиц имеет по сравнению с рассеянием двух частиц принципиальное отличие, обусловленное возможностью образования связанных состояний частиц. Поэтому обычное условие излучения на бесконечности типа условия Зоммерфельда здесь неприменимо.

Математич. исследование трехчастичных систем стало возможным после того, как Л. Д. Фаддеев в 1960 предложил и изучил интегральное уравнение, по решениям к-рого восстанавливаются решения уравнения Шрёдингера, отвечающие правильным физич. условиям на бесконечности.

В сокращенной векторной записи Ф. у. имеет вид:

$$X=X^0+\begin{Vmatrix}0 & G_1 & G_1\\ G_2 & 0 & G_2\\ G_3 & G_3 & 0\end{Vmatrix}X,\quad X=\begin{Vmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Vmatrix}, \qquad (*)$$

где $G_i=V_i(E+\Delta-V_i)^{-1}$, E — энергия системы, V_i — потенциалы парного взаимодействия частиц, а вектор-функция X^0 определяется начальными данными рассеяния. Если задача рассеяния сформулирована в терминах уравнения Шрёдингера с правой частью $(E-\hat H)\psi=f$, где $\hat H$ — трехчастичный гамильтониан

$$\hat H=-\Delta+V_1(\boldsymbol r_1-\boldsymbol r_2)+V_2(\boldsymbol r_2-\boldsymbol r_3)+V_3(\boldsymbol r_3-\boldsymbol r_1),$$

то следует выбрать в $(*)$ $X_i^0=G_if$. Тогда решение ψ задачи рассеяния выражается через решение X Ф. у. по формуле

$$\psi=(E+\Delta)^{-1}(f+\textstyle\sum_i X_i).$$

При соответствующих ограничениях на потенциалы V_i уравнение $(*)$ — фредгольмовского типа (см. [1]). Кроме того, с помощью уравнения $(*)$ доказана теорема разложения по собственным функциям оператора Шрёдингера, дано обоснование нестационарной постановки задачи рассеяния, построен унитарный оператор рассеяния.

Ф. у. широко применяется в атомной и ядерной физике и в физике элементарных частиц. Получены релятивистский вариант этого уравнения и обобщение на случай системы N частиц. Важным преимуществом Ф. у. по сравнению с уравнением Шрёдингера является возможность эффективного численного решения.

Лит.: [1] Фаддеев Л. Д., Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, М.—Л., 1963, [2] Шмид Э., Цигельман Х., Проблема трех тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1979. *В. П. Маслов.*

ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ — плоскость $\mathbb{R}^2$, используемая для геометрич. интерпретации *автономной системы* двух обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Ф. п. — частный случай *фазового пространства*. См. также *Динамическая система* (где эта интерпретация названа кинематической), *Качественная теория дифференциальных уравнений*, *Пуанкаре — Бендиксона теория*. *Д. В. Аносов.*

ФАЗОВАЯ ТРАЕКТОРИЯ — траектория точки в *фазовом пространстве*, изображающая, как изменяется со временем t состояние *динамической системы*. Если последняя описывается *автономной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений (геометриче-

ски — векторным полем), то говорят о Ф. т. автономной системы (поля), используя это название и тогда, когда решения системы определены не для всех значений t. Прилагательное «фазовая» нередко опускают.

Когда состояние не зависит от t, Ф. т. сводится к точке — *равновесия положению*, а при периодич. зависимости от t получается замкнутая Ф. т. (поэтому часто говорят о «периодич. Ф. т.»), что включает и предыдущий случай (однако, говоря о замкнутой Ф. т., часто подразумевают, что она не сводится к точке). Незамкнутые Ф. т. в общем случае могут быть весьма разнообразны; они классифицируются с различных точек зрения в *топологической динамике*. Точка w незамкнутой Ф. т. разбивает ее на две части — положительную и отрицательную полутраектории. Они представляют состояния, соответствующие $t\geqslant 0$ и $t\leqslant 0$, если при $t=0$ система имеет состояние w. (Последнее определение формально применимо и к замкнутой Ф. т., но для нее обе полутраектории совпадают с ней самой.)

Иногда под Ф. т. понимают не просто линию (как множество точек) или ориентированную линию (на к-рой выделено направление, отвечающее изменению состояний с ростом t), но линию, параметризованную в процессе происходящего в системе движения фазовой точки по этой линии. Такое словоупотребление отчасти связано с отсутствием удобного общепринятого названия для этой параметризованной линии. Правда, если динамич. система описывается системой дифференциальных уравнений, речь идет просто о решении последней; но такое название не годится в общем случае, когда динамич. система трактуется как группа преобразований $\{S_t\}$ фазового пространства. (Функцию $t\to S_t w$ с фиксированным w иногда наз. «движением», но в математике «движения» обычно являются преобразованиями всего пространства.) *Д. В. Аносов.*

ФАЗОВОГО РАВНОВЕСИЯ ДИАГРАММА — проекция на плоскость каких-либо двух термодинамич. переменных тех областей поверхности равновесных состояний в пространстве полного набора термодинамич. переменных, к-рые соответствуют n-фазным, $n\geqslant 2$, состояниям термодинамич. системы. В случае однокомпонентной системы участки этой поверхности представляют собой цилиндрич. поверхности и проектируются на плоскость (p, θ) (давление-температура) в виде линии, общий вид уравнения к-рой — равенство химич. потенциалов различных фаз $\mu_1(p, \theta)=\mu_2(p, \theta)$ — может быть в случае фазового перехода 1-го рода записан в форме дифференциального уравнения Клапейрона — Клаузиуса

$$dp/d\theta = q_{12}/\theta\,(v_2 - v_1),$$

где q_{12} — скрытая теплота перехода, v_1 и v_2 — удельные объемы для первой и второй фаз. Трехфазное состояние изображается точкой, наз. тройной точкой.

Лит.: [1] Леонтович М. А., Введение в термодинамику. Статистическая физика, М., 1983. *И. А Квасников.*

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — совокупность всевозможных мгновенных состояний физич. (в широком смысле слова) системы, снабженная определенной структурой в зависимости от изучаемой системы и рассматриваемых вопросов. Ф. п. наз. также более конкретный объект — пространство (множество с надлежащей структурой), элементы к-рого (фазовые точки) представляют (условно изображают) состояния системы (напр., *фазовая плоскость*). С математич. точки зрения эти объекты изоморфны, поэтому часто не делают различия между состояниями и изображающими их фазовыми точками.

Математич. формализация понятия «системы» того или иного типа обычно включает в качестве существенной части определение соответствующего Ф. п. (или класса Ф. п.), что отражает важность понятия состояния системы. Эволюция системы (т. е. изменение со временем ее состояний) может быть строго детерминированной (тогда она описывается группой или полугруппой $\{S_t\}$ преобразований Ф. п.: состояние w за время t переходит в $S_t w$) или иметь вероятностный характер (*случайные процессы*). В первом случае тоже бывает нужно рассматривать статистич. состояния системы; для классич. (неквантовых) систем они описываются посредством вероятностных распределений на Ф. п. Указания, определяющие эволюцию, составляют другую существенную часть формального определения «системы».

В классич. случае дифференцируемой *динамической системы* (что включает основные системы, рассматриваемые в аналитич. механике и классич. статистич. физике) Ф. п.— *дифференцируемое многообразие* M (быть может, с особенностями и (или) краем). Если динамич. система задается *автономной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений, то говорят о Ф. п. последней. В этом случае M является той областью в евклидовом пространстве, где определены правые части автономной системы. В подобной ситуации термин «Ф. п.» употребляют и тогда, когда решения не определены при всех t. Дополнительно на M может быть задана *инвариантная мера* (классически — задаваемая плотностью) или *симплектическая структура* (условие сохранения последней под действием потока характеризует *гамильтоновы системы*). В частности, в динамике для системы с голономными идеальными связями, не зависящими явно от времени, Ф. п. является касательным или кокасательным расслоением нек-рого многообразия — конфигурационного пространства. Точка последнего задает (рас)положение (конфигурацию) системы, касательный вектор описывает скорость движения системы (скорость изменения конфигурации), а кокасательный — импульс системы.

В других разделах теории динамич. систем Ф. п. имеет структуру топологич. пространства (в *топологической динамике*), *измеримого пространства* или (чаще) *пространства с мерой* (в *эргодической теории*). В квантовой механике Ф. п.— комплексное гильбертово пространство (впрочем, для квантовой системы, имеющей классический аналог, под Ф. п. часто подразумевают Ф. п. этого аналога). В теории случайных процессов Ф. п.— то измеримое пространство (часто с дополнительной топологической, дифференцируемой или векторной структурой), в к-ром принимает значения процесс. Здесь специально говорят о Ф. п. тогда, когда оно в каком-то смысле нетривиально. Так нередко бывает в теории *марковских процессов*, тогда как для часто встречающихся процессов с числовыми значениями Ф. п. сводится просто к $\mathbb{R}$ со стандартной структурой, и специально говорить о нем не приходится. (Надо иметь в виду, что если стационарный в узком смысле случайный процесс интерпретируется как динамич. система, то Ф. п. последней не совпадает с Ф. п. процесса.) *Д. В. Аносов.*

ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ВЕКТОР — вектор $f(x)$, исходящий из точки x фазового пространства G автономной системы

$$\dot{x} = f(x),\ f\in C^1(G),\ G\subset\mathbb{R}^n.$$

Пусть Γ — фазовая траектория этой системы, проходящая через точку $\xi\in G$; если $f(\xi)\neq 0$, то Ф. с. в. $f(\xi)$ касается кривой Γ в точке ξ и представляет собой мгновенную скорость движения изображающей точки системы по траектории Γ в момент прохождения положения $\xi\in\Gamma$. Если $f(\xi)=0$, то точка $\xi\in G$ является *равновесия положением*.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 5 изд., М., 1983. *Н. Х. Розов.*

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД — физическое явление, происходящее в макроскопич. системах и состоящее в том, что в нек-рых состояниях равновесия системы сколь угодно малое воздействие приводит к резкому изменению ее свойств: система из одной своей однородной фазы переходит в другую. Математически Ф. п. трактуется как резкое нарушение структуры и свойств т. н. гиббсовских распределений, описывающих равновесные состояния системы, при сколь угодно малых изменениях параметров, определяющих равновесие.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 3 изд., ч. 1, М., 1976; [2] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980. *Р. А. Минлос.*

ФАЗОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОД — то же, что *ВКБ-метод*.

ФАКТОР — инволютивная подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры $B(H_1H)$ линейных операторов в гильбертовом пространстве H, замкнутая относительно т. н. слабой сходимости операторов и обладающая тем свойством, что центр (т. е. совокупность всех операторов из $\mathfrak{A}$, коммутирующих с любым оператором из $\mathfrak{A}$) состоит из скалярнократных единичному оператору.

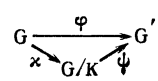
Если $\mathfrak{A}$ есть Ф., то для большого запаса подпространств F из H можно определить понятие размерности $\dim_{\mathfrak{A}} F$ относительно $\mathfrak{A}$ как инварианта, сохраняющегося не при произвольных изометриях $\mathcal{F}$, а только при изометриях из данного Ф. и обладающих дополнительными естественными свойствами (напр., $\dim_{\mathfrak{A}}(F_1 \oplus F_2) = \dim_{\mathfrak{A}} F_1 + \dim_{\mathfrak{A}} F_2$). Все Ф. разбиваются на пять классов в соответствии со значениями, к-рые может принимать $\dim_{\mathfrak{A}} F$, причем, напр., для Ф. класса II_∞ ее значениями могут быть любые числа из $[0, \infty]$. *М. И. Войцеховский.*

ФАКТОРГРУППА группы G по нормальному делителю N — группа, образуемая *смежными классами* Ng, $g \in G$, группы G и обозначаемая G/N (см. *Нормальный делитель*). Умножение смежных классов производится по формуле

$$Ng_1 \cdot Ng_2 = Ng_1g_2.$$

Единицей Ф. является класс $N = N \cdot 1$, обратным к классу Ng — класс Ng^{-1}.

Отображение $\varkappa : g \to Ng$ будет эпиморфизмом группы G на Ф. G/N, наз. каноническим эпиморфизмом G на G/N. Если $\varphi: G \to G'$ — произвольный эпиморфизм группы G на группу G', то ядро K эпиморфизма φ — нормальный делитель группы G, а факторгруппа G/K изоморфна группе G', точнее, существует изоморфизм ψ группы G/K на группу G' такой, что диаграмма



коммутативна, где $\varkappa$ — канонич. эпиморфизм $G \to G/K$.

Ф. группы G можно определять, исходя из нек-рой конгруэнции на G, как множество классов конгруэнтных элементов относительно умножения классов. Всевозможные конгруэнции на группе находятся во взаимно однозначном соответствии с нормальными делителями группы, а Ф. по конгруэнциям совпадают с Ф. по нормальным делителям. Ф. является нормальным факторобъектом в категории групп. *Н. Н. Вильямс.*

ФАКТОРИАЛ — функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, значение к-рой равно произведению натуральных чисел от 1 до натурального числа n, т. е. $1 \cdot 2 \ldots n$; обозначается $n!$ (по определению, $0! = 1$). При больших n приближенное выражение Ф. дается *Стирлинга формулой*. Ф. равен числу перестановок из n элементов. Ф. наз. также более общее выражение

$$(a)_\mu = a(a+1)(a+2)\ldots(a+\mu-1),$$

где a — любое комплексное число, μ — натуральное, $(a)_0 \equiv 1$. См. также *Гамма-функция*. *БСЭ-з.*

ФАКТОРИАЛЬНОЕ КОЛЬЦО — кольцо с однозначным разложением на множители. Точнее, Ф. к. A — это область целостности, в к-рой можно выбрать систему экстремальных элементов P такую, что любой ненулевой элемент $a \in A$ допускает единственное представление вида

$$a = u \prod_{p \in P} p^{n(p)},$$

где u обратим, а целые неотрицательные показатели $n(p)$ отличны от нуля только для конечного числа элементов $p \in P$. При этом элемент наз. экстремальным в A, если из $p = uv$ следует, что либо u, либо v обратим в A, и p необратим в A.

В Ф. к. существует наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное любых двух элементов. Кольцо A факториально тогда и только тогда, когда оно является кольцом Крулля и выполняется одно из следующих эквивалентных условий: (1) любой дивизориальный идеал в A является главным; (2) любой простой идеал высоты 1 главный; (3) любое непустое семейство главных идеалов обладает максимальным элементом, и пересечение любых двух главных идеалов является главным идеалом. Любое кольцо главных идеалов факториально. Дедекиндово кольцо факториально, только если оно — кольцо главных идеалов. Если S — мультипликативная система в Ф. к. A, то кольцо частных $S^{-1}A$ факториально. Для кольца Зарисского R из факториальности его пополнения $\hat{R}$ следует факториальность самого R.

Подкольцо и факторкольцо Ф. к. не обязаны быть Ф. к. Кольцо многочленов над Ф. к. и кольцо формальных степенных рядов над полем или дискретно нормированным кольцом факториально. Однако кольцо формальных степенных рядов над Ф. к. не обязано быть факториальным.

Область целостности факториальна тогда и только тогда, когда ее мультипликативная полугруппа гауссова (см. *Гауссова полугруппа*), в связи с этим Ф. к. наз. также гауссовыми кольцами.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *Л. В. Кузьмин.*

ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА, критерий факторизации, — теорема теории статистич. оценивания, указывающая необходимое и достаточное условия того, чтобы статистика T была достаточной для семейства вероятностных распределений $\{P_\theta\}$.

Пусть X — случайный вектор, принимающий значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, причем семейство вероятностных распределений $\{P_\theta\}$ доминировано нек-рой мерой μ и пусть

$$p(x; \theta) = dP_\theta(x)/d\mu, \quad \theta \in \Theta.$$

Далее, пусть $T = T(X)$ — статистика, построенная по вектору наблюдений X и отображающая измеримое пространство $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ в измеримое пространство $(\mathfrak{Y}, \mathcal{A})$. В этих условиях возникает вопрос: когда статистика T является достаточной для семейства $\{P_\theta\}$? Отвечая на этот вопрос, Ф. т. утверждает: для того чтобы статистика T была достаточной для семейства $\{P_\theta\}$, допускающего достаточные статистики, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\theta \in \Theta$ плотность вероятности $p(x; \theta)$ можно было факторизовать следующим образом:

$$p(x; \theta) = g(x)\, h(T(x); \theta), \qquad (*)$$

где $g(\cdot)$ есть $\mathcal{B}$-измеримая функция на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$, $h(\cdot, \theta)$

есть $\mathcal{A}$-измеримая функция на $(\mathfrak{Y}, \mathcal{A})$. Ф.т., кроме того, что она дает критерий достаточности, позволяет во многих случаях определить конкретный вид достаточной статистики T, для чего нужно факторизовать плотность $p(x; \theta)$ по формуле (*). На практике обычно предпочитают иметь дело с функцией правдоподобия $L(\theta)=p(X; \theta)$, а не с плотностью $p(x; \theta)$; при этом в терминах функции правдоподобия условие (*) имеет вид $L(\theta)=g(X)\,h(T; \theta)$, явным образом содержащий достаточную статистику T.

Лит.: [1] Fischer R. A., «Philos. Trans Roy. Soc. London A», 1922, v. 222, p. 309—68, [2] Neyman J., «Giorn. Ist. Ital. Att.», 1935, v. 6, p. 320—34, [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [5] Halmos P. R., Savage L. J., «Ann. Math. Statistics», 1949, v. 20, p. 225—41.

М. С. Никулин.

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ТОЖДЕСТВА в теории случайных блужданий — система многопараметрич. тождеств, устанавливающих связи между различными характеристиками *случайного блуждания*. В качестве характеристик здесь фигурируют т. н. граничные функционалы — случайные величины, связанные с достижением блужданием нек-рых границ, напр. супремум блуждания, момент первого достижения этого супремума, величина первого перескока через уровень и т. д.

Название Ф. т. связано с тем, что их получение основано на факторизации — представлении функции $1-zf(\lambda)$, где $f(\lambda)$ — характеристич. функция случайных величин, порождающих блуждание, $|z|\leqslant 1$, при действительных λ в виде произведения двух сомножителей, один из к-рых аналитичен, ограничен, не обращается в нуль и непрерывен вплоть до границы в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$, а второй обладает теми же свойствами в нижней полуплоскости. Такое представление единственно с точностью до постоянного множителя (ср. *Винера — Хопфа метод*), что позволяет отождествлять соответствующие компоненты различных факторизаций указанного типа, к-рые устанавливаются с помощью вероятностных рассуждений и записываются в терминах характеристич. функций совместных распределений граничных функционалов от случайного блуждания.

Ф. т. позволяют получить в качестве простых следствий многие как новые, так и известные результаты, относящиеся к теории случайных блужданий, например *больших чисел усиленный закон*, *арксинуса закон*.

Лит.: [1] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969, [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972.

К. А. Боровков.

ФАКТОРИЗАЦИЯ в теории графов — разложение *графа* на непересекающиеся по ребрам остовные подграфы специального вида. В общем случае фактор есть остовный подграф, обладающий заданным свойством. Примером такого свойства является регулярность подграфа. Регулярный остовный подграф степени k наз. k-фактором; 1-фактор наз. также совершенным паросочетанием. Граф наз. k-факторизуемым, если он может быть представлен как объединение своих непересекающихся по ребрам k-факторов.

В теории графов рассматриваются вопросы о существовании факторов того или иного вида в произвольном графе, о числе факторов, о возможности Ф. данного типа для различных классов графов. Известно, напр., что полный граф с четным числом вершин и полный *граф двудольный* с одинаковым числом вершин в каждой доле являются 1-факторизуемыми. Связный граф является 2-факторизуемым тогда и только тогда, когда он является регулярным графом четной степени. Граф G имеет 1-фактор тогда и только тогда, когда число его вершин четно и не существует такого подмножества вершин U, что число компонент связности с нечетным числом вершин графа $G-U$, получающегося из G удалением вершин множества U, превышает $|U|$. Всякий двусвязный регулярный граф степени 3 может быть разложен на непересекающиеся 1-фактор и 2-фактор.

Примерами нерегулярных факторов являются остовные *деревья* и леса, остовные плоские подграфы (см. *Графа укладка*) и т. п. С разложением графа на остовные леса связана числовая характеристика, называемая древесностью,— это наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных лесов, объединением к-рых является граф. Древесность произвольного графа G равна

$$\max_k \left\{\frac{g_k}{k-1}\right\},$$

где g_k — наибольшее число ребер в k-вершинных подграфах графа G.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

А. А Сапоженко.

ФАКТОРКАТЕГОРИЯ — конструкция, аналогичная конструкции фактормножества или факторалгебры. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория, и в классе морфизмов $\operatorname{Mor}\mathfrak{K}$ задано отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) если $\alpha\sim\beta$, то начала и концы морфизмов α и β совпадают; 2) если $\alpha\sim\beta$, $\gamma\sim\delta$ и произведение $\alpha\gamma$ определено, то $\alpha\gamma\sim\beta\delta$. Через $[\alpha]$ обозначается класс эквивалентности морфизма α. Факторкатегорией категории $\mathfrak{K}$ по отношению $\sim$ наз. категория (обозначаемая $\mathfrak{K}/\sim$), у к-рой те же объекты, что и у $\mathfrak{K}$, а для любой пары объектов A, B множество морфизмов $H(A, B)$ в $\mathfrak{K}/\sim$ состоит из классов эквивалентности $[\alpha]$, где $\alpha\colon A\longrightarrow B$ в $\mathfrak{K}$; умножение морфизмов $[\alpha]$ и $[\beta]$ определяется формулой $[\alpha][\beta]=[\alpha\beta]$ (когда произведение $\alpha\beta$ определено).

Всякая малая категория является Ф. категории путей над подходящим ориентированным графом.

М Ш. Цаленко.

ФАКТОРКОЛЬЦО кольца R по идеалу I — *факторгруппа* аддитивной группы кольца R по подгруппе I с умножением

$$(a+I)(b+I)=ab+I.$$

Ф. оказывается кольцом и обозначается R/I. Отображение $\pi\colon R\to R/I$, где $\pi(x)=x+I$, является сюръективным кольцевым гомоморфизмом, к-рый наз. естественным (ср. *Алгебраическая система*).

Важнейший пример Ф.: кольцо вычетов по модулю n — Ф. кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ по идеалу $\mathbb{Z}n$. Элементами кольца $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ можно считать числа $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, где сумма и произведение определяются как остатки от деления обычных суммы и произведения на n. Между идеалами Ф. R/I и идеалами кольца R, содержащими I, может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее порядок. В частности, Ф. R/I просто тогда и только тогда, когда I — максимальный идеал. *Л. А. Скорняков.*

ФАКТОРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение f топологич. пространства X на топологич. пространство Y, при к-ром множество $v\subset Y$ открыто в пространстве Y в том и только том случае, если его прообраз $f^{-1}v$ открыт в пространстве X. Если дано отображение f топологич. пространства X на множество Y, то на Y существует сильнейшая топология $\mathcal{T}_f$ (т. е. содержащая наибольшее число открытых множеств) среди всех топологий, по отношению к к-рым отображение f непрерывно. Топология $\mathcal{T}_f$ состоит из всех множеств $v\subset Y$ таких, что множество $f^{-1}v$ открыто в X. Топология является единственной среди всех топологий на множестве Y такой, что f является Ф.о. Поэтому топология $\mathcal{T}_f$ наз. фактортополо-

гией, отвечающей отображению f и топологии $\mathcal{T}$, заданной на X.

Описанная выше конструкция возникает при рассмотрении разбиений топологич. пространств и приводит к важной операции—переходу от данного топологич. пространства к новому—пространству разбиения. Пусть дано разбиение γ топологич. пространства $(X, \mathcal{T})$, т. е. семейство γ непустых попарно непересекающихся подмножеств множества X, покрывающее X. Тогда определено отображение проектирования π: $X \longrightarrow \gamma$ правилом: $\pi(x) = P \subset \gamma$, если $x \in P \subset X$. Множество γ теперь наделяется фактортопологией $\mathcal{T}\pi$, отвечающей топологии $\mathcal{T}$ на X и отображению π, и топологич. пространство $(\gamma, \mathcal{T}\pi)$ наз. пространством разбиения пространства $(X, \mathcal{T})$. Так, с точностью до гомеоморфизма окружность представляется как пространство разбиения отрезка, сфера — как пространство разбиения круга, лист Мёбиуса — как пространство разбиения прямоугольника, проективная плоскость — как пространство разбиения сферы и т. д.

Важны следующие свойства Ф.о., связанные с рассмотрением диаграмм. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение, причем $f(X) = Y$. Тогда существует топологич. пространство Z, Ф.о. $g: X \longrightarrow Z$ и непрерывное взаимно-однозначное отображение (т. е. уплотнение) $h: Z \longrightarrow Y$ такое, что $f = hog$. В качестве Z можно взять пространство разбиения $\gamma = \{f^{-1}y : y \in Y\}$ пространства X на полные прообразы точек при f, а в роли отображения g выступит тогда проектирование π. Пусть даны непрерывное отображение $f_2: X \longrightarrow Y$ и Ф.о. $f_1: X \longrightarrow Y_1$, причем выполняется условие: если x', $x'' \in X$ и $f_1(x') = f_1(x'')$, то и $f_2(x') = f_2(x'')$. Тогда однозначно определенное отображение $g: Y_1 \longrightarrow Y_2$ такое, что $g \circ f_1 = f_2$ оказывается непрерывным отображением. Сужение Ф.о. на подпространство может не быть Ф.о.— даже если это подпространство одновременно открыто и замкнуто в исходном пространстве. Декартово произведение Ф.о. на тождественное отображение может не быть Ф.о. Декартов квадрат Ф.о. также может не быть Ф.о. Сужение Ф.о. на полный прообраз не обязано быть Ф.о. Точнее, если $f: X \longrightarrow Y$ есть Ф.о. и $Y_1 \subset Y$, $X_1 = f^{-1}Y$, $f_1 = f \mid X_1$, то отображение $f_1: X_1 \longrightarrow Y_1$ может не быть факторным. Такого не может произойти, если подпространство Y_1 открыто или замкнуто в Y.

Эти факты показывают, что с Ф. о. надо обращаться осторожно и что с точки зрения теории категорий класс Ф. о. не столь гармоничен и удобен, как классы непрерывных отображений, *совершенных отображений* и *открытых отображений*. Однако рассмотрение пространств разбиений и отмеченные выше «диаграммные» свойства Ф. о. обеспечивают классу Ф. о. положение одного из самых важных классов отображений в топологии. Этому безусловно содействует и широта класса Ф. о.— к нему относятся все непрерывные открытые и *замкнутые отображения*. Ф. о. играют существенную роль при классификации пространств методом отображений. Так, k-пространства охарактеризованы как факторпространства (т. е. образы при Ф. о.) локально бикомпактных хаусдорфовых пространств, а секвенциальные пространства — это в точности факторпространства метрич. пространств.

Большинство топологич. свойств не сохраняется при Ф. о. Так, факторпространство метрич. пространства может не быть хаусдорфовым пространством, факторпространство сепарабельного метрич. пространства может не иметь счетной базы. Поэтому вопрос о поведении топологич. свойств при Ф. о. ставится обычно при дополнительных ограничениях на прообразы точек или на образ. Известно, напр., если бикомпакт гомеоморфен пространству разбиения метрич. пространства на сепарабельные множества, то этот бикомпакт метризуем. При Ф. о. сепарабельного метрич. пространства на регулярное T_1-пространство с первой аксиомой счетности образ метризуем. Но есть топологич. инварианты, устойчивые относительно любых Ф. о. К ним относятся, напр., секвенциальность и оценка сверху на тесноту. В топологич. алгебре Ф. о., являющиеся одновременно алгебраич. гомоморфизмами, часто имеют гораздо более правильное строение, чем в общей топологии. Так, алгебраич. гомоморфизм одной топологич. группы на другую, являющийся Ф. о., есть непременно открытое отображение. Благодаря этому спектр топологич. свойств, сохраняющихся факторными гомоморфизмами, существенно шире (он включает, в частности, метризуемость).

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., 2 изд., М., 1968. *А. В. Архангельский.*

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ — раздел многомерного статистич. анализа, объединяющий математико-статистич. методы снижения размерности исследуемого многомерного признака $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)'$, т. е.—построения,— на основе исследования структуры связей между компонентами $x_i x_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$,— таких моделей, к-рые позволяли бы восстанавливать (с нек-рой случайной ошибкой прогноза ε) значения p анализируемых компонент признака x по существенно меньшему числу m, $m \ll p$, так наз. общих (непосредственно не наблюдаемых) факторов $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)'$.

Простейшим вариантом формализации подобной постановки задачи служит линейная нормальная модель Ф. а. с взаимно ортогональными общими факторами и с некоррелированными остатками:

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} q_{kj} f_j + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \qquad (1)$$

или в матричной записи

$$x = qf + \varepsilon, \qquad (1')$$

где $(p \times m)$-матрица q коэффициентов линейного преобразования наз. матрицей нагрузок общих факторов на исследуемые переменные.

Предполагается, что вектор специфич. остатков (ошибок прогнозов) $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ подчиняется p-мерному нормальному распределению с нулевым вектором средних значений и с неизвестной диагональной ковариационной матрицей V_ε; вектор общих факторов f, в зависимости от специфики решаемой задачи, может интерпретироваться либо как m-мерная случайная величина с ковариационной матрицей V_f специального вида, а именно — с единичной (т. е. $V_f = I_m$), либо как вектор неизвестных неслучайных параметров (взаимно ортогональных и нормированных), значения к-рых меняются от наблюдения к наблюдению.

Если предположить, что наши переменные заранее процентрированы (т. е. $\varepsilon x = 0$), то из (1') с учетом принятых допущений немедленно получается следующее соотношение, связывающее ковариационные матрицы векторов x и ε и матрицу нагрузок:

$$V_x = qq' + V_\varepsilon. \qquad (2)$$

При проведении реального статистич. анализа исследователь располагает лишь оценками элементов ковариационной матрицы V_x (полученными по наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$), в то время как структурные параметры модели — элементы q_{ki} матрицы нагрузок q и дисперсии $v_{kk} = \mathrm{D}\varepsilon_k$ специфич. остатков ε_k являются неизвестными и подлежат определению.

Таким образом, при проведении Ф.а. исследователю приходится последовательно решать следующие основные задачи:

существования или правомерности использования модели типа (1); ведь далеко невсякая ковариацион-

ная матрица V_x представима в виде (2); задача сводится к проверке гипотезы о специальной структуре связей между компонентами исследуемого вектора x;

единственности (идентификации) модели типа (1); принципиальные трудности при вычислениях и интерпретации модели состоят в том, что при $m > 1$ ни структурные параметры, ни сами факторы не определяются однозначно; если пара (q, V_ε) является решением в соотношении (2), то и любая другая пара вида (qc, V_ε), где c — ортогональная матрица размера $m \times m$, тоже будет удовлетворять соотношению (2); обычно выясняют, при каких дополнительных априорных ограничениях на матрицу нагрузок q и на ковариационную матрицу остатков V_ε определение параметров q, f и V_ε анализируемой модели будет единственным; возможность ортогонального вращения решения факторной модели используется также для получения наиболее естественно интерпретируемого решения;

статистич. оценивания (по наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$) неизвестных структурных параметров модели q и V_ε;

статистич. проверки ряда гипотез, связанных с природой модели (линейность, нелинейность и т. п.) и со значениями ее структурных параметров таких, как гипотеза об истинном числе общих факторов, гипотеза адекватности принятой модели по отношению к имеющимся результатам наблюдения, гипотеза о статистически значимом отличии от нуля коэффициентов q_{ij} и т. п.;

построения статистич. оценок для ненаблюдаемых значений общих факторов f;

алгоритмически — вычислительной реализации процедур статистич. оценивания и статистич. проверки гипотез.

Разработка теоретически обоснованных решений перечисленных задач в достаточно полной мере осуществлена лишь в рамках описанной выше линейной нормальной модели Ф. а.

Однако в практич. применениях широко используются более общие версии моделей Ф. а.: нелинейные, построенные на неколичественных переменных, оперирующие с трехмерными матрицами исходных данных (к двум традиционным измерениям исходных данных — размерности p и числу наблюдений n,— присоединяется еще одна, пространственная или временная, координата). Подобные модели не сопровождаются, как правило, сколько-нибудь убедительным математико-статистич. анализом их свойств, но основаны на вычислительных рекомендациях эвристич. или полуэвристич. характера.

Лит.: [1] Харман Г., Современный факторный анализ, пер. с англ., М., 1972; [2] Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В., Классификация многомерных наблюдений, М., 1974, [3] Spearman C., «Amer. J. Psychol.», 1904, v. 15, p. 201—93, [4] Anderson T. W., Rubin H., «Proc. 3 Berkeley symp. math. stat. and probab.», 1956, v. 5, p. 111—50, [5] Rao C. R., «Psychometrika», 1955, v. 20, p 93—111.

С. А. Айвазян.

ФАКТОРОБЪЕКТ объекта категории — понятие, частным случаем к-рого являются понятия фактормножества, факторгруппы, факторпространства и т. п.

Пусть $\mathcal{E}$ — нек-рый класс эпиморфизмов категории $\mathfrak{K}$, содержащий все тождественные морфизмы из $\mathfrak{K}$ и выдерживающий умножение справа на изоморфизмы. Другими словами, для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ $1_X \in \mathcal{E}$ и для всякого $\xi: B \longrightarrow C$ из $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{K}$ и всякого $\varepsilon: A \longrightarrow B$ из $\mathcal{E}$ морфизм $\varepsilon\xi \in \mathcal{E}$. Морфизмы $\varepsilon: A \longrightarrow B$ и $\varepsilon_1: A \longrightarrow C$ из $\mathcal{E}$ наз. эквивалентными, если $\varepsilon_1 = \varepsilon\xi$ для нек-рого изоморфизма ξ. Класс эквивалентности морфизма ε наз. $\mathcal{E}$-факторобъектом объекта A, а пара (ε, B) — представителем этого Ф. Факторобъект с представителем (ε, B) иногда обозначается $[\varepsilon, B)$ или просто $[\varepsilon)$.

Для каждого объекта A класс всех его $\mathcal{E}$-факторобъектов непуст; в нем имеется несобственный Ф. $[1_A, A)$, остальные $\mathcal{E}$-факторобъекты этого класса собственные. Категория $\mathfrak{K}$ наз. $\mathcal{E}$-локально малой справа, если для каждого объекта A из $\mathfrak{K}$ класс $\mathcal{E}$-факторобъектов является множеством.

Если в качестве $\mathcal{E}$ взять подкатегорию всех эпиморфизмов $\mathrm{Epi}\,\mathfrak{K}$, то $\mathrm{Epi}\,\mathfrak{K}$-факторобъекты наз. просто факторобъектами. Если в категории $\mathfrak{K}$ имеется бикатегорная структура $(\mathfrak{K}, \mathcal{E}, \mathfrak{M})$, то $\mathcal{E}$-факторобъекты наз. допустимыми Ф. Аналогично, если $\mathcal{E}$ состоит из всех регулярных (строгих, нормальных и т. п.) эпиморфизмов, то соответствующие Ф. наз. регулярными (нормальными, строгими и т. п.). Напр., в категории топологич. пространств факторпространства соответствуют регулярным Ф.

Понятие Ф. объекта категории дуально понятию *подобъекта* объекта категории.

М. Ш. Цаленко.

ФАКТОРПРЕДСТАВЛЕНИЕ — 1) линейное представление π группы или алгебры X в гильбертовом пространстве H такое, что *Неймана алгебра* в H порожденная семейством $\pi(X)$, является *фактором*. Если этот фактор имеет тип I (соответственно II, III, II_1, II_∞ и т. д.), то Ф. π наз. факторпредставлением типа I и т. д.

2) Ф. π группы или алгебры X — ее представление ρ, определяемое следующим образом. Пусть E — (топологическое) векторное пространство представления π, представление ρ есть представление в (топологическом) векторном пространстве $E|F$, являющимся факторпространством пространства E по нек-рому *инвариантному подпространству* F представления π, определенное формулой $\rho(x)\ (\xi + F) = \pi(x)\xi + F$ для всех $x \in X$, $\xi \in E$. Если π — непрерывное представление, то его Ф. также непрерывно.

А. И. Штерн.

ФАКТОРПРОСТРАНСТВО динамической системы f^t, заданной на топологич. пространстве S,— факторпространство пространства S по отношению эквивалентности: $x \sim y$, если точки x и y принадлежат одной траектории. Иными словами, точками Ф. являются траектории динамич. системы f^t (иное обозначение $f(t, p)$, см. [1]), а топология — сильнейшая из топологий, в к-рых отображение, сопоставляющее каждой точке пространства S ее траекторию, непрерывно (таким образом,

$$\{f^t x_k\}_{t \in \mathbb{R}} \underset{k \in K}{\longrightarrow} \{f^t x\}_{t \in \mathbb{R}}$$

(K — направленное множество) тогда и только тогда, когда найдутся t_k такие, что

$$f^{t_k} x_k \underset{k \in K}{\longrightarrow} x;$$

если S — метрич. пространство, то $k \in \mathbb{N}$). Ф. многих динамич. систем не удовлетворяют ни одной из аксиом отделимости, даже если S им удовлетворяет. Напр., если S — *минимальное множество*, то замыкание всякого непустого множества в Ф. есть все Ф. Если динамич. система, заданная на метрич. пространстве, вполне неустойчива (см. *Полная неустойчивость*), то для того чтобы ее Ф. было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы эта динамич. система не имела *седла в бесконечности*.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949, [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., 2 изд., М., 1968; [3] Миллионщиков В. М., «Дифференц. уравнения», 1974, т. 10, № 12, с. 2292—93.

В. М. Миллионщиков.

ФАНО МНОГООБРАЗИЕ — гладкое полное неприводимое алгебраич. многообразие X над полем k, антиканонич. пучок K_X^{-1} к-рого обилен. Основы изучения таких многообразий заложены Дж. Фано ([1], [2]).

Ф. м. размерности 2 наз. **поверхностью дель Пеццо** и является *рациональной поверхностью*. Многомерный аналог поверхностей дель Пеццо — Ф. м. размерности >2 уже не все являются рациональными многообразиями, напр. общая кубика в проективном пространстве P^4. Неизвестно (1984), все ли Ф. м. унирациональны.

Хорошо изучены трехмерные Ф. м. (см. [3], [5]). О Ф. м. размерности больше 3 известны лишь отдельные частные результаты.

Группа Пикара $\mathrm{Pic}\,X$ трехмерного Ф.м. X конечно порождена и не имеет кручения. В случае когда основное поле k совпадает с полем $\mathbb{C}$, ранг группы $\mathrm{Pic}\,X$, равный второму числу Бетти $b_2(X)$, не больше 10 (см. [4]). Если $b_2(X)\geqslant 6$, то Ф.м. изоморфно $P^1\times S_{11-b_2(X)}$, где S_d — поверхность дель Пеццо степени d. Ф.м. X наз. **примитивным**, если не существует моноидального преобразования $\sigma: X\longrightarrow X'$ гладкого многообразия X' с центром в неособой неприводимой кривой. Если Ф.м. X примитивно, то $b_2(X)\leqslant 3$. Если $b_2(X)=3$, то X является расслоением на коники над $S=P^1\times P^1$, другими словами, тогда существует морфизм $\pi: X\longrightarrow S$, слой к-рого изоморфен конике, т. е. алгебраич. схеме, заданной однородным уравнением степени 2 в P^2. Ф.м. X с $b_2(X)=2$ является расслоением на коники над проективной плоскостью P^2 (см. [3]). В случае $b_2(X)=1$ существует 18 типов Ф.м., к-рые описаны (см. [6]).

Для трехмерных Ф.м. X индекс самопересечения антиканонич. дивизора $(-K_X^3)\leqslant 64$. Наибольшее целое число $r\geqslant 1$ такое, что $H^{\otimes r}$ изоморфно K_X^{-1} для нек-рого дивизора $H\in\mathrm{Pic}\,X$, наз. **индексом** Ф.м. Индекс трехмерного Ф.м. может принимать значения 1, 2, 3, 4. Ф.м. индекса 4 изоморфно проективному пространству P^3, а Ф.м. индекса 3 изоморфно гладкой квадрике $Q\subset P^4$. Если $r=2$, то индекс самопересечения $d=H^3$ может принимать значения $1\leqslant d\leqslant 7$, причем каждое из них реализуется на нек-ром Ф.м. Для Ф.м. индекса 1 отображение $\varphi_{K_X^{-1}}$: $X\longrightarrow P^{\dim|K_X^{-1}|}$, определяемое линейной системой $|K_X^{-1}|$, имеет степень $\deg\varphi_{K_X^{-1}}=1$ или 2. Описаны Ф.м. индекса 1, для к-рых $\deg\varphi_{K_X^{-1}}=2$. Если $\deg\varphi_{K_X^{-1}}=1$, то Ф.м. X реализуется как подмногообразие V_{2g-2} степени $2g-2$ в проективном пространстве P^{g+1}. Число g наз. **родом** Ф.м. V_{2g-2} и совпадает с родом канонич. кривой — сечения многообразия X при антиканонич. вложении в P^{g+1}. Известна классификация Ф.м. $V_{2g-2}\subset P^{g+1}$, класс гиперплоского сечения к-рых совпадает с антиканонич. классом и порождает группу $\mathrm{Pic}\,V_{2g-2}$ (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Fano G., «Atti Congr. internaz. dei matematici. Bologna», 1931, t. 4, p. 115—19; [2] его же, «Comm. Math Helvetici», 1942, v. 14, p. 202—11; [3] Mori S., Mukai S., «Manuscr. math.», 1981, v. 36, № 2, p. 147—62; [4] Roth L., «Atti Accad. Naz. dei Lincei Rendiconti. Classe sci. fis., mat. e naturali», 1950, v. 9, p. 246—50; [5] Исковских В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 3, с. 516—62; 1978, т. 42, № 3, с. 506—49; [6] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 12, М., 1979, с. 59—157.

Вик. С. Куликов.

ФАНО ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, параметризующая семейство прямых, лежащих на неособой кубич. поверхности $V_3\subset P^4$. Дж. Фано изучал семейства прямых $F(V_3)$ на трехмерной кубике [1].

Через общую точку неособой кубики $V_3\subset P^4$ проходит ровно 6 прямых, лежащих на ней, и Ф. п. $F(V_3)$ является неособой неприводимой приведенной алгебраич. поверхностью геометрич. рода $p_g=10$, иррегулярности $q=5$, топологич. эйлерова характеристика (в случае $k=\mathbb{C}$) к-рой равна 27. По Ф. п. $F(V_3)$ можно восстановить кубику V_3 (см. [2]).

Лит.: [1] Fano G., «Atti Reale Accad. Sci. Torino», 1903/04, t 39, p. 778—92, [2] Тюрин А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т 34, № 6, с. 1200—08; [3] Clemens C., Griffiths Ph, «Ann. Math.», 1972, v. 95, № 2, p. 281—356.

Вик. С. Куликов.

ФАНО ПОСТУЛАТ — предложение проективной геометрии, установленное Дж. Фано (G. Fano, 1892) и заключающееся в том, что **диагональные точки полного четырехвершинника** неколлинеарны. Ф. п. равносилен тому, что характеристика тела K, соответствующего рассматриваемой проективной геометрии, не равна 2. Ф. п. не выполняется, напр., на конечной проективной плоскости, состоящей из семи точек и прямых, отвечающей телу K из двух элементов: 0,1.

М. И. Войцеховский.

ФАНО СХЕМА **проективного алгебраического многообразия X над полем k** — алгебраич. схема, параметризующая семейство прямых, лежащих на подмногообразии X проективного пространства P^n. Ф.с. $F(X)$ проективного многообразия X может быть задана как замкнутая подсхема в грассманиане $G(2, n+1)$ прямых проективного пространства P^n. В отличие от Ф.с. трехмерной кубики (см. *Фано поверхность*) Ф.с. произвольного проективного многообразия не обязательно является неособой, приведенной или неприводимой схемой. Так, линейчатая поверхность R прямых, лежащих на квартике Ферма $\sum_{i=0}^4 x_i^4=0$, состоит из 40 конусов, высекаемых гиперплоскостями $x_i=\zeta x_j$, $i\neq j$, где ζ пробегает первообразные корни 8-й степени из 1. Каждый из конусов входит в поверхность R с кратностью 2 (см. [4]). Таким образом, эта Ф.с. приводима и каждая ее компонента не приведена в общей точке.

Лит.: [1] Tennison B., «Proc. London Math. Soc.», 1974, v. 29, p. 714—34.

Вик. С. Куликов.

ФАНЬЯНО ЗАДАЧА — задача, в к-рой в данный остроугольный треугольник требуется вписать треугольник наименьшего возможного периметра. Решением задачи является т. н. **ортоцентрический треугольник**, т. е. треугольник, вершинами к-рого являются основания высот данного треугольника. Задача была поставлена Дж. Фаньяно деи Тоски (G. Fagnano dei Toschi) в 1775.

П. С. Моденов.

ФАРЕЯ РЯД **порядка n** — возрастающая последовательность неотрицательных несократимых дробей, не превосходящих 1, со знаменателем, не превосходящим n. Напр., Ф.р. порядка 5 является последовательность

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{1}.$$

Верны следующие утверждения.

1) Если $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ — два последовательных члена Ф.р. порядка n, то

$$ba'-ab'=1.$$

2) Если $\frac{a}{b}$, $\frac{a''}{b''}$, $\frac{a'}{b'}$ — три последовательных члена Ф.р. порядка n, то

$$\frac{a''}{b''}=\frac{a+a'}{b+b'}.$$

3) Число членов Ф. р. порядка n равно

$$1+\sum_{x=1}^n\varphi(x).$$

Ф. р. рассматривались Дж. Фареем (J. Farey, 1816).

Лит.: [1] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [2] Hall R. R., «J. London Math. Soc.», 1970, v. 2, p. 139—48.

В. И. Нечаев.

ФАТУ ДУГА для функции $f(z)$, мероморфной в области G плоскости комплексного переменного z, — *достижимая дуга границы* области G, обладающая тем свойством, что она входит в состав границы нек-рой

жордановой области $g \subset G$, в к-рой $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, ограничена. Иногда это определение расширяют, заменяя условие ограниченности $f(z)$ в g более общим условием неплотности в плоскости w образа области g при отображении $w=f(z)$. Усиленная теорема Фату из теории граничных свойств аналитич. функций утверждает, что если γ — дуга Фату (даже в расширенном смысле) для функции $f(z)$, мероморфной в круге $D: |z|<1$, то почти в каждой точке $\zeta \in \gamma$ функция $f(z)$ имеет конечный предел при стремлении z к ζ изнутри D по любому углу с вершиной ζ, образованному парой хорд круга D.

Лит.: [1] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971, [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.
Е. П. Долженко.

ФАТУ ТЕОРЕМА в теории функций комплексного переменного: 1) Пусть гармонич. функция $u(z)$, $z=re^{i\varphi}$, представима в единичном круге $U=\{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ интегралом Пуассона — Стилтьеса

$$u(z)=\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\mu(\zeta),\quad \zeta=e^{i\theta},$$

где μ — борелевская мера, сосредоточенная на единичной окружности $T=\{\zeta : |\zeta|=1\}$, $\int d\mu(\zeta)=1$. Тогда почти всюду по мере Лебега на T функция $u(z)$ имеет *угловые граничные значения*.

Эта Ф.т. обобщается для гармонич. функций $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, представимых интегралом Пуассона — Стилтьеса в областях Ляпунова $D \subset \mathbb{R}^n$ (см. [2], [3]). О Ф.т. для *радиальных граничных значений* кратно гармонич. функций $u(z)$ в поликруге $U^n=\{z=(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j|<1,\ j=1, \ldots, n\}$ см. [4], [5].

2) Если $f(z)$ — ограниченная аналитич. функция в U, то почти всюду по мере Лебега на T она имеет угловые граничные значения.

Эта Ф. т. обобщается для *ограниченного вида функций* (см. [6]). Точки $\zeta \in T$, в к-рых существует угловое граничное значение $f(\zeta)$, наз. точками Фату. Относительно обобщений Ф. т. для аналитич. функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n \geqslant 2$, см. [7]; оказывается, что при $n \geqslant 2$ существуют граничные значения и по комплексным касательным направлениям.

3) Если коэффициенты степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ с единичным кругом сходимости U стремятся к нулю, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$, то этот ряд равномерно сходится на каждой дуге $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ окружности T, состоящей только из регулярных граничных точек для суммы ряда.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$ и ряд равномерно сходится на дуге $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, то отсюда не следует, что точки этой дуги регулярные для суммы ряда.

Теоремы 1), 2), 3) были доказаны П. Фату [1].

Лит.: [1] Fatou P., «Acta math.», 1906, v. 30, p. 335—400; [2] Привалов И. И., Кузнецов П. И., «Матем. сб.», 1939, т. 6, № 3, с. 345—76, [3] Соломенцев Е. Д., «Чехосл. матем. ж.», 1958, т. 8, с. 520—36; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965; [5] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974, [6] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950, [7] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в сб.: Итоги науки и техники Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142.
Е. Д. Соломенцев.

ФАТУ ТЕОРЕМА о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега: если последовательность измеримых и неотрицательных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... почти всюду на множестве E сходится к функции $f(x)$, то

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

Доказана впервые П. Фату [1]. Часто в ее формулировке $\varliminf\limits_{n\to\infty}$ заменяют на $\sup\limits_n$.

Лит. [1] Fatou P., «Acta math.», 1906, v. 30, p. 335—400; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974.
Т. П. Лукашенко.

ФЕДОРОВСКАЯ ГРУППА — то же, что *кристаллографическая группа*. Названа по имени Е. С. Федорова, к-рый в 1891 перечислил все такие группы в трехмерном случае (см. [1]).

Лит.: [1] Федоров Е. С., Симметрия и структура кристаллов. Основные работы, М., 1949, с. 111—255.
Э. Б. Винберг.

ФЕЙЕРА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *средних арифметических метод суммирования*, примененный к суммированию рядов Фурье. Впервые был применен Л. Фейером [1].

Ряд Фурье

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

функции $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ суммируем Ф. м. с. к сумме $s(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)=s(x),$$

где

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x), \qquad (2)$$

$s_k(x)$ — частичные суммы ряда (1).

Если x — точка непрерывности функции $f(x)$ или точка разрыва 1-го рода, то в этой точке ее ряд Фурье суммируем Ф.м.с. соответственно к $f(x)$ или к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Если $f(x)$ непрерывна на нек-ром интервале (a, b), то ее ряд Фурье суммируем Ф.м.с. равномерно на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$; если же $f(x)$ непрерывна всюду, то указанный ряд суммируем равномерно к $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ (теорема Фейера).

Этот результат был усилен А. Лебегом [2], показавшим, что для любой суммируемой функции $f(x)$ ее ряд Фурье почти всюду суммируем Ф. м. с. к $f(x)$.

Функция

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu x\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

наз. ядром Фейера. С ее помощью средние Фейера (2) функции $f(x)$ выражаются в виде

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,K_n(u)\,du.$$

Лит.: [1] Fejér L., «Math. Ann.», 1903, Bd 58, S. 51—69; [2] Lebesgue H., «Math. Ann.», 1905, Bd 61, S. 251—80; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965.
И. И. Волков.

ФЕЙЕРА ПОЛИНОМ — тригонометрич. полином вида

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\cos(2n+k)x-\cos(2n-k)x\right)$$

или аналогичный полином по синусам. Ф. п. используются при построении непрерывных функций с заданными особенностями их рядов Фурье.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.
С. А. Теляковский.

ФЕЙЕРА СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл вида

$$\sigma_n(f, x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\Phi_n(t)\,dt,$$

где

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{2(n+1)}\frac{\sin^2(n+1)t/2}{\sin^2 t/2}$$

— ядро Фейера. Ф.с.и. является интегральным представлением *Фейера сумм* $\sigma_n(f, x)$.

Лит. см. при ст *Фейера сумма*. *С. А. Теляковский.*

ФЕЙЕРА СУММА — средние арифметические частных сумм ряда Фурье по тригонометрич. системе

$$\sigma_n(f, x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f, x)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f.

Если функция f непрерывна, то $\sigma_n(f, x)$ сходятся к $f(x)$ равномерно; $\sigma_n(f, x)$ сходятся к $f(x)$ в метрике L.

Если f принадлежит классу функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка $\alpha<1$, то справедлива оценка

$$\|f(x)-\sigma_n(f, x)\|_c=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

т. е. в этом случае Ф. с. приближают f со скоростью наилучших приближений функций указанного класса. Но Ф. с. не могут обеспечить высокую скорость приближения: оценка

$$\|f(x)-\sigma_n(f, x)\|_c=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

верна только для функций, являющихся константами.

Ф. с. введены Л. Фейером [1].

Лит.: [1] Fejér L., «Math. Ann.», 1903, Bd 58, S. 51—69; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965, [4] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949; [5] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

С. А. Теляковский.

ФЕЙНМАНА ИНТЕГРАЛ — собирательное название для представлений в виде континуального интеграла, или *интеграла по траекториям*, переходных функций (функций Грина) того или иного эволюционного процесса.

Пусть дано уравнение

$$\frac{du}{dt}=Hu, \tag{1}$$

где $0\leqslant t\leqslant T$; $T>0$, а $u(t, \omega)$ — функция, определенная на множестве $T\times\Omega$, где $\Omega\ni\omega$ — нек-рое пространство, и H — линейный оператор, действующий в подходящим образом подобранном пространстве функций, определенных на Ω. В ряде случаев переходную функцию $G(\omega_1, \omega_2, t)$ уравнения (1) (т. е. ядро оператора из полугруппы $\exp\{tH\}$, $t\geqslant 0$) можно представить в виде континуального интеграла

$$G(\omega_1, \omega_2, t)=$$

$$=\int_{\substack{\omega:\omega(0)=\omega_1\\ \omega(t)=\omega_2}}\exp\left\{\int_0^t W[\omega(\tau)]\,d\tau\right\}\mu_{\omega_1,\omega_2,t}(d\omega), \tag{2}$$

где $W(\cdot)$ — нек-рая функция, определенная на Ω, а интегрирование происходит по множеству «траекторий» $\omega(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, со значениями в Ω, «выходящих» в нулевой момент времени из ω_1 и «приходящих» в ω_2 в момент t, наконец, $\mu_{\omega_1,\omega_2,t}$ — нек-рая мера (или предмера), заданная на этом множестве траекторий. Интеграл понимается либо в обычном лебеговском смысле, либо в смысле, предписываемом какой-либо из процедур континуального интегрирования (см. [5], [6]). Интегралы вида (2), а также интегралы, полученные из них с помощью каких-нибудь естественных преобразований (напр., заменой переменных интегрирования, дополнительным интегрированием по «концам» ω_1 и ω_2 или другим параметрам, входящим в выражение (2), дифференцированием по этим параметрам и т. д.), и наз. обычно интегралом Фейнмана.

Представление (2) было введено Р. Фейнманом [1] в связи с предложенной им новой интерпретацией квантовой механики. Им рассмотрен случай, когда $\Omega=\mathbb{R}^n$, $n=1, 2, \ldots$, оператор H имеет вид $H=iL$, где L — дифференциальный оператор Штурма—Лиувилля $Lu=-a\Delta u+Vu$, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, V — нек-рая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$ (потенциал), $a>0$. При этом в представлении (2) для функции $G(x_1, x_2, t)$, $x_1, x_2\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, полагается $W=V$, а комплексная предмера $\mu_{x_1,x_2,t}$ (мера Фейнмана) задается на цилиндрич. множествах вида

$$\{x(\tau): x(0)=x_1,\ x(t)=x_2,\ x(\tau_i)\in G_i,\ i=1, 2, \ldots, k\},$$

где

$$0<\tau_1<\ldots<\tau_k<t,\ G_i\subset\mathbb{R}^n,\ i=1, 2, \ldots, k,\ k=1, 2, \ldots,$$

интегрированием по множеству $G_1\times\ldots\times G_k\subseteq(\mathbb{R}^n)^k$ (по обычной лебеговской мере в $(\mathbb{R}^n)^k$) плотности

$$\prod_{j=1}^{k+1}\left[(2\pi ia(\tau_j-\tau_{j-1})\right]^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{(\xi_j-\xi_{j-1})^2}{2ai(\tau_j-\tau_{j-1})}\right\},$$

где обозначено $\xi_0=x_1$, $\xi_{k+1}=x_2$, $\tau_0=0$, $\tau_{k+1}=t$. Выражение (2) рассматривалось Р. Фейманом как предел конечнократных интегралов, полученных заменой интеграла $\int_0^t W[\omega(t)]\,d\tau$ в подинтегральной экспоненте в (2) какой-либо его интегральной суммой. Однако строгого обоснования корректности такого определения интеграла, а также справедливости равенства (2) дано не было.

Позднее для случая оператора $H=L$, где L имеет вид (3), представление (2), в к-ром мера $\mu_{x_1,x_2,t}$ совпадает с *Винера мерой*, получено М. Кацем [2] с полной математич. строгостью. Поэтому представление (2) часто наз. формулой Фейнмана—Каца.

Ф. и. в качестве удобного и гибкого аналитич. средства используется в разных вопросах математич. физики ([3], [4], [6]), теории вероятностей [7] и в теории дифференциальных уравнений [5].

Лит.: [1] Feynman R., «Rev. Modern Phys.», 1948, v. 20, p. 367—87; [2] Кац М., в кн.: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berk.— Los Ang., 1951, p. 189—215; [3] Genibre J., Statistical mechanics and quantum field theory, N. Y., 1971; [4] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [5] Далецкий Ю. Л., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 83—124; [6] Albeverio S., Hφegh-Krohn R., Mathematical theory of Feynman path integrals, B.— [a. o.], 1976; [7] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975; [8] Голубева В. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 135—202.

Р. А. Минлос.

ФЕЙНМАНА МЕРА — комплексная *предмера*, определенная на цилиндрич. множествах в пространстве функций $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $T>0$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, $n=1, 2, \ldots$, формулой

$$\mu_{x,T}\{B^A_{\tau_1,\ldots,\tau_k,x}\}=\prod_{j=1}^{k}(2\pi ia(\tau_j-\tau_{j-1}))^{-n/2}\times$$

$$\times\int_A\prod_{j=1}^{k+1}\exp\left\{-\frac{1}{2ai}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{(\xi_j-\xi_{j-1})^2}{(\tau_j-\tau_{j-1})}\right\}\times$$

$$\times d\xi_1\ldots d\xi_{k+1}. \tag{1}$$

Здесь $a>0$ — параметр, $0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_k<T$, а

$$B^A_{\tau_1,\ldots,\tau_k,x}=\{x(t): x(0)=x=\xi_0,$$

$$\{x(\tau_1), \ldots, x(\tau_k), x(T)\}\in A\},\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad k=0, 1, \ldots,$$

где A — нек-рое борелевское подмножество пространства $(\mathbb{R}^n)^{(k+1)}$. Иногда рассматривается и т. н. условная мера Фейнмана $\mu_{x,y,T}$, получающаяся из меры (1) сужением ее на множество траекторий с «концом» в точке $y \in \mathbb{R}^n : x(T) = y$. Мера $\mu_{x,T}$, как и мера $\mu_{x,y,T}$, были введены в Р. Фейнманом в связи с представлением полугруппы $\exp\{itH\}$, где H — оператор Штурма — Лиувилля, в виде континуального интеграла — *Фейнмана интеграла*.

Лит.: [1] Feynman R., «Rev. Modern Phys.», 1948, v. 20, p. 367—87; [2] Далецкий Ю. Л., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 83—124, [3] Albeverio S., Hφegh-Krohn R., Mathematical theory of Feynman path integrals, B., 1976.

Р. А. Минлос.

ФЕЛЛЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС — однородный марковский процесс $X(t)$, $t \in T$, где T — аддитивная подполугруппа действительной оси $\mathbb{R}$ со значениями в топологич. пространстве E с топологией $\mathscr{C}$ и борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$, переходная функция $P(t, x, B)$, $t \in T$, $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$ к-рого обладает определенным свойством гладкости, а именно для непрерывной ограниченной функции f функция

$$x \longmapsto P^t f(x) = \int f(y)\, P(t, x, dy)$$

является непрерывной. Естественность такого требования на переходную функцию обусловлена тем, что переходные операторы P^t, $t \in T$, действующие на пространстве ограниченных борелевских функций, оставляют инвариантным пространство $C(E)$ непрерывных ограниченных функций, т. е. полугруппу $\mathscr{P} = \{P^t, t \in T\}$ переходных операторов можно считать действующей на $C(E)$. Впервые полугруппы такого типа рассматривались В. Феллером (W. Feller, 1952) (см. [1]).

Как правило, на топологич. пространство накладываются дополнительные требования: обычно $(E, \mathscr{C})$ — локально компактное метризуемое пространство. В этом случае Ф. п., удовлетворяющий условию стохастич. непрерывности, допускает модификацию, являющуюся стандартным марковским процессом (см. *Марковский процесс*, строго марковское свойство). Обратно, стандартный процесс является Ф. п. для естественной топологии $\mathscr{C}_0$; базу топологии $\mathscr{C}_0$ составляют такие множества $B \in \mathscr{B}$, что для момента $\theta(B)$ первого выхода из B почти наверное выполняется $\theta(B) > 0$, если процесс начинается в B (см. [1]).

Важный подкласс Ф. п. образуют сильно феллеровские процессы (с. ф. п.) [2]; в этом случае на переходную функцию накладываются более жесткие требования гладкости: функция $x \longmapsto P^t f(x)$ должна быть непрерывной для любой ограниченной борелевской функции f. Если, более того, функция $x \longmapsto P(t, x, \cdot)$ непрерывна по норме вариации в пространстве ограниченных мер, то марковский процесс, отвечающий такой переходной функции, наз. с. ф. п. в узком смысле. Если переходные функции P и Q отвечают с. ф. п., то их композиция $P \cdot Q$ отвечает с. ф. п. в узком смысле при обычных предположениях на $(E, \mathscr{C})$. Невырожденные *диффузионные процессы* являются с. ф. п. (см. [3]). Естественным обобщением с. ф. п. являются марковские процессы с непрерывной компонентой (см. [4]).

Если T — подмножество натуральных чисел, то Ф.п. $X(t)$, $t \in T$, наз. феллеровской цепью (ф.ц.) Примером ф.ц. может служить случайное блуждание на прямой $\mathbb{R}$: последовательность S_n, $n \in T = \{0, 1, \ldots\}$, где $S_{n+1} = S_n + Y_n$, $\{Y_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. При этом случайное блуждание $\{S_n\}$ является сильно феллеровской цепью тогда и только тогда, когда распределение случайной величины Y_1 имеет плотность.

Для Ф.п. имеется естественное обобщение классификации состояний цепи Маркова со счетным множеством состояний (см. *Маркова цепь*); состояния x и y из E сообщаются, если для любых окрестностей U_x точки x и V_y точки y существуют t, $s \in T$ такие, что $P(t, x, V_y) > 0$ и $P(s, y, U_x) > 0$ (цепи со счетным множеством состояний являются феллеровскими с дискретной топологией). Эргодические свойства и методы их исследования для Ф. п. имеют определенную специфику по сравнению с классич. *эргодической теорией*. Наиболее «правильное» поведение обнаруживается у неприводимых (топологически неразложимых) Ф.п.; это Ф. п., у к-рых все состояния сообщаются (см. [7]). При этом эргодич. свойства Ф.п. носят сравнительно слабый характер.

В качестве примера можно сравнить свойства типа возвратности для цепи Маркова с общим пространством состояний. Пусть для любого начального состояния $x \in E$ и множества A из системы $\mathscr{A}$ почти наверное выполняется $X(t) \in A$ для бесконечного множества значений времени t (t принимает натуральные значения). Если $\mathscr{A}$ есть система множеств вида $\mathscr{A} = \{A : \mu(A) > 0\}$, где μ — нек-рая мера, то получают свойство возвратности цепи в смысле Харриса (см. [8]), а если для Ф.п. в качестве $\mathscr{A}$ выбрать топологию $\mathscr{C}$ на E, то — свойство диффузности (см. [7]) (топологич. возвратности) для Ф.п. Случайное блуждание $\{S_n\}$, у к-рого Y_1 имеет конечное математич. ожидание $\mathsf{E}Y_1$ будет диффузной ф.ц. тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}Y_1 = 0$ и распределение Y_1 не является арифметическим, при этом цепь $\{S_n\}$ будет возвратной в смысле Харриса только в том случае, когда для нек-рого n распределение S_n имеет абсолютно непрерывную компоненту.

С формальной точки зрения теорию цепей Маркова с общим пространством состояний E можно свести к изучению ф.ц. с компактным пространством состояний $\hat{E}$ — расширением E, получаемым при помощи теоремы Гельфанда — Наймарка (см. *Банахова алгебра* и [9]). Такое расширение, однако, «слишком велико»; возможны и другие конструкции феллеровских расширений для цепей Маркова (см. [10]).

Теория Ф.п. и ф.ц. является также вероятностным обобщением *топологической динамики*, поскольку детерминированному (вырожденному) Ф п. $X(t)$, $t \in T$, отвечает динамич. система $\{S_t, t \in T\}$, где отображение $(t, x) \longmapsto S_t x$ из $T \times E$ в E непрерывно и $X(t) = S_t x$ (почти наверное).

Лит.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Гирсанов И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, № 3, с. 314—30; [3] Молчанов С. А., там же, 1968, т. 13, № 3, с. 493—98; [4] Tuominen P., Tweedie R., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1979, v. 38, p. 89—114, [5] Fogue l S., «Ann. Scuola norm. Super. Pisa», 1973, v. 27, № 1, p. 19—51; [6] Sine R., «Indiana Univ. Math. J.», 1976, v. 25, № 1, p. 23—43, [7] Смирнов С. Н., «Докл. АН СССР», 1982, т. 263, № 3, с. 554—58, [8] Revuz D., Markov chains, Amst.— Oxf.— N. Y., 1975; [9] Жданок А. И., в кн.: Топологич. пространства и их отображения, Рига, 1981, с. 18—33; [10] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, №3, с. 496—509.

С. Н. Смирнов.

ФЕРМА МАЛАЯ ТЕОРЕМА: при a, не делящемся на простое число p, имеет место сравнение $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Эта теорема была установлена П. Ферма (P. Fermat, 1640). Она показывает, что порядок каждого элемента *мультипликативной группы* классов вычетов по модулю p делит порядок этой группы. Ф.м.т. была обобщена Л. Эйлером (L. Euler) на случай произвольного модуля m. Именно, им было доказано, что для всякого числа a, взаимно простого с заданным числом $m > 1$, имеет место сравнение

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m,$$

где $\varphi(m)$ — *Эйлера функция*. Другим обобщением Ф.м.т. является равенство $x^q = x$, справедливое для всех элементов x конечного поля k_q, состоящего из q элементов.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981.

С. А. Степанов.

ФЕРМА ПРИНЦИП — вариационный принцип, позволяющий находить лучи, т. е. кривые, вдоль к-рых распространяется волновой процесс. Пусть $x=x(\sigma)$, $x=x_1, \ldots, x_m$, $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$, — уравнение кривой l, соединяющей точки M_0 и M_1, $c=c(x)>0$ — скорость распространения волн в точке x. Ф.п. утверждает, что $\delta \int ds/c = 0$ для луча, соединяющего M_0 и M_1. Здесь δ — символ вариации, $ds=\sqrt{\Sigma (dx_i)^2}$ — дифференциал дуги. Физич. смысл $\int_{M_0}^{M_1} ds/c$ — время движения из M_0 в M_1 вдоль l со скоростью $c(x)$. Из Ф.п. следуют классич. законы отражения, преломления, прямолинейность лучей при $c=\mathrm{const}$. Дифракционные лучи, лучи, распространяющиеся от краев экранов, лучи головных волн тоже можно найти, пользуясь Ф.п. Лучи, определяемые Ф.п., являются характеристиками *эйконала уравнения*. Интеграл $\int ds/c$ задает риманову метрику частного типа. Лучи — геодезические, соответствующие этой метрике. Ф.п. обобщается на случай скорости, зависящей от направления (анизотропная среда). Лучи в этом случае — геодезические нек-рой финслеровой метрики.

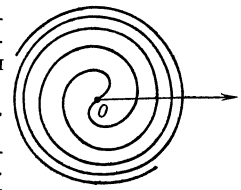
Ф. п. для задачи преломления света был впервые высказан П. Ферма (P. Fermat, ок. 1660).

Лит. см. при ст. *Лучевой метод.* *В. М. Бабич.*

ФЕРМА СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a\sqrt{\varphi}.$$

Каждому значению φ соответствуют два значения ρ — положительное и отрицательное. Ф. с. центрально симметрична относительно полюса, к-рый является точкой перегиба. Относится к так называемым алгебраическим спиралям (см. *Спирали*).



Ф. с. впервые рассмотрена П. Ферма (P. Fermat, 1636).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ФЕРМА ТЕОРЕМА, великая теорема Ферма, знаменитая теорема Ферма, большая теорема Ферма, последняя теорема Ферма,— утверждение, что для любого натурального числа $n>2$ уравнение $x^n+y^n=z^n$ (уравнение Ферма) не имеет решений в целых ненулевых числах x, y, z. Она была сформулирована П. Ферма (P. Fermat) примерно в 1630 на полях книги Диофанта «Арифметика» [1] следующим образом: «невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем». И далее добавил: «я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком малы». В бумагах П. Ферма нашли доказательство Ф. т. для $n=4$. Общее доказательство до сих пор (1984) не получено, несмотря на усилия многих математиков (как профессионалов, так и любителей). Нездоровый интерес к доказательству этой теоремы среди неспециалистов в области математики был в свое время вызван большой международной премией, аннулированной в конце 1-й мировой войны.

Предполагается, что доказательство Ф. т. вообще не существовало.

Для $n=3$ Ф. т. доказал Л. Эйлер (L. Euler, 1770), для $n=5$ — П. Дирихле (P. Dirichlet) и А. Лежандр (A. Legendre, 1825), для $n=7$ — Г. Ламе (G. Lamé, 1839) (см. [2]). Ф. т. достаточно доказать для любого простого показателя $n=p>2$, т. е. достаточно доказать, что уравнение

$$x^p+y^p=z^p \qquad (1)$$

не имеет решений в целых ненулевых взаимно простых числах x, y, z. Можно также считать, что числа x и y взаимно просты с p. При доказательстве Ф.т. рассматривают два случая: случай 1, когда $(xyz, p)=1$ и случай 2, когда $p \mid z$. Доказательство 2-го случая Ф.т. более сложно и обычно проводится методом бесконечного спуска. Существенный вклад в доказательство Ф.т. внес Э. Куммер (E. Kummer), к-рый создал принципиально новый метод, основанный на разработанной им арифметич. теории *кругового поля*. Используется тот факт, что в поле $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta=e^{2\pi i/p}$, левая часть уравнения (1) разлагается на линейные множители $x^p+y^p=\prod_{i=0}^{p-1}(x+y\zeta^i)$, к-рые являются p-ми степенями *идеальных чисел* поля $\mathbb{Q}(\zeta)$ в случае 1 и отличаются от p-х степеней на множитель $(1-\zeta)$, $i>0$ в случае 2. Если p делит числители *Бернулли чисел* B_{2n} $(n=1, 2, \ldots, (p-3)/2)$, то по критерию регулярности p не делит число h классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\zeta)$ и эти идеальные числа — главные. В этом случае Э. Куммер [3] доказал Ф.т. Не известно бесконечно или конечно число регулярных чисел p (по теореме Иенсена число иррегулярных простых чисел бесконечно [4]). Э. Куммер [5] доказал Ф.т. для нек-рых классов иррегулярных простых чисел и тем самым установил ее справедливость для всех $p<100$. В случае 1 он показал, что из (1) следует выполнимость сравнений

$$B_n\left[\frac{d^{p-n}}{dv^{p-n}}\ln(x+e^v y)\right]_{v=0} \equiv 0 \pmod p,$$
$$n=2, 4, \ldots, p-3,$$

справедливых при любой перестановке x, y, $-z$. Отсюда он получил, что если в случае 1 уравнение (1) разрешимо, то для $n=3, 5$

$$B_{p-n} \equiv 0 \pmod p. \qquad (2)$$

В случае 2 Э. Куммер доказал Ф.т. при следующих условиях: 1) $p \mid h_1$, $p^2 \nmid h_1$, где h_1 — первый множитель числа классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\zeta)$ (это равносильно требованию, что числитель только одного числа B_{2n}, где $2n=2, 4, \ldots, p-3$, делится на p); 2) $B_{2np} \not\equiv 0 \pmod{p^3}$; 3) найдется идеал, по модулю к-рого единица

$$E_n=\sum_{i=1}^{(p-3)/2} e_i^{g^{-2in}}$$

не сравнима с p-й степенью целого числа из $\mathbb{Q}(\zeta)$, где g — первообразный корень по модулю p, а

$$e_i=\left(\zeta^{g^{i+1}/2}-\zeta^{-g^{i+1}/2}\right)/\left(\zeta^{g^{i/2}}-\zeta^{-g^{i/2}}\right).$$

Метод Куммера получил широкое развитие во многих работах по Ф.т. (см. [6], [7]). Из (1) в случае 1 установлена выполнимость сравнений (2) для $n=7$, 9, 11, 13, 15, 17, 19. М. Краснер [8] при тех же условиях показал, что найдется такое число p_0, что при $p>p_0$ сравнение (2) верно для всех чисел $n=2k+1$, где $1 \leqslant k \leqslant \left[\sqrt[3]{\ln p}\right]$.

Х. Брюкнер [9] доказал, что число чисел B_n, $n=2, 4, \ldots, p-3$, числители к-рых делятся на p больше, чем $\sqrt{p}-2$. Пусть $p^k \mid h_1$, $p^{k+1} \nmid h_1$. П. Реморов [10] показал, что существуют такие постоянные N_k и M_k, $N_k<M_k$, что для всех $p<N_k$, $p>M_k$, случай 1 Ф.т. справедлив. М. Айхлер [11] установил, что случай 1 Ф.т. верен при $H \leqslant \left[\sqrt{p}\right]-1$, где H — индекс иррегулярности поля $\mathbb{Q}(\zeta)$, $p^H \| h$. Г. Вандивер [12] доказал случай 1 при $p \nmid h_2$, где h_2 — второй множитель числа классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\zeta)$. Интересные резуль-

таты по случаю 2 Ф. т. получены им в [13], [6]. Напр., он показал, что Ф. т. истинна при следующих условиях: 1) $(h_2,\ p)=1$, 2) $B_{np}\not\equiv 0 \pmod{p^3}$, $n=2,\ 4,\ \ldots,\ p-3$. Наиболее важной является теорема: пусть p — иррегулярное простое число, $2a_1,\ 2a_2,\ \ldots,\ 2a_s$ — индексы чисел Бернулли из $B_2,\ B_4, \ldots,\ B_{p-3}$, числители к-рых делятся на p; если ни одна из единиц $E_a\,(a=a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s)$ не сравнима с p-й степенью целого числа из $\mathbb{Q}(\zeta)$ по mod $\mathfrak{P}$, где $\mathfrak{P}$ — простой идеал, делитель простого числа $q<p^2-p$ и $q\equiv 1 \pmod{p}$, то Ф. т. верна. Отсюда Г. Вандивер [14] получил эффективно проверяемый критерий для иррегулярных простых чисел, с помощью к-рого на ЭВМ доказана Ф. т. для всех $p<125\,000$ (см. [15]).

Результаты по случаю 1 Ф. т. разнообразней. Еще в 1823 А. Лежандр публикует результат С. Жермен (S. Germen): если существует простое число q такое, что сравнение $\xi^p+\eta^p+\zeta^p\equiv 0 \pmod{q}$ не имеет целых решений $\xi,\ \eta,\ \zeta$, не делящихся на q, и p не является вычетом p-й степени по mod q, то справедлив случай 1 Ф. т. (см. [2]). Отсюда он показал, что если хотя бы одно из чисел $2kp+1$, $k\not\equiv 0 \pmod{3}$, $k\leqslant 8$, простое, то имеет место случай 1 Ф. т. Это предложение выведено для всех $k\leqslant 55$. А. Виферих [16] открыл следующий критерий: если $p\nmid q\,(2)$, где $q\,(m)=(m^{p-1}-1)/p$ — частное Ферма, то случай 1 Ф. т. верен. М. Мириманов [17] доказал это при $p\nmid q\,(3)$. В дальнейшем, рядом других авторов случай 1 Ф. т. был установлен для всех p, для к-рых $p\nmid q\,(m)$, где m — какое-нибудь простое число $\leqslant 43$. Отсюда следует 1-й случай Ф. т. для $p=a\pm b$, где $a,\ b,\in\mathbb{N}_n$ содержат в своих разложениях только простые числа $\leqslant 43$. Вычисления на ЭВМ показали [18], что среди чисел $p<6\cdot 10^9$ только два: $p=1093$ и $p=3511$ удовлетворяют условию $p\mid q\,(2)$, но для них $p\nmid q\,(3)$. Это доказывает случай 1 Ф. т. для всех $p<6\cdot 10^9$. Ф. Фуртвенглер [19] на основе закона взаимности Эйзенштейна довольно просто повторил результаты А. Вифериха и М. Мириманова. Он доказал также, что если $x,\ y,\ z$ решение уравнения (1) и $(x,\ y)=1$, то $p\mid q\,(r)$, где $r\mid x$, но $p\nmid x$, или $r\mid y$, но $p\nmid y$, или $r\mid(x\pm y)$, но $p\nmid(x^2-y^2)$.

Известно много других различных критериев для случая 1 Ф. т., к-рые связаны с разрешимостью определенных сравнений или с существованием простых чисел определенного вида, но неизвестно (1984), бесконечно ли число простых чисел p, для к-рых случай 1 Ф. т. справедлив. Следует отметить, что уравнение $x^{2p}+y^{2p}=z^{2p}$ неверно, если $2p$ не делит ни x, ни y (см. [20]). Контрпример к Ф. т. практически привести невозможно. К. Инкери [21] показал, что если целые числа $x,\ y,\ z,\ 0<x<y<z$ удовлетворяют уравнению (1), то $x>\frac{1}{2}p^{3p-4}$, а в случае 1: $x>\left(\frac{2p^3+p}{\ln^3 p}\right)^p$.

Ф. т. может быть сформулирована так: для любого натурального числа $n>2$ на кривой Ферма $x^n+y^n=1$ нет рациональных точек, кроме тривиальных $(0,\ \pm 1)$, $(\pm 1,\ 0)$. Рациональные точки на кривой Ферма исследуются методами алгебраич. геометрии. Этими методами доказано (1983), что число рациональных точек на кривой Ферма во всяком случае конечно, что следует из *Морделла гипотезы*, доказанной Г. Фалтингсом [23].

Уравнение Ферма рассматривается в алгебраич. числах, целых функциях, матрицах и т. д. Имеются обобщения Ф. т. для уравнений вида $x^n+y^n=Dz^n$.

Лит.: [1] Диофант Александрийский, Арифметика и книга о многоугольных числах, пер. с др.-греч., М., 1974; [2] Эдвардс Г., Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1980; [3] Kummer E., «J. reine und angew. Math», 1850, Bd 40, S. 93—138; [4] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [5] Kummer E., «Abh. Akad. Wiss. Berlin, Math. Kl.», 1857, S. 41—74; [6] Vandiver H., «Amer. Math. Monthly», 1946, v. 53, p. 555—78; [7] Ribenboim P., 13 lectures on Fermat's last theorem, N. Y.— [a. o.], 1979, [8] Krasner M., «C. r. Acad. sci.», 1934, t. 199, p. 256—258; [9] Brückner H., «J. reine und ang. Math.», 1972, Bd 253, S. 15—18, [10] Веморов П. Н., «Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук», в. 23, 1952, т. 144, с. 26—34; [11] Eichler M., «Acta Arithm.», 1965, v. 11, p. 129—31; [12] Vandiver H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 40, p. 118—26; [13] его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1929, v. 31, p. 613—42; [14] его же, «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1954, v. 40, p. 732—35; [15] Wagstaff S., «Math. Comput.», 1978, v. 32, p. 583—91; [16] Wieferich A., «J. reine und angew. Math.», 1909, Bd 136, S. 293—302; [17] Mirimanoff D., «J. reine und angew. Math.», 1911, Bd 139, S. 309—24; [18] Lehmer D. H., «Math. Comput.», 1981, v. 36, p. 289—90; [19] Furtwängler P., «Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien. Math.-naturwiss. Kl.» IIa, 1912, Bd 121, S. 589—92; [20] Terjanian G., «C.r. Acad. sci.», 1977, A 285—B 285, № 16, p. 973 A—975 A; [21] Inkeri K., «Ann. Univ. Turku», Ser. A., 1953, № 1, p. 3—9; [22] Постников М. М., Введение в теорию алгебраических чисел, М., 1982; [23] Faltings G., «Invent. math.», 1983, Bd 73, S. 349—66.

А. В. Толстиков.

ФЕРМА ТЕОРЕМА — необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции. Пусть действительная функция f определена в окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}$ и дифференцируема в этой точке. Тогда, если функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум, то ее производная в x_0 равна нулю: $f'(x_0)=0$. Геометрически это означает, что касательная к графику функции f в точке $(x_0,\ f(x_0))$ горизонтальна. Впервые равносильное условие для экстремумов многочленов было получено П. Ферма (P. Fermat) в 1629, но опубликовано лишь в 1679.

Л. Д. Кудрявцев.

ФЕРМИ КООРДИНАТЫ — координаты, в к-рых компоненты метрич. тензора риманова пространства, вычисленные в точках нек-рой кривой, совпадают с компонентами метрич. тензора евклидова пространства в декартовых координатах. Понятие Ф. к. обобщается на случай псевдоримановых пространств, для к-рых их и ввел впервые Э. Ферми (E. Fermi, 1922). Он показал, что в окрестности достаточно малого отрезка достаточно регулярной времениподобной кривой на достаточно регулярном псевдоримановом многообразии лоренцевой сигнатуры действительно существуют Ф. к.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Д. Д. Соколов.

ФЕРМИ — ДИРАКА СТАТИСТИКА, статистика Ферми,— квантовая статистика, применимая к системам тождественных частиц с полуцелым спином ($^1/_2,\ ^3/_2,\ ^5/_2,\ \ldots$ в единицах $\hbar=1{,}05\cdot 10^{-27}$ эрг·сек). Предложена Э. Ферми (E. Fermi, 1926), ее квантовомеханич. смысл выяснен П. Дираком (P. Dirac, 1926). Согласно Ф.— Д. с. в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы (принцип Паули). Для системы частиц, подчиняющихся Ф.— Д. с., квантовомеханич. состояния описываются волновыми функциями, антисимметричными относительно перестановок частиц (т. е. их координат и спинов), а для *Бозе — Эйнштейна статистики* она симметрична.

Квантовое состояние идеального газа определяется заданием совокупности чисел заполнения уровней системы в пространстве импульсов p и спинов σ $\{n_{p\sigma}\}$, где каждое $n_{p\sigma}$ указывает число частиц с импульсом p и спином σ. В случае Ф.— Д. с. $n_{p\sigma}$ может быть равным нулю или единице.

Газ является системой из очень большого числа частиц, поэтому его квантовые уровни расположены очень плотно и стремятся к непрерывному спектру при стремлении объема к бесконечности. Уровни энергии удобно сгруппировать по малым ячейкам, содержащим G_i уровней в ячейке. Каждой ячейке соответствует средняя энергия ε_i, а число G_i предполагается очень большим. Квантовомеханич. состояние системы определяется набором $\{N_i\}$, где N_i — число частиц в ячейке, т. е. сумма $n_{p\sigma}$ по уровням ячейки. Число различных распределений частиц по ячейкам (т. е. ста-

тистич. вес состояния идеального газа Ферми — Дирака) равно

$$W\{N_i\}=\prod_i \frac{G_i!}{N_i!\,(G_i-N_i)!} \qquad (1)$$

и определяет вероятность распределения частиц по ячейкам, к-рые характеризуются числами заполнения N_1, N_2, ... Статистич. вес вычислен с помощью комбинаторного анализа с учетом неразличимости частиц и того, что в каждом состоянии не может быть более одной частицы.

Наиболее вероятное распределение частиц по квантовым состояниям, соответствующее заданной энергии E и числу частиц N

$$E=\sum_i \varepsilon_i N_i, \quad N=\sum_i N_i, \qquad (2)$$

находится из экстремума статистич. веса (1) при дополнительных условиях (2). Соответствующие средние числа заполнения равны

$$\bar{n}_i=\frac{\bar{N}_i}{G_i}=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}, \qquad (3)$$

где μ — химич. потенциал, $\beta=1/kT$, k — постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k=1{,}38\cdot10^{-16}$ *эрг/град*), T — абсолютная температура. Величины β и μ находятся из условий (2).

Энтропия идеального газа Ферми определяется логарифмом статистич. веса (1) для наиболее вероятного распределения (3)

$$S=k\ln W\{\bar{n}_i\}=-k\sum_i G_i\{\bar{n}_i\ln n_i+(1-\bar{n}_i)\ln(1-\bar{n}_i)\},$$

где суммирование ведется по всем ячейкам. С помощью энтропии можно вычислить свободную энергию и другие термодинамич. функции.

В случае неидеального газа Ферми вычисление термодинамич. функций является сложной проблемой и не сводится к простой задаче комбинаторного анализа. Их вычисление основано на методе Гиббса с учетом Ф.— Д. с. Если известен оператор Гамильтона H системы, то свободная энергия равна

$$F=-kT\ln \mathrm{Sp}\exp\left\{-\frac{H}{kT}\right\},$$

где операция шпура берется по состояниям, удовлетворяющим требованиям Ф.— Д. с., т. е. по антисимметрическим волновым функциям. Этого можно достигнуть, если для H использовать представление, в к-ром его действие определено в пространстве волновых функций и чисел заполнения, т. е. перейти к представлению вторичного квантования.

Лит. см. при ст. *Бозе — Эйнштейна статистика.*

Д. Н. Зубарев.

ФЕРРАРИ МЕТОД — метод сведения решения уравнения 4-й степени к решению одного кубического и двух квадратных уравнений; найден Л. Феррари (L. Ferrari, опубл. 1545).

Ф. м. для уравнения

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$$

состоит в следующем. При помощи подстановки $y=x-\frac{a}{4}$ данное уравнение приводится к уравнению

$$x^4+px^2+qx+r=0, \qquad (1)$$

не содержащему члена с x^3. Вводя вспомогательный параметр α, левую часть уравнения (1) можно преобразовать по формуле

$$x^4+px^2+qx+r=$$
$$=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-qx+\left(\alpha^2+p\alpha+\frac{p^2}{4}-r\right)\right]. \qquad (2)$$

Затем подбирается значение α так, чтобы выражение в квадратных скобках было полным квадратом. Для этого нужно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена был равен нулю. Это дает для α *кубическое уравнение*

$$q^2-4\cdot2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha+\frac{p^2}{4}-r\right)=0.$$

Пусть α_0 — один из корней этого уравнения. При $\alpha=\alpha_0$ многочлен в квадратных скобках в (2) имеет один двукратный корень

$$x_0=\frac{q}{4\alpha_0},$$

что приводит к уравнению

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0(x-x_0)^2=0.$$

Это уравнение 4-й степени распадается на два квадратных уравнения. Корни этих уравнений и служат корнями уравнения (1).

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.

И. В. Проскуряков.

ФИБОНАЧЧИ МЕТОД — разновидность одномерного поиска экстремума функции путем последовательного сужения интервала неопределенности. Единственное ограничение, налагаемое на исследуемую функцию

$$f(x)\,(x\in(a_0,\ b_0)\subset\mathbb{R}^1),$$

— требование строгой унимодальности на заданном интервале.

При последовательном сужении значения $f(x)$ вычисляются (или замеряются) в заранее ограниченном числе n пробных точек. В результате получается последовательность сужающихся интервалов неопределенности, содержащих искомый экстремум:

$$(a_0,\ b_0)\supset(a_1,\ b_1)\supset\ldots\supset(a_n,\ b_n).$$

Чтобы сузить интервал неопределенности для произвольной строго унимодальной функции, нужно знать не менее двух ее пробных значений. В Ф.м. внутри каждого текущего интервала неопределенности $(a_i,\ b_i)$ подбираются ровно две пробные точки симметрично от середины интервала. Далее, от одной из пробных точек отбрасывается конец интервала с наихудшими значениями $f(x)$. Получается $(a_{i+1},\ b_{i+1})$, где в дополнение к оставшейся старой пробной точке симметрично строится новая. Отсюда для длин интервалов

$$\Delta_i=b_i-a_i$$

следует рекуррентное уравнение

$$\Delta_i=\Delta_{i+1}+\Delta_{i+2}.$$

(Помимо прочего выше предполагалось, что выполнено условие перекрывания $\Delta_1<{}^2/_3\cdot\Delta_0$.)

Решение уравнения при условии $\Delta_{n+1}=\Delta_{n+2}$ дает

$$\Delta_i=\frac{F_{n+3-i}}{F_{n+2}}\Delta_0,\quad i=2,\ \ldots,\ n,$$

где $F_{(\cdot)}$ — *Фибоначчи числа*.

Точка экстремума $x_{\mathrm{opt}}\approx(a_n+b_n)/2$.

В простейшем варианте Ф. м. (когда предполагается, что пробные точки и пробные значения $f(x)$ определяются абсолютно точно), чтобы сузить исходный интервал неопределенности с Δ до ε, надо взять число n пробных точек из неравенства $2\Delta/\varepsilon\leqslant F_{n+2}$. С учетом поправок на точность определения значений функции вышеприведенная оценка несколько усложняется.

Существует предел

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618033989\ldots$$

Это дает основание ввести метод золотого сечения — такой вариант Ф.м., где $\forall i\ \Delta_{i+1}=\tau\Delta_i$, т. е. пробные точки осуществляют золотое сечение текущего интервала. Преимущество последнего метода заключается в том, что число пробных точек заранее не планируется.

Разработаны модификации Ф. м. для нефинитных функций, для сокращения вычислений при равенстве $f(x)$ в двух пробных точках, для повышения устойчивости счета и др.

Ф. м. значительно превосходит по эффективности дихотомию (см. *Половинного деления метод*). Однако для оптимизации дифференцируемых функций Ф. м. малоцелесообразен (см. *Спуска метод*, *Максимизация и минимизация функций*).

Лит.: [1] Kiefer J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 4, p. 502—06; [2] Уайлд Д.-Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967, [3] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко.

ФИБОНАЧЧИ ЧИСЛА — элементы последовательности $u_1, u_2, \ldots$, задаваемой начальными значениями $u_1=u_2=1$ и рекуррентным соотношением $u_{n+1}=u_{n-1}+u_n$. Первые 14 Ф.ч. были впервые в 1228 приведены в рукописи Леонарда Пизанского (Фибоначчи, Fibonacci).

Действия, выполняемые над индексами Ф. ч., могут быть сведены к действиям над самими Ф. ч. В основе этого лежит «формула сложения»:

$$u_{m+n}=u_{m-1}u_n+u_mu_{n+1}.$$

Ее непосредственными следствиями являются:

$$u_{2n}=u_n(u_{n-1}+u_{n+1}),\ u_{3n}=u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3$$

и т. д. Общая «формула умножения» более сложна:

$$u_{mn}=\sum_{k=1}^{m}C_m^k u_k^k u_n^k u_{n-1}^{m-k}.$$

Элементарные свойства делимости Ф.ч. в основном определяются следующими фактами: $u_{(m,\,n)}=(u_m,\ u_n)$; если p — простое вида $5t+1$, то на p делится u_{p-1}, а если вида $5t+2$, то u_{p+1}; если u_n делится на простое q и $p\neq q$, то u_{np}/u_n не делится на q; если u_n делится на простое $p\neq 2$, то u_{np}/u_n делится на p, но не делится на p^2; если u_n делится на 4, то u_{2n}/u_n делится на 2, но не делится на 4; если u_n делится на 2, но не делится на 4, то u_{2n}/u_n делится на 4, но не делится на 8. Вместе с тем нек-рые связанные с Ф.ч. теоретико-числовые проблемы весьма трудны. Напр., не решен (1984) вопрос о конечности множества простых Ф.ч.

Важную роль в теории Ф.ч. играет число $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, являющееся корнем уравнения $x^2-x-1=0$. Так, имеет место формула Бине:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-(-\alpha)^{-n});$$

из нее следует, что u_n есть ближайшее к $\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n$ целое число, и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha.$$

Ф. ч. занимают особое положение в теории непрерывных дробей. В разложении дроби u_{n+1}/u_n в непрерывную все неполные частные суть единицы и их число не меньше, чем число неполных частных разложения любой другой дроби со знаменателем, меньшим u_{n+1}. В известном смысле число α описывается своими подходящими дробями u_{n+1}/u_n «наихудшим» образом.

Лит.: [1] Boncompagni B. (ed.), Illiber Abbaci di Leonardo Pisano..., Roma, 1857, [2] Воробьев Н. Н., Числа Фибоначчи, 5 изд., М., 1984; [3] Hoggatt W., Fibonacci and Lucas numbers, Boston, 1969; [4] Alfred U., An introduction to Fibonacci discovery, San Jose (Calif.), 1965, «Fibonacci Quart.», 1963—.

Н. Н. Воробьев.

ФИГУР МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, образующими элементами к-рых являются различные фигуры рассматриваемого однородного пространства. С аналитич. точки зрения наиболее простыми фигурами являются алгебраич. линии и поверхности. Поэтому в основном исследовались многообразия (как правило, в евклидовом, аффинном и в проективном пространствах), образующими элементами к-рых являются точки, прямые линии, плоскости, окружности, сферы, коники, квадрики и их многомерные аналоги.

m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ фигур F ранга N определяется замкнутой системой дифференциальных уравнений

$$\Omega^a=\lambda_i^a\Omega^i,\ \Delta\lambda_i^a\wedge\Omega^i=0,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ m;$$
$$a,\ b=m+1,\ \ldots,\ N, \qquad (1)$$

где Ω^J $(J=1,\ \ldots,\ N)$ — левые части уравнений стационарности фигуры F и $\Delta\lambda_i^a$ — формы Пфаффа, возникающие при замыкании пфаффовых уравнений системы (1), причем $\Omega^1\wedge\Omega^2\wedge\ldots\wedge\Omega^m\neq 0$. Осуществляя последовательные продолжения системы (1), получают последовательность фундаментальных объектов многообразия $\mathfrak{M}_m$, выделяют из нее основной объект многообразия и осуществляют инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразия.

Дифференциальная геометрия линейчатых многообразий разработана достаточно глубоко. Простейшими многообразиями с нелинейными образующими элементами являются многообразия коник. Со всяким одномерным многообразием C_1^2 коник в трехмерном пространстве (евклидовом, аффинном или проективном) ассоциируется торс T, являющийся огибающей поверхностью плоскостей коник. Многообразие C_1^2 наз. фокальным или нефокальным в зависимости от того, касается коники образующая торса T или нет. Двумерное многообразие (конгруэнция) коник в трехмерном пространстве имеет в общем случае шесть фокальных поверхностей и шесть фокальных семейств. Все коники конгруэнции касаются этих поверхностей. Конгруэнции коник с неопределенными фокальными семействами (всякие две смежные коники к-рой пересекаются с точностью до 2-го порядка малости) характеризуются принадлежностью всех коник конгруэнции одной квадрике. Конгруэнции коник, плоскости к-рых образуют однопараметрич. семейство, имеют одно счетверенное фокальное семейство, к-рому соответствуют четыре фокальные точки пересечения двух смежных коник, принадлежащих одной плоскости. Две другие фокальные точки являются точками пересечения коники с характеристикой ее плоскости.

Конгруэнция K_2 квадрик в P_3 имеет в общем случае восемь фокальных поверхностей, к-рых касаются все квадрики конгруэнции. Точка квадрики $F=0$ конгруэнции K_2, определяемая вдоль любого направления системой уравнений $F=0$, $dF=0$, . . ., $d^mF=0$, наз. ее фокальной точкой порядка m. Фокальная точка 2-го порядка является четырехкратной точкой 1-го порядка; фокальная точка 3-го порядка является фокальной точкой любого порядка $m>3$. На каждой конике C трехмерного многообразия (комплекса) коник существуют в общем случае шесть инвариантных точек (t-фокальные точки коники). Для каждой коники C комплекса, плоскости к-рого образуют двупараметрич. семейство, однозначно определяется коника C^*, проходящая через характеристич. точку плоскости коники C и четыре точки пересечения коники со смежной коникой той же плоскости. Геометрич. свойства многопараметрич. семейств коник существенно зависят от числа параметров, характеризующих плоскости коник таких семейств.

Непосредственным обобщением **коники** в P_3 является квадратичный элемент — $(n-2)$-мерная невырожденная квадрика в P_n $(n>3)$. Многообразием $(h, m, n)^2$ в пространстве P_n наз. m-параметрич. семейство квадратичных элементов, гиперплоскости к-рых образуют h-параметрич. семейство. Многообразия $(h, h, 3)^2$, $h=1, 2, 3$, являются наиболее общими однопараметрич. семействами, конгруэнциями и комплексами коник в P_3. С каждым локальным квадратичным элементом многообразия $(h, h, n)^2$ при $h<n$ ассоциируется $(n-h-1)$-мерное характеристич. подпространство и $(h-1)$-мерное полярное подпространство. Рангом многообразия $(h, h, n)^2$ наз. число R, равное $n-h-1-\nu$, где ν — размерность подпространства, по к-рому характеристич. подпространство пересекается с его полярным пространством.

Дифференциальную геометрию многообразия $(n, n, n)^2$ можно рассматривать как геометрию нек-рой регулярной гиперповерхности $(n+1)$-мерного тангенциального центропроективного пространства P_0^{n+1}, в к-ром исходное n-мерное пространство играет роль неподвижной точки.

Квадрика размерности $p\leqslant n-2$ пространства P_n всегда лежит в $(p+1)$-мерном подпространстве. Алгебраич. поверхности порядка $k>2$ этим свойством в общем случае не обладают. При исследовании многообразий алгебраич. поверхностей оказалось целесообразным выделить семейства поверхностей таких, к-рые лежат в плоскостях на единицу большей размерности. Невырожденная $(n-2)$-мерная алгебраич. поверхность порядка k, принадлежащая гиперплоскости P_{n-1} пространства P_n, наз. плоским алгебраич. элементом порядка k. Многообразием $(h, m, n)^k$ наз. m-мерное многообразие плоских алгебраич. элементов порядка k, гиперплоскости к-рых образуют h-параметрич. семейство. Фундаментальный объект 1-го порядка является основным объектом многообразия $(h, m, n)^k$.

В применениях геометрии к гидромеханике, теории поля и дифференциальным уравнениям используются многообразия линий и поверхностей, не являющихся в общем случае алгебраическими. Изучение таких многообразий представляет и самостоятельный интерес для геометрии. Криволинейной конгруэнцией в трехмерном пространстве наз. двупараметрич. семейство Γ_t кривых $x=x(t, u, v)$ такое, что через каждую точку пространства проходит в общем случае единственная кривая семейства. При фиксированных u и v выделяется кривая C_t семейства Γ_t; при фиксированном t и переменных u, v выделяется поверхность s_{uv}, называемая трансверсальной поверхностью конгруэнции Γ_t. Точки кривой C_t, в к-рых $(xx_tx_ux_v)=0$, наз. фокальными точками. Совокупность фокальных точек кривых C_t конгруэнции Γ_t образует фокальную поверхность конгруэнции. Поверхность $v=v(u)$ конгруэнции Γ_t, на к-рой кривые C_t имеют огибающую, наз. главной поверхностью конгруэнции Γ_t.

Лит.: [1] Малаховский В. С., в кн.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, т. 12, М., 1981, с. 31—60.

В. С. Малаховский.

ФИГУРА — подмножество F однородного пространства E_n с фундаментальной группой G, к-рое можно включить в систему $R(F)$ подмножеств этого пространства, изоморфную нек-рому пространству геометрич. объекта Ф (см. *Геометрических объектов теория*). Множество $R(F)$ наз. пространством фигуры F. Компоненты геометрич. объекта Ф наз. координатами соответствующей Ф. F. Каждой Ф. F пространства E_n соответствует класс $\{\Phi\}$ подобных геометрич. объектов. Ранг, жанр, характеристика и тип геометрич. объекта Ф класса $\{\Phi\}$ наз. рангом, жанром, характеристикой и типом фигуры F (т. н. арифметические инварианты фигуры). Напр., окружность в трехмерном евклидовом пространстве является фигурой ранга 6, жанра 1, характеристики 1, типа 1; точка в трехмерном проективном пространстве — фигурой ранга 3, жанра 0, характеристики 2, типа 1. Вполне интегрируемая система уравнений Пфаффа, определяющая геометрический объект Ф, наз.. системой уравнений стационарности фигуры F.

Пусть F и $\overline{F}$ — две Ф. пространства E_n. Если существует отображение пространства $R(F)$ на пространство $R(\overline{F})$, при к-ром любой геометрич. объект, соответствующий Ф. $\overline{F}$, охватывается любым геометрич. объектом, соответствующим Ф. F, то говорят, что Ф. F охватывает или индуцирует Ф. $\overline{F}$ (Ф. $\overline{F}$ охватывается или индуцируется Ф. F). Ф. F ранга N наз. простой, если она не охватывает никакой другой Ф. меньшего ранга. Ф. F наз. индуцирующей фигурой индекса $\overline{N}<N$, если существует охватываемая ею Ф. ранга $\overline{N}$, причем ранг N' любой другой Ф. F', охватываемой Ф. F, не превосходит $\overline{N}$. Напр., точка, p-мерная плоскость, гиперквадрика в n-мерном проективном пространстве являются простыми Ф., а гиперквадрика в n-мерном аффинном пространстве и d-мерная $(d\leqslant n-2)$ квадрика в n-мерном проективном пространстве являются индуцирующими Ф. соответственно индексов n и $(d+2)$ $(n-d-1)$.

Парой фигур $F=(F_1, F_2)$ наз. упорядоченная совокупность двух Ф. Коэффициентом инцидентности пары Ф. наз. число $k=N_1+N_2-N$, где N_i $(i=1,2)$ ранг фигуры F_i, а N — ранг системы форм Ω^{J_i}, Ω^{J_2}, $J_i=1, 2, \ldots, N_i$, являющихся левыми частями уравнений стационарности Ф. F_1 и F_2. Если $k=0$, то пара $F=(F_1, F_2)$ наз. неинцидентной.

Лит.: [1] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—383; [2] Малаховский В. С., «Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР», 1969, т. 2, с. 179—206; [3] его же, в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 113—58.

В. С. Малаховский.

ФИГУРНОЕ ЧИСЛО — см. *Арифметический ряд.*

ФИДУЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение P_x^* параметра θ семейства распределений $\mathcal{P}=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ наблюдения x. Введено Р. Фишером [1] для числовых θ и x в случае, когда функция распределения $F(x\mid\theta)$ наблюдения x убывает с ростом θ так, что $F^*(\theta\mid x)=1-F(x\mid\theta)$, рассматриваемая как функция от θ при фиксированном x, обладает свойствами функции распределения (к такой ситуации часто приводит использование в качестве x достаточной статистики).

Ф. р. определено для инвариантных семейств распределений (см. [2]—[4]). Именно, пусть группа G преобразований g действует на множествах X и Θ. Семейство распределений наз. инвариантным, если gx имеет распределение $P_{g\theta}$, когда x имеет распределение P_θ. В этом случае рассматривают эквивариантные решающие правила $\delta\colon X\longrightarrow D$ (такие, что $\delta(gx)=g\delta(x)$ для всех x и g) и инвариантные функции потерь $L_\theta(d)$ (такие, что $L_{g\theta}(gd)=L_\theta(d)$ для всех θ, d и g). Если действие группы G на множестве Θ транзитивно, то семейство $\mathcal{P}$ обладает определенным свойством однородности: для фиксированного значения параметра θ_0 и наблюдения x, имеющего распределение P_{θ_0}, распределение gx пробегает все семейство $\mathcal{P}$, когда g пробегает G. Пусть D — множество вероятностных мер на Θ (предполагаются заданными нек-рые σ-алгебры $\mathcal{B}(\Theta)$ и $\mathcal{B}(X)$, так что преобразования группы G измеримы). Пусть действие G на D задано соотноше-

нием $(g\alpha)(B)=\alpha(g^{-1}(B))$, $B\in\mathcal{B}(\Theta)$. Ф. р. описывается семейством $\mathcal{P}^*=\{P_x^*,\ x\in X\}$ вероятностных мер на Θ, минимизирующее риск $\int L_\theta(\delta(x))\,dP_\theta(x)$ в классе эквивариантных решающих правил для каждой инвариантной функции потерь, удовлетворяющей условию типа несмещенности

$$\int L_\theta(\alpha)\,d\beta(\theta)\geqslant\int L_\theta(\beta)\,d\beta(\theta).$$

Если G действует на X транзитивно, то семейство Ф. р. однозначно выделяется требованиями инвариантности $\mathcal{P}^*=\{P_x^*:\ x\in X\}$ и совпадения доверительных и фидуциальных вероятностей $P_\theta\{\theta\in S(x)\}=P_x^*\{\theta\in S(x)\}$ для инвариантных семейств $S(x)$ (инвариантность $S(x)$ означает, что из $\theta\in S(x)$, $g\in G$ следует $g\theta\in S(gx)$).

Лит.: [1] Fisher R. A., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1930, v. 26, p. 528—35; [2] Fraser D. A. S., «Biometrika», 1961, v. 48, p. 261—80; [3] Климов Г. П., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 4, 763—65; [4] его же, Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

А. Д. Кузьмин.

ФИЛЬТР, дуальный идеал,— непустое подмножество F частично упорядоченного множества P, удовлетворяющее условиям: а) если $a,\ b\in F$ и нижняя грань $\inf\{a,\ b\}$ существует, то $\inf\{a,\ b\}\in F$; б) если $a\in F$ и $a\leqslant b$, то $b\in F$. Понятие Ф. является двойственным к понятию *идеала* частично упорядоченного множества.

Фильтром над непустым множеством E (или в множестве E) наз. собственный Ф. частично упорядоченного (относительно включения) множества подмножеств множества E, т. е. любая непустая совокупность F подмножеств множества E, удовлетворяющая условиям: если $A,\ B\in F$, то $A\cap B\in F$; если $A\in F$ и $A\subseteq B$, то $B\in F$; пустое подмножество не принадлежит F.

Базой фильтра наз. система подмножеств множества E, удовлетворяющая двум условиям: 1) пустое множество ей не принадлежит; 2) пересечение двух принадлежащих ей подмножеств содержит нек-рое третье принадлежащее ей подмножество. Каждый Ф. полностью определяется любой из своих баз. Система всех подмножеств множества E, каждое из к-рых содержит какой-нибудь элемент базы Ф., есть Ф. Он наз. натянутым на эту базу.

Множество всех Ф. над данным множеством частично упорядочено по включению. Максимальный элемент его наз. ультрафильтром (ультрафильтром наз. также максимальный собственный Ф. в любой булевой алгебре).

Примеры Ф. 1) Пусть N_k — подмножество натуральных чисел, кратных натуральному числу k; система $\{N_k:\ k=1,\ 2,\ \ldots\}$ есть база Ф.; натянутый на эту базу Ф. состоит из подмножеств, каждое из к-рых содержит нек-рое подмножество N_k. 2) Совокупность всех подмножеств, содержащих любое непустое фиксированное подмножество $A\in E$, является Ф. над E, называемым главным фильтром. Все Ф. над конечными множествами — главные. 3) Если E — бесконечное множество мощности α и F — совокупность всех подмножеств множества E, дополнения к-рых имеют мощность меньше α, то F является Ф. (он наз. фильтром Фреше). Фильтр Фреше — пример неглавного Ф. 4) Система подмножеств, содержащих нек-рую фиксированную точку множества, тоже есть Ф., более того, это — ультрафильтр. 5) Пусть на множестве E задана топология, тогда окрестности любой точки $x\in E$ образуют Ф.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.

В. И. Малыхин, Т. С. Фофанова.

ФИЛЬТРОВАННАЯ АЛГЕБРА—алгебра S, в к-рой выделены подпространства S_α, индексированные элементами линейно упорядоченной группы A (чаще всего A—аддитивная группа целых чисел $\mathbb{Z}$), таким образом, что $S_\alpha\subseteq S_\beta$ при $\alpha<\beta$ и $S_\alpha S_\beta\subseteq S_{\alpha+\beta}$ (возрастающая фильтрация). Иногда рассматривают случай, когда $S_\alpha\supseteq S_\beta$ при $\alpha<\beta$ (убывающая фильтрация), но он сводится к предыдущему путем обращения порядка в группе A. С каждой Ф. а. S ассоциируется *градуированная алгебра*

$$\operatorname{gr}S=\bigoplus_\alpha\overline{S}_\alpha,$$

где $\overline{S}_\alpha=S_\alpha/\sum_{\beta<\alpha}S_\beta$ (если $A=\mathbb{Z}$, то $\overline{S}_\alpha=S_\alpha/S_{\alpha-1}$), а произведение элементов $\bar{x}\in\overline{S}_\alpha$ и $\bar{y}\in\overline{S}_\beta$ определяется по формуле $\bar{x}\bar{y}=\overline{xy}$, где $x,\ y$—представители смежных классов $\bar{x},\ \bar{y}$, а $\overline{xy}$—смежный класс по $\sum_{\gamma<\alpha+\beta}S_\gamma$, порожденный элементом $xy\in S_{\alpha+\beta}$. Если в алгебре S выполняется какое-либо полилинейное тождество (напр., коммутативность, ассоциативность или тождество Якоби), то в алгебре $\operatorname{gr}S$ также выполняется это тождество.

Примеры. 1) Пусть S — *Клиффорда алгебра* и $S_n,\ n\in\mathbb{Z}$,— совокупность элементов, представимых в виде (некоммутативных) многочленов степени $\leqslant n$ от образующих. Получается возрастающая $\mathbb{Z}$-фильтрация алгебры S, в к-рой $S_n=0$ при $n<0$. Ассоциированной градуированной алгеброй будет *внешняя алгебра* с тем же числом образующих.

2) В *универсальной обертывающей алгебре* алгебры Ли так же, как в предыдущем примере, определяется возрастающая $\mathbb{Z}$-фильтрация. Согласно *Биркгофа — Витта теореме*, ассоциированная градуированная алгебра есть алгебра многочленов. *Э. Б. Винберг.*

ФИЛЬТРОВАННЫЙ МОДУЛЬ—модуль M, снабженный возрастающей или убывающей фильтрацией, т. е. возрастающим или убывающим семейством подмодулей $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Фильтрация наз. исчерпывающей, если $M=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}M_n$, и отделимой, если $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}}M_n=0$. Если N—подмодуль Ф. м. M, то на N и M/N естественным образом определяются фильтрации. Если $M=\sum_{n\in\mathbb{Z}}M_{(n)}$— *градуированный модуль*, то подмодули $M_n=\sum_{i\geqslant n}M_{(i)}$ определяют в M исчерпывающую и отделимую убывающую фильтрацию. Обратно, с любым Ф. м. M, снабженным, напр., убывающей фильтрацией, связывается градуированный модуль

$$\operatorname{gr}M=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\operatorname{gr}_nM,$$

где $\operatorname{gr}_nM=M_n/M_{n+1}$. Фильтрация $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ определяет на модуле M топологию, в к-рой подмодули M_n составляют фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология отделима тогда и только тогда, когда фильтрация отделима, и дискретна тогда и только тогда, когда $M_n=0$ для нек-рого n.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

А. Л. Онищик.

ФИНАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ, терминальный объект, категории — понятие, формализующее свойства одноточечного множества. Объект T категории $\mathfrak{K}$ наз. финальным, если для любого объекта X из $\mathfrak{K}$ множество $H(X,\ T)$ состоит из одного морфизма. Ф. о. наз. также правым нулем категории $\mathfrak{K}$. Дуальным образом определяется левый нуль, или инициальный объект, категории.

В категории множеств Ф. о. являются одноточечные множества и только они. В любой категории с нулевыми объектами Ф. о. являются нулевые объекты. Не-

стандартные примеры Ф. о. возникают в различных категориях диаграмм, где понятие Ф. о. по существу эквивалентно понятию предела диаграммы. Напр., пусть $\alpha, \beta : A \to B$ и пусть $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ — категория левых уравнителей пары (α, β); другими словами, объекты $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ — это морфизмы $X \xrightarrow{\mu} A$, для к-рых $\mu\alpha = \mu\beta$, а морфизмы из $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ — это такие морфизмы $\gamma : (X, \mu) \to (Y, \sigma)$, для к-рых $\gamma\sigma = \mu$. Ф. о. категории $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ — это *ядро* пары морфизмов (α, β).

М. Ш. Цаленко.

ФИНИТИЗМ — идущая от Д. Гильберта (D. Hilbert) методологич. точка зрения на то, какие объекты и способы рассуждений в математике следует считать абсолютно надежными. Основные требования Ф. таковы:

1) объекты рассуждений — *конструктивные объекты*, напр. цифровые записи натуральных чисел, формулы в символич. языке и их конечные совокупности;

2) применяемые операции однозначно определены и принципиально выполнимы (вычислимы);

3) никогда не рассматривается множество всех предметов x какой-либо бесконечной совокупности; всеобщее суждение $A(x)$ есть высказывание о произвольном объекте x, к-рое подтверждается в каждом конкретном случае;

4) утверждение о существовании объекта x, обладающего свойством $A(x)$, означает либо предъявление конкретного такого объекта, либо указание способа его построения.

Ограничения Ф. на логику близки к интуиционистским, хотя в целом финитная точка зрения является более жесткой. Рассуждение, удовлетворяющее требованиям 1) — 4), не выводит за рамки интуиционистской арифметики (см. *Интуиционизм*).

После проведения формализации (см. *Аксиоматический метод*) содержательные математич. теории становятся конструктивными объектами (совокупностями конструктивных объектов). В рамках подхода Д. Гильберта и его последователей Ф. нужен для изучения таких формализованных теорий; надежно установленными считаются только те свойства теорий, к-рые доказаны финитными методами. *Гёделя теорема о неполноте* показала принципиальную недостаточность финитных средств для подобного обоснования математики. Это привело к необходимости расширить применяемые в теории доказательств средства за рамки Ф.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957, [2] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982

С. Н. Артемов.

ФИНИТНАЯ ЗАДАЧА — см. *Финитная общезначимость*.

ФИНИТНАЯ ОБЩЕЗНАЧИМОСТЬ — одна из неклассич. интерпретаций логич. формул, предложенная с целью уточнения выдвинутой А. Н. Колмогоровым программы истолкования интуиционистской логики высказываний как исчисления задач.

А. Н. Колмогоров высказал [1] идею, что наряду с традиционной логикой, к-рая систематизирует схемы доказательств теоретич. истин, возможна также логика, систематизирующая схемы решения задач. Не уточняя понятия задачи, можно, однако, рассматривать нек-рые конкретные задачи, напр.:

1) найти четыре натуральных числа x, y, z, n, для к-рых выполняются соотношения: $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$;

2) доказать ложность *Ферма теоремы*;

3) в предположении, что число π выражается в виде $\pi = m/n$, где m, n — целые числа, найти аналогичное выражение для числа e.

Можно также естественным образом определить следующие операции над задачами. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — нек-рые задачи, то $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ означает задачу: «решить обе задачи $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$»; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ означает «решить хотя бы одну из задач $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$»; $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ означает задачу: «предположив, что дано решение задачи $\mathfrak{A}$, найти решение задачи $\mathfrak{B}$ (т. е. свести задачу $\mathfrak{A}$ к задаче $\mathfrak{B}$)»; $\neg\mathfrak{A}$ означает задачу: «предположив, что дано решение задачи $\mathfrak{A}$, придти к противоречию».

Если в пропозициональную формулу, построенную из переменных $a, b, c, \ldots$ с помощью логич. связок $\&, \vee, \supset, \neg$, вместо переменных подставить какие-либо задачи, то в соответствии с указанными операциями получится нек-рая задача. Формула наз. общезначимой, если существует общий метод, позволяющий решить любую задачу, полученную таким способом из данной формулы. Все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении высказываний, оказываются общезначимыми в этом смысле. В то же время формула $A \vee \neg A$, выражающая классич. закон исключенного третьего, не может быть общезначимой, т. к. ее общезначимость означала бы возможность общего метода, позволяющего для любой задачи либо получить ее решение, либо привести к противоречию предположение о существовании такого решения.

Описанная интерпретация логич. формул не является достаточно строгой и требует уточнения таких понятий, как «задача», «решение задачи», «общий метод». Одним из таких уточнений является понятие Ф. о., предложенное Ю. Т. Медведевым [2].

Финитной задачей наз. всякая задача, решение к-рой является элементом нек-рой заранее известной непустой конечной совокупности F допустимых возможностей; множество решений задачи может быть пустым. Таким образом, финитная задача может рассматриваться как упорядоченная пара $\mathfrak{A} = \langle F, X\rangle$, где F — конечное множество допустимых возможностей для $\mathfrak{A}$, а X — множество решений ($X \subseteq F$). Если $\mathfrak{A} = \langle F, X\rangle$, пишут $F = \varphi(\mathfrak{A})$, $X = \chi(\mathfrak{A})$. Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — произвольные финитные задачи, причем

$$\varphi(\mathfrak{A}_i) = F_i,\ \chi(\mathfrak{A}_i) = X_i,\ i = 1, 2.$$

Следующим образом определяются операции над финитными задачами. Для конъюнкции $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\&\mathfrak{A}_2$ полагают

$$\varphi(\mathfrak{A}) = F_1 \times F_2,\ \chi(\mathfrak{A}) = X_1 \times X_2,$$

где через $A \times B$ обозначено декартово произведение множеств A и B, т. е. множество всех упорядоченных пар $\langle a, b\rangle$, $a \in A$, $b \in B$. Для дизъюнкции $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ полагают

$$\varphi(\mathfrak{A}) = F_1 \mid F_2,\ \chi(\mathfrak{A}) = X_1 \mid X_2,$$

где через $A \mid B$ обозначено упорядоченное объединение множеств A и B, т. е. теоретико-множественное объединение множеств $A \times \{1\}$ и $B \times \{2\}$. Для импликации $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2$ полагают $\varphi(\mathfrak{A}) = F_2^{F_1}$ — множество всех отображений F_1 в F_2, $\chi(\mathfrak{A})$ — множество таких f из $F_2^{F_1}$, что $f(X_1) \subseteq X_2$. Отрицание $\neg\mathfrak{A}$ задачи $\mathfrak{A}$ определяется как задача $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_0$, где $\mathfrak{A}_0$ — фиксированная задача с пустым множеством решений (все дальнейшие построения не зависят от выбора конкретной такой задачи).

Подставив в пропозициональную формулу $A(p_1, \ldots, p_n)$ какие-либо финитные задачи $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ вместо переменных $p_1, \ldots, p_n$, получают составную задачу $\mathfrak{A} = A(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$. При этом $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется лишь множествами $F_1 = \varphi(\mathfrak{A}_1), \ldots, F_n = \varphi(\mathfrak{A}_n)$ и не зависит от $X_1 = \chi(\mathfrak{A}_1), \ldots, X_n = \chi(\mathfrak{A}_n)$. При фиксированных множествах $F_1, \ldots, F_n$ выбору разных множеств $X_i \subseteq F_i$, $i = 1, \ldots, n$, будут отвечать разные задачи $A(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ с одним и тем же множеством F и, вообще говоря, разными множествами X. Если существует элемент из F, принадлежащий всем таким X, то говорят, что

формула A разрешима на системе множеств $F_1, \ldots, F_n$. Если формула $A(p_1, \ldots, p_n)$ разрешима на любой системе непустых конечных множеств $F_1, \ldots, F_n$, то она наз. всегда разрешимой или финитно общезначимой. Это определение имеет прозрачный смысл: Ф. о. формулы A означает, что можно решить любую задачу $A(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, зная лишь множества допустимых возможностей задач $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

Множество ML всех финитно общезначимых пропозициональных формул замкнуто относительно выводимости в интуиционистском исчислении высказываний и содержит все формулы, выводимые в этом исчислении. Тем самым ML является промежуточной (или суперинтуиционистской, суперконструктивной) логикой, наз. логикой Медведева. Эта логика содержит формулы, не выводимые в интуиционистском исчислении высказываний (такова, напр., формула $(\neg a \supset (b \vee c)) \supset ((\neg a \supset b) \vee (\neg a \supset c))$). Логика Медведева обладает свойством дизъюнктивности: если формула вида $A \vee B$ финитно общезначима, то по крайней мере одна из формул A или B финитно общезначима. Если пропозициональная формула не содержит какого-либо из логич. знаков $\neg$, $\vee$, $\supset$, то она финитно общезначима тогда и только тогда, когда выводима в интуиционистском исчислении высказываний. Все финитно общезначимые формулы выводимы в классич. исчислении высказываний; в то же время, напр., классически выводимая формула $a \vee \neg a$ не является финитно общезначимой. Получены характеризации логики Медведева в терминах алгебраич. моделей. Понятие Ф. о. различными способами может быть распространено на предикатные формулы.

Лит.: [1] Колмогоров А., «Math. Z.», 1932, Bd 35, S. 58—65; [2] Медведев Ю. Т., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 5, с. 1015—18, 1966, т. 169, № 1, с. 20—23.

В. Е Плиско.

ФИНИТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, определенная в нек-рой области пространства E^n и имеющая принадлежащий к этой области компактный носитель. Точнее, пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена на области $\Omega \subset E^n$. Носителем f наз. замыкание множества точек $x \in \Omega$, для к-рых $f(x)$ отлично от нуля ($f(x) \neq 0$). Таким образом, можно еще сказать, что Ф. ф. в Ω есть такая определенная на Ω функция, что ее носитель Λ есть замкнутое ограниченное множество, отстоящее от границы Γ области Ω на расстоянии большем, чем $\delta > 0$, где δ достаточно мало.

Обычно рассматривают непрерывно дифференцируемые k раз Ф. ф., где k — заданное натуральное число. Еще чаще рассматривают бесконечно дифференцируемые Ф. ф. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1, \ x^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

может служить примером бесконечно дифференцируемой Ф. ф. в области Ω, содержащей в себе шар $|x| \leqslant 1$.

Множество всех бесконечно дифференцируемых Ф. ф. в области $\Omega \subset E^n$ обозначают D. Над D определяют линейные функционалы (*обобщенные функции*). При помощи функций $v \in D$ определяют *обобщенные решения* краевых задач.

В теоремах, посвященных задачам на нахождение обобщенных решений, часто важно знать, является ли пространство D плотным в нек-ром конкретно заданном пространстве функций. Известно, напр., что если граница Γ ограниченной области $\Omega \subset E^n$ достаточно гладкая, то D плотно в пространстве функций

$$\overset{0}{W}{}_p^r(\Omega) = \left\{ f : f \in W_p^r(\Omega), \ \frac{\partial^s f}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = 0, \ s = 0, 1, \ldots, r-1 \right\},$$

$(1 \leqslant p < \infty)$, т. е. в пространстве функций класса $W_p^r(\Omega)$ Соболева, равных нулю на Γ вместе со своими нормальными производными до порядка $r-1$ включительно ($r = 1, 2, \ldots$).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979, [2] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962.

С. М. Никольский.

ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМАЯ ГРУППА — группа, аппроксимируемая конечными группами. Пусть G — группа, ρ — отношение (иначе говоря, предикат) между элементами и множествами элементов, определенное на G и всех ее гомоморфных образах (напр., бинарное отношение равенства элементов, бинарное отношение «элемент x входит в подгруппу y», бинарное отношение сопряженности элементов и т. п.). Пусть K — класс групп. Говорят, что группа G аппроксимируется группами из K относительно ρ, если для любых элементов и множеств элементов из G, не находящихся в отношении ρ, существует такой гомоморфизм группы G на группу из K, при к-ром образы этих элементов и множеств тоже не находятся в отношении ρ. Аппроксимируемость относительно равенства элементов наз. просто аппроксимируемостью. Группа тогда и только тогда аппроксимируется группами класса K, когда она вкладывается в декартово произведение групп из K. Финитная аппроксимируемость относительно ρ обозначается $\Phi A\rho$; в частности, если ρ пробегает предикаты равенства, сопряженности, вхождения в подгруппу, вхождения в конечно порожденную подгруппу и т. п., то получаются свойства (и классы) ФАР, ФАС, ФАВ, $\Phi A B_\omega$ и т. п. Из наличия этих свойств в группе вытекает разрешимость соответствующей алгоритмич. проблемы.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982.

Ю. И. Мерзляков.

ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМАЯ ПОЛУГРУППА, резидуально конечная полугруппа,— полугруппа, для любых двух различных элементов a и b к-рой существует такой ее гомоморфизм φ в конечную полугруппу S, что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Свойство полугруппы S быть Ф. а. п. эквивалентно тому, что S — подпрямое произведение конечных полугрупп. Финитная аппроксимируемость является одним из важных условий конечности (см. *Полугруппа с условием конечности*); оно тесно связано с *алгоритмическими проблемами*: если S — конечно определенная Ф. а. п., то в ней алгоритмически разрешима проблема равенства слов.

Ф. а. п. будут свободные полугруппы, свободные коммутативные полугруппы, свободные n-ступенно нильпотентные полугруппы, свободные инверсные полугруппы (как алгебры с двумя операциями), полурешетки, конечно порожденные коммутативные полугруппы [1], конечно порожденные полугруппы матриц над нильпотентным или коммутативным кольцом, конечно порожденные n-ступенно нильпотентные в смысле Мальцева (см. *Нильпотентная полугруппа*) регулярные полугруппы [4], см. также *Финитно аппроксимируемая группа*.

Прямое произведение, свободное произведение, ординальная сумма (см. *Связка полугрупп*), 0-прямое объединение произвольного множества Ф. а. п. сами будут Ф. а. п. Другие конструкции, вообще говоря, не сохраняют финитную аппроксимируемость. Идеальное расширение Ф. а. п. S при помощи произвольной Ф. а. п. будет Ф. а. п., если, напр., S редуктивная, т. е. любые два различных элемента из S индуцируют различные левые и различные правые внутренние сдвиги, в частности, если S с сокращением или инверсная. Полурешетка нек-рого семейства редуктивных Ф. а. п. будет Ф. а. п.

Если S — Ф. а. п., то все ее максимальные подгруппы финитно аппроксимируемы. Для нек-рых типов

полугрупп указанное необходимое условие будет и достаточным; таковы: регулярные полугруппы с конечным числом идемпотентов в каждом главном факторе [2], клиффордовы инверсные полугруппы, вполне 0-простые полугруппы с конечным числом $\mathscr{L}$- или $\mathscr{R}$-классов (см. *Грина отношения эквивалентности*). Для ряда классов полугрупп описание Ф. а. п. в них получено в терминах, не использующих редукцию к максимальным подгруппам.

Несколькими способами описаны многообразия, состоящие из Ф. а. п. [3]. Одно из таких описаний следующее. Пусть L, R, N, I — двухэлементные полугруппы левых нулей, правых нулей, с нулевым умножением и полурешетка соответственно, P — трехэлементная полугруппа $\{e, p, 0\}$, где $e^2=e$, $ep=p$, остальные произведения равны 0, а P^* — полугруппа, антиизоморфная P. Многообразие M состоит из Ф. а. п. тогда и только тогда, когда M порождается подмножеством одного из следующих трех множеств: $\{L, R, N, I, G\}$, $\{R, P, C\}$, $\{L, P^*, C\}$, где G — конечная группа с абелевыми силовскими подгруппами, C — конечная циклич. группа.

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Уч. зап. Ивановского пед. ин-та», 1958, т. 18, с. 49—60; [2] Голубов Э. А., «Матем. заметки», 1975, т. 17, № 3, с 423—32, [3] Голубов Э. А., Сапир М. В., «Докл АН СССР», 1979, т. 247, № 5, с. 1037—1041; [4] Lallement G., «Pacific J. Math.», 1972, v. 42, № 3, p. 693—700.

Э. А. Голубов, Л. Н. Шеврин.

ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ — метрическое обобщение *римановой геометрии*, возникающее вслед за введением общего определения длины вектора, не ограниченного частным римановым определением в виде корня квадратного из квадратичной формы. Развитие такого обобщения начинается с работы П. Финслера [1].

Предметом изучения в Ф. г. является действительное N-мерное дифференцируемое многообразие M (по меньшей мере класса C^3) с системой локальных координат x^i, на к-ром задана действительная неотрицательная скалярная функция $F(x, y)$ от $2N$ независимых переменных x^i и y^i, где y^i — компоненты контравариантных векторов, касательных к M и опирающихся на точку x^i. Пусть $F(x, y)$ принадлежит классу C^3 по x^i, и пусть в каждом касательном к M пространстве M_x существует такая область M_x^*, что, во-первых, она является конической (в том смысле, что если какой-либо вектор y^i, опирающийся на нек-рую точку x^i, принадлежит M_x^*, то M_x^* принадлежит и любой другой касательный вектор, коллинеарный y^i и опирающийся на ту же точку x^i), и, во-вторых, $F(x, y)$ принадлежит классу C^5 по $y^i \in M_x^*$. Ненулевые векторы $y^i \in M_x^*$ наз. допустимыми. Пусть, далее, для любого допустимого y^i и любой точки x^i справедливо:

$$F(x, y) > 0, \det(\partial^2 F^2(x, y)/\partial y^i \partial y^j) \neq 0,$$

а также пусть функция $F(x, y)$ положительно однородна первой степени по y^i, т. е. $F(x, ky) = kF(x, y)$ при любом $k > 0$ для всех x^i и допустимых y^i. При этих условиях тройка $(M, M_x^*, F(x, y))$ наз. N-мерным финслеровым пространством, а F — финслеровой метрической функцией. Значение функции $F(x, y)$ понимается как длина вектора y^i, опирающегося на точку x^i.

Если финслерово пространство допускает такую координатную систему x^i, что F не зависит от этих x, то оно наз. пространством Минковского. Последнее находится в таком же отношении к финслерову пространству, в каком евклидово пространство к риманову пространству. Финслерово пространство называется положительно определенным, если на F наложены условия, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы $z^i z^j \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$ при любых x^i и ненулевых y^i.

Наложение условия однородности на F по y^i имеет ясный геометрич. смысл с точки зрения инвариантных понятий, имеющихся в центроаффинных пространствах, каковыми являются касательные пространства M_x. Именно, отношение длин любых двух коллинеарных векторов y_1^i и $y_2^i = ky_1^i$ из M_x^* может быть инвариантно определено следующим образом: $y_1^1/y_2^1 = y_1^2/y_2^2 = \ldots = k$, что не включает никакой метрич. функции. Таким образом, наложенное на F условие однородности является условием согласованности финслерова определения длины с частным центроаффинным определением; финслерова метрич. функция требуется для сравнения длин неколлинеарных векторов.

Тензор

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$$

наз. финслеровым метрическим тензором. В силу теорем Эйлера об однородных функциях

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y) y^i y^j, \; y_i = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2(x, y)}{\partial y^i},$$

где, по определению, $y_i = g_{ij}(x, y) y^j$. Эти формулы представляют собой непосредственное обобщение своих римановых аналогов, вытекающее из одного лишь условия однородности. Ф. г. сводится к римановой в случае, когда метрич. тензор $g_{ij}(x, y)$ предполагается не зависящим от y^n. Последнее условие можно записать в виде $C_{ijk} = 0$, где

$$C_{ijk}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}(x, y)}{\partial y^k} \equiv \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$$

наз. картановским тензором кручения. Он удовлетворяет тождеству $y^i C_{ijk} = 0$. Все финслеровы соотношения переходят в свои римановы аналоги при обращении в нуль тензора C_{ijk}. Символы Кристоффеля $\gamma_{ij}^k(x, y)$, построенные по финслерову метрическому тензору по той же формуле, что и в римановой геометрии, не подчиняются закону преобразования коэффициентов связности. Тем не менее из первых производных от финслерова метрич. тензора можно построить коэффициенты связности такие, что (как и в римановой геометрии) ковариантная производная от метрич. тензора будет обращаться в нуль. Они наз. картановскими коэффициентами связности и имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k(x, y) = \gamma_{ij}^k - C_{in}^k G_j^n - C_{jn}^k G_i^n + C_{ijn} G^{kn},$$

где

$$G_j^n = -2C_{jm}^n G^m + y^m \gamma_{mj}^n, \; 2G^m = y^n y^k \gamma_{nk}^m.$$

Из коммутаторов различных ковариантных производных находятся выражения финслеровых тензоров кривизны.

В каждом касательном пространстве M_x финслерова метрич. функция определяет $(N-1)$-мерную гиперповерхность $F(x, y) = 1$ (где x^i рассматриваются фиксированными, y^i — произвольными), наз. индикатрисой. Индикатриса образуется концами единичных касательных векторов $l^i = y^i/F(x, y)$, опирающихся на точку x^i. Фундаментальное значение понятия индикатрисы видно уже из того, что вследствие однородности финслеровой метрич. функции индикатриса в точке x^i однозначно определяет вид финслеровой метрич. функции $F(x, y)$ в этой точке x^i. В римановом случае индикатрисой является сфера. Вообще говоря, инди-

катрисой финслерова пространства может быть поверхность довольно общего вида. Финслеров метрич. тензор индуцирует на индикатрисе риманову метрику, превращая ее в риманово пространство. При каждом фиксированном x финслеров метрич. тензор является римановым по переменным y. Пара $(M_x^*, g_{ij}(x, y))$, где x^n фиксированы, а y^n переменны, наз. касательным римановым пространством в точке x (евклидово пространство в случае римановой геометрии); риманов тензор кривизны этого пространства сводится к выражению $C^j_{mh}C^m_{ik}-C^j_{mk}C^m_{ih}$. Индикатриса является гиперповерхностью, вложенной в касательное риманово пространство. Ближайшим примером финслеровой метрич. функции является корень f-й степени из формы f-го порядка.

Пусть $f(x)$ и $r^A(x)$ — действительные скалярные функции класса C^3, в каждой точке x удовлетворяющие условиям $f\neq 0, 1, 2$ и $r^A\neq 0$, а $S_i^A(x)$ суть N линейно независимых действительных ковариантных векторных полей класса C^3, $A=1, 2, \ldots, N$. Тогда для

$$F_1(x, y)=\left[\sum\nolimits_{A=1}^{N} r^A(x)\cdot(S^A_m(x)\,y^m)^{f(x)}\right]^{1/f(x)}$$

кривизна индикатрисы постоянна и равна $f^2/4(f-1)$, а для

$$F_2(x, y)=\prod\nolimits_{A=1}^{N}(S^A(x)\,y^m)^{r^A(x)},$$

$$\sum\nolimits_{A=1}^{N} r^A(x)=1$$

тензор кривизны индикатрисы равен нулю. Определитель финслерова метрич. тензора не зависит от y^i тогда и только тогда, когда $C_i=0$, где $C_i=C^n_{in}$. Если финслерово пространство положительно определено и индикатриса — выпуклая поверхность, то $C_i\neq 0$. Функция F_2 — единственный известный (1984) пример финслеровой метрич. функции, для к-рой $C_i=0$ (не считая собственно риманова случая).

Можно выделять специальные типы финслеровых пространств, постулируя какой-либо специальный вид характерных финслеровых тензоров. Если основное многообразие M допускает поле реперов $S_i^A(x)$ глобально, а $F^*(y^A)$ — метрич. функция какого-либо пространства Минковского, то на M можно ввести финслерову метрич. функцию:

$$F(x^n, y^i)=F^*(S_i^A(x^n)\,y^i).$$

В этом случае финслерово пространство и метрич. функция наз. 1-формовыми. Функции F_1 и F_2 являются 1-формовыми, когда f и r^A константы. Пространства 1-формовые можно считать наиболее простыми с точки зрения способа вхождения переменных x^n в метрич. функцию. Финслерово пространство наз. C-сводимым, если оно не является римановым, $N>2$ и картановский тензор кручения представляется в виде

$$C_{ijm}=\frac{1}{N+1}(h_{ij}C_m+h_{jm}C_i+h_{mi}C_j),$$

где $h_{ij}=g_{ij}-l_il_j$. Пространства C-сводимые могут иметь метрич. функции только двух типов: либо метрич. функцию Кропиной $F_3=\alpha^2/\beta$, либо метрич. функцию Рандерса $F_4=\alpha+\beta$, где $\beta=b_i(x)\,y^i$, $\alpha^2=a_{ij}y^iy^j$, $b_i(x)$ — ковариантное векторное поле, $a_{ij}(x)$ — риманов метрич. тензор. Напр., функция Лагранжа пробного электрич. заряда в гравитационном и электромагнитном полях является функцией Рандерса. Финслеров метрич. тензор, отвечающий функции F_2, имеет сигнатуру $(+---\ldots)$, что делает ее интересной для развития финслерова обобщения общей теории относительности; такая сигнатура встречается и в случае выбора метрич. функций вида F_1. Такое обобщение можно основывать на концепции соприкосновения риманова пространства финслеровым, согласно к-рой каждому векторному полю $y^i(x)$ финслеров метрич. тензор ставит в соответствие т. н. соприкасающийся риманов метрич. тензор $g_{mn}(x, y(x))$. Выделяя зависящие только от x^i тензорные поля $z^A(x)$, из к-рых строится финслерова метрич. функция согласно $F(x, y)=v(z^A(x), y)$, где v — скалярная функция, можно трактовать z^A как собственно гравитационные полевые переменные. Финслерова геометризация пространства-времени дает также возможность развивать теорию физич. полей с различными внутренними симметриями, опираясь на понятие группы преобразований касательных векторов y^i, оставляющих инвариантной финслерову метрич. функцию.

Лит.: [1] Finsler P., Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Gött., 1918 (Diss.); [2] Рунд Х., Дифференциальная геометрия финслеровых пространств, пер. с англ., М., 1981; [3] Asanov G. S., Finslerian Extension of General Relativity, Dordrecht, 1984. *Г. С. Асанов.*

ФИНСЛЕРОВА МЕТРИКА — метрика пространства, задаваемая действительной положительной и положительно определенной выпуклой функцией $F(x, y)$ координат x и компонент контравариантных векторов y, опирающихся на точку x. Пространство, наделенное Ф. м., наз. финслеровым, а геометрия его — *финслеровой геометрией.* *М. И. Войцеховский.*

ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО — обобщение *риманова пространства*, пространство, в малых областях к-рого имеет место приближенно *Минковского геометрия*. По существу, Ф. п. — то же, что финслерово многообразие, т. е. дифференцируемое многообразие, наделенное *финслеровой метрикой.* *М. И. Войцеховский.*

ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННОЕ — пространство с *внутренней метрикой*, подчиненное нек-рым ограничениям на поведение кратчайших (т. е. кривых, длины к-рых равны расстояниям между концами). К таким пространствам относятся G-пространства (см. *Геодезических геометрия*) и, в частности, *финслеровы пространства*, так что рассматриваемые пространства можно характеризовать как обобщение финслеровых, а не только римановых пространств. Ф. п. о. отличаются от финслеровых не только большей общностью, но и тем, что их определяют и исследуют, исходя из метрики, без координат.

G-пространство можно определить как конечно компактное пространство (т. е. в нем замкнутые ограниченные множества компактны) с внутренней метрикой, в к-ром кратчайшие локально однозначно продолжаемы, т. е. выполняются следующие два условия.

1) Существование продолжения: у каждой точки есть такая окрестность U, что для всякой кратчайшей $AB\subset U$ существует кратчайшая $AC\supset AB$, $C\neq B$.

2) Единственность продолжения, или «неналегание»: если $AC\supset AB$ и $AC_1\supset AB$, то либо $AC\supset AC_1$, либо $AC_1\supset AC$. Само существование кратчайших обеспечено конечной компактностью: в конечно компактном пространстве с внутренней метрикой любые две точки соединимы кратчайшей. Из однозначной продолжаемости следует локальная единственность кратчайшей с данными концами. Таким образом, G-пространство можно характеризовать как конечно компактное пространство, в к-ром любые две точки, соединимые кратчайшей и локально кратчайшей, имеют основные свойства прямолинейных отрезков.

Для пространства с внутренней метрикой конечная компактность равносильна сочетанию локальной компактности и полноты (см. [3]).

G-пространство топологически однородно, т. е. для любых двух точек в нем существует гомеоморфизм

пространства на себя, переводящий одну из этих точек в другую. Более того, такой гомеоморфизм можно выбрать изотопным тождественному. G-пространства размерности $\leqslant 3$ являются топологич. многообразиями. Конечномерное G-пространство обладает свойством инвариантности областей, т. е. если одно из двух гомеоморфных подмножеств его открыто, то и другое открыто. Неизвестно (1984), является ли всякое G-пространство конечномерным.

Множество V в пространстве M с внутренней метрикой наз. выпуклым, если любые точки X, $Y \in V$ соединимы в M кратчайшей XY и всякая такая кратчайшая содержится в V. Пространство M обладает свойством в ы п у к л о с т и м а л ы х ш а р о в, если у всякой его точки существует окрестность такая, что всякий содержащийся в ней шар выпуклый. Всякое G-пространство с малыми выпуклыми шарами конечномерно. В частности, это верно для G-пространств с кривизной $\leqslant K$ (см. *Риманово пространство обобщенное*) и для G-пространств неположительной кривизны (в смысле Буземана). Последнее означает, что локально во всяком треугольнике, составленном из кратчайших, длина средней линии треугольника не больше половины соответствующей стороны треугольника. То же верно и для G-пространств с кривизной $\geqslant K$ (см. [4]).

Д в и ж е н и е м метрич. пространства наз. отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Группа всех движений компактного G-пространства с компактно открытой топологией является группой Ли (см. [1]). Это верно и в некомпактном случае, если G-пространство удовлетворяет условию выпуклости малых шаров (см. [6]).

Метрич. пространство однородно, если для любых двух точек пространства существует движение, переводящее одну из точек в другую. Движение Ф метрич. пространства наз. с и м м е т р и е й относительно точки p, если $\Phi(\Phi(x)) = x$ для всех x, и p — изолированная неподвижная точка отображения Ф. Пространство наз. с и м м е т р и ч е с к и м, если для любой точки его существует симметрия относительно этой точки. Симметрич. G-пространства однородны и удовлетворяют условию выпуклости малых шаров. Группа всех движений однородного G-пространства есть группа Ли, а само пространство — топологич. многообразие (см. [5]). Симметрич. G-пространство является финслеровым пространством с выпуклыми индикатрисами. Если, кроме того, между любыми двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует угол, то пространство является симметрическим римановым пространством.

Пусть M — метрич. пространство с метрикой ρ, снабженное структурой группы. Метрика ρ наз. л е в о и н в а р и а н т н о й, если отображение левого сдвига на элемент g есть движение пространства. Аналогично определяется п р а в о и н в а р и а н т н а я метрика. Метрика, одновременно лево- и правоинвариантная, наз. б и и н в а р и а н т н о й. G-пространство, являющееся группой с биинвариантной метрикой, является симметрич. группой Ли (см. [5]) и, следовательно, финслеровым пространством. Это — обобщение известного результата для римановых пространств.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [2] е г о ж е, «Тр.Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 5—23; [3] е г о ж е, «Schrift. Inst. Math. Deutsch. Akad. Wiss.», 1957, Bd 1, S. 33—84; [4] Б е р е с т о в с к и й В. Н., «Сиб. матем. ж.», 1975, т. 16, № 4, с. 651—62; [5] Н и к о л а е в И. Г., там же, 1978, т. 19, № 6, с. 1341—48; [6] е г о ж е, там же, 1979, т. 20, № 2, с. 345—53; [7] Р е ш е т н я к Ю. Г., «Матем. сб.», 1960, т. 52, № 3, с. 789—98; [8] е г о ж е, «Сиб. матем. ж.», 1968, т. 9, № 4, с. 918—27.

А. Д. Александров, В. Н. Берестовский.

ФИТТИНГА ПОДГРУППА — характеристич. подгруппа $F(G) = F$ группы G, порожденная всеми нильпотентными нормальными делителями G, наз. также р а д и к а л о м Ф и т т и н г а. Впервые рассматривалась Х. Фиттингом [1]. Для конечных групп Ф. п. нильпотентна и является единственным максимальным нильпотентным нормальным делителем группы. Для конечной группы G справедливы соотношения:

$$[F, F] \subseteq \Phi \subseteq F \text{ и } F/\Phi = F(G/\Phi),$$

где через Φ обозначена *Фраттини подгруппа* группы G, а через $[F, F]$ — *коммутант* Ф. п. F.

Лит.: [1] F i t t i n g H., «Jahresber. Dtsch. Math.-Ver », 1938, Bd 48, S. 77—141; [2] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [3] G o r e n s t e i n D., Finite groups, N.Y.—Evanston—L., 1968.

Н. Н. Вильямс.

ФИШЕРА ИНФОРМАЦИОННОЕ КОЛИЧЕСТВО — см. *Рао — Крамера неравенство.*

ФИШЕРА F-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, F - р а с п р е д е л е н и е, Ф и ш е р а — С н е д е к о р а р а с п р е д е л е н и е, С н е д е к о р а р а с п р е д е л е н и е,— непрерывное сосредоточенное на $(0, \infty)$ распределение вероятностей с плотностью

$$f_{\nu_1, \nu_2}(x) = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1} \left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}},$$

$$x > 0, \qquad (1)$$

где $\nu_1 > 0$ и $\nu_2 > 0$ — параметры, а $\mathrm{B}(l_1, l_2)$ — бета-функция. При $\nu_1 > 2$ это — унимодальное (одновершинное) с положительной асимметрией распределение с модой в точке $x = \frac{\nu_1-2}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_2+2}$. Математич. ожидание и дисперсия Ф. F-р. равны соответственно

$$\nu_2/(\nu_2-2) \text{ при } \nu_2 > 2$$

и

$$\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \text{ при } \nu_2 > 4.$$

Ф. F-р. сводится к *бета-распределению* 2-го рода (распределению типа VI по классификации Пирсона). Ф. F-р. можно рассматривать как распределение случайной величины, представимой в форме отношения

$$F_{\nu_1, \nu_2} = \nu_2 X_1 / \nu_1 X_2,$$

где независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют *гамма-распределения* с параметрами $\nu_1/2$ и $\nu_2/2$ соответственно. Функция распределения для F_{ν_1, ν_2} выражается через функцию распределения $\mathrm{B}_{l_1, l_2}(x)$ бета-распределения:

$$\mathrm{P}\{F_{\nu_1, \nu_2} < x\} = \mathrm{B}_{\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}}\left(\frac{\frac{\nu_1}{\nu_2}x}{1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x}\right). \qquad (2)$$

Это соотношение используется для вычисления значений Ф. F-р. с помощью таблиц бета-распределения. Если $\nu_1 = m$ и $\nu_2 = n$ целые, то F-р а с п р е д е л е н и е м Ф и ш е р а с m и n степенями свободы наз. распределение F-отношения

$$F_{mn} = \frac{\chi_m^2}{m} \Big/ \frac{\chi_n^2}{n}, \qquad (3)$$

где χ_m^2 и χ_n^2 — независимые случайные величины, имеющие *«хи-квадрат» распределения* с m и n степенями свободы соответственно.

Ф. F-р. играет фундаментальную роль в математической статистике и появляется в первую очередь как распределение отношения двух выборочных дисперсий. Именно, пусть $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ — выборки из

нормальных совокупностей с параметрами (a_1, σ_1^2) и (a_2, σ_2^2). Выражения

$$s_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_i (X_i-\overline{X})^2 \text{ и } s_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_j (Y_j-\overline{Y})^2,$$

где $\overline{X}=\sum_i X_i/m$, $\overline{Y}=\sum_j Y_j/n$, служат оценками дисперсий σ_1^2 и σ_2^2. Тогда т. н. дисперсионное отношение $F=\frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2}$ имеет при гипотезе $\sigma_1=\sigma_2$ Ф. F-р. с $m-1$ и $n-1$ степенями свободы (в этом качестве Ф. F-р. наз. также распределением дисперсионного отношения). На статистике F основан F-критерий, используемый, в частности, для проверки гипотезы равенства дисперсии двух совокупностей, в дисперсионном анализе, регрессионном анализе, многомерном статистич. анализе.

Универсальность Ф. F-р. подчеркивается связями с другими распределениями. При $m=1$ квадрат величины F_{mn} из (3) имеет *Стьюдента распределение* с n степенями свободы. Существуют различные аппроксимации Ф. F-р. с помощью нормального распределения и «хи-квадрат» распределения.

Введение в дисперсионный анализ Ф. F-р. связано с именем Р. Фишера (R. Fisher, 1924), хотя сам Фишер использовал для дисперсионного отношения величину Z, к-рая связана с F равенством $Z=\frac{1}{2}\log F$. Распределение Z было табулировано Р. Фишером, а Ф. F-р.— Дж. Снедекором (G. Snedecor, 1937). В современной практике предпочитают более простое Ф. F-р., используя его связь с бета-распределением (2) и таблицы неполной бета-функции.

См. также *Дисперсионный анализ*, *Фишера z-распределение*.

Лит.: [1] Fisher R. A., On a distribution yielding the error functions of several well known statistics, «Proc. Intern. Math. Congr. Toronto», 1928, v. 2, p. 805—13; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *А. В. Прохоров.*

ФИШЕРА z-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное, сосредоточенное на всей прямой распределение вероятностей с плотностью

$$f(x)=2m_1^{\frac{m_1}{2}}\,m_2^{\frac{m_2}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)e^{m_1 x}}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)(m_1e^{2x}+m_2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}}.$$

Параметры $m_1\geqslant 1$ и $m_2\geqslant 1$ наз. степенями свободы. Характеристич. функция имеет вид

$$\varphi(t)=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m_1+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}.$$

Математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)$.

Если случайная величина F имеет *Фишера F-распределение* с m_1, m_2 степенями свободы, то величина $z=\frac{1}{2}\ln F$ имеет Ф. z-р. с m_1, m_2 степенями свободы. Вместе с F-распределением Фишера, известным как распределение дисперсионного отношения, Ф. z-р. было введено первоначально в дисперсионный анализ Р. Фишером (R. Fisher, 1924). По его замыслу z-р. должно было бы стать основным распределением при проверке статистич. гипотез в дисперсионном анализе. Ф. z-р. было тогда же табулировано и первые исследования относились к статистике z, однако в совр. математич. статистике используют более простую статистику F.

Лит.: [1] Fisher R. A., On a distribution yielding the error functions of several well known statistics, «Proc. Intern. Math. Congr. Toronto», 1928, v. 2, p. 805—13; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966. *А. В. Прохоров.*

ФЛАГ типа ν в n-мерном векторном пространстве V — такой набор линейных подпространств $V_1, V_2, \ldots, V_k$ в V размерностей соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$, что $V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_k$ (здесь $\nu=(n_1, \ldots, n_k)$, $1\leqslant k\leqslant n-1$; $0<n_1<n_2<\ldots<n_k<n$). Флаг типа $\nu_0=(1, 2, \ldots, n-1)$ наз. полным флагом. Любые два флага одного и того же типа переводятся друг в друга нек-рыми линейными преобразованиями пространства V, т. е. множество $F_\nu(V)$ всех флагов типа ν в V является однородным пространством полной линейной группы $GL(V)$. Унимодулярная группа $SL(V)$ тоже транзитивно действует на многообразии флагов $F_\nu(V)$. При этом стационарная подгруппа H_F флага F в группе $GL(V)$ (а также в группе $SL(V)$) является параболич. подгруппой в $GL(V)$ (соответственно в $SL(V)$). Если F — полный флаг в V, определяемый подпространствами $V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_{n-1}$, то H_F — полная треугольная подгруппа в $GL(V)$ (соответственно в $SL(V)$) относительно такого базиса e_1, $e_2, \ldots, e_n$ пространства V, что $e_i\in V_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Вообще, факторпространства линейных алгебраич. групп по параболич. подгруппам иногда наз. флаговыми многообразиями. При $k=1$ флаг типа (n_1) — это просто n_1-мерное линейное подпространство в V и $F_{(n_1)}(V)$ — *Грассмана многообразие* G_{n, n_1}. В частности, $F_{(1)}(V)$ — проективное пространство, ассоциированное с векторным пространством V. Каждое многообразие флагов $F_\nu(V)$ канонич. образом снабжается структурой проективного алгебраич. многообразия (см. [1]). Если V — действительное или комплексное векторное пространство, то все многообразия $F_\nu(V)$ компактны. Известны (см. [3]) клеточные разбиения и кольца когомологий многообразий $F_\nu(V)$ (см. также *Брюа разложение*).

Лит. см. при статье *Флаговая структура*.

Д. В. Алексеевский.

ФЛАГОВАЯ СТРУКТУРА — 1) то же, что *флаг*.

2) Ф. с. типа $\nu=(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ на n-мерном многообразии M — дифференциально-геометрич. структура, к-рая представляет собой поле флагов F_x типа ν, определяемых подпространствами

$$V_1(x), V_2(x), \ldots, V_k(x)$$

в касательных пространствах M_x, гладко зависящими от точки $x\in M$. Иными словами, Ф. с. типа ν на M — это гладкое сечение расслоения флагов типа ν на M, типовым слоем к-рого в точке $x\in M$ является многообразие $F_\nu(M_x)$. Ф. с. типа ν_0 наз. полной. Ф. с. типа ν на многообразии является G-структурой, где G — группа всех линейных преобразований n-мерного векторного пространства, сохраняющих нек-рый флаг типа ν. Это G-структура бесконечного типа. Группа автоморфизмов Ф. с., вообще говоря, бесконечномерна. Алгебра Ли L инфинитезимальных автоморфизмов Ф. с. на M обладает цепочкой идеалов $L_1\subset L_2\subset\ldots\subset L_k$, где L_i состоит из таких векторных полей $X\in L$, что $X(x)\in V_i(x)$ при всех $x\in M$.

Важным частным случаем Ф. с. являются Ф. с. типа (n_1), или n_1-мерные распределения (здесь $k=1$, $0<n_1<n$).

Ф. с. типа ν на M наз. локально плоской, или интегрируемой, если у любой точки $p\in M$ существует такая окрестность U_p и такая система координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в ней, что подпространства $V_i(x)$ порождены векторами

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n_i}}$$

при всех $x \in U_p$ и всех $i=1, 2, \ldots, k$. Это означает, что окрестность U_p обладает таким набором слоений $S_1, S_2, \ldots, S_k$, что при всех $x \in U_p$ флаг F_x определяется набором подпространств пространства M_x, касательных к листам этих слоений, проходящих через точку x. Ф. с. тогда и только тогда является локально плоской, когда при любом $i=1, 2, \ldots, k$ распределение $V_i(x)$ является инволютивным, т. е. для любых двух векторных полей X и Y на M таких, что $X(x) \in V_i(x)$ и $Y(x) \in V_i(x)$ при всех $x \in M$, справедливо включение

$$[X, Y](x) \in V_i(x),$$

где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X и Y.

Существование на многообразии глобальных (всюду определенных) Ф. с. накладывает довольно жесткие ограничения на его топологич. строение. Напр., для существования на односвязном компактном многообразии поля прямых, т. е. Ф. с. типа (1), необходимо и достаточно, чтобы его эйлерова характеристика была равна нулю. На односвязном многообразии тогда и только тогда существует полная Ф. с., когда оно вполне параллелизуемо, т. е. когда его касательное расслоение тривиально. Если на полном односвязном n-мерном римановом многообразии M существует инвариантная относительно параллельных переносов Ф. с. типа $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, то M изометрично прямому произведению односвязных римановых многообразий размерностей

$$n_1,\ n_2-n_1,\ n_3-n_2,\ \ldots,\ n_k-n_{k-1},\ n-n_k.$$

Транзитивная группа диффеоморфизмов многообразия M тогда и только тогда оставляет инвариантной нек-рую Ф. с. типа ν на M, когда ее линейная группа изотропии сохраняет нек-рый флаг типа ν в касательном пространстве к M. В частности, если H — такая замкнутая подгруппа группы Ли G, что сужение на H присоединенного представления группы G задает треугольную линейную группу, то на однородном пространстве G/H существует инвариантная полная Ф. с., а также инвариантная Ф. с. любого другого типа.

Развита теория деформаций Ф. с. на компактных многообразиях [4].

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [3] Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 3, с. 3—26, [4] Kodaira K., Spencer D. C., «Ann. Math.», 1961, v. 74, p. 52—100.

Д. В. Алексеевский.

ФЛАГОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, метрика к-рого определяется абсолютом, состоящим из совокупности вложенных друг в друга m-плоскостей, $m=0, 1, \ldots, n-1$, называемых флагом; Ф. п. обозначается F_n. Абсолют Ф. п. может быть получен из абсолютов галилеева или псевдогалилеева пространств путем предельного перехода в квадриках абсолютов. В частности, флаг (абсолют) пространства F_3 состоит из 2-плоскости T_0, в ней лежит прямая T_1 (евклидова прямая), на прямой — точка T_2. Плоскость F_2 представляет собой проективную 2-плоскость с выделенной прямой T_0 и точкой T_1 и совпадает с галилеевой 2-плоскостью. Прямая F_1 представляет собой проективную прямую с выделенной точкой T_0 и совпадает с евклидовой прямой.

Если в Ф. п. F_n выбрана такая система аффинных координат (x^i), что векторы прямых, проходящих через $(n-m-1)$-плоскость T_m, определяются условием $x^1=x^2=\ldots=x^m=0$, то за расстояние между точками $X(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $Y(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ принимается число $d=|x^1-y^1|$; если $y^1=x^1, \ldots, y^{k-1}=x^{k-1}$, то расстояние определяется числом $d^{(k-1)}=|x^k-y^k|$.

Прямые, пересекающие $(n-m)$-плоскость и не пересекающие $(n-m-1)$-плоскость, наз. прямыми порядка m.

Движениями Ф. п. являются коллинеации, переводящие абсолют в себя. Движения Ф. п. являются подгруппой аффинных преобразований аффинного n-пространства, и эта группа движений Ф. п. является группой Ли.

Пространство F_n двойственно самому себе. За величину угла между двумя $(n-1)$-плоскостями принимается расстояние между точками, двойственными этим плоскостям.

Ф. п. является частным случаем *полуэллиптических пространств*. В частности, Ф. п. F_3 совпадает с 3-пространством S_3^{012}. Флаговое 3-пространство является единственным пространством с параболич. метриками расстояний на прямых, в полуплоскостях и в пучках плоскостей.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ФЛОКЕ ТЕОРИЯ — теория о строении пространства решений и о свойствах самих решений *линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*

$$x' = A(t)\,x,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n; \qquad (1)$$

матрица $A(t)$ периодическая по t с периодом $\omega>0$ и суммируемая на каждом компактном интервале из $\mathbb{R}$.

1) Любая фундаментальная матрица X системы (1) имеет представление

$$X(t) = F(t)\exp(tK), \qquad (2)$$

наз. представлением Флоке (см. [1]), где $F(t)$ — нек-рая ω-периодич. матрица, K — нек-рая постоянная матрица. Существует базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства решений системы (1) такой, что в этом базисе матрица K имеет жорданову форму; этот базис можно представить в виде

$$x_i = (\psi_{1i}\exp(\alpha_i t), \ldots, \psi_{ni}\exp(\alpha_i t)),$$

где ψ_{ki} — многочлены относительно t с ω-периодич. коэффициентами, α_i — *характеристические показатели* системы (1). Любая компонента решения системы (1) является линейной комбинацией функций вида (решений Флоке) $\psi_{ki}\exp(\alpha_i t)$. В случае когда все характеристич. показатели различны (или среди них есть кратные, но им отвечают простые элементарные делители), функции ψ_{ki} суть просто ω-периодич. функции. В представлении (2) матрицы $F(t)$ и K, вообще говоря, комплекснозначны. Если ограничиться только действительным случаем, то $F(t)$ может не быть ω-периодической, но обязательно будет 2ω-периодической.

2) Систему (1) можно привести к дифференциальному уравнению с постоянной матрицей $y'=Ky$ с помощью преобразования Ляпунова

$$x = F(t)\,y, \qquad (3)$$

где $F(t)$ и K — матрицы из представления Флоке (2) (см. [2]). Представление (2) вместе с подстановкой (3) часто называют теоремой Флоке—Ляпунова.

3) Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — спектр матрицы K. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ такого, что $\alpha \neq \operatorname{Re}\alpha_j$, $j=1, \ldots, l$, в силу представления (2) пространство $\mathbb{R}^n$ распадается в прямую сумму двух подпространств S_α и U_α

$$(\mathbb{R}^n = S_\alpha + U_\alpha,\ S_\alpha \cap U_\alpha = \varnothing)$$

таких, что

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(-\alpha t)\,V(t)\,x(0) = 0 \Leftrightarrow x(0) \in S_\alpha,$$

$$\lim_{t\to-\infty} \exp(-\alpha t)\,V(t)\,x(0) = 0 \Leftrightarrow x(0) \in U_\alpha;$$

здесь $V(t)$ — нормированная в нуле фундаментальная матрица системы (1). Отсюда следует экспоненциальная *дихотомия* системы (1), если $\operatorname{Re}\alpha_j \neq 0$ ни для какого $j=1, \ldots, l$.

Лит.: [1] Floquet G., «Ann. sci. École norm. supér.», 1883, t. 12, № 2, p. 47—88; [2] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [4] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972; [5] Массера Х.-Л., Шеффер Х.-Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, пер. с англ., М., 1970; [6] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963. *Ю. В. Комленко.*

ФЛОКЕ — ЛЯПУНОВА ТЕОРЕМА — см. *Флоке теория.*

ФОКА ПРОСТРАНСТВО, фоковское пространство,— в простейшем и чаще всего употребляемом случае — гильбертово пространство, состоящее из бесконечных последовательностей вида

$$F=\{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}, \tag{1}$$

где

$$f_0\in\mathbb{C},\ f_1\in L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x),\ f_n\in L_2^S((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n),$$

или

$$f_n\in L_2^a((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n),\ n=2, 3, \ldots, \nu=1, 2, \ldots,$$

причем

$$L_2^S((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n) \text{ или } L_2^a((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n)$$

означает гильбертово пространство симметрич. (соответственно антисимметрич.) функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n\in\mathbb{R}^\nu$, $n=2, 3, \ldots$. Скалярное произведение двух последовательностей F и G вида (1) равно

$$(F, G)=f_0\overline{g}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(f_n, g_n)_{L_2((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n)}.$$

В случае когда последовательности F состоят из симметрич. функций, говорят о симметрическом (или бозонном) Ф. п., а в случае последовательностей антисимметрич. функций — Ф. п. наз. антисимметрическим (или фермионным). В таком простейшем случае Ф. п. были впервые введены В. А. Фоком [1].

В общем случае произвольного гильбертова пространства H Ф. п. $\Gamma^S(H)$ (или $\Gamma^a(H)$), построенным над H, наз. симметризованную (или антисимметризованную) тензорную экспоненту пространства H, т. е. пространства

$$\Gamma^\alpha(H)\equiv\operatorname{Exp}_\alpha H=\bigoplus\sum_{n=0}^{\infty}(H^{\otimes n})_\alpha,\ \alpha=S, a, \tag{2}$$

где знак $\bigoplus$ означает прямую ортогональную сумму гильбертовых пространств, $(H^{\otimes 0})_\alpha=\mathbb{C}^1$, $(H^{\otimes 1})_\alpha=H$, а $(H^{\otimes n})_\alpha$, $n>1$,— симметризованную при $\alpha=S$ или антисимметризованную ($\alpha=a$) n-ю тензорную степень пространства H. В случае $H=L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$ определение (2) эквивалентно определению Ф. п., приведенному в начале статьи, если отождествить пространства $L_2^\alpha((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x))^n$ и $(L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x))_\alpha^{\otimes n}$ так, что тензорному произведению

$$(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)_\alpha\in(L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x))_\alpha^{\otimes n}$$

последовательности функций

$$f_1, \ldots, f_n\in L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$$

соответствует функция

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_\sigma(\pm 1)^{\operatorname{sign}\sigma}\prod_{i=1}^{n}f(x_{\sigma(i)})\in L_2^\alpha((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n), \tag{3}$$

где суммирование происходит по всем перестановкам σ индексов $1, 2, \ldots, n$, $\operatorname{sign}\sigma$ — четность перестановки σ, а знак $+1$ или -1 в выражении (3) соответствует симметрич. или антисимметрич. случаю.

В квантовой механике Ф. п. $\Gamma^S(H)$ или $\Gamma^a(H)$ служат пространствами состояний квантовомеханич. системы, состоящей из произвольного (но конечного) числа одинаковых частиц таких, что пространством состояний каждой отдельной частицы является пространство H. При этом в зависимости от того, каким из Ф. п.— симметрическим $\Gamma^S(H)$ или антисимметрическим $\Gamma^a(H)$ описывается эта система — сами частицы наз. бозонами или соответственно фермионами. Для любого $n=1, 2, \ldots$ подпространство $\Gamma_n^\alpha(H)\equiv(H^{\otimes n})_\alpha\subset\Gamma^\alpha(H)$, $\alpha=S, a$, наз. n-частичным подпространством: его векторы описывают те состояния, в к-рых имеется ровно n частиц; единичный вектор $\Omega\in(H^{\otimes 0})_\alpha\subset\Gamma^\alpha(H)$, $\alpha=S, a$ (в записи (1): $\Omega=\{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$), наз. вакуумным вектором, описывает состояние системы, в к-ром нет ни одной частицы.

При изучении линейных операторов, действующих в Ф. п. $\Gamma^S(H)$ и $\Gamma^a(H)$, часто применяется специальный формализм, наз. методом вторичного квантования. Он основан на введении в каждом из пространств $\Gamma^\alpha(H)$, $\alpha=S, a$, двух семейств линейных операторов: т. н. операторов уничтожения $\{a_\alpha(f), f\in H\}$, $\alpha=S, a$, и семейства сопряженных к ним операторов $\{a_\alpha^*(f)\, f\in H\}$, наз. операторами рождения. Операторы уничтожения задаются как замыкания операторов, действующих на векторы

$$(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)_\alpha\in\Gamma^\alpha(H),\ \alpha=S, a, \tag{4}$$

где $(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)_\alpha$ симметризованные (при $\alpha=S$) или антисимметризованные ($\alpha=a$) тензорные произведения последовательностей векторов $f_1, \ldots, f_n\in H$, $n=1, 2, \ldots$, по формулам

$$a_\alpha(f)(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)_\alpha=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{g_\alpha(i)}(f_i, f)\times$$
$$\times(f_1\otimes\ldots\otimes f_{i-1}\otimes f_{i+1}\otimes\ldots\otimes f_n)_\alpha,$$
$$\alpha=S, a,\ a_\alpha(f)\Omega=0,$$

где $g_S(i)=0$ и $g_a(i)=i-1$. Операторы же рождения $a_\alpha^*(f)$ действуют на векторы (3) по формулам

$$a_\alpha^*(f)(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)_\alpha=(f\otimes f_1\otimes\ldots\otimes f_n),$$
$$a_\alpha^*(f)\Omega=f.$$

При этом для любого $f\in H$, $a_\alpha(f):\Gamma_n^\alpha(H)\longrightarrow\Gamma_{n-1}^\alpha(H)$, $n=1, 2, \ldots$, а $a_\alpha^*(f):\Gamma_n^\alpha(H)\longrightarrow\Gamma_{n+1}^\alpha(H)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, т. е. состояние физич. системы с n частицами операторами уничтожения $a_\alpha(f)$ переводится в состояние с $(n-1)$-й частицей, а операторами рождения $a_\alpha^*(f)$ — в состояние с $(n+1)$-й частицей. Операторы рождения и уничтожения оказываются во многих случаях удобной системой «образующих» в совокупности всех операторов (ограниченных и неограниченных), действующих в Ф. п. Представление таких операторов в виде суммы (конечной или бесконечной) операторов вида

$$a_\alpha^*(f_1)\ldots a_\alpha^*(f_n)\,a_\alpha(g_1)\ldots a_\alpha(g_m),$$
$$(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m\in H,\ n, m=0, 1, 2, \ldots),$$

т. н. нормальная форма оператора,— и основанные на таком представлении способы действия с операторами (вычисление функций от них, приведение операторов к какому-нибудь «простейшему» виду, различные приемы аппроксимации и т. д.) и составляют содержание упомянутого выше формализма вторичного квантования (см. [2]).

В случае симметричного Ф. п. $\Gamma^S(H)$ над действительным пространством H существует канонич. изоморфизм между этим пространством и гильбертовым пространством квадратично суммируемых функционалов от гауссовской линейной случайной функции $\{\xi_f, f\in H\}$, определенной на пространстве H, и такой, что

$$M_{\xi_f}=0,\ M(\xi_{f_1}\xi_{f_2})=(f_1, f_2)_H,\ f, f_1, f_2\in H.$$

Этот изоморфизм, наз. отображением Ито—Сигала—Вика, однозначно определяемый тем условием, что для любой ортонормированной системы элементов $f_1, \ldots, f_k\in H$ и любого набора целых неотрицательных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ вектор

$$\underbrace{f_1\otimes\ldots\otimes f_1}_{n_1\text{ раз}}\otimes\ldots\otimes\underbrace{f_k\otimes\ldots\otimes f_k}_{n_k\text{ раз}}\in\Gamma^S(H)$$

переходит в функционал

$$\prod_{i=1}^{k} H_{n_i}(\xi_{f_i}),$$

где $H_n(\cdot)$, $n=0, 1, \ldots$,— многочлен Эрмита со старшим коэффициентом, равным единице (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Fock V., «Z. Phys.», 1932, Bd 75, S. 622—47; [2] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965, [3] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67—122; [4] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976.

Р. А. Минлос.

ФОКАЛЬНАЯ СЕТЬ конгруэнции — сеть, к-рую на фокальной поверхности конгруэнции прямых (гиперболической) высекают развертывающиеся поверхности этой конгруэнции. Ф. с. конгруэнции — *сопряженная сеть*. Одно семейство ее линий состоит из ребер возврата одного семейства развертывающихся поверхностей конгруэнции; другое семейство образовано линиями касания с фокальной поверхностью развертывающихся поверхностей другого семейства. Всякая сопряженная сеть на двумерной поверхности является Ф. с. конгруэнции касательных к линиям одного из семейств этой сети. У каждой гиперболич. конгруэнции прямых две Ф. с.

Лит.: [1] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950.

В. Т. Базылев.

ФОККЕРА — ПЛАНКА УРАВНЕНИЕ — уравнение для плотности переходной функции, описывающей непрерывный марковский процесс диффузионного типа. Ф.—П. у. — то же, что прямое *Колмогорова уравнение*. См. также *Диффузионный процесс*.

ФОКУС — точка F, лежащая в плоскости кривой 2-го порядка и такая, что отношение расстояния любой точки кривой до F к расстоянию до заданной прямой (директрисы) равно постоянному числу (эксцентриситету). См. также *Конические сечения*.

Ф. кривой 2-го порядка могут быть определены как точки пересечения касательных к этой кривой, проведенных из *круговых точек* плоскости. Это определение Ф. распространяется и на алгебраич. кривые n-го порядка.

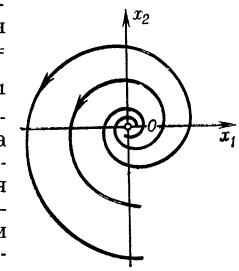
А. Б. Иванов.

ФОКУС — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot{x}=f(x),\ x=(x_1, x_2),\ f\colon G\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f\in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0 такая, что для всех траекторий системы, начинающихся в $U\setminus\{x_0\}$, отрицательные полутраектории являются уходящими (с течением времени покидают любой компакт $V\subset U$), а положительные полутраектории, не выходя из U, примыкают к точке x_0, наматываясь на нее наподобие логарифмич. спиралей, или наоборот. Ф. наз. при этом и сама точка x_0. Характер приближения траекторий системы к Ф. x_0 можно описать точнее, если ввести на плоскости (x_1, x_2) полярные координаты r, φ с полюсом в x_0. Тогда для любой примыкающей к Ф. x_0 полутраектории $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $t\geqslant 0$ ($t\leqslant 0$), полярный угол переменной точки $\varphi(t)\to+\infty$ (левый Ф.) или $-\infty$ (правый Ф.) при $t\to\infty$.

Ф. либо асимптотически устойчив по Ляпунову, либо вполне неустойчив (асимптотически устойчив при $t\to-\infty$). Его индекс Пуанкаре равен 1. На рис. изображен правый неустойчивый Ф. $x_0=(0, 0)$.



Для системы (*) класса C^1 ($f\in C^1(G)$) точка покоя x_0 является Ф. в случае, когда матрица $A=f'(x_0)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения с отличной от нуля действительной частью, но может быть Ф. и в тех случаях, когда эта матрица имеет чисто мнимые или кратные действительные собственные значения (см. также *Центр*, *Центра и фокуса проблема*).

Лит. см. при ст. *Особая точка* дифференциального уравнения.

А. Ф. Андреев.

ФОРМА — многочлен от нескольких переменных, все члены к-рого имеют одну и ту же степень.

В зависимости от числа m переменных Ф. называют бинарными (при $m=2$), тернарными (при $m=3$) и т. д.; в зависимости от степени n их членов — линейными (при $n=1$), квадратичными (при $n=2$), кубичными (при $n=3$) и т. д. Если переменные можно разбить на группы так, чтобы каждый член Ф. линейно зависел от переменных каждой группы, то Ф. называется *полилинейной формой*. Любая Ф. может быть получена из полилинейной Ф. путем отождествления нек-рых переменных. Обратно — из каждой Ф. можно путем нек-рого процесса, называемого процессом поляризации, получить полилинейную Ф.

Наиболее важными для приложений являются *квадратичные формы*. Теория квадратичных Ф. тесно связана с теорией кривых и поверхностей 2-го порядка (см. также *Эрмитова форма*).

В теории чисел весьма важным является вопрос о представимости целых чисел как значений Ф. с целочисленными коэффициентами при целочисленных значениях переменных.

В дифференциальной и римановой геометрии используются *дифференциальные формы*. Многие теоремы интегрального исчисления (см. *Грина формулы*, *Остроградского формула*, *Стокса формула*) могут рассматриваться как теоремы о связи дифференциальных Ф. различной степени.

По материалам одноименной статьи БСЭ-3.

ФОРМА алгебраической группы G, определенной над полем k,—алгебраич. группа G', определенная над k и изоморфная группе G над нек-рым расширением L поля k. В этом случае G' наз. L/k-формой алгебраич. группы G. Если k_s — сепарабельное замыкание поля k в фиксированном основном алгебраически замкнутом поле K (универсальной области), то k_s/k-формы наз. просто k-формами группы G. Две L/k-формы группы наз. эквивалентными, если они изоморфны над k. Множество всех классов эквивалентных L/k-форм группы G обозначается через $E(L/k, G)$ (в случае $L=k_s$ — через $E(k, G)$) (см. [5], [7], [8]).

Пример. Пусть $k=\mathbb{R}$, $K=\mathbf{C}$, а

$$G'=\left\{\begin{Vmatrix} x & y\\ -y & x\end{Vmatrix}\ \middle|\ x^2+y^2=1\right\}$$

и

$$G=\{\operatorname{diag}(x, y)\mid xy=1\}$$

— две определенные над k подгруппы полной линейной группы $GL(2)$, тогда G' является k-формой G (соответствующий определенный над K изоморфизм $\varphi : G' \to G$ задается формулой

$$\varphi\left(\begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}\right) \quad \mathrm{diag}\,(x+iy,\ x-iy)).$$

Эта k-форма не эквивалентна G (если рассматривать G как свою собственную k-форму относительно тождественного изоморфизма $G \to G$). В рассмотренном примере множество $E(k, G)$ состоит из двух элементов, представленных указанными двумя k-формами.

Задача классификации Ф. алгебраич. групп естественно переформулируется на языке *Галуа когомологий*; [3, 5]. А именно, пусть L/k — расширение Галуа с группой Галуа $\Gamma_{L/k}$ (снабженной топологией Крулля). Группа $\Gamma_{L/k}$ естественно действует на группе $\mathrm{Aut}_L G$ всех L-автоморфизмов группы G, а также на множестве всех L-изоморфизмов группы G' в группу G (в координатах эти действия сводятся к применению автоморфизмов из $\Gamma_{L/k}$ к коэффициентам рациональных функций, определяющих соответствующее отображение). Пусть $\varphi: G' \to G$ — нек-рый L-изоморфизм, $\sigma \in \Gamma_{L/k}$ и φ^σ — образ φ под действием σ. Тогда отображение $\Gamma_{L/k} \to \mathrm{Aut}_L G$, $\sigma \mapsto c_\sigma = \varphi^\sigma \circ \varphi^{-1}$ является непрерывным 1-коциклом группы $\Gamma_{L/k}$ со значениями в дискретной группе $\mathrm{Aut}_L G$. При замене φ на другой L-изоморфизм $G' \to G$ указанный коцикл заменяется на когомологичный. Тем самым возникает отображение $E(L/k, G) \to H^1(\Gamma_{L/k}, \mathrm{Aut}_L G)$. Основное утверждение о когомологич. интерпретации задачи описания Ф. группы G состоит в том, что это отображение биективно. В случае когда все автоморфизмы c_σ внутренние, G' наз. в н у т р е н н е й ф о р м о й г р у п п ы G, а в противном случае — в н е ш н е й.

Для связных редуктивных групп имеется глубоко развитая теория Ф. В ней устанавливаются относительные варианты структурной теории редуктивных групп над алгебраически замкнутым полем: k-корни, k-группа Вейля, разложение Брюа над k и т. п.; при этом роль максимальных торов играют максимальные k-разложимые торы, а роль борелевских подгрупп — минимальные k-параболич. подгруппы [1, 2, 6, 7]. Эта теория позволяет свести вопрос о классификации Ф. к классификации анизотропных над k редуктивных групп (см. *Анизотропная группа*, *Анизотропное ядро*); вопрос о классификации последних существенно зависит от свойств поля k. Если $k=\mathbb{R}$, а $K=\mathbb{C}$, то описание Ф. полупростых алгебраич. групп — это описание вещественных Ф. комплексных полупростых алгебраич. групп (см. *Комплексификация группы Ли*).

Лит.: [1] Б о р е л ь А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Х а м ф р и Д ж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [3] С е р р Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [4] е г о ж е, Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [5] В о с к р е с е н с к и й В. Е., Алгебраические торы, М., 1977, [6] Б о р е л ь А., Т и т с Ж., «Математика», 1967, т. 11, в. 1, с. 43—111; в. 2, с. 3—31, [7] T i t s J., «Proc. Symposia pure Math.», 1966, v. 9, p. 33—62; [8] S p r i n g e r T. A., там же, 1979, v. 33, pt. 1, p. 3—27; [9] S e r r e J.-P., Local fields, N. Y.— [a.o.], 1979.

В. Л. Попов.

ФОРМАЛИЗАЦИИ МЕТОД — способ получения *формальной системы* из содержательной математич. теории; один из основных методов в *доказательств теории*.

Применение Ф. м. подразумевает выполнение следующих этапов.

1) Символизация исходной математич. теории. При этом все предложения теории записываются в подходящем логико-математич. языке L.

2) Дедуктивный анализ теории и выделение аксиом, т. е. тех предложений теории, из к-рых логически выводимы все предложения теории.

3) Присоединение аксиом в их символич. записи к подходящему, основанному на языке L, *логическому исчислению*.

Полученная при этом формальная система уже сама является объектом точного математич. изучения (см. *Аксиоматический метод*, *Доказательств теория*).

Лит. [1] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

С. Н. Артемов.

ФОРМАЛИЗМ — направление в основаниях математики, программа к-рого была выдвинута Д. Гильбертом (D. Hilbert). Целью этой программы было доказательство *непротиворечивости* математики точным математич. способом. Программа Гильберта предусматривала уточнение понятия доказательства, чтобы последние могли быть объектами математич. теории — *доказательств теории*.

Чтобы сделать возможным точное рассмотрение доказательств, им придается единая, точно определенная форма. Это осуществляется с помощью формализации теорий: утверждения теории заменяются конечными последовательностями определенных знаков, а логич. способы заключения — формальными правилами образования новых формально представленных высказываний из уже доказанных. Таким образом, математич. теория заменяется *формальной системой*.

Несмотря на то что попытка осуществления программы Гильберта в целом оказалась несостоятельной (см. *Гёделя теорема о неполноте*), проведенные в рамках этой программы исследования имели большое значение для развития многих разделов математич. логики.

Термин «Ф.» часто употребляется как синоним формальной системы и вообще для обозначения исчисления, позволяющего заменять операции с объектами операциями с соответствующими им знаками. В философии математики Ф. означает взгляд на природу математики, согласно к-рому математика характеризуется скорее своим методом, нежели предметом изучения; ее объекты либо не определяются, либо если и определяются, то таковы, что подлинная их природа несущественна.

Лит.: [1] Г и л ь б е р т Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Г е н ц е н Г., в кн.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 77—153; [3] G ö d e l K., «Monatsh. Math. und Phys.», 1931, Bd 38, S. 173—98, [4] Н о в и к о в П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [5] К л и н и С., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [6] К а р р и Х., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969.

В. Е. Плиско.

ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ ЯЗЫК — искусственный язык, для к-рого имеется точное формальное определение класса выражений языка и достаточно строгое объяснение значения или смысла этих выражений. Обычно выражения Ф. я. представляют собой формальные комбинации исходных символов, образующиеся по определенным правилам образования выражений данного языка. Описание выражений Ф. я. и связей между ними составляет с и н т а к с и с языка. Выявление смысла выражений относится к с е м а н т и к е языка. Таким образом, задать Ф. я.— это значит построить его синтаксис и указать семантику. В формулировках синтаксич. понятий Ф. я. не разрешается использовать семантич. понятия. Все синтаксич. определения должны быть понятны лицу, незнакомому с семантикой языка. Это основное требование, отличающее Ф. я. от естественных, ведет к отделению синтаксиса от семантики и к появлению языков с одинаковым синтаксисом, но разными семантиками. Часто под Ф. я. понимают только его синтаксис, а возможные семантики наз. и н т е р п р е т а ц и я м и языка.

Достигаемая в Ф. я. четкая фиксация языковых средств выражения позволяет устранить неявные ссылки на интуитивную очевидность, неизбежные при неформальном аксиоматич. построении теории (см. *Неформальный аксиоматический метод*). Формализация языка создает основу для формализации дедуктивных средств исследуемой математич. теории. Понятие Ф. я. лежит в основе гильбертовского понятия *формальной системы*.

Иногда в понятие Ф. я. включают не только его синтаксис и семантику, но и точную фиксацию допустимых дедуктивных средств получения верных предложений Ф. я. (т. е. включают аксиомы и правила вывода). Конкретные примеры Ф. я. приведены в статьях *Аксиоматическая теория множеств*, *Арифметика формальная*, *Предикатов исчисление*, *Типов теория*.

С семантич. точки зрения выделяют следующие виды языковых выражений: переменные, термы, формулы. Каждой переменной сопоставляется (при семантич. истолковании) нек-рая область ее допустимых значений — область изменения переменной. Если у всех переменных область изменения оказывается одной и той же, то язык наз. о д н о с о р т н ы м. В противном случае — м н о г о с о р т н ы м. В многосортном языке должны быть синтаксич. правила образования сортов, наз. также т и п а м и. Каждая переменная такого языка имеет вполне определенный тип. Семантич. правила должны сопоставлять каждому типу τ нек-рую область V_τ. Переменные, имеющие тип τ, «пробегают» область V_τ.

Термы и формулы могут содержать параметры, т. е. иметь свободные вхождения переменных (см. *Свободная переменная*). С семантич. точки зрения терм без параметров (з а м к н у т ы й т е р м) является, вообще говоря, составным *именем*, обозначающим вполне определенный объект, а формула без параметров (з а м к н у т а я ф о р м у л а, или п р е д л о ж е н и е) является сложным высказыванием, выражающим вполне определенное суждение. В Ф. я. могут быть простейшие термы, наз. к о н с т а н т а м и. Они относятся к числу исходных символов Ф. я.

При наличии параметров термы являются и м е н н ы м и ф о р м а м и, а формулы — в ы с к а з ы в а т е л ь н ы м и ф о р м а м и. Это означает, что при каждом допустимом наборе значений свободных переменных (параметров) в соответствии с семантикой языка именная форма обозначает вполне определенный объект, а высказывательная форма выражает вполне определенное суждение. Обычно переменные относят к термам. При таком подходе терм, являющийся переменной, имеет эту переменную своим параметром. Термы и формулы, параметры к-рых содержатся среди переменных $x_1, \ldots, x_n$, можно рассматривать как имена функций и соответственно предикатов от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Формулы можно рассматривать и как термы, принимающие особые *истинностные значения* (в классич. случае имеется два истинностных значения: «истина» и «ложь»). При таком понимании формул для формулировки суждений можно ограничиться суждениями, выражающими равенство термов одному выделенному терму, обозначающему «истину».

Широко распространены Ф. я., удовлетворяющие требованиям эффективности, состоящим в том, что выражениями языка должны быть финитные объекты, и все его синтаксич. понятия (термы, формулы и др.) должны быть алгоритмически разрешимы. Рассматривают иногда языки, не удовлетворяющие требованиям эффективности, содержащие, напр., бесконечно длинные выражения или использующие нефинитные объекты в качестве исходных символов. (Так, при изучении векторных пространств употребителен язык, среди исходных символов к-рого содержатся все действительные числа.)

В случае когда выражениями Ф. я. являются нефинитные объекты, правила образования его выражений уже нельзя считать интуитивно очевидными конструкциями, порождающими новые выражения из уже построенных. Необходимо уточнить как сами правила, так и способ, к-рым они определяют класс выражений. Можно, напр., рассматривать эти правила как операции на множествах уже имеющихся «выражений», а не как конструкции, порождающие новые выражения. При этом Ф. я. должен быть свободным объектом в подходящей категории. Употребительно также теоретико-множественное уточнение, при к-ром нефинитные объекты (в частности, выражения) берутся из нек-рого достаточно богатого множествами теоретико-множественного универсума (наз. д о п у с т и м ы м м н о ж е с т в о м). Правила образования выражений рассматриваются как пункты индуктивного определения, выделяющего из допустимого множества подкласс, состоящий из выражений.

Лит.: [1] Ч е р ч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960, [2] Г и л ь б е р т Д., Б е р н а й с П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982, [3] Справочная книга по математической логике, ч. 1—4, М., 1982,1983.

В. Н. Гришин.

ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА — алгебраический аналог понятия локальной группы Ли. Теория Ф. г. имеет многочисленные применения в алгебраической геометрии, теории полей классов и теории кобордизмов.

Ф. г. над полем k — групповой объект в категории связных аффинных формальных схем над k (см. [1], [4], [6], [7]). Здесь связная аффинная формальная схема — ковариантный функтор H из категории конечномерных коммутативных k-алгебр B в категорию множеств, изоморфный функтору H_A, сопоставляющему алгебре B множество гомоморфизмов алгебр $A \to B$ из нек-рой нётеровой коммутативной локальной k-алгебры A с максимальным идеалом m и полем вычетов k, полной в m-адической топологии, переводящих идеал m в множество нильпотентных элементов $\mathrm{nil}(B)$ алгебры B. То, что H — групповой объект означает, что на всех множествах $H(B)$ задана структура группы, причем для любого гомоморфизма k-алгебр $B_1 \to B_2$ соответствующее отображение $H(B_1) \to H(B_2)$ является гомоморфизмом групп. Если все группы $H(B)$ коммутативны, то Ф. г. H наз. коммутативной. Любая связная *групповая схема* G над k определяет Ф. г. $\hat{G}$; $B \mapsto G(B)$. При этом в качестве A можно взять пополнение локального кольца схемы G в единице.

Если A — кольцо формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ от n переменных над k, то Ф. г. H наз. n-м е р н о й Ф. г. Ли. Для связной *алгебраической группы* G над k Ф. г. $\hat{G}$ — Ф. г. Ли. Ф. г. Ли H изоморфна, как функтор в категорию множеств, функтору $D^n: B \mapsto \mathrm{nil}(B)^n$, сопоставляющему алгебре B, n-кратное декартово произведение ее нильрадикала $\mathrm{nil}(B)$ на себя. Групповая структура на множествах $H(B) = \mathrm{nil}(B)^n$ задается ф о р м а л ь н ы м г р у п п о в ы м з а к о н о м — набором из n формальных степенных рядов от $2n$ переменных $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$:

$$F_1(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n), \ldots,$$
$$F_n(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$F_i(X, 0) = X_i,\ F_i(0, Y) = Y_i,$$
$$F_i(X_1, \ldots, X_n, F_1(Y, Z), \ldots, F_n(Y, Z)) =$$
$$= F_i(F_1(X, Y), \ldots, F_n(X, Y), Z_1, \ldots, Z_n).$$

Здесь $X = (X_1, \ldots, X_n), Y = (Y_1, \ldots, Y_n), Z = (Z_1, \ldots,$

Z_n), $0=(0, \ldots, 0)$. Групповой закон на множествах $H(B)=\mathrm{nil}\,(B)^n$ задается формулами

$$(x_1, \ldots, x_n) \bigcirc (y_1, \ldots, y_n)=(z_1, \ldots, z_n),$$

где $z_i=F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$; в силу нильпотентности x и y все члены рядов кроме конечного числа равны 0. И любой формальный групповой закон задает на $\mathrm{nil}\,(B)^n$ структуры групп с помощью формул (*) и превращает функтор D^n в Ф. г. Ли. Понятие формального группового закона, и тем самым понятие Ф. г. Ли, обобщается на случай произвольных коммутативных базисных колец (см. [2], [5]). Иногда под Ф. г. понимают лишь Ф. г. Ли или даже формальный групповой закон.

Так же как и для *Ли локальных групп*, определяется алгебра Ли Ф. г. Ли. Над полями k характеристики 0 сопоставление Ф. г. Ли ее алгебры Ли определяет эквивалентность соответствующих категорий. В характеристике $p>0$ ситуация сложнее. Так, над алгебраически замкнутым полем (при $p>0$) существует счетное число попарно неизоморфных одномерных коммутативных Ф. г. Ли [1], в то время как все одномерные алгебры Ли изоморфны [3]. Над совершенными полями конечной характеристики коммутативные Ф. г. Ли классифицируются с помощью модулей Дьёдонне (см. [1, 6]).

Теория Ф. г. над полями обобщается на случай произвольных базисных формальных схем [7].

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 3—90; [2] Бухштабер В. М., в кн.: Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [5] Lazard M., Commutative formal groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1975; [6] Fontaine J.-M., Groupes p-divisibles sur les corps locaux, P., 1977, [7] Mazur B., Tate J., в кн.: Arithmetic and geometry, v. 1, Boston — Basel — Stuttg., 1983, p. 195—237. *Ю. Г. Зархин.*

ФОРМАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — производная многочлена, рациональной функции или формального степенного ряда, определяемая чисто алгебраически (без использования понятия предельного перехода) и имеющая смысл для любого кольца коэффициентов. Для многочлена

$$F(X)=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

(или степенного ряда

$$A(X)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i)$$

Ф. п. $F'(X)$ определяется как $\sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$ (соответственно как $\sum_{i=1}^{\infty} i b_i X^{i-1}$), а для рациональной функции $f(X)=P(X)/Q(X)$ — это рациональная функция

$$f'(X)=\{P'(X)\,Q(X)-Q'(X)\,P(X)\}/[Q(X)]^2.$$

Аналогично определяются Ф. п. высших порядков и частные Ф. п. для функций от нескольких переменных.

Для Ф. п. остается справедливым ряд свойств обычной производной. Так, если $F'(X)=0$, то $F(X)$ — константа из поля коэффициентов (в случае характеристики 0) и равна $G(X^p)$ (в случае характеристики p). Если x_0 — корень многочлена кратности k, то x_0 является корнем производной $F'(X)$ кратности $k-1$.

Л. В. Кузьмин.

ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА, дедуктивная система,— в математич. логике неинтерпретированное *исчисление*, задаваемое правилами образования выражений этого исчисления и правилами построения *выводов* в этом исчислении. Выражения Ф. с. рассматриваются как чисто формальные комбинации символов; правила вывода определяют, в каких случаях одно формальное выражение A выводится из других формальных выражений $B_1, \ldots, B_n$. Если $n=0$, то A наз. аксиомой. Выводы представляют собой либо последовательности, либо древовидные фигуры, составленные из формальных выражений согласно правилам вывода. Если в вершинах дерева вывода находятся только аксиомы, то формальное выражение, завершающее вывод, наз. выводимым в Ф. с.

Наиболее интересны Ф. с., удовлетворяющие требованиям эффективности языка и понятия вывода. Это означает, что должна иметься эффективная процедура для распознавания того, является ли произвольная последовательность символов выражением Ф. с. или нет. Такому же требованию должно удовлетворять понятие вывода. Понятие выводимого выражения в эффективных Ф. с., вообще говоря, не является эффективным.

Понятие Ф. с.— одно из центральных в математич. логике, оно обслуживает нужды как самой математич. логики, так и смежных с ней областей математики.

Наиболее важный класс Ф. с.— формальные теории 1-го порядка (см. [4]), формализующие какую-либо область содержательной математики. Исторически этот класс Ф. с. возник в связи с программой Д. Гильберта (D. Hilbert) обоснования математики (см. *Формализм*).

Понятия и методы, выработанные математич. логикой при изучении Ф. с., нашли применения в различных областях математики, напр. в теории групп и теории категорий. Ценность понятия Ф. с. определяется плодотворностью способа исследования, основанного на идеях, связанных с этим понятием.

См. также *Формальный математический анализ.*

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Черч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960, с. 15—63; [4] Mac Lane S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 82, № 1, p. 1—40. *В. Н. Гришин.*

ФОРМАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ тригонометрических рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \text{ и } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

— ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{inx},$$

где

$$K_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \gamma_{n-m}.$$

Если $c_n \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\gamma_n| < \infty$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

сходится к сумме $\lambda(x)$, то ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (K_n-\lambda(x)\,c_n)\,e^{inx}$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$. Условие

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\gamma_n| < \infty$$

выполняется, если, напр.,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

есть ряд Фурье трижды дифференцируемой функции $\lambda(x)$.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965. *Т. П. Лукашенко.*

ФОРМАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — название формальной аксиоматич. теории, специально предназначенной для формализации (точного описания доказательств) математич. анализа. При этом формальную аксиоматич. теорию стараются выбирать по возможности минимальной по своим дедуктивным и выразительным возможностям, но все же достаточной для формализации всего традиционного материала математич. анализа.

Наиболее распространенный вариант Ф. м. а., принадлежащий Д. Гильберту (D. Hilbert) и П. Бернайсу (P. Bernays; см. [1]), можно описать следующим образом. К языку классич. *арифметики формальной* добавляется новый вид переменных X, Y, Z, ..., к-рые рассматриваются как пробегающие множества натуральных чисел. Добавляется новый вид атомарных формул: $(t \in X)$ («t принадлежит множеству X»). Логич. аксиомы формальной арифметики и схема аксиом индукции естественно усиливаются таким образом, чтобы включать в себя формулы расширенного языка. Наконец, добавляется единственная новая схема аксиом — схема аксиом свертывания:

$$\exists X \forall y\,(y \in X \equiv A(y)),$$

где $A(y)$ — формула рассматриваемого языка, не содержащая свободно X, y — переменная для натуральных чисел.

Эта теория (т. н. теория Гильберта — Бернайса, в ней идет речь лишь о натуральных числах и о множествах натуральных чисел) достаточна для естественной формализации математич. анализа. Интересна проблема обоснования непротиворечивости теории Гильберта — Бернайса конструктивными в достаточной степени методами. Согласно *Гёделя теореме о неполноте*, для этого необходимо использовать метаматематич. средства, выходящие за пределы Ф. м. а. К. Спектору (см. [3]) удалось доказать непротиворечивость этой теории с помощью остроумной модификации интерпретации Гёделя для интуиционистской арифметики (см. *Гёделя интерпретация* интуиционистской арифметики), к-рая представляет собой нек-рое далеко идущее расширение требований *интуиционизма*. Фундаментальные трудности в попытках доказательства непротиворечивости теории Гильберта — Бернайса связаны с той особенностью аксиомы свертывания этой теории, что в формуле $A(y)$ этой системы разрешается свободно использовать кванторы по множествам. Таким образом, при выяснении принадлежности числа y определяемому в аксиоме множеству X необходимо использовать наличие всех множеств натуральных чисел, в том числе и определяемое множество X. Можно сказать, что аксиома свертывания формального анализа выражает до нек-рой степени необходимость актуального существования всех множеств одновременно.

Эта особенность (она встречается во многих теоретико-множественных формальных теориях) наз. непредикативностью теории. Формальный анализ Гильберта — Бернайса является анализом непредикативным.

Для устранения непредикативности были предложены различные формальные аксиоматич. теории предикативного (иначе, разветвленного) анализа. Напр., в одной из распространенных формулировок, восходящих к Г. Вейлю (H. Weyl), рассматриваются переменные вида X^m, Y^k, ... с натуральными верхними индексами. Переменные рассматриваются как пробегающие множества натуральных чисел. Схема аксиом свертывания в этой теории имеет вид

$$\exists X^m \forall y\,(y \in X^m \equiv A(y)),$$

где в $A(y)$ связанные переменные по множествам имеют индекс $<m$, а свободные переменные по множествам — индекс $\leqslant m$. Таким образом, множества натуральных чисел в предикативном анализе, содержательно говоря, распадаются («разветвляются») на слои, причем множества более высокого слоя определяются лишь с помощью множеств меньших слоев (и уже построенных множеств данного слоя). Непротиворечивость разветвленного анализа сравнительно легко обосновывается конструктивными средствами, но простота этой теории достигается дорогой ценой: разветвленный анализ несравненно хуже приспособлен для формализации. Так, наименьшая верхняя грань ограниченного множества действительных чисел определяется существенно непредикативным способом и соответствующая теорема Ф. м. а. в предикативном анализе приобретает весьма неестественный вид.

Имеется эквивалентная формулировка непредикативного анализа Гильберта — Бернайса, в к-рой вместо множеств натуральных чисел фигурируют функции, перерабатывающие натуральные числа в натуральные. А именно, для такого вида функций к формальной арифметике добавляются переменные α, β, γ, ... и новый вид термов: $\alpha(t)$ («результат применения α к t»); логич. аксиомы и схема аксиом индукции естественно распространяются на формулы нового языка, и, наконец, добавляется единственная новая схема аксиом, так наз. аксиома выбора анализа:

$$\forall x \exists y A(x, y) \supset \exists \alpha \forall x A(x, \alpha(x)),$$

утверждающая, что если для всякого x найдется y, удовлетворяющий условию $A(x, y)$, то существует функция α, выдающая по x соответствующий y. Ценность этой формулировки состоит в том, что после исключения из числа логич. аксиом теории закона исключенного третьего полученная система удобна для формализации в ней интуиционистского или конструктивного Ф. м. а. Интуиционистский (соответственно конструктивный) Ф. м. а. представляет собой переработку традиционного материала математич. анализа в соответствии с требованиями программы *интуиционизма* (соответственно *конструктивной математики*). При формализации этих дисциплин открывается возможность трактовать переменные α, β, γ, ... как пробегающие только «эффективные» в том или ином смысле функции, напр. интуиционистские свободно становящиеся последовательности. При такой интерпретации аксиома выбора анализа является истинным утверждением. Для развития содержательных разделов анализа последнюю теорию пополняют новыми аксиомами, выражающими специфически интуиционистские или конструктивные принципы, такие, как *бар-индукция* или принцип конструктивного подбора А. А. Маркова.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., [2 изд.], М., 1982; [2] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Spektor C l., в кн.: Recursive function theory, Providence, 1962, p. 1—27 («Proc. Sympos. Pure Math.», 1962, v. 5). *А. Г. Драгалин.*

ФОРМАЛЬНЫЙ СТЕПЕННОЙ РЯД над кольцом A от коммутирующих переменных T_1, ..., T_n — алгебраич. выражение вида

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k,$$

где F_k — форма от T_1, ..., T_n с коэффициентами из A степени k. Минимальное значение k, для к-рого $F_k \neq 0$, наз. порядком ряда F, а форма F_k наз. начальной формой ряда.

Если

$$F=\sum_{k=0}^{\infty} F_k \text{ и } G=\sum_{k=0}^{\infty} G_k$$

— два Ф. с. р., то, по определению,

$$F+G=\sum_{k=0}^{\infty}(F_k+G_k)$$

и

$$F\cdot G=\sum_{n=0}^{\infty} H_n,$$

где

$$H_n=\sum_{k=0}^{n} F_k G_{n-k}.$$

Относительно этих операций множество $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ всех Ф. с. р. образует кольцо.

Многочлен $F=\sum_{k=0}^{n} F_k$, где F_k—форма степени k, отождествляется с Ф. с. р. $C=\sum_{k=0}^{\infty} C_k$, где $C_k=F_k$ при $k\leqslant n$ и $C_k=0$ при $k>n$. Это определяет вложение i кольца многочленов $A[T_1, \ldots, T_n]$ в кольцо $A[[T_1, \ldots, T_n]]$. В кольце $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ определена топология, для к-рой идеалы

$$I_n=\{F\in A[[T_1, \ldots, T_n]] \mid F_k=0 \text{ при } k\leqslant n\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология отделима, кольцо $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ полно относительно этой топологии, и образ вложения i всюду плотен в $A[[T_1, \ldots, T_n]]$. Относительно этой топологии Ф. с. р. F является пределом своих частичных сумм $\sum_{k=0}^{n} F_k$.

Пусть A—коммутативное кольцо с единицей. Тогда таково же и кольцо $A[[T_1, \ldots, T_n]]$. Если A—область целостности, то и $A[[T_1, \ldots, T_n]]$—область целостности. Ф. с. р. F обратим в кольце $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ тогда и только тогда, когда F_0 обратим в A. Если A—нётерово, то и $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ также нётерово. Если A—локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то $A[[T_1, \ldots, T_n]]$—локальное кольцо с максимальным идеалом $(\mathfrak{m}, T_1, \ldots, T_n)$.

Если локальное кольцо A отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-адической топологии, то в кольце $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ справедлива подготовительная теорема Вейерштрасса. Пусть F—Ф. с. р. такой, что для нек-рого k форма F_k содержит член aT_n^k, где $a\notin\mathfrak{m}$, и пусть k—минимальный индекс с этим свойством. Тогда $F=UP$, где U—обратимый Ф. с. р. и P—многочлен вида $T_n^k+a_{k-1}T_n^{k-1}+\ldots+a_0$, где коэффициенты a_i принадлежат максимальному идеалу кольца $A[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$. Элементы U и P однозначно определены рядом F.

Кольцо Ф. с. р. над полем или дискретно нормированным кольцом факториально.

Рассматриваются также кольца Ф. с. р. от некоммутирующих переменных.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 2, пер. с англ., М., 1963.

Л. В. Кузьмин.

ФОРМАЛЬНЫЙ ЯЗЫК в математической лингвистике — произвольное множество цепочек (т. е. *слов*) в нек-ром (конечном или бесконечном) *алфавите* V (иногда называемом также словарем), т. е. выражений вида $\omega=a_1\ldots a_k$, где $a_1, \ldots, a_k\in V$; число k, обычно обозначаемое $|\omega|$, есть длина цепочки ω. Рассматривается также пустая цепочка, обозначаемая через Λ; полагают $|\Lambda|=0$. Часто говорят о языке в алфавите V, опуская слово «формальный». В *математической лингвистике* и *автоматов теории* рассматриваются различные эффективные способы задания Ф. я., главным образом с помощью формальных *грамматик* и с помощью автоматов различных типов, к-рые в большинстве случаев могут быть описаны как модификации недетерминированных *Тьюринга машин*, часто многоленточных, с теми или иными ограничениями на способ работы машины на каждой ленте.

Операции над Ф. я. Кроме обычных теоретико-множественных операций, над Ф. я. производятся: умножение (или прямое умножение, или конкатенация) —

$$L_1L_2=\{xy \mid x\in L_1 \,\&\, y\in L_2\};$$

левое деление —

$$L_2\backslash L_1=\{x \mid \exists y,\ z\,(y\in L_1 \,\&\, z\in L_2 \,\&\, y=zx)\};$$

правое деление L_1/L_2 определяется симметрично левому; итерация —

$$L^*=L^0\cup L^1\cup L^2\cup\ldots,$$

где L^0 обозначает $\{\Lambda\}$ и $L^{n+1}=L^nL$ (в частности, множество всех цепочек в алфавите V есть V^*); усеченная итерация —

$$L^+=L^1\cup L^2\cup\ldots;$$

подстановка: если L — язык в конечном алфавите $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и $L_1, \ldots, L_n$ — произвольные языки, то

$$S(L;\ a_1, \ldots, a_n \mid L_1, \ldots, L_n)=$$
$$=\{x_{i_1}\ldots x_{i_k} \mid a_{i_1}\ldots a_{i_k}\in L \,\&\, x_{i_1}\in L_{i_1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_k}\in L_{i_k}\};$$

если каждый из языков L_i, $i=1, \ldots, n$, состоит из одной цепочки z_i, подстановка наз. *гомоморфизмом*; если при этом все z_i непусты, говорят о неукорачивающем гомоморфизме. Если язык $\{x\}$ состоит из одной цепочки x, то вместо $\{x\}L$, $\{x\}\backslash L$ и т. п. пишут xL, $x\backslash L$ и т. д. соответственно.

Многообразием языков наз. упорядоченная пара $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ (или $\mathcal{L}$, если $\mathcal{E}$ подразумевается), где $\mathcal{E}$—бесконечный алфавит, а $\mathcal{L}$—класс языков такой, что: 1) для каждого $L\in\mathcal{L}$ существует конечный алфавит $\Sigma\subset\mathcal{E}$ такой, что $L\subset\Sigma^*$; 2) $L\neq\varnothing$ для нек-рого $L\in\mathcal{L}$; 3) $\mathcal{L}$ замкнут относительно объединения, умножения, пересечения с регулярными множествами, усеченной итерации, неукорачивающих гомоморфизмов и обращений произвольных гомоморфизмов. Многообразие языков, замкнутое относительно произвольных гомоморфизмов, наз. полным.

Лит.: [1] Гладкий А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973; [2] Ginsburg S., Greibach S., Hopcroft Y., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1969, № 87, p. 1—32.

А. В. Гладкий.

ФОРМАЛЬНЫЙ ЯЗЫК, ПРЕДСТАВИМЫЙ МАШИНОЙ, формальный язык, распознаваемый машиной,— множество всех тех *слов*, при работе над к-рыми машина попадает в одно из выделенных состояний. Всякое рекурсивно перечислимое множество слов есть формальный язык (ф. я.), представимый нек-рой *Тьюринга машиной*. Чаще всего рассматривают распознавание машинами рекурсивных ф. я. Так, регулярные языки и только они распознаются *автоматами конечными*; контекстно-свободные языки и только они распознаются автоматами с магазинной памятью.

В том случае, когда ф. я. состоит из бесконечных слов (сверхслов), он наз. сверхъязыком. Определение распознавания сверхъязыка на машине может отличаться от основного определения. Напр., слово x принадлежит сверхъязыку, распознаваемому конечным автоматом $\mathfrak{A}$, тогда и только тогда, когда при работе над словом x автомат $\mathfrak{A}$ бесконечное число раз попадает в выделенное подмножество состояний.

При изучении конкретных ф. я., заданных не в машинных терминах (напр., посредством формальных *грамматик*), часто возникает потребность нек-рым образом охарактеризовать сложность языка. Одним из наиболее распространенных путей в этом направлении является отыскание подходящего класса машин, распознающих рассматриваемые языки, и определение сложности языков через сложностные характеристики машин. С другой стороны, изучение конкретного класса машин, как правило, включает описание Ф. я., п. м. этого класса. Дальнейшее исследование Ф. я., п. м. затрагивает вопросы соотношения с известными классами языков, свойства замкнутости (относительно теоретико-множественных операций и т. п.), вопросы алгоритмического и сложностного характеров.

Лит.: [1] Языки и автоматы. Сб. переводов, М., 1975.

С. С. Марченков

ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение между формальными системами, состоящее в том, что множества выражений, выводимых в этих системах совпадают. Точнее, две формальные системы S_1 и S_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) всякая аксиома системы S_1 выводима в системе S_2; 2) всякая аксиома системы S_2 выводима в системе S_1; 3) если выражение B непосредственно следует из выражений $A_1, \ldots, A_n$ в силу одного из правил вывода системы S_1 и выражения $A_1, \ldots, A_n$ выводимы в системе S_2, то B также выводимо в системе S_2; 4) аналогично 3) с заменой S_1 на S_2 и S_2 на S_1. *В. Е. Плиско*

ФОРМУЛА — выражение *формализованного языка*, предназначенное для записи суждения. Примеры точного определения понятия Ф. в различных формализованных языках см. в ст. *Аксиоматическая теория множеств*, *Арифметика формальная*, *Предикатов исчисление*, *Типов теория*. В математич. практике Ф. наз. также осмысленные комбинации символов, несущие разнообразную смысловую нагрузку. Они могут быть как именными, так и высказывательными формами, определениями-сокращениями и пр. *В. Н. Гришин*

ФОРТРАН (от ФОРмульный ТРАНслятор) — первоначально язык программирования задач вычислительной математики, разработанный в 1954—56 для машины ИБМ 704 и в версии Ф. II ставший первым в мире широко распространенным *алгоритмическим языком*.

Позднее под Ф. стали понимать семейство языков программирования, восходящих к Ф. II, прямо или косвенно претендующих на роль его преемника и сохраняющих название Ф. Большинство из них построено как расширение одного из двух стандартов (1962—64): Basic Fortran и Ф. IV и сходится в следующем.

Ф. предоставляет средства изображения, ввода и вывода арифметических, логических и текстовых данных. Арифметич. данные включают целые, действительные (обыкновенной и повышенной точности) и обычно также комплексные числа. Над арифметич. значениями определен обычный набор операций и отношений. Такие значения можно запоминать в скалярных переменных или элементах однородных массивов (таблиц) того же типа.

Программа состоит из «ведущей программы» и набора подпрограмм (*процедур*), причем возможна их раздельная трансляция. Изменение текстуального порядка исполнения осуществляется посредством простых и вычисляемых переходов по метке, условных операторов, циклов и вызовов процедур.

Подпрограммы передают друг другу информацию через свои параметры и общие блоки памяти (COMMON blocks). Так как рекурсивные вызовы запрещены, а границы массивов константны, часть действий по доступу к элементам массивов может быть подготовлена при трансляции, что значительно ускоряет счет по готовой программе.

Можно сказать, что главная особенность Ф. заключена не в самом языке, а в той уникальной роли, к-рую он обеспечил себе в мировом программировании. Из «математического автокода» для ИБМ 704 он путем эволюции, напоминающей эволюцию естественных языков, превратился в самый распространенный язык программирования. Наличие хотя бы одной реализации Ф. стало практически обязательным для всякой ЭВМ общего назначения.

В этой эволюции Ф. удержал ряд особенностей автокодов, важных для удобства программирования или использования программы,— таких, как составные константы (DATA) и раздельная трансляция. Они способствовали накоплению огромных библиотек написанных на Ф. подпрограмм по численным методам анализа, статистике, машинной графике, инженерным расчетам и т. д.

В то же время Ф. сохранил весьма архаичный синтаксис. Группировку операторов (напр., в циклах) обеспечивают метки, что не только затемняет программу, но и ослабляет синтаксич. контроль. Поскольку описания идентификаторов необязательны, помехоустойчивость Ф. очень низка. Напр., если в типичном цикле

$$DO\ 2I = 1{,}100$$
$$2\ A(I, J) = 0$$

пропустить любую запятую или заменить первую из них точкой, ошибка обнаружена не будет. Это снижает достоверность программ на Ф. и составляет важнейший недостаток языка. Отчасти он преодолен в новых стандартах (напр., в Ф. 77).

Лит.: [1] Мак-Кракен Д., Дорн У., Численные методы и программирование на ФОРТРАНе, пер. с англ., 2 изд., М., 1977; [2] Грунд Ф., Программирование на языке ФОРТРАН IV, пер. с нем., М., 1976, [3] Катцан Г., Язык Фортран 77, пер с англ., М., 1982

С. Б. Покровский.

ФОССА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, несущая *Фосса сеть*.

ФОССА СЕТЬ — сопряженная *геодезическая сеть*. Поверхность, несущая Ф. с., наз. поверхностью Фосса. На минимальной поверхности Ф. с. является изотропной сетью. Каждая Ф. с. на двумерной поверхности является главным основанием изгибания поверхности. Только геликоид несет бесконечное множество Ф. с. Вопрос о существовании поверхностей, несущих Ф. с., был поставлен А. Фоссом [1].

Лит.: [1] Voss A., «Sitzungsber. math.-naturwiss. Kl. Bayerischen Akad. Wiss München», 1888, № 18, S 95—102; [2] Фиников С. П., Изгибание на главном основании, М.— Л., 1937.

В. Т. Базылев.

ФРАГМЕНА — ЛИНДЕЛЁФА ТЕОРЕМА — обобщение *максимума модуля принципа* аналитич. функций на случай функций, априори заданных как неограниченные; впервые в простейшей форме дано Э. Фрагменом и Э. Линделефом [1]. Пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция комплексного переменного z в области D на плоскости $\mathbb{C}$ с границей Γ. Говорят, что $f(z)$ не превосходит по модулю числа M в граничной точке $\zeta \in \Gamma$, если

$$\lim_{z \to \zeta} \sup_{z \in D} |f(z)| \leqslant M,$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется круг Λ (зависящий от ζ и ε) с центром ζ такой, что $|f(z)| < M + \varepsilon$ при $z \in D \cap \Lambda$. Основное содержание результатов Э. Фрагмена и Э. Линделёфа, в несколько модернизированной форме, заключается в следующих двух положениях, последовательно расширяющих принцип максимума модуля.

I. Если регулярная аналитич. функция $f(z)$ всюду на границе Γ не превосходит по модулю числа M, то

$|f(z)|\leqslant M$ всюду в области D. Это положение иногда называют принципом Фрагмена — Линделёфа. Оно расширяет принцип максимума модуля на функции, о граничном поведении к-рых имеется лишь частичная информация.

II. Пусть регулярная аналитич. функция $f(z)$ не превосходит по модулю числа M во всех точках границы Γ, не принадлежащих нек-рому множеству $E\subset\Gamma$. Пусть, кроме того, существует функция $\omega(z)$ со следующими свойствами: 1) $\omega(z)$ регулярна в D, 2) $|\omega(z)|<1$ в D, 3) $\omega(z)\neq 0$ в D, 4) для любого $\sigma>0$ функция $|\omega(z)|^{\sigma}|f(z)|$ не превосходит числа M в каждой точке $\zeta\in E$. При этих условиях $|f(z)|\leqslant M$ всюду в D.

Ф.— Л. т. получила многочисленные применения, также часто именуемые теоремами Фрагмена — Линделёфа и связанные с конкретным видом области D, множества E и функции $\omega(z)$ (см. [1] — [4], в частности обобщения Ф.— Л. т. в [4]). Чаще всего в приложениях множество E состоит из одной точки ∞. Напр., пусть функция $f(z)$ регулярна в угловой области

$$D=\{z=re^{i\varphi}:\ |\varphi|<\lambda\pi/2,\ \lambda>0,\ 0<r<\infty\} \qquad (*)$$

и на сторонах угла не превосходит по модулю числа M. Тогда имеет место альтернатива: либо

$$|f(z)|\leqslant M$$

всюду в D, либо максимум модуля

$$M(r)=\max\{|f(z)|;\ |z|=r,\ z\in D\}$$

растет быстрее при $r\to\infty$, чем $\exp(r^k)$ при любом k, $0<k<1/\lambda$. Эта теорема получается из положений I и II при $\zeta=\infty$, $\omega(z)=\exp(-z^{k'})$, где $k<k'<1/\lambda$.

Формулировки I и II остаются в силе для голоморфной функции $f(z)$, $z=(z_1,\ldots,z_n)$, заданной в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$. Многие работы посвящены получению результатов типа Ф.—Л. т. для решений дифференциальных уравнений с частными производными и систем уравнений эллиптич. типа. Положения I и II остаются верными для *субгармонической функций* $u(P)$, определенной в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, или $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, при условии, что в них $|f(z)|$ заменяется на $u(P)$, а функция $\omega(P)$, $0<\omega(P)<1$, предполагается логарифмически-субгармонической в D (см. [5], [6]). Напр., пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в угловой области (*) и на сторонах угла не превосходит числа M. Тогда имеет место альтернатива: либо $u(z)\leqslant M$ всюду в D, либо максимум

$$M(r)=\max\{u(z);\ |z|=r,\ z\in D\}$$

растет быстрее, чем r^k при любом k, $0<k<1/\lambda$. Аналогичные результаты имеются и для решений других эллиптич. уравнений. Их можно назвать «слабыми» теоремами типа Фрагмена — Линделёфа в том смысле, что в них за счет слабого ограничения на границе только на саму функцию получается довольно слабое утверждение о росте.

В других результатах, к-рые можно назвать «сильными» теоремами типа Фрагмена — Линделёфа, за счет ограничения на границе на саму функцию и ее нормальную производную получается более сильное утверждение о росте. Такова, напр., следующая формулировка для цилиндрич. области

$$D=\{(\rho,\varphi,t);\ 0\leqslant\rho<a,\ 0\leqslant\varphi<2\pi,\ |t|<\infty\}$$

в $\mathbb{R}^3$. Пусть $u(P)$ — гармонич. функция в цилиндре D и на его боковой поверхности Γ, причем $|u(P)|\leqslant M$ и $|\partial u/\partial n|\leqslant M$ на Γ. Тогда либо $|u(P)|\leqslant M$ всюду в D, либо максимум

$$M(t)=\max\{u(\rho,\varphi,t);\ 0\leqslant\rho<a,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$$

растет быстрее при $|t|\to\infty$, чем

$$c\cdot\exp\left(e^{\frac{\pi|t|}{2(a+\varepsilon)}}\right),$$

при любом $\varepsilon>0$, $c>0$ (см. [5] — [8]).

Лит.: [1] Phragmen E., Lindelöf E., «Acta math.», 1908, v. 31, p. 381—406; [2] Титчмарш Е., Теория функций, пер. с англ., М.— Л., 1951; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962; [4] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968; [5] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.— Л., 1937; [6] Соломенцев Е. Д., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100, [7] Евграфов М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, с. 843—54; [8] Ландис Е. М., Уравнение второго порядка эллиптического и параболического типов, М., 1971.

Е. Д. Соломенцев.

ФРАНКЛИНА СИСТЕМА — одна из классических ортонормированных систем непрерывных функций. Ф. с. $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [1] или [2]) получается применением процесса ортогонализации Шмидта на отрезке $[0,1]$ к *Фабера—Шаудера системе*, построенной с помощью множества всех двоично рациональных точек отрезка $[0,1]$; в этом случае система Фабера—Шаудера с точностью до постоянных множителей совпадает с системой $\left\{1,\int_0^t\chi_n(x)\,dx\right\}$, где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *Хаара система*. Ф. с. является исторически первым примером *базиса* в пространстве непрерывных функций, обладающего свойством ортогональности. Эта система также является базисом во всех пространствах $L_p[0,1]$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ (см. [3]). Если непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $f(t)$ имеет модуль непрерывности $\omega(\delta,f)$, а $S_n(t,f)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f(t)$ по системе Франклина, то

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-S_n(t,f)|\leqslant 8\omega\left(\frac{1}{n},f\right),\quad n=1,2,\ldots.$$

При этом коэффициенты Фурье—Франклина $a_n(f)$ функции $f(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_n(f)|\leqslant\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2^m}}\,\omega\left(\frac{1}{2^m},f\right),\ n=2^m+k,\ k=1,\ \ldots,2^m,\ m=0,1,\ldots,$$

а условия:

а) $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-S_n(t,f)|=O(n^{-\alpha}),\ n\to\infty$,

б) $a_n(f)=O\left(n^{-\alpha-1/2}\right),\ n\to\infty$,

в) $\omega(\delta,f)=O(\delta^{\alpha}),\ \delta\to+0$,

при $0<\alpha<1$ являются равносильными.

Если непрерывная функция $f(t)$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n},f\right)<\infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)f_n(t)|$$

сходится на отрезке $[0,1]$ равномерно, а если

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1}{2}}\,\omega\left(\frac{1}{n},f\right)<\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)|<\infty.$$

Все эти свойства Ф. с. доказываются с помощью неравенства

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\sum_{k=1}^{2^n}|f_{2^n+k}(t)|\leqslant C\sqrt{2^n},\quad n=0,1,\ldots;\ C=2^5\sqrt{3}.$$

Ф. с. является безусловным базисом во всех пространствах $L_p[0.\ 1]\ (1 < p < \infty)$ и, более того, во всех рефлексивных пространствах Орлича (см. [5]). Если функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_p[0,\ 1]$, $1 < p < \infty$, то имеют место неравенства

$$A_p \| f \|_p \leqslant \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(f) f_k^2(t) \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant B_p \| f \|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ обозначает норму в пространстве $L_p[0,\ 1]$, а постоянные $A_p > 0$ и $B_p > 0$ зависят лишь от p.

Ф. с. нашла важные приложения в различных вопросах анализа. В частности, с помощью этой системы были построены базисы в пространствах $C^1(I^2)$ (см. [4]) и $A(D)$ (см. [5]). Здесь $C^1(I^2)$ — пространство всех непрерывно дифференцируемых на квадрате $I^2=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ функций $f(x,\ y)$ с нормой

$$\| f \| = \max | f(x,\ y) | + \max \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|,$$

а $A(D)$ — пространство всех функций $f(z)$ с нормой

$$\| f \| = \max_{|z| \leqslant 1} | f(z) |,$$

аналитических в открытом круге $D=\{z:\ |z| < 1\}$ комплексной плоскости и непрерывных в замкнутом круге $\overline{D}=\{z:\ |z| \leqslant 1\}$. Вопросы о существовании базисов в пространствах $C^1(I^2)$ и $A(D)$ были поставлены С. Банахом [6].

Лит.: [1] Franklin P., «Math. Ann.», 1928, Bd 100, S. 522—29; [2] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958, с. 144; [3] Ciesielski Z., «Studia math.», 1963, v. 23, № 2, p. 141—57; [4] его же, там же, 1969, v. 33, № 2, p. 243—47; [5] Бочкарев С. В., «Матем. сб.», 1974, т. 95, № 1, с. 3—18; [6] Banach S., Théorie des opérationes linéaires, Warsz., 1932. *Б. И. Голубов.*

ФРАТТИНИ ПОДГРУППА — *характеристическая подгруппа* $\Phi(G)$ группы G, определяемая как пересечение всех *максимальных подгрупп* G, если такие существуют; если же максимальных подгрупп в группе G нет, то G сама наз. своей Ф. п. Введена Дж. Фраттини [1]. Ф. п. состоит из тех и только тех элементов группы G, каждый из к-рых может быть удален из любой, содержащей его системы образующих группы, т. е.

$$\Phi(G) = \{x \mid x \in G,\ \{x,\ M\} = G \Rightarrow \{M\} = G\}.$$

Конечная группа тогда и только тогда нильпотентна, когда ее коммутант содержится в ее Ф. п. Для любой конечной и любой полициклич. группы G подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна.

Лит.: [1] Frattini G., «Atti Accad. Lincei, Rend. (IV)», 1885, t. 1, p. 281—85; [2] Курош А. Г., Теория групп, 2 изд., М., 1967. *Н. Н. Вильямс.*

ФРЕДГОЛЬМА АЛЬТЕРНАТИВА — альтернативное утверждение, вытекающее из *Фредгольма теорем*. В случае линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = f(x),\ x \in [a,\ b], \quad (1)$$

Ф. а. утверждает: либо уравнение (1) и сопряженное с ним уравнение

$$\psi(x) - \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(s,\ x)}\,\psi(s)\,ds = g(x),\ x \in [a,\ b], \quad (2)$$

имеют единственные решения φ, ψ, каковы бы ни были известные функции f, g, либо соответствующие однородные уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = 0, \quad (1')$$

$$\psi(x) - \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(s,\ x)}\,\psi(s)\,ds = 0 \quad (2')$$

имеют ненулевые решения, причем число линейно независимых решений конечно и одинаково для обоих уравнений.

Во втором случае для того чтобы уравнение (1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\psi_k(x)}\,dx = 0,\ k = 1,\ \ldots,\ n,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — полная система линейно независимых решений уравнения (2′). При этом общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_*(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x),$$

где φ_k — какое-нибудь решение уравнения (1), $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — полная система линейно независимых решений уравнения (1′), c_k — произвольные постоянные. Сходные утверждения имеют место и для уравнения (2).

Пусть T — непрерывный линейный оператор, отображающий банахово пространство E в себя; E^*, T^* — соответствующие сопряженные пространство и оператор. Рассматриваются уравнения:

$$T(x) = y,\ x,\ y \in E, \quad (3)$$

$$T^*(g) = f,\ g,\ f \in E^*, \quad (4)$$

$$T(x) = 0,\ x \in E, \quad (3')$$

$$T^*(g) = 0,\ g \in E^*. \quad (4')$$

Справедливость Ф. а. для оператора T означает следующее: 1) либо уравнения (3) и (4) разрешимы, каковы бы ни были их правые части, и тогда их решения единственны; 2) либо однородные уравнения (3′) и (4′) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений $x_1, \ldots, x_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ соответственно; в этом случае для разрешимости уравнения (3) соответственно уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы $g_k(y) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, соответственно $f(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$; при этом общее решение уравнения (3) дается равенством

$$x = x^* + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k,$$

а общее решение уравнения (4) — равенством

$$g = g^* + \sum_{k=1}^{n} c_k g_k,$$

где x^* (соответственно g^*) — какое-нибудь решение уравнения (3) (уравнения (4)), а $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

Каждое из следующих двух условий необходимо и достаточно, чтобы для оператора T имела место Ф. а. 1) Оператор T представим в форме

$$T = W + V,$$

где W — оператор, имеющий двусторонний непрерывный обратный, а V — вполне непрерывный оператор, 2) оператор T представим в форме

$$T = W_1 + V_1,$$

где W_1 — оператор, имеющий двусторонний непрерывный обратный, а V_1 — конечномерный оператор.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974, [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977. *Б. В. Хведелидзе.*

ФРЕДГОЛЬМА ОПЕРАТОР — линейный оператор, отображающий одно *локально выпуклое пространство* в другое и ядерный оператор относительно *Макки топологии* в этих пространствах. *А. Б. Бакушинский.*

ФРЕДГОЛЬМА ТЕОРЕМЫ для интегральных уравнений:

Теорема 1. Однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = 0 \quad (1)$$

и союзное с ним уравнение

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(s,\ x)\psi(s)\,ds=0 \qquad (2)$$

при фиксированном значении параметра λ имеют либо лишь тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$; $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x) \qquad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна полной системе линейно независимых решений соответствующего однородного союзного уравнения (2):

$$\int_a^b f(x)\psi_j(x)\,dx=0,\ j=1,\ \ldots,\ n. \qquad (4)$$

Теорема 3 (альтернатива Фредгольма). Либо неоднородное уравнение (3) разрешимо, какова бы ни была его правая часть f, либо соответствующее однородное уравнение (1) имеет ненулевые решения.

Теорема 4. Множество характеристических чисел уравнения (1) не более чем счетно, с единственной возможной предельной точкой на бесконечности.

Для справедливости Ф. т. в функциональном пространстве $L_2(a,\ b)$ достаточно, чтобы ядро K уравнения (3) было интегрируемым с квадратом на множестве $[a,\ b]\times[a,\ b]$ (a, b могут быть и бесконечными). Когда это условие нарушается, уравнение (3) может оказаться *нефредгольмовым интегральным уравнением*. Когда параметр λ и функции, участвующие в уравнении (3), принимают комплексные значения, тогда взамен союзного уравнения (2) часто рассматривают сопряженное к (1) уравнение

$$\psi(x)-\overline{\lambda}\int_a^b \overline{K(s,\ x)}\psi(s)\,ds=0.$$

В этом случае условие (4) заменяется условием

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\psi_j(x)}\,dx=0,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Теоремы доказаны Э. Фредгольмом [1].

Лит.: [1] Fredholm E. I., «Acta math.», 1903, v. 27, p. 365—390.

Б. В. Хведелидзе.

ФРЕДГОЛЬМА УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x),\ x\in[a,\ b],$$

— Ф. у. 1-го рода, или вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x),\ x\in[a,\ b], \qquad (1)$$

— Ф. у. 2-го рода, если интегральный оператор

$$K\varphi(x)=\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds,\ x\in[a,\ b], \qquad (2)$$

является вполне непрерывным в нек-ром функциональном пространстве E. Предполагается, что свободный член f и искомая функция φ принадлежат пространству E. Важным примером Ф. у. является уравнение, в к-ром ядро K удовлетворяет условию

$$B^2=\int_a^b\int_a^b |K(x,\ s)|^2\,dx\,ds<\infty, \qquad (3)$$

а $E=L_2([a,\ b])$.

Численный параметр λ и функции f, φ, K могут принимать как действительные, так и комплексные значения. О Ф. у. 1-го рода см. *Интегральное уравнение с симметричным ядром* и *Некорректные задачи*. Ниже рассматриваются лишь Ф. у. 2-го рода.

Метод последовательных приближений решения Ф. у. 2-го рода. Это — первый метод, к-рый был предложен для решения уравнения (1). Для формулировки этого метода пусть уравнение (1) записано в виде

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda K\varphi(x),\ x\in[a,\ b]. \qquad (4)$$

Предполагается, что ядро K удовлетворяет условию (3), а $E=L_2([a,\ b])$. Пусть начальное приближение искомого решения $\varphi_0=f$; если $(n-1)$-е приближение φ_{n-1} построено, то

$$\varphi_n=f+\lambda K\varphi_{n-1};$$

при этом

$$\varphi_n=\sum_{m=0}^{n}\lambda^m K_m f, \qquad (5)$$

где K_m обозначает m-е итерированное ядро ядра K. Функция (5) является частичной суммой ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_m f, \qquad (6)$$

к-рый наз. рядом Неймана (или рядом Лиувилля — Неймана). Если $|\lambda|<B^{-1}$, то ряд (6) сходится в среднем к решению уравнения (1), и это решение — единственное (см., напр., [5]). Если существует такая положительная постоянная A, что

$$\int_a^b |K(x,\ s)|^2\,ds\leqslant A,\ x\in[a,\ b],$$

то ряд (6) сходится абсолютно и равномерно. Вообще говоря, ряд (6) расходится, если $|\lambda|\geqslant B^{-1}$. Именно, это так, если ядро K имеет характеристич. число. Если же ядро не имеет характеристич. чисел (как, напр., в случае ядра Вольтерра), то ряд (6) сходится при любом значении λ.

Метод Фредгольма решения Ф. у. 2-го рода. Метод последовательных приближений дает возможность построить решение уравнения (1), вообще говоря, лишь при малых значениях параметра λ. Метод, дающий возможность решить уравнение (1) для любого значения параметра λ, был впервые предложен Э. Фредгольмом (E. Fredholm, 1903). В предположении, что ядро K непрерывно на квадрате $[a,\ b]\times[a,\ b]$, а свободный член и искомое решение непрерывны на сегменте $[a,\ b]$, ниже кратко описана идея этого метода.

Отрезок $[a,\ b]$ делится на n равных частей длины $h=(b-a)/n$. Если заменить интеграл в (1) интегральной суммой, то точное уравнение (1) заменяется приближенным

$$\varphi(x)-\lambda h\sum_{j=1}^{n}K(x,\ s_j)\varphi(s_j)=f(x),\ x\in[a,\ b]. \qquad (7)$$

Полагая в (7) последовательно $x=s_1, \ldots, s_n$ для определения приближенного значения неизвестной функции φ в точках s_j, получают линейную алгебраич. систему

$$\varphi_i-\lambda h\sum_{j=0}^{n}K_{ij}\varphi_j=f_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (8)$$

где $f(s_i)=f_i$, $\varphi(s_i)=\varphi_i$, $K(s_i,\ s_j)=K_{ij}$. Разрешимость системы (8) зависит от значения определителя

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda hK_{11} & -\lambda hK_{12} & \ldots & -\lambda hK_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda hK_{n1} & -\lambda hK_{n2} & \ldots & 1-\lambda hK_{nn} \end{vmatrix},$$

к-рый является многочленом относительно λ. Если λ

отличен от корней этого многочлена, то система (8) разрешима. Решив эту систему и подставив полученные значения $\varphi_i=\varphi(s_j)$ в (7), получают приближенное решение уравнения (1)

$$\varphi(x)\approx f(x)+\lambda\frac{Q(x,\ s_1,\ \ldots,\ s_n;\ \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \qquad (9)$$

где Q и Δ — многочлены относительно λ. Приведенный путь является одним из возможных вариантов построения приближенного решения Ф. у. (1) (см. [6]).

Можно ожидать, что в пределе, когда $n\to\infty$ так, что интегральная сумма в (7) совпадает с интегралом в (1), предел правой части в (9) совпадает с точным решением уравнения (1). С помощью формальных переходов к пределам в соответствующих выражениях Э. Фредгольм установил формулу, к-рая должна представлять решение уравнения (1)

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,\ s;\ \lambda)f(s)\,ds, \qquad (10)$$

где

$$R(x,\ s;\ \lambda)=D(x,\ s;\ \lambda)/D(\lambda), \qquad (11)$$

$$D(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}A_m\lambda^m, \qquad (12)$$

$$D(x,\ s;\ \lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m(x,\ s)\lambda^m, \qquad (13)$$

$$A_m=\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m\\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m\end{pmatrix}ds_1\ \ldots\ ds_m, \qquad (14)$$

$$B_m(x,\ s)=\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x,\ s_1,\ \ldots,\ s_m\\ s,\ s_1,\ \ldots,\ s_m\end{pmatrix}ds_1\ldots ds_m, \qquad (15)$$

$$K\begin{pmatrix}x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1,s_1)\ K(x_1,s_2)\ldots K(x_1,s_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ K(x_n,s_1)\ K(x_n,s_2)\ldots K(x_n,s_n)\end{vmatrix}.$$

Для вычисления A_m и $B_m(x,\ s)$ вместо формул (14), (15) можно воспользоваться следующими рекуррентными соотношениями:

$$A_0=1,\quad B_0(x,\ s)=K(x,\ s),\quad A_m=\int_a^b B_{m-1}(s,\ s)\,ds,$$

$$B_m(x,\ s)=K(x,\ s)\,A_m-m\int_a^b K(x,\ t)\,B_{m-1}(t,\ s)\,dt,$$

$$m=1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Ряды (12) и (13) наз. р я д а м и Ф р е д г о л ь м а. Функцию $D(\lambda)$ наз. о п р е д е л и т е л е м Ф р е д г о л ь м а ядра K, функцию $D(x,\ s;\ \lambda)$ — п е р в ы м м и н о р о м Ф р е д г о л ь м а для $D(\lambda)$, а функцию (11) — р е з о л ь в е н т о й (или р а з р е ш а ю щ и м я д р о м, или в з а и м н ы м я д р о м) ядра K (или уравнения (1)).

Обоснование упомянутых выше предельных переходов, к-рые приводят к формуле (10), было сделано Д. Гильбертом (см. *Интегральное уравнение*). Э. Фредгольм, построив формально ряды (12), (13), затем непосредственно строго доказал, что они сходятся для всех конечных значений параметра λ, а ряд (13), кроме того, сходится равномерно по x и s на квадрате $[a,\ b]\times[a,\ b]$. Установление связи между функциями $D(\lambda)$ и $D(x,\ s;\ \lambda)$ позволило ему доказать следующее предложение: если $D(\lambda)\neq0$, то уравнение (1) имеет одно и только одно решение, к-рое выражается формулой (10).

Из этого предложения вытекает, что значение параметра λ, которое не является корнем определителя Фредгольма, есть регулярное значение для однородного уравнения, соответствующего уравнению (1):

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=0,\ x\in[a,\ b], \qquad (1_0)$$

т. е. это уравнение в рассматриваемом случае имеет лишь нулевое решение. Если λ — корень уравнения $D(\lambda)=0$, то λ есть полюс резольвенты (11) уравнения (1_0) и характеристич. число этого последнего уравнения. Чтобы построить по методу Фредгольма собственные функции, принадлежащие этому характеристическому числу, вводится понятие p-го минора $D(\lambda)$. Пусть

$$B_0\begin{pmatrix}x_1,\ \ldots,\ x_p\\ s_1,\ \ldots,\ s_p\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}x_1,\ \ldots,\ x_p\\ s_1,\ \ldots,\ s_p\end{pmatrix},$$

$$B_m\begin{pmatrix}x_1,\ \ldots,x_p\\ s_1,\ \ldots,\ s_p\end{pmatrix}=\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x_1,\ \ldots,x_p,\ t_1,\ \ldots,\ t_m\\ s_1,\ \ldots,s_p,\ t_1,\ \ldots,\ t_m\end{pmatrix}\times$$
$$\times\,dt_1\ldots dt_m.$$

Тогда p-м и н о р о м для $D(\lambda)$ наз. ряд

$$D\begin{pmatrix}x_1,\ \ldots,\ x_p\\ s_1,\ \ldots,\ s_p\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m\begin{pmatrix}x_1,\ \ldots,x_p\\ s_1,\ \ldots,\ s_p\end{pmatrix}\lambda^{m+p}, \qquad (16)$$

к-рый при $p=1$ обращается в $D(x,\ s;\ \lambda)$. Ряд (16) сходится абсолютно для всех конечных значений λ и равномерно относительно $x_1,\ \ldots,\ x_p,\ s_1,\ \ldots,\ s_p$, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x_n\leqslant b$, $a\leqslant s_n\leqslant b$, $k=1,\ \ldots,\ p$. Пусть теперь λ_0 есть характеристич. число ядра K; $D(\lambda_0)=0$, $\lambda_0\neq0$, так как $D(0)=1$. Пусть r — кратность корня λ_0 уравнения $D(\lambda_0)=0$. Существует такое натуральное число $q\leqslant r$, что все миноры для $D(\lambda_0)$, порядок к-рых меньше q, тождественно равны нулю, а минор порядка q отличен от нуля. Существует нек-рая совокупность значений $x_1',\ \ldots,\ x_q',\ s_1',\ \ldots,\ s_q'$ таких, что

$$D\begin{pmatrix}x_1',\ \ldots,\ x_q'\\ s_1',\ \ldots,\ s_q'\end{pmatrix};\ \lambda_0\Bigg)\neq0.$$

Число q наз. р а н г о м характеристич. числа λ_0. Функции

$$\varphi_k(x)=\frac{D\begin{pmatrix}x_1',\ \ldots,\ x_{k-1}',\ x,\ x_{k+1}',\ \ldots,\ x_q'\\ s_1',\ \ldots,\ s_{k-1}',\ s_k',\ s_{k+1}',\ \ldots,\ s_q'\end{pmatrix};\ \lambda_0\Bigg)}{D\begin{pmatrix}x_1',\ \ldots,\ x_q'\\ s_1',\ \ldots,\ s_q'\end{pmatrix};\ \lambda_0\Bigg)} \qquad (17)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (1_0).

Пусть характеристич. числу λ_0 принадлежат собственные функции $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_q$. Эти функции наз. п о л н о й с и с т е м о й с о б с т в е н н ы х ф у н к ц и й уравнения (1_0) (или ядра K), принадлежащих числу λ_0, если любая другая собственная функция, принадлежащая этому числу, есть линейная комбинация функций $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_q$.

Если λ_0 является характеристич. числом однородного уравнения (1_0) с рангом q, то оно будет также собственным значением с рангом q и для союзного с (1_0) уравнения

$$\psi(x)-\lambda_0\int_a^b K(s,\ x)\psi(s)\,ds=0, \qquad (1_0')$$

причем полная система собственных функций уравнения (1_0) определяется формулами (17), а для уравнения $(1_0')$ — аналогичными формулами, построенными для союзного ядра $K(s,\ x)$.

Если λ_0 — характеристич. число ядра K с рангом q, то уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда удовлетворяются условия:

$$\int_a^b f(t)\psi_k(t)\,dt=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ q, \qquad (18)$$

где $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_q$ составляют полную систему собствен-

ных функций уравнения ($1_0'$). Если условия (18) выполняются, то все решения уравнения (1) определяются формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b H(x,\ s)\,f(s)\,ds+\sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k(x),$$

где $c_1,\ \ldots,\ c_q$ — произвольные постоянные, $\{\varphi_k\}$ — полная система собственных функций однородного уравнения (1_0), а функция H определяется равенством

$$H(x,\ s)=\frac{D\begin{pmatrix} x,\ x_1',\ \ldots,\ x_q' \\ s,\ s_1',\ \ldots,\ s_q' \end{pmatrix};\lambda_0}{D\begin{pmatrix} x_1',\ \ldots,\ x_q' \\ s_1',\ \ldots,\ s_q' \end{pmatrix};\lambda_0}.$$

Непрерывное ядро K имеет не более счетного множества характеристич. чисел, к-рые могут иметь предельную точку только при $\lambda=\infty$.

Сформулированные выше предложения для уравнения (1) называются *Фредгольма теоремами*. Эти теоремы Э. Фредгольм распространил на случай системы таких же уравнений, а также на случай одного класса ядер со слабой особенностью (см. *Интегральный оператор*).

Из сопоставления теорем Фредгольма вытекает *Фредгольма альтернатива*.

Часто в теоремах Фредгольма вместо союзного уравнения ($1_0'$) рассматривают сопряженное с (1) уравнение

$$\psi(x)-\overline{\lambda_0}\int_a^b \overline{K(s,\ x)}\,\psi(s)\,ds=0.$$

В этом случае условия (18) заменяются условиями

$$\int_a^b f(t)\,\overline{\psi_k(t)}\,dt=0,\quad k=1,\ \ldots,\ q.$$

Изложенный выше метод Фредгольма был обобщен Т. Карлеманом [9] (см. также [7], [11]) на случай, когда f, φ, K в уравнении (1) предполагаются интегрируемыми с квадратом функциями. В этих предположениях справедливы сформулированные выше результаты Фредгольма.

Кроме метода последовательных приближений и метода Фредгольма для решения Ф. у., Э. Шмидт (E. Smidt) под влиянием исследований Д. Гильберта разработал метод, основой к-рого является построение, независимо от теории Фредгольма, теории уравнения (1) с симметричным действительным ядром.

Исследования Д. Гильберта и Э. Шмидта подготовили почву для абстрактного изложения теории Фредгольма. Д. Гильберт обратил внимание на то, что теория Фредгольма в основном опирается на свойство т. н. полной непрерывности интегрального преобразования с ядром K. Это свойство Д. Гильберт сформулировал для билинейных форм. Ф. Рисс (см. [8]) показал, что основные результаты теории Фредгольма остаются в силе, если в уравнении (1) интегральный оператор заменить произвольным вполне непрерывным оператором, действующим в полном функциональном пространстве. Исследования Ф. Рисса были пополнены Ю. Шаудером (см. [10]) с помощью введения понятия сопряженного оператора в банаховом пространстве, что и дало возможность окончательной абстрактной формулировки в пространствах Банаха аналогов теорем Фредгольма. Эти теоремы часто наз. т е о р е м а м и Р и с с а — Ш а у д е р а. Оператор V, участвующий в нижеприведенных формулировках этих теорем, предполагается действующим в банаховом пространстве E; через E^* обозначено банахово пространство, сопряженное с E, а через V^* — сопряженный оператор.

Т е о р е м а 1. Однородное уравнение

$$\varphi-V\varphi=0,\quad \varphi\in E, \tag{19}$$

и сопряженное с ним уравнение

$$\psi-V^*\psi=0,\quad \psi\in E^*, \tag{20}$$

имеют лишь нулевые решения или одинаковое конечное число линейно независимых решений $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_q$, $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_q$.

Т е о р е м а 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$\varphi-\lambda V\varphi=f,\quad f,\ \varphi\in E, \tag{21}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_k(f)=0$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ q$; если эти условия выполнены и φ_0 — какое-либо решение уравнения (21), то его общее решение имеет вид

$$\varphi_0+\sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k,$$

где c_k — произвольные постоянные.

Т е о р е м а 3. Каково бы ни было $r\neq 0$, круг $|\lambda|\leqslant r$ содержит разве лишь конечное число характеристических значений оператора V, т. е. значений λ, для к-рых уравнение $\varphi-\lambda V=0$ имеет отличные от нуля решения.

Эти теоремы дают возможность обосновать справедливость теорем Фредгольма для уравнения (1) в случае различных конкретных классов интегрального оператора (2). Напр., если заданные и искомая функции интегрируемы с квадратом.

В качестве области интегрирования вместо отрезка $[a,\ b]$ в уравнении (1) можно рассматривать нек-рое ограниченное или неограниченное измеримое множество D в пространстве любого числа измерений. Вместо обычного интеграла можно брать интеграл Стилтьеса относительно неотрицательной меры.

Лит.: [1] С м и р н о в В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974; [2] Г у р с а Э., Курс математического анализа, т. 3, ч. 2, пер. с франц., М.—Л., 1934; [3] П е т р о в с к и й И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; [4] Л о в и т т У., Линейные интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1957; [5] М и х л и н С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959; [6] К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.—Л., 1962; [7] М и х л и н С. Г., «Докл. АН СССР», 1944, т. 42, № 9, с. 387—90; [8] R i e s z F., «Acta math.», 1918, v. 41, p. 71—98; рус. пер.: «Успехи матем. наук», 1936, в. 1, с. 175—99; [9] C a r l e m a n T., «Math. Z.», 1921, Bd 9, S. 196—217; [10] S c h a u d e r J., «Studia Math.», 1930, № 2, p. 183—96; [11] S m i t h i e s F., «Duke Math. J.», 1941, № 8, p. 107—30.

Б. В. Хведелидзе.

ФРЕДГОЛЬМА УРАВНЕНИЕ; ч и с л е н н ы е м е т о д ы р е ш е н и я — методы приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, сводящиеся к выполнению конечного числа действий над числами.

Пусть

$$\varphi(x)-\lambda\int_D K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(x) \tag{1}$$

— интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, где λ — комплексное число, $f(x)$ — известная вектор-функция, $\varphi(x)$ — искомая вектор-функция, $K(x,\ s)$ — ядро уравнения (1), D — область в нек-ром m-мерном евклидовом пространстве. Ниже предполагается, что λ не принадлежит спектру интегрального оператора с ядром K (т. е. при данном λ уравнение (1) имеет единственное решение в нек-ром функциональном классе, соответствующем гладкости K). Выражение (1) естественно включает случай системы Ф. у.

Для общего описания проблем конструирования и исследования численных методов решения Ф. у. 2-го рода используется язык функционального анализа. Интегральное уравнение (1) можно записать как линейное операторное уравнение

$$(E-\lambda A)\,\varphi=f, \tag{2}$$

где φ — искомый элемент нек-рого банахова пространства Φ, f — заданный элемент пространства Φ, A — линейный ограниченный оператор из Φ в Φ. Оператор $E-\lambda A$ предполагается действующим обратимо из Φ в

Ф. Схема любого численного метода решения уравнения (1) состоит в следующем. Пусть $\tilde{\Phi}$, вообще говоря, отличное от Ф банахово пространство, нек-рым образом связанное с Ф, $\tilde{A}$ — линейный оператор из $\tilde{\Phi}$ в $\tilde{\Phi}$. Уравнение

$$(E-\lambda\tilde{A})\,\tilde{\varphi}=\tilde{f} \qquad (3)$$

наз. аппроксимирующим уравнением для (2). Обычно аппроксимирующий оператор $\tilde{A}$ подбирается так, чтобы либо было возможно непосредственное вычисление $\tilde{\varphi}$ из (3), либо (более общо) можно было бы найти приближенное решение (3) вида

$$\tilde{\tilde{\varphi}}=\psi(\tilde{A},\ \tilde{f}) \qquad (4)$$

так, чтобы правую часть (4) можно было вычислить за конечное число арифметич. действий. Выражение $\psi(\tilde{A},\ \tilde{f})$ означает проведение нек-рых действий над $\tilde{A}$ и $\tilde{f}$, в частности ψ может быть просто операторной функцией от $\tilde{A}$ (напр., $\psi(\tilde{A},\ \tilde{f})=(E-\tilde{A})^{-1}f$). Выбор $\tilde{A}$, ψ и $\tilde{f}$, а также пространства $\tilde{\Phi}$ прежде всего подчинен требованию близости (в каком-либо смысле) $\tilde{\tilde{\varphi}}$ и точного решения φ уравнения (1), (2) и, вообще говоря, неоднозначен. Точно также для конкретного численного метода (конкретной формулы аппроксимации для A) выбор пространства $\tilde{\Phi}$ также неоднозначен. Конкретный выбор Ф и $\tilde{\Phi}$ диктуется требованиями «близости» $\tilde{\tilde{\varphi}}$ и φ, также удобствами исследования. Специфика численных методов решения Ф. у. 2-го рода заключена в основном именно в той или иной конкретной аппроксимации оператора A при помощи $\tilde{A}$. Поэтому обычно способ аппроксимации и дает название тому или иному методу численного решения уравнения (1).

После того как выбраны Ф, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{A}$ и $\tilde{f}$, близость φ и $\tilde{\varphi}$ ($\tilde{\tilde{\varphi}}$) устанавливается с помощью теорем общей теории приближенных методов решения операторных уравнений.

В случае $\Phi=\tilde{\Phi}$ для установления близости $\tilde{\varphi}$ и φ достаточно показать, что $\|\tilde{A}-A\|$ мала. При подходящем выборе Ф это удается сделать для большинства классич. методов приближенного решения Ф. у. 2-го рода.

В большинстве конкретных методов решение уравнения (3) легко редуцируется к решению системы линейных алгебраич. уравнений; для построения ψ в (4) можно воспользоваться нек-рым алгоритмом решения систем линейных алгебраич. уравнений (см. *Линейная алгебра*; численные методы).

Основные способы построения аппроксимирующих операторов:

Методы квадратурных сумм и их обобщения являются наиболее распространенными методами аппроксимации интегрального оператора A в уравнении (1). Основной из этих методов, применение к-рого возможно в случае непрерывных $K(x,\ s)$, $\varphi(s)$ и $f(x)$, состоит в замене интеграла (по s) в (1) какой-либо квадратурной формулой по сетке узлов $\{s_i\}\in D$.

При этом

$$\tilde{A}y=\sum_{i=1}^{N}a_i^{(N)}K(x,\ s_i)\,y(s_i), \qquad (5)$$

где $a_i^{(N)}$ — коэффициенты квадратурной формулы.

Аппроксимирующее уравнение (3) можно рассматривать как операторное в том же самом пространстве, что и основное уравнение (1) (напр., в пространстве $C(D)$ непрерывных вектор-функций на D). В этом случае оно будет иметь вид

$$\tilde{\varphi}(x)-\lambda\sum_{i=1}^{N}a_i^{(N)}K(x,\ s_i)\,\tilde{\varphi}(s_i)=f(x). \qquad (6)$$

Уравнение (6) редуцируется к системе линейных алгебраич. уравнений относительно $\tilde{\varphi}(s_i)$, $i=1,\ \ldots,\ N$:

$$\tilde{\varphi}(s_i)-\lambda\sum_{i=1}^{N}a_i^{(N)}K(s_j,\ s_i)\,\tilde{\varphi}(s_i),\ j=1,\ \ldots,\ N. \qquad (7)$$

Решение (точное или приближенное) системы (7) дает $\tilde{\tilde{\varphi}}$.

Иногда само уравнение (7) считают аппроксимирующим уравнение (1), тогда уравнение (7) соответствует уравнению (3).

При таком подходе пространство $\tilde{\Phi}$ не совпадает с Ф. Пространство $\tilde{\Phi}$ можно, напр., естественно отождествить с факторпространством Ф по подпространству функций из Ф, обращающихся в нуль в точках $\{s_i\}$, $i=1,\ \ldots,\ N$. Метод (5) допускает различные обобщения, к-рыми удобно пользоваться, напр., в случае разрывных $K(x,\ s)$. В этих обобщенных методах оператор $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A}y=\sum_{i=1}^{N}a_i^{(N)}(x)\,y(s_i), \qquad (5')$$

где $a_i^{(N)}(x)$ — функции, связанные с ядром $K(x,\ s)$.

См. также *Квадратурных сумм метод*.

Методы замены ядра на близкое используют аппроксимирующий оператор $\tilde{A}$ вида

$$\tilde{A}y=\int_D\tilde{K}(x,\ s)\,y(s)\,ds,$$

где $\tilde{K}$ — нек-рая функция, близкая к K, но более просто устроенная. Чаще всего $\tilde{K}$ — вырожденное ядро, т. е.

$$\tilde{K}(x,\ s)=\sum_{i=1}^{N}a_i(x)\,b_i(s). \qquad (8)$$

Уравнение (3) в данном случае — интегральное Ф. у. с вырожденным ядром. Его решение сводится к решению системы линейных алгебраич. уравнений. Однако элементы матрицы полученной системы уравнений будут выражаться интегралами от известных функций и при численном решении их, вообще говоря, нужно аппроксимировать квадратурными суммами.

Существует много способов конкретного выбора $\tilde{K}$ по формуле (8) (см., напр., *полос метод*). Теоретич. исследование близости решений уравнений (3) и (1) в этих методах обычно значительно проще, чем, напр., в методах квадратурных сумм, т. к. в большинстве случаев можно положить $\Phi=\tilde{\Phi}$ и выбор Ф естественно определяется непосредственно постановкой задачи. Близость $\tilde{K}$ и K, как правило, обеспечивает близость A и $\tilde{A}$ по норме Ф. Однако практич. реализация этих методов в большинстве случаев значительно более трудоемка по сравнению с методами квадратурных сумм и их обобщениями.

Проекционные методы приводят к аппроксимирующему уравнению (3) вида $\tilde{\varphi}+PA\tilde{\varphi}=Pf$, причем $\tilde{\Phi}$ — подпространство Ф и P — проектор на это подпространство. Произвол в выборе Ф, $\tilde{\Phi}$ и даже самого P приводит к многочисленным конкретным проекционным методам решения интегральных Ф. у. 2-го рода. Типичным примером проекционного метода является *Галеркина метод*. Для получения конкретных расчетных формул этого метода нужно (если это возможно) интегральное уравнение (1) трактовать как операторное уравнение в гильбертовом пространстве $L_2(D)$ функций, интегрируемых с квадратом в D, и взять в качестве P ортопроектор, сопоставляющий функции из $L_2(D)$ N-членный отрезок ее ряда Фурье

по нек-рой полной ортонормальной в $L_2(D)$ системе функций $\{\psi_k\}$.

В другой интерпретации метод Галеркина эквивалентен методу замены ядра на вырожденное вида

$$\tilde{K}(x,\ s)=\sum_{i=1}^{N}\int_D K(x,\ s)\,\varphi_i(x)\,dx\cdot\varphi_i(x)$$

с одновременной заменой правой части на близкую к ней:

$$\tilde{f}(s)=\sum_{i=1}^{N}\int_D f(s)\,\varphi_i(s)\,ds\cdot\varphi_i(s).$$

Другим важным примером проекционных методов может служить *коллокаций метод* (совпадений метод). Если $K(x,\ s)$ и $f(x)$ — непрерывные функции, то уравнение (1) можно рассматривать как операторное (2) в пространстве $C(D)$ — пространстве непрерывных функций на D. Метод коллокаций соответствует выбору P в виде

$$Py=Z(y),\quad y\in(D),$$

где Z — интерполяционный полином Лагранжа, построенный по нек-рой сетке узлов в D.

При практич. реализации большинства проекционных методов в применении к интегральным Ф. у. 2-го рода возникают трудности дополнительной аппроксимации появляющихся интегралов, что и делает эти методы (так же как и методы замены ядра на близкое) обычно более трудоемкими по сравнению с типичными методами квадратурных сумм. Однако это утверждение условно, так как сама классификация методов является условной. Напр., метод коллокаций можно интерпретировать как проекционный метод и как обобщенный метод квадратурных сумм.

Методы решения аппроксимирующих уравнений. Обычно решение аппроксимирующего уравнения (3) сводится к решению системы линейных алгебраич. уравнений. Методами последовательных приближений можно пользоваться (простейшими из них) при относительно малой величине $|\lambda|$, а при должной их модификации (напр., при методе осреднения функциональных поправок) ими можно пользоваться при любых λ, не принадлежащих спектру интегрального оператора A.

Получение последовательности уточняющих приближений. При теоретич. исследовании того или иного численного метода в большинстве случаев удается установить только сам факт сходимости приближений $\tilde{\varphi}$ или $\tilde{\tilde{\varphi}}$ к решению (1), (2) при сходимости $\tilde{A}$ к A в каком-либо смысле, и весьма редко удается получить эффективные оценки близости $\tilde{\varphi}$ или $\tilde{\tilde{\varphi}}$ к решению (1), (2). Для контроля точности на практике используют последовательность приближенных решений уравнения (3) с уточняющимся оператором $\tilde{A}$. В простейшем варианте контроля сравнивают два соседних члена в этой последовательности приближенных решений и прекращают дальнейшее получение приближений при совпадении двух предыдущих с заданной точностью. Громоздкость непосредственного получения членов такой последовательности частично преодолевается в разнообразных алгоритмах итеративного уточнения приближенного решения. Типичным примером подобных алгоритмов является следующий. Если последовательность $\{A_n\}$ приближенных операторов сходится по норме какого-либо банахова функционального пространства Ф к A в (2), то итеративная процедура

$$(E-\lambda A_0)\,\varphi_{n+1}=\lambda(A_{n+1}-A_0)\,\varphi_n+f_n \qquad (9)$$

дает сходящуюся к φ последовательность приближений φ_n, если f_n по норме сходится к f и A_0 достаточно близок по норме к A. При использовании последовательности (9) требуется только одно обращение оператора. Сходимость ее тем лучше, чем ближе A_0 к A по норме. Удобен, напр., выбор операторов в виде (5). При нек-рых требованиях на ядро можно в этом случае установить равномерную сходимость φ_n к φ в D.

А. Б. Бакушинский.

ФРЕДГОЛЬМА ЯДРО. 1) Ф. я.— функция $K(x,\ y)$, определенная на $\Omega\times\Omega$ и порождающая вполне непрерывный оператор

$$K\varphi\equiv\int_\Omega K(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy: E\longrightarrow E_1, \qquad (*)$$

где Ω — измеримое множество в n-мерном евклидовом пространстве, а E, E_1 — нек-рые функциональные пространства. Оператор (*) наз. интегральным оператором Фредгольма из E в E_1. Важным классом Ф. я. являются измеримые на $\Omega\times\Omega$ функции $K(x,\ y)$ такие, что

$$\int_\Omega\int_\Omega|K(x,\ y)|^2\,dx\,dy<+\infty.$$

Ф. я., удовлетворяющее этому условию, наз. также L_2-ядром.

Ф. я. наз. вырожденным, если оно представляет сумму произведений функции только от x на функцию только от y:

$$K(x,\ y)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(x)\,\beta_k(y).$$

Если для почти всех $(x,\ y)\in\Omega\times\Omega$ имеет место равенство $K(x,\ y)=K(y,\ x)$, то Ф. я. наз. симметричным, а если $\overline{K(x,\ y)}=K(y,\ x)$ — эрмитово симметричным (здесь черта означает переход к комплексно сопряженному значению). Ф. я. $K(x,\ y)$ наз. кососимметричным, если $\overline{K(x,\ y)}=-K(y,\ x)$.

Ф. я. $K(x,\ y)$ и $K(y,\ x)$ наз. транспонированными или союзными, а ядра $K(x,\ y)$ и $\overline{K(y,\ x)}$ — сопряженными.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974.

Б. В. Хведелидзе.

2) Ф. я.— двухвалентный тензор, порождающий оператор Фредгольма. Пусть E и F — *локально выпуклые пространства*, $E\overline{\otimes}F$ — пополнение *тензорного произведения* $E\times F$ этих пространств в индуктивной топологии, т. е. в самой сильной локально выпуклой топологии, при к-рой непрерывно каноническое билинейное отображение $E\times F\longrightarrow E\overline{\otimes}F$. Элемент $u\in E\overline{\otimes}F$ наз. Ф. я., если он может быть представлен в виде

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i e_i\otimes f_i,$$

где $\{\lambda_i\}$ — суммируемая числовая последовательность, а $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ — последовательности элементов нек-рых полных выпуклых закругленных ограниченных множеств в E и F соответственно. Пусть E совпадает с сопряженным пространством G' к нек-рому локально выпуклому пространству G. Тогда Ф. я. порождает оператор Фредгольма A: $G\longrightarrow F$, имеющий вид

$$x\longmapsto\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle x,\ e_i\rangle f_i,$$

где $\langle x,\ e_i\rangle$ — значение функционала $e_i\in G'$ на элементе $x\in G$. Если E и F — банаховы пространства, то любой элемент из $E\overline{\otimes}F$ является Ф. я.

Понятие Ф. я. допускает обобщение и на случай тензорного произведения нескольких локально выпуклых пространств. Ф. я. и операторы Фредгольма составляют естественную область применения теории Фредгольма.

Лит.: [1] Гротендик А., «Математика», 1958, т. 2, № 5, с. 51—100.

Г. Л. Литвинов.

ФРЕДГОЛЬМОВ ОПЕРАТОР — линейный нормально разрешимый оператор B, действующий в банаховом пространстве E и обладающий нулевым индексом $\varkappa_B$ ($\varkappa_B=\dim\ker B - \dim\operatorname{coker} B$). Классич. примером Ф. о. является оператор вида

$$B=I+T, \qquad (1)$$

где I — единичный, а T — вполне непрерывный операторы в E. В частности, Ф. о. в пространствах $C(a, b)$ или $L_2(a, b)$ будет оператор вида

$$B\varphi=\varphi(x)+\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,dS, \qquad (2)$$

где ядро $K(x, s)$ — непрерывная или квадратично суммируемая на $[a, b]\times[a, b]$ функция.

Существуют Ф. о., отличные от (1) (см. [2]). Таковыми, при нек-рых условиях, являются, напр., оператор вида $I+K$, где K — интегральный оператор свертки на полуоси или всей оси (не являющийся вполне непрерывным), и многие дифференциальные операторы.

Для операторных уравнений вида $B\varphi=f$ с Ф. о. B легко формулировать различные теоремы разрешимости (см. *Фредгольма ядро*).

Встречаются и другие трактовки термина «Ф. о.». Напр., иногда Ф. о. наз. любой линейный ограниченный оператор B в E с конечным индексом $\varkappa_B$.

В классич. теории линейных интегральных уравнений Ф. о. часто наз. сам интегральный оператор в (2).

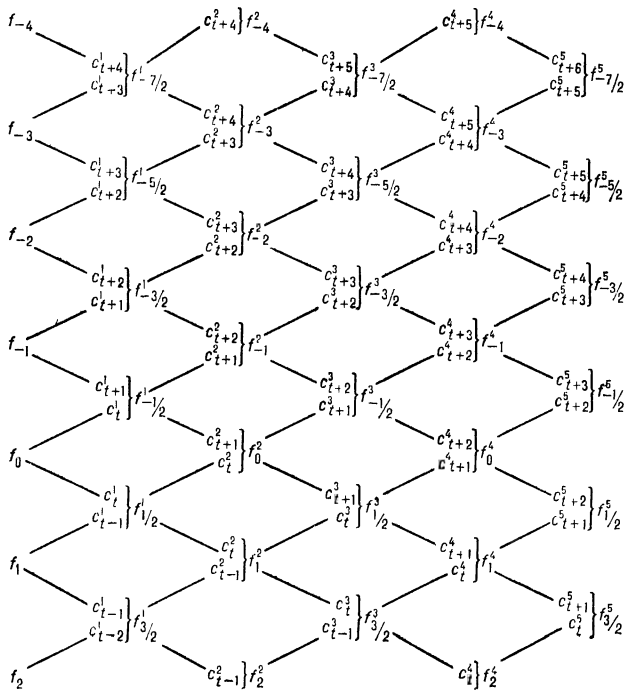
Лит : [1] Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971; [2] Михлин С Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959.

А. Б. Бакушинский.

ФРЕЗЕРА ДИАГРАММА — способ получения интерполяционных формул по узлам x_0, x_0+h. x_0-h, x_0+2h, x_0-2h, . . . в точке $x=x_0+th$, основанный на соотношении

$$C_p^q f_r^q+C_{p+1}^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1}=C_p^q f_{r+1}^q+C_p^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1}=$$
$$=C_p^q f_{r+1/2}^q+\frac{1}{2}\left(C_{p+1}^{q+1}+C_p^{q+1}\right) f_{r+1/2}^{q+1},$$

где f_l^k — конечные разности функции $f(x)$, а C_p^q — биномиальные коэффициенты. Каждому пути, идущему от произвольного элемента левого столбца по сторонам или горизонтальным диагоналям ромбов Ф. д., соответствует нек-рая интерполяционная формула, для получения к-рой надо руководствоваться следующими правилами.



1) Когда столбец разностей пересекается слева направо, добавляется один член.

2) Если путь входит (слева) в нек-рый столбец разностей по стороне ромба, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, на коэффициент, соответствующий пройденной стороне ромба.

3) Если путь входит (слева) в нек-рый столбец разностей по горизонтальной диагонали ромба, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, на полусумму коэффициентов, соответствующих сторонам, входящим (слева) в ту же вершину ромба.

4) Если путь пересекает (слева направо) столбец разностей по горизонтальной диагонали ромба между двумя разностями, то добавляется произведение полусуммы этих двух разностей на коэффициент, соответствующий стороне ромба, лежащей точно над (или под) пройденным участком диагонали.

5) Каждая часть пути, проходимая справа налево, вызывает те же самые члены, что и при прохождении слева направо, но с противоположным знаком.

6) Со столбцом табличных значений функции можно обращаться, как со столбцом разностей нулевого порядка, по тем же правилам, что и с остальными столбцами разностей.

Лит.: [1] Березин И. С, Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966, [2] Корн Г.-А., Корн Т.-М., Справочник по математике, пер. с англ., М., 1973.

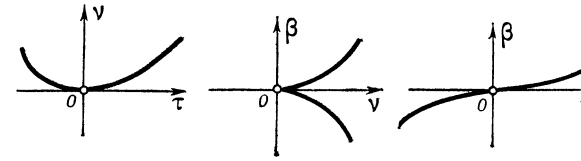
М. К. Самарин.

ФРЕЙДЕНТАЛЯ БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ — максимальное бикомпактное расширение с нульмерным *наростом*. Любое *периферически бикомпактное пространство* обладает Ф. б. р. (это доказано Х. Фрейденталем [1]). Среди всех таких расширений существует единственное максимальное и оно наз. Ф. б. р. (иногда Ф. б. р. наз. также любое бикомпактное расширение с нульмерным наростом). Ф. б. р. можно охарактеризовать также как (единственное) совершенное расширение с нульмерным наростом, а также как минимальное совершенное расширение, см. [3].

Лит.: [1] Freudenthal H., «Ann. Math.», 1942, v. 43, № 2, p. 261—79, «Indagat. math.», 1951, v. 13, p. 184—92; [2] Скляренко Е. Г., «Докл АН СССР», 1958, т. 120, № 6, с. 1200—03; [3] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 3, с 427—52, 1963, т. 27, № 5, с. 1165—80.

И Г. Кошевникова.

ФРЕНЕ ТРЕХГРАННИК, естественный трехгранник, — трехгранный угол, образованный лучами, исходящими из точки P регулярной кривой γ и имеющими направления соответственно касательной



τ, нормали ν и бинормали β к кривой. Если оси координат x, y, z соответственно совпадают со сторонами Ф. т., то уравнение кривой в этой системе координат имеет вид

$$x=\Delta s-\frac{k_1^2\Delta s^3}{6}+o(\Delta s^3),$$
$$y=\frac{k_1\Delta s^2}{2}+\frac{k_1'\Delta s^3}{6}+o(\Delta s^3),$$
$$z=-\frac{k_1k_2}{6}\Delta s^3+o(\Delta s^3),$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой, s — натуральный параметр. Качественный вид проекций кривой на плоскости Ф. т. при $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$ см. на рис.

Ф. т. рассматривался Ф. Френе (F. Frenet, 1847). *Д. Д. Соколов.*

ФРЕНЕ ФОРМУЛЫ — формулы, выражающие производные единичных векторов касательной τ, нормали ν и бинормали β к регулярной кривой по натуральному параметру s через эти же векторы и значения кривизны k_1 и кручения k_2 кривой:

$$\tau_s' = k_1\nu,$$
$$\nu_s' = -k_1\tau - k_2\beta,$$
$$\beta_s' = k_2\nu.$$

Получены Ф. Френе (F. Frenet, 1847). *Д. Д. Соколов.*

ФРЕНЕЛЯ ИНТЕГРАЛЫ — специальные функции

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2\, dt,$$

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2\, dt;$$

$$\lim_{x\to+\infty} C(x) = \lim_{x\to+\infty} S(x) = \frac{1}{2}.$$

Ф. и. представляют в виде рядов

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!\,(4k+1)},$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(4k+3)}.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sin x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cos x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

В прямоугольной системе координат (x, y) проекциями кривой

$$x = t,\quad y = C\left(\frac{\pi}{2}t^2\right),\quad z = S\left(\frac{\pi}{2}t^2\right),$$

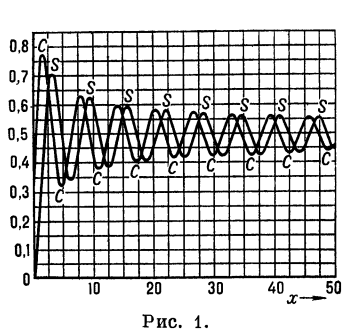


Рис. 1.

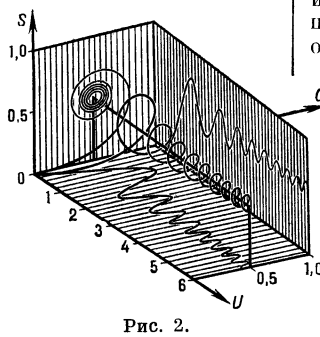


Рис. 2.

где t — действительный параметр, на координатные плоскости являются *Корню спираль* и кривые $y = C\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$, $z = S\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$ (см. рис. 2).

Обобщенными Ф. и. (см. [1]) наз. функции вида:

$$C(x, \alpha) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \cos t\, dt,$$

$$S(x, \alpha) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \sin t\, dt.$$

Ф. и. связаны с обобщенными Ф. и. следующим образом:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C\left(x, \frac{1}{2}\right);$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977. *А. Б. Иванов.*

ФРЕШЕ ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть действительнозначная функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на n-мерном параллелепипеде

$$D_n = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

и введены обозначения

$$\Delta_{h_k}(f, x) = f(x_1, \ldots, x_k + h_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n),\quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta_{h_1 \ldots h_k}(f; x) = \Delta_{h_k}(\Delta_{h_1 \ldots h_{k-1}}; x),\quad k = 2, \ldots, n.$$

Пусть Π — произвольное разбиение параллелепипеда D_n гиперплоскостями

$$x_s = x_s^{(r_s)}\left(x_s^{(r_s)} < x_s^{(r_s+1)},\quad x_s^{(r_s+1)} - x_s^{(r_s)} = h_s^{(r_s)},\right.$$
$$x_s^{(0)} = a_s,$$
$$\left. x_s^{(l_s)} = b_s,\ r_s = 0, 1, \ldots, l_s,\ s = 1, 2, \ldots, n\right)$$

на n-мерные параллелепипеды, а $\varepsilon_1^{(r_1)}, \ldots, \varepsilon_n^{(r_n)}$ могут принимать значения ± 1 произвольным образом. Вариация Фреше определяется так:

$$F(f, D_n) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varepsilon} \sup_{\Pi} \left| \sum_{r_1=0}^{l_1-1} \ldots \sum_{r_n=0}^{l_n-1} \varepsilon_n^{(r_1)} \ldots \varepsilon_n^{(r_n)} \times \right.$$
$$\left. \times \Delta_{h_1^{(r_1)} \ldots h_n^{(r_n)}}(f; x_1^{(r_1)}, \ldots, x_n^{(r_n)}) \right|.$$

Если $F(f; D_n) < \infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) вариацию Фреше на D_n, а класс всех таких функций обозначается через $F(D_n)$. Этот класс при $n = 2$ введен М. Фреше [1] в связи с исследованием общего вида билинейного непрерывного функционала $U(\varphi_1, \varphi_2)$ в пространстве непрерывных на квадрате $Q_2 = [a, b] \times [a, b]$ функций вида $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Он доказал, что всякий такой функционал представляется в виде

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^b \int_a^b \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\, d_{x_1} d_{x_2} u(x_1, x_2),$$

где $u(x_1, x_2) \in F(Q_2)$, $u(a, x_2) \equiv u(x, b) \equiv 0$.

Для 2π-периодических функций класса $F(Q_n)$ $(Q_n = [0, 2\pi] \times \ldots \times [0, 2\pi])$ справедливы аналоги многих классических признаков сходимости рядов Фурье [2]. Например, если $f(x) \in F(Q_n)$, $n = 2, 3, \ldots$, то прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ сходятся к числу

$$\frac{1}{2^n} \sum f(x_1 \pm 0, \ldots, x_n \pm 0),$$

где суммирование распространяется на все 2^n возможных комбинаций знаков $\pm$. При этом, если функция непрерывна, то сходимость равномерная (аналог признака Жордана).

Лит.: [1] Frechet M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1915, v. 16, № 3, p. 215—34; [2] Morse M., Transue W., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1949, v. 35, № 7, p. 395—99. *Б. Вн Голубов.*

ФРЕШЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛ в точке x_0 отображения $f\colon X \longrightarrow Y$ нормированного пространства X в нормированное пространство Y — отображение $h \longrightarrow D(x_0, h)$,

являющееся линейным и непрерывным отображением из X в Y и обладающее тем свойством, что

$$f(x_0+h)=f(x_0)+D(x_0,\ h)+\varepsilon(h), \qquad (1)$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0} \|\varepsilon(h)\| / \|h\| = 0.$$

Если отображение f в точке x_0 допускает разложение (1), то оно наз. дифференцируемым по Фреше, а сам оператор

$$f'(x_0)\,h = D(x_0,\ h),\ f'(x_0)\in L(X,\ Y),$$

наз. *Фреше производной*.

Для функции f конечного числа переменных Ф. д.— линейная функция

$$h \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = l_{x_0} h,$$

обладающая тем свойством, что

$$f(x_0+h)=f(x_0)+l_{x_0}(h)+o(|h|), \qquad (2)$$

где $|h|=\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2\right)^{1/2}$ или любая другая равносильная норма в $\mathbb{R}^n$. При этом $\alpha_i=\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ — частные производные функции f в точке x_0.

Определение (2), являющееся ныне общепринятым, впервые в явной форме появилось, по-видимому, в лекциях К. Вейерштрасса (1861, см. [1]). В кон. 19 в. это определение постепенно входит в учебники (см. [2], [3] и др.). Однако к моменту, когда М. Фреше (см. [4], [5]) начал разработку бесконечномерного анализа, классическое ныне определение дифференциала было настолько необщепринятым, что и сам М. Фреше полагал, что определенный им дифференциал на бесконечномерном пространстве является новым понятием и в конечномерном случае. В настоящее время термин употребляется лишь при рассмотрении бесконечномерных отображений. См. *Гато дифференциал*, *Дифференцирование отображения*.

Лит.: [1] Dugac P., Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, P., 1972; [2] Stolz O., Grundzüge der Differential-und Integralrechnung, Bd 1, Lpz., 1893, [3] Young W., The fundamental theorems of the differential calculus, Camb., 1910; [4] Fréchet M., «C. r. Acad. sci», 1911, t. 152, p. 845—47, [5] его же, «Nouvelles ann. math.», 4 sér., 1912, t. 12; [6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981, [7] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление, М., 1979. *В. М. Тихомиров.*

ФРЕШЕ ПОВЕРХНОСТЬ — обобщение понятия поверхности в евклидовом или произвольном метрич. пространстве A. Пусть M^2 — компактное двумерное многообразие (замкнутое или с краем). Точки M^2 играют роль параметра. Непрерывные отображения $f: M^2 \to A$ называют параметризованными поверхностями (п. п.). Две п. п. считают эквивалентными, если

$$\rho(f_1,\ f_2) \equiv \inf_{\sigma} \max_{x\in M^2} d(f_1(x),\ f_2(\sigma(x))) = 0,$$

где d — расстояние в A, а $\sigma: M^2 \to M^2$ — всевозможные гомеоморфизмы M^2 на себя. Класс эквивалентных п. п. называют поверхностью Фреше (см. [1]), а каждую из входящих в этот класс п. п.— параметризацией Ф. п. Многие свойства п. п. являются свойствами Ф. п., а не ее конкретной параметризации. Для двух Ф. п. значение $\rho(f_1, f_2)$ не зависит от выбора параметризаций f_1, f_2; его называют расстоянием по Фреше между Ф. п. Замена в определении Ф. п. области M^2 изменения параметра окружностью или замкнутым отрезком дает определение кривой Фреше (см. [2]).

Лит.: [1] Fréchet M., «Ann. soc. polon. math.», 1924, t. 3, p. 4—19; [2] его же, «Rend. Circolo mat. Palermo», 1906, t. 22, p. 1—74. *В. А. Залгаллер.*

ФРЕШЕ ПРОИЗВОДНАЯ, сильная производная,— наиболее распространенная (наряду с *Гато производной*, наз. иногда слабой производной) производная функционала или отображения. Ф. п. в точке x_0 отображения $f: X \to Y$ нормированного пространства X в нормированное пространство Y называют линейный непрерывный оператор $\Lambda: X \to Y$, удовлетворяющий условию

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\Lambda h+\varepsilon(h),$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0} \|\varepsilon(h)\| / \|h\| = 0.$$

Оператор Λ, удовлетворяющий этим условиям, единствен и обозначается $f'(x_0)$, линейное отображение $h \to f'(x_0)h$ наз. *Фреше дифференциалом*. Если отображение f имеет в точке x_0 Ф. п., оно наз. дифференцируемым по Фреше. Для Ф. п. выполнены важнейшие теоремы дифференциального исчисления — о дифференцировании сложной функции, о среднем. Если функция f непрерывно дифференцируема по Фреше в окрестности точки x_0 и в точке x_0 Ф. п. $f'(x_0)$ является гомеоморфизмом банаховых пространств X и Y, то имеет место теорема об обратном отображении. См. также *Дифференцирование отображения*. *В. М. Тихомиров.*

ФРЕШЕ ПРОСТРАНСТВО — полное метризуемое локально выпуклое топологическое векторное пространство. Банаховы пространства доставляют примеры Ф. п., однако многие важные функциональные пространства являются Ф. п., не являясь вместе с тем банаховыми. К числу таковых относятся: пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на $\mathbb{R}^n$, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любого многочлена, с топологией, задаваемой системой полунорм

$$p_{\alpha\beta}(x(\cdot)) = \sup_{t\in\mathbb{R}^n} \left| t_1^{\beta_1} \dots t_n^{\beta_n} \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} x(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_n^{\alpha_n}} \right|,$$

где α и β — целочисленные неотрицательные векторы; пространство $H(D)$ всех голоморфных функций на нек-ром открытом подмножестве D комплексной плоскости с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D и т. д.

Замкнутое подпространство Ф. п. является Ф. п.; факторпространство Ф. п. по замкнутому подпространству является также Ф. п.; Ф. п. является *бочечным пространством*, и потому для отображений из Ф. п. в локально выпуклые пространства оказывается верной *Банаха — Штейнхауза теорема*. Если отделимое локально выпуклое пространство является образом Ф. п. при открытом отображении, то оно само является Ф. п. Взаимно однозначное непрерывное линейное отображение Ф. п. на Ф. п. есть изоморфизм (аналог теоремы Банаха).

Названо в честь М. Фреше (M. Fréchet).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967. *В. М. Тихомиров.*

ФРИДРИХСА НЕРАВЕНСТВО — неравенство вида

$$\int_\Omega f^2\,d\Omega \leqslant C\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega + \int_\Gamma f^2\,d\Gamma\right\}, \qquad (1)$$

где Ω — ограниченная область точек $x=x(x_1, \dots, x_n)$ n-мерного евклидова пространства с $(n-1)$-мерной границей Γ, удовлетворяющей локально условию Липшица, функция $f \equiv f(x) \in W_2^1(\Omega)$ (пространству Соболева).

Правая часть Ф. н. задает эквивалентную норму в $W_2^1(\Omega)$. С помощью другой эквивалентной норми-

ровки $W_2^1(\Omega)$ получена (см. [2]) модификация Ф. н. вида

$$\int_\Omega f^2 d\Omega \leqslant C\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega + \left(\int_\Gamma f d\Gamma\right)^2\right\}. \quad (2)$$

Имеются обобщения (см. [3]—[5]) Ф. н. на весовые классы (см. *Весовое пространство*, *Вложения теоремы*). Пусть $\Gamma \subset C^{(l)}$, числа r, p, α действительные, причем r—натуральное, $1 \leqslant p < \infty$. Говорят, что $f \in W^r_{p,\alpha}(\Omega)$, если конечна норма

$$\|f\|_{W^r_{p,\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{\omega^r_{p,\alpha}(\Omega)},$$

где

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p d\Omega\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\omega^r_{p,\alpha}(\Omega)} = \sum_{|k|=r} \|\rho^\alpha f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)},$$

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad |k| = \sum_{i=1}^n k_i,$$

$\rho \equiv \rho(x)$—функция, эквивалентная расстоянию от $x \in \Omega$ до Γ.

Пусть число s_0—натуральное и

$$r - \alpha - 1/p \leqslant s_0 < r - \alpha + 1 - 1/p.$$

Тогда, если $\Gamma \subset C^{(s_0+1)}$, $-1/p < \alpha < r - 1/p$, $r/2 \leqslant s_0$, то для $f \in W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{l+s<r/2} \left\| \left(\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\Big|_\Gamma\right)^{(l)} \right\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{\omega^r_{p,\alpha}(\Omega)}\right\},$$

где $\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\Big|_\Gamma$—производная порядка s по внутренней нормали к Γ в точках Γ.

Также получается и неравенство типа неравенства (2), к-рое в простейшем случае имеет вид

$$\|f\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|^p_{\omega^1_{p,\alpha}(\Omega)} + \left|\int_\Gamma u\tau\, d\Gamma\right|^p\right),$$

где

$$p > 1,\ \gamma > 1,\ -1/p < \alpha < 1 - 1/p - 1/\gamma,$$

$$\tau \in L\gamma(\Gamma),\ \int_\Gamma \tau\, d\Gamma \neq 0.$$

Всюду постоянная C не зависит от f.

Неравенство названо по имени К. Фридрихса, к-рый получил его при $n=2$, $f \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ (см. [1]).

Лит.: [1] Friedrichs K., «Math. Ann.», 1927, Bd 98, S. 566—75; [2] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [3] Никольский С. М., Лизоркин П. И., «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, № 3, с. 512—15; [4] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [5] Калиниченко Д. Ф., «Матем. сб.», 1964, т. 64, № 3, с. 436—57; [6] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 2 изд., т. 2, М.—Л., 1951, [7] Nirenberg L., «Ann. Scuola norm. super.», 1959, ser. 3, v. 13, № 2; [8] Sandgren L., «Meddel. från Lunds univers. matem. semin.», 1955, Bd 13, p. 1—84.

Д. Ф. Калиниченко, Н. В. Мирошин.

ФРОБЕНИУСА АВТОМОРФИЗМ—элемент группы Галуа специального вида, играющий фундаментальную роль в теории полей классов. Пусть L—алгебраич. расширение конечного поля K. Тогда Ф. а. наз. автоморфизм $\varphi_{L/K}$, определяемый формулой $\varphi_{L/K}(a) = a^q$ для всех $a \in L$, где $q = \#K$ (мощность K). Если L/K—конечное расширение, то $\varphi_{L/K}$ порождает группу Галуа $G(L/K)$. Для бесконечного расширения L/K автоморфизм $\varphi_{L/K}$ является топологич. образующей группы $G(L/K)$. Если $L \supset E \supset K$ и $[E:K] < \infty$, то $\varphi_{L/E} = \varphi_{L/K}[E:K]$.

Пусть k—локальное поле с конечным полем вычетов $\overline{k}$, а K—неразветвленное расширение поля k. Тогда Ф. а. $\varphi_{K/k}$ расширений полей вычетов однозначно продолжается до автоморфизма $\varphi_{K/k} \in G(K/k)$, наз. Ф. а. неразветвленного расширения K/k. Пусть $\#\overline{k} = q$, $\mathcal{O}_K$—кольцо целых элементов поля K и $\mathfrak{p}$—максимальный идеал в $\mathcal{O}_K$. Тогда Ф. а. $\varphi_{K/k}$ однозначно определяется условием $\varphi_{K/k}(a) \equiv a^q \bmod \mathfrak{p}$ для любого $a \in \mathcal{O}_K$. Если K/k—произвольное расширение Галуа локальных полей, то Ф. а. расширения K/k иногда называют любой автоморфизм $\varphi \in G(K/k)$, индуцирующий на максимальном неразветвленном подрасширении поля K Ф. а. в указанном выше смысле.

Пусть K/k—расширение Галуа глобальных полей, $\mathfrak{p}$—простой идеал поля k и $\mathfrak{P}$—нек-рый простой идеал поля K, лежащий над $\mathfrak{p}$. И пусть $\mathfrak{P}$ не разветвлен в расширении K/k и $\varphi_{\mathfrak{P}} \in G(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$—Ф. а. неразветвленного расширения локальных полей $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$. Отождествляя группу Галуа $G(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ с подгруппой разложения идеала $\mathfrak{p}$ в $G(K/k)$, можно рассматривать $\varphi_{\mathfrak{P}}$ как элемент группы $G(K/k)$. Этот элемент наз. Ф. а., соответствующим простому идеалу $\mathfrak{P}$. Если K/k—конечное расширение, то согласно теореме Чеботарева о плотности для любого автоморфизма $\sigma \in G(K/k)$ существует бесконечное число простых идеалов $\mathfrak{P}$, не разветвленных в K/k таких, что $\sigma = \varphi_{\mathfrak{P}}$. Для абелева расширения K/k элемент $\varphi_{\mathfrak{P}}$ зависит только от $\mathfrak{p}$. В этом случае $\varphi_{\mathfrak{P}}$ обозначается через $(\mathfrak{p}, K/k)$ и наз. символом Артина простого идеала $\mathfrak{p}$.

Лит.: [1] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972.

Л. В. Кузьмин.

ФРОБЕНИУСА ТЕОРЕМА — теорема, описывающая все конечномерные ассоциативные действительные алгебры без делителей нуля, доказана Г. Фробениусом [1]. Ф. т. утверждает, что:

1) Поле действительных чисел и поле комплексных чисел являются единственными конечномерными действительными ассоциативно-коммутативными алгебрами без делителей нуля.

2) Тело кватернионов является единственной конечномерной действительной ассоциативной, но не коммутативной алгеброй без делителей нуля.

Существует также описание альтернативных конечномерных алгебр без делителей нуля:

3) Алгебра Кэли является единственной конечномерной действительной альтернативной, но не ассоциативной алгеброй без делителей нуля.

Объединение этих трех утверждений наз. обобщенной теоремой Фробениуса. Все участвующие в формулировке теоремы алгебры оказываются алгебрами с однозначным делением и с единицей Ф. т. не может быть обобщена на случай неальтернативных алгебр. Доказано, однако, что размерность любой конечномерной действительной алгебры без делителей нуля может принимать лишь значения, равные 1, 2, 4 или 8.

Лит.: [1] Frobenius F., «J. reine und angew. Math.», 1877, Bd 82, S. 230—315, [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.

О. А. Иванова.

ФРОБЕНИУСА ТЕОРЕМА — теорема об условиях полной интегрируемости системы уравнений Пфаффа или (в геометрич. терминах) об условиях, при к-рых заданное на дифференцируемом многообразии поле n-мерных касательных подпространств является касательным полем нек-рого *слоения*. Несколько эквивалентных формулировок Ф. т. см. в статьях *Инволютивное распределение*, *Коши задача*; вариант с минимальными требованиями дифференцируемости см. в [2]. Название Ф. т. связано с изложением этой теоремы в [1], но не соответствует приводимым там сведениям об ее истории.

Лит.: [1] Frobenius F., «J. reine und angew. Math.», 1877, Bd 82, S. 230—315; [2] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970

Д. В. Аносов.

ФРОБЕНИУСА ФОРМУЛА — формула, выражающая отношение обобщенного определителя Вандермонда к обычному (см. *Вандермонда определитель*) через степенные суммы. В качестве коэффициентов в Ф. ф. участвуют характеры *представлений симметрической группы*.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные. Для любого набора $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющего условию $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, пусть

$$W_\lambda = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \ldots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \ldots & x_n^{\lambda_1+n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \ldots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix},$$

так что W_0 есть обычный определитель Вандермонда. И пусть $\sum\lambda_i=m$; тогда набор λ после выкидывания нулей можно рассматривать как разбиение числа m. Рассматривается соответствующее неприводимое представление T_λ группы S_m. Для любого разбиения $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ числа m через $a_{\lambda\mu}$ обозначается значение характера представления T_λ на классе сопряженных элементов группы S_m, определяемом разбиением μ, и через c_μ — порядок централизатора любой подстановки из этого класса. Пусть $s_\mu=s_{\mu_1}s_{\mu_2}\ldots s_{\mu_r}$, где $s_k=x_1^k+\ldots+x_n^k$. Тогда

$$\frac{W_\lambda}{W_0}=\sum\nolimits_\mu a_{\lambda\mu}c_\mu^{-1}s_\mu,$$

где сумма берется по всем (неупорядоченным) разбиениям числа m. При этом, если разбиение μ содержит k_1 единиц, k_2 двоек и т. д., то

$$c_\mu=k_1!\ k_2!\ \ldots\ 1^{k_1}\ 2^{k_2}\ \ldots$$

Если $n\geqslant m$, то Ф. ф. может быть преобразована к виду

$$\sum\nolimits_\lambda a_{\lambda\mu}W_\lambda=s_\mu W_0,$$

где сумма берется по всем разбиениям числа m (дополненным надлежащим числом нулей). Последняя формула может быть использована для вычисления характеров симметрич. группы. А именно, $a_{\lambda\mu}$ есть коэффициент при $x_1^{\lambda_1+n-1}x_2^{\lambda_2+n-2}\ldots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене $s_\mu W_0$.

Лит.: [1] Мурнаган Ф. Д., Теория представлений групп, пер. с англ., М., 1950.

Э. Б. Винберг.

ФРОБЕНИУСА ЭНДОМОРФИЗМ — эндоморфизм $\varphi\colon X\longrightarrow X$ схемы X над конечным полем F_q из q элементов такой, что φ — тождественное отображение топологич. пространства X, а отображение структурного пучка $\varphi^*\colon \mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_X$ совпадает с возведением в степень q. Ф. э. является чисто несепарабельным морфизмом и имеет нулевой дифференциал. Для аффинного многообразия $X\subset A^n$, определенного над F_q, Ф. э. φ переводит точку $(x_1, \ldots, x_n)$ в точку $(x_1^q, \ldots, x_n^q)$.

Число геометрич. точек схемы X, определенных над F_q, совпадает с числом неподвижных точек Ф. э. φ, что позволяет использовать для определения числа таких точек *Лефшеца формулу*.

Лит.: [1] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.

Л. В. Кузьмин.

ФРОБЕНИУСОВА АЛГЕБРА — конечномерная алгебра R над полем P такая, что левые R-модули R и $\mathrm{Hom}_P(R, P)$ изоморфны. На языке представлений это означает эквивалентность правого и левого регулярных представлений. Всякая групповая алгебра конечной группы над полем является Ф. а. Каждая Ф. а. является *квазифробениусовым кольцом*. Обратное утверждение неверно. Эквивалентны следующие свойства конечномерной P-алгебры R:

1) R — Ф. а.;

2) существует такая невырожденная билинейная форма $f: R\times R\to P$, что $f(ab, c)=f(a, bc)$ для любых a, b, $c\in R$;

3) если L — левый, а H — правый идеалы алгебры R, то (см. *Аннулятор*)

$$\mathfrak{Z}_l(\mathfrak{Z}_r(L))=L,\quad \mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_l(H))=H,$$

$$\dim_P\mathfrak{Z}_r(L)+\dim_P L=\dim_P R=\dim_P\mathfrak{Z}_l(H)+\dim_P H.$$

Ф. а., по существу, появились впервые в работах Г. Фробениуса [3].

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [3] Frobenius G., «Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.», 1903, № 24, S. 504—507, 634—45.

Л. А. Скорняков.

ФРОММЕРА МЕТОД — метод исследования особых точек автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot p=f(p),\ p=(x, y),\ f=(X, Y): G\longrightarrow\mathbb{R}^2, \qquad (1)$$

где функция f аналитическая или достаточно гладкая в области G.

Пусть $O=(0, 0)$ — особая точка системы (1), т. е. $f(O)=0$, а X, Y — аналитические в точке O функции, не имеющие общего аналитического исчезающего в O множителя. Ф. м. позволяет выявить все TO-к р и в ы е системы (1) — полутраектории этой системы, примыкающие к O по определенным направлениям. Каждая TO-кривая системы (1), не лежащая на оси $x=0$, является O-к р и в о й уравнения

$$y'=\frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \qquad (2)$$

(т. е. представима вблизи точки O в виде

$$y=\varphi(x),\quad \varphi(x)\longrightarrow 0\ \text{ при }\ x\longrightarrow 0, \qquad (3)$$

где $\varphi: I\to\mathbb{R}$ — решение уравнения (2), $I=(0, \delta)$ или $(-\delta, 0)$, $\delta>0$, $\varphi(x)\equiv 0$ или $\varphi(x)\neq 0$ для любого $x\in I$) и наоборот.

Пусть уравнение (2) рассматривается сначала в области $x>0$. Если оно представляет собой п р о с т о е у р а в н е н и е Б е н д и к с о н а, т. е. удовлетворяет условиям

$$X(x, y)\equiv x^h,\quad h\geqslant 1,\quad Y'_y(0, 0)=a\neq 0,$$

то для него в области $x>0$ существует единственная O-кривая при $a<0$; область $x>0$, $x^2+y^2<r^2$, где r — достаточно малое положительное число, представляет собой параболич. *сектор* при $a>0$. В противном случае для выявления O-кривых уравнения (2) в области $x>0$ применяют Ф. м. Основой для его применения является тот факт, что каждая O-кривая (3) уравнения (2), $\varphi(x)\not\equiv 0$, обладает в точке O вполне определенной асимптотикой, а именно, будучи представлена в виде

$$y=x^{\nu(x)}\operatorname{sign}\varphi(x),$$

она допускает конечный или бесконечный предел

$$\nu=\lim_{x\to 0}\nu(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|\varphi(x)|}{\ln x}\in[0, +\infty],$$

к-рый наз. ее п о р я д к о м к р и в и з н ы в точке O, а при $\nu\in(0, +\infty)$ допускает еще и конечный или бесконечный предел

$$\gamma=\lim_{x\to 0}\varphi(x)x^{-\nu}\in[-\infty, +\infty],$$

к-рый наз. ее м е р о й к р и в и з н ы в точке O. При этом O-кривой $y=0$, $x\in(0, \delta)$, приписывается порядок кривизны $\nu=+\infty$.

Первый шаг Ф. м. состоит в следующем. Алгебраич. средствами вычисляются все возможные порядки кривизны ν (их всегда конечное число) и для каждого порядка $\nu \in (0, +\infty)$ — все возможные меры кривизны γ для O-кривых уравнения (2). На основании общих теорем метода выясняется вопрос о существовании у уравнения (2) O-кривых со всеми возможными порядками и мерами кривизны, за исключением конечного ($\geqslant 0$) числа т. н. характеристических пар (ν, γ). Для каждой из последних $\nu = r/s$, где r, s — натуральные числа, $0 < |\gamma| < +\infty$. Поэтому подстановка $x \longrightarrow x^s$, $y \longrightarrow (\gamma + y)x^r$ преобразует уравнение (2) в производное уравнение (2_1) того же вида, сводя вопрос о существовании у уравнения (2) O-кривых с порядком кривизны ν и мерой кривизны γ к вопросу о существовании у уравнения (2_1) O-кривых в области $x > 0$.

Если уравнение (2) не имеет характеристич. пар или если каждое из его производных уравнений оказывается простым уравнением Бендиксона, то все O-кривые уравнения (2) в области $x > 0$ выявляются на первом шаге процесса. В противном случае делают второй шаг — изучают по схеме первого шага производные уравнения, не являющиеся простыми уравнениями Бендиксона. При этом приходят к производным уравнениям 2-й серии и т. д. На каждом шаге процесс, вообще говоря, ветвится, однако для фиксированного уравнения (2) число ветвей процесса конечно и любая ветвь заканчивается приведенным уравнением, к-рое либо является простым уравнением Бендиксона, либо не имеет характеристич. пар.

Таким образом, с помощью конечного числа шагов Ф. м. можно выявить все TO-кривые системы (1) в области $x > 0$ вместе с их асимптотикой в точке O. Замена в системе (1) x на $-x$ позволяет сделать то же самое для области $x < 0$, а непосредственная проверка позволяет установить, являются ли TO-кривыми полуоси оси $x = 0$. Поведение всех траекторий системы (1) в окрестности точки O выясняется на основании этой информации следующим образом.

Если система (1) не имеет TO-кривых, то точка O является для нее *центром*, *фокусом* или *центро-фокусом*. Если множество H всех TO-кривых системы (1) непусто, то информация об их асимптотике в точке O, полученная Ф. м., позволяет разбить H на конечное число непересекающихся пучков TO-кривых: $H_1, H_2, \ldots, H_k$, $k \geqslant 2$, каждый из к-рых либо открыт: состоит из одноименных (положительных или отрицательных) полутраекторий, заполняющих область, либо «замкнут»: состоит из единственной TO-кривой. Представители этих пучков $l_1, l_2, \ldots, l_k$ имеют различную асимптотику в точке O, что позволяет установить циклич. порядок следования пучков при обходе точки O по окружности C малого радиуса r, и разбивают круг Q, ограниченный окружностью C, на k секторов $S_1, \ldots, S_k$.

Пусть сектор S_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, имеет своими боковыми стенками TO-кривые l_i и l_{i+1}, где l_{k+1} совпадает с l_1. Тогда сектор S_i будет: а) эллиптическим, б) гиперболическим или в) параболическим, смотря по тому, будут ли пучки H_i, H_{i+1} соответственно а) открытыми, б) «замкнутыми» или в) разноименными.

Таким образом, Ф. м. позволяет конечным числом шагов либо найти для системы (1) циклич. последовательность гиперболич., параболич. и эллиптич. секторов, примыкающих к точке O, и тем самым полностью выяснить топологич. тип расположения ее траекторий в окрестности точки O, либо показать, что для точки O возникает проблема различения центра, фокуса и центро-фокуса.

Ф. м. был предложен М. Фроммером [1]. Он может быть приспособлен и для исследования особых точек систем 3-го порядка.

Лит.: [1] Frommer M., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 222—72; [2] Андреев А. Ф., Особые точки дифференциальных уравнений, Минск, 1979. *А. Ф. Андреев.*

ФРОНТ ВОЛНОВОЙ *обобщенной функции* или гиперфункции — коническое множество в кокасательном расслоении к многообразию, на к-ром задана рассматриваемая обобщенная функция или гиперфункция, характеризующее ее особенности. Гиперфункция — это сумма формальных граничных значений голоморфных функций. Две такие суммы отождествляются, если они эквивалентны в смысле эквивалентности, даваемой аналогом *Боголюбова теорема* «остриё клина», в к-ром, однако, ни в каком смысле не предполагается существование пределов рассматриваемых голоморфных функций.

Ф. в. гиперфункции часто наз. также аналитическим Ф. в. или сингулярным носителем (последний термин чаще употребляется в совсем другом смысле, когда он означает дополнение к множеству той или иной регулярности обобщенной функции или гиперфункции на самом многообразии, а не в кокасательном расслоении). Понятие Ф. в. лежит в основе микролокального анализа, представляющего собой комплекс идей и методов, использующих Ф. в. и другие связанные с ним понятия и средства (в частности, псевдодифференциальные операторы и интегральные операторы Фурье) для изучения уравнений с частными производными (в основном, линейных).

Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $u \in D'(X)$, т. е. u — обобщенная функция на X. Тогда Ф. в. $WF(u)$ обобщенной функции u представляет собой замкнутое конич. подмножество в $T^*X \setminus 0 = X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$, к-рое определяется следующим образом: если $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$, то $(x_0, \xi_0) \in WF(u)$ означает, что существуют такая функция $\varphi \in C_0^\infty(X)$, равная 1 в окрестности точки x_0, и такая конич. окрестность Γ точки ξ_0 в $\mathbb{R}^n \setminus 0$, что для любого $N > 0$ выполнена оценка

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leqslant C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma,$$

где

$$C_N > 0, \ \widehat{\varphi u}(\xi) = \langle u(x), \varphi(x) e^{-ix\xi} \rangle,$$

т. е. $\widehat{\varphi u}$ — преобразование Фурье от φu.

Если X — многообразие и u — обобщенная функция на X (или, более общо, обобщенное сечение гладкого векторного расслоения), то $WF(u)$ определяется так же, как и выше (после перехода к локальным координатам). В этом случае $WF(u)$ оказывается корректно определенным конич. подмножеством в $T^*X \setminus 0$ (кокасательном расслоении без нулевого сечения).

Введем канонич. проекцию π: $T^*X \setminus 0 \longrightarrow X$. Тогда

$$\pi(WF(u)) = \operatorname{sing\,supp} u, \qquad (1)$$

где singsupp u — дополнение к наибольшему открытому подмножеству в X, на котором u совпадает с бесконечно дифференцируемой функцией. Это соотношение показывает, что $WF(u)$ действительно является более детальной характеристикой особенностей u, чем singsupp u.

Пусть A — псевдодифференциальный оператор на X порядка m с главным символом $a_m(x, \xi)$, $\operatorname{char} A$ — множество его характеристич. направлений, т. е.

$$\operatorname{char} A = \{(x, \xi) \in T^*X \setminus 0 : a_m(x, \xi) = 0\}.$$

Тогда

$$WF(Au) \subset WF(u) \subset WF(Au) \cup \operatorname{char} A. \qquad (2)$$

Здесь первое включение характеризует псевдолокальность оператора A, а второе является далеко идущим обобщением теоремы о гладкости решений эллиптич. уравнений с гладкими коэффициентами.

Если главный символ $a_m(x, \xi)$ оператора A действительнозначен, то имеет место следующая теорема о

распространении особенностей: если дан связный кусок γ бихарактеристики (т. е. траектории гамильтонова поля на $T^*X\setminus 0$ с гамильтонианом a_m), не пересекающийся с $WF(Au)$, то либо $\gamma\subset WF(u)$, либо $\gamma\cap WF(u)=\varnothing$.

Эта теорема показывает, что особенности решений (т. е. их Ф. в.) уравнения $Au=f$ с гладкой правой частью f распространяются по бихарактеристикам главного символа a_m оператора A (см. [3], [4], [8], [11], [12]).

Аналитич. Ф. в. $WF_a(u)$ для обобщенной функции $u\in D'(X)$ может быть определен одним из следующих трех эквивалентных (см. [13]) способов (здесь для простоты X — область в $\mathbb{R}^n$):

1) $(x_0, \xi_0)\notin WF_a(u)$, если существуют такие окрестность ω точки x_0, открытые собственные выпуклые конусы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ в $\mathbb{R}^n$ и функции f_j, голоморфные в $\omega+i\Gamma_j$, что $\xi_0\notin\Gamma_j^0$, $j=1, \ldots, N$, и $u=\sum_{j=1}^N b(f_j)$, где Γ_j^0 — двойственный конус к Γ_j, а $b(f_j)$ — граничное значение голоморфной функции $f_j(x+iy)$ при $y\to 0$, $y\in\Gamma_j$, понимаемое в смысле слабой сходимости обобщенных функций. Это определение применимо и к гиперфункциям, если иначе понимать граничное значение.

2) Пусть

$$F_u(\xi, \lambda; x)=\int \exp[-iy\cdot\xi-\lambda\,|\,y-x\,|^2]\,u(y)\,dy$$

(обобщенное преобразование Фурье); тогда $(x_0, \xi_0)\notin WF(u)$ в том и только в том случае, если для любой функции $\chi\in C_0^\infty(X)$, аналитической в окрестности точки x_0, существуют такие конич. окрестность Γ точки ξ_0 и положительные постоянные α, γ, C_N, что

$$F_{\chi u}(\xi, \lambda; x_0)\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N}e^{-\lambda\alpha},\ \xi\in\Gamma, 0<\lambda<\gamma|\xi|.$$

3) $(x_0, \xi_0)\notin WF_a(u)$ тогда и только тогда, когда существуют такие окрестность ω точки x_0 в X, ограниченная последовательность обобщенных функций u_k, $k=1, 2, \ldots$, с компактным носителем и постоянная $C>0$, что $u_k=u$ в ω и

$$|\widehat{u_k}(\xi)|\leqslant C^{k+1}k!\,|\xi|^{-k},\ \xi\in\Gamma.$$

Для аналитич. Ф. в. имеет место аналог свойства (1):

$$\pi(WF_a(u))=\operatorname{sing\,supp}_a u,$$

где $\operatorname{sing\,supp}_a u$ — дополнение к наибольшему множеству, на к-ром u действительно-аналитична. Имеет место аналог свойства (2), где в качестве A можно брать дифференциальный оператор с действительно-аналитич. коэффициентами или аналитич. псевдодифференциальный оператор (см. [6], [9], [11], [15]). Для таких операторов A с действительным главным символом выполняется теорема о распространении аналитич. Ф. в., аналогичная сформулированной выше теореме об обычных Ф. в. (см. [11]).

Лит.: [1] Sato M., Proc. 2nd Conf. on Functional Anal., Tokyo, 1969, p. 91—94; [2] Хёрмандер Л., «Математика», 1972, т. 16, № 1, с. 16—61, т. 16, № 2, с. 67—136; [3] Duistermaat J. J., Hörmander L., «Acta Math.», 1972, v. 128, p. 183—269; [4] Duistermaat J. J., Fourier integral operators, N. Y., 1973; [5] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [6] Трев Ф., Введение в теорию псевдо-дифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, пер. с англ., т. 1—2, М., 1984; [7] Taylor M., Pseudodifferential operators, Princeton, 1981; [8] Ниренберг Л., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 4, с. 147—204; [9] Sato M., Kawai T., Kashiwara M., «Lect. Notes in Math.», 1973, v. 287, p. 265—529; [10] Шаципа П., Теория гиперфункций, пер. с франц., М., 1972; [11] Sjöstrand J., Singularités analytiques microlocales, Orsay, 1982; [12] Lascar R., Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-differentielles à caractéristiques de multiplicités variables, B.— [e. a.], 1981; [13] Bony J. «Sém. Goulaouic — Schwartz», 1976—1977, p. III. 1—III. 12; [14] Bros J., Iagolnitzer D., «Sém. Goulaouic — Lions — Schwartz», 1974—75, № 16—18; [15] Hörmander L., «Comm. Pure Appl. Math.», 1970, v. 23, p. 329—358.

М. А. Шубин.

ФРУДА ЧИСЛО — один из критериев подобия движения жидкостей или газов, применяемый в случаях, когда существенно воздействие силы тяжести. Ф. ч. характеризует соотношение между инерционной силой и силой тяжести, действующими на элементарный объем жидкости или газа. Ф. ч.

$$\mathrm{Fr}=v^2/gl,$$

где v — скорость течения (или скорость движущегося тела), g — ускорение силы тяжести, l — характерный размер потока или тела.

Ф. ч. введено У. Фрудом (W. Froude, 1870).

По материалам одноименной статьи БСЭ-3.

ФУБИНИ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — интерпретация многообразия прямых трехмерного эллиптич. пространства S_3 на паре двумерных эллиптич. плоскостей S_2. Пары взаимно полярных прямых пространства S_3 взаимно однозначно изображаются парами диаметрально противоположных точек двух сфер единичного радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. При отождествлении диаметрально противоположных точек получается взаимно однозначное изображение пар полярных прямых пространства S_3 точками двух эллиптич. плоскостей S_2. Многообразие пар полярных прямых гомеоморфно топологич. произведению этих двух плоскостей S_2. Движения пространства S_3 изображаются в Ф. и. независимыми движениями двух плоскостей S_2: каждая связная группа движений пространства S_3 изоморфна прямому произведению двух групп движений плоскости S_2: группа движений пространства S_3 изоморфна прямому произведению двух групп движений пары плоскостей S_2.

Ф. и. строится и для трехмерного гиперболич. пространства ${}^2S_3$. В этом случае используется *Плюккера интерпретация* проективного пространства P_3 в пространстве ${}^3S_5$. Группа движений пространства ${}^2S_3$ изоморфна прямому произведению двух групп движений плоскости ${}^1S_2$; она изображается в интерпретации Плюккера подгруппой группы движений пространства ${}^3S_5$, переводящей в себя две взаимно полярные гиперболич. 2-плоскости. Линии пересечения этих плоскостей с абсолютом пространства ${}^3S_5$ изображают семейства прямолинейных образующих линейчатой квадрики. Многообразие пар полярных эллиптич. прямых пространства ${}^2S_3$ гомеоморфно топологич. произведению собственных областей двух плоскостей ${}^1S_2$, т. е. топологич. произведению двух кругов, а многообразие пар полярных гиперболич. прямых гомеоморфно произведению идеальных областей двух плоскостей ${}^1S_2$, т. е. топологич. произведению двух листов Мёбиуса.

Ф. и. предложена Г. Фубини [1].

Лит.: [1] Fubini G., «Ann. Scuola Norm. Super.», 1904, t. 9, p. 1—74; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ФУБИНИ ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая связь между кратным интегралом и повторным. Пусть $(X, \mathfrak{S}_X, \mu_x)$ и $(Y, \mathfrak{S}_Y, \mu_y)$ — измеримые пространства с σ-конечными полными мерами μ_x и μ_y, определенными соответственно на σ-алгебрах $\mathfrak{S}_X$ и $\mathfrak{S}_Y$. Если функция $f(x, y)$ интегрируема на произведении $X\times Y$ пространств X и Y по произведению $\mu=\mu_x\times\mu_y$ мер μ_x и μ_y, то для почти всех $y\in Y$ функция $f(x, y)$ переменной x интегрируема на пространстве X по мере μ_x, функция $g(y)=\int_X f(x, y)\,d\mu_x$ интегрируема на пространстве Y по мере μ_y и имеет место равенство

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\,d\mu=\int_Y d\mu_y\int_X f(x, y)\,d\mu_x. \qquad (1)$$

Ф. т. справедлива, в частности, для случая, когда μ_x, μ_y и μ — меры Лебега соответственно в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{m+n}$ (m и n — натуральные числа), $X=\mathbb{R}^m$, $Y=\mathbb{R}^n$, $X\times Y=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{m+n}$, $f=f(x,\ y)$ — измеримая по Лебегу на пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$ функция, $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^n$. При этих предположениях формула (1) имеет вид

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^n} dy\int_{\mathbb{R}^m} f(x,\ y)\,dx. \quad (2)$$

Для того чтобы в случае функции f, определенной на произвольном измеримом по Лебегу множестве $E\subset\mathbb{R}^{m+n}$, выразить кратный интеграл через повторный, нужно продолжить функцию f нулем на все пространство $\mathbb{R}^{m+n}$ и применить формулу (2). См. также *Повторный интеграл*.

Ф. т. установлена Г. Фубини [1].

Лит.: [1] Fubini G., Sugli integrali multipli (1907), Opere scelte, v 2, Roma, 1958, p. 243—49. *Л. Д. Кудрявцев.*

ФУБИНИ ФОРМА — дифференциальная форма (квадратичная F_2 и кубическая F_3), на основе к-рой строится *проективная дифференциальная геометрия*. Введены Г. Фубини (см. [1]).

Пусть $x^\alpha(u^1,\ u^2)$ — (однородные) проективные координаты точки поверхности с внутренними координатами u^1, u^2 и пусть

$$b_{ij}=(x^\alpha,\ x_1^\alpha,\ x_2^\alpha,\ x_{ij}^\alpha),$$

$$b_{ijk}=a_{ijk}-\frac{1}{2}\,\partial_k b_{ij}+\frac{1}{2}\,b_{i,\,j}\,\partial_k\ln\sqrt{|b|},$$

$$b=\det b_{ij},\quad a_{ijk}=(x^\alpha,\ x_1^\alpha,\ x_2^\alpha,\ x_{ijk}^\alpha).$$

Тогда Ф. ф. определяются так:

$$F_2=b_{ij}du^i\,du^j\,|\,b\,|^{-1/4},\qquad F_3=b_{ijk}\,du^i\,du^j\,du^k\,|\,b\,|^{-1/4}.$$

Однако сами проективные координаты не вполне определены: они допускают введение произвольных множителей и однородных линейных преобразований. Поэтому Ф. ф. определены только с точностью до множителя и чтобы избежать связанных с этим затруднений, нормируют координаты и определенные через них формы; напр., при унимодулярных проективных преобразованиях Ф. ф. сохраняют свое значение (с точностью до знака). Отношение F_3/F_2, наз. проективным линейным элементом, уже не зависит от нормирования (и определяет проективный метрич. элемент).

Построенные метрич. средствами, исходя из второй квадратичной формы и формы Дарбу (определяемой *Дарбу тензором*), Ф. ф.

$$f_2=\lambda F_2,\quad f_3=\lambda F_3,$$

инварианты относительно эквиаффинных преобразований и потому могут быть положены в основу эквиаффинной дифференциальной геометрии.

Лит.: [1] Fubini G., Čech E., Geometria proiettiva differenzial, v. 1—2, Bologna, 1926—27; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей..., т. 2, М.—Л., 1948; [3] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959. *М. И. Войцеховский.*

ФУБИНИ — ШТУДИ МЕТРИКА — эрмитова метрика на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, определяемая эрмитовым скалярным произведением $(u,\ v)$ в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Была введена почти одновременно Г. Фубини [1] и Э. Штуди [2]. Ф.— Ш. м. задается формулой

$$ds^2=\frac{1}{|x|^4}\,(|x|^2\,|dx|^2-(x,\ d\bar{x})\,(\bar{x},\ dx)),$$

где $|x|^2=(x,\ x)$; расстояние $\rho(\hat{x},\ \hat{y})$ между точками $\hat{x}=\mathbb{C}x$, $\hat{y}=\mathbb{C}y$, где $x,\ y\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$, определяется из формулы

$$\cos\rho(\hat{x},\ \hat{y})=\frac{|(x,\ y)|}{|x|\,|y|}.$$

Ф.— Ш.м. является кэлеровой (и даже метрикой Ходжа), соответствующая ей кэлерова форма имеет вид

$$\omega=\frac{i}{2\pi}\,\partial\,\bar{\partial}\ln|z|^2.$$

Ф.— Ш. м.— это единственная с точностью до пропорциональности риманова метрика на $\mathbb{C}P^n$, инвариантная относительно унитарной группы $U(n+1)$, сохраняющей скалярное произведение. Пространство $\mathbb{C}P^n$, снабженное Ф.— Ш. м., является компактным эрмитовым симметрич. пространством ранга 1. Оно наз. также эллиптическим эрмитовым пространством.

Лит.: [1] Fubini G., «Atti Istit. Veneto», 1904, v. 63, p. 502—13; [2] Study E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 321—78; [3] Cartan E., Leçons sur la géometrie projective complexe, P., 1950; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964, [5] Чжень Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961. *А. Л. Онищик.*

ФУКСА УРАВНЕНИЕ, уравнение класса Фукса — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение в комплексной области

$$w^{(n)}+p_1(z)\,w^{(n-1)}+\ldots+p_n(z)\,w=0 \quad (1)$$

с аналитич. коэффициентами, все особые точки к-рого на *Римана сфере* являются *регулярными особыми точками*. Для того чтобы уравнение (1) принадлежало классу Фукса, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты имели вид

$$p_j(z)=\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)^{-j}\,q_j(z),$$

где $z_1,\ \ldots,\ z_k$ — различные точки, $q_j(z)$ — многочлен степени $\leqslant j\,(k-1)$. Система $w'=A(z)\,w$ из n уравнений принадлежит классу Фукса, если она имеет вид

$$\frac{dw}{dz}=\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m}{z-z_m}\,w, \quad (2)$$

где $z_1,\ \ldots,\ z_k$ — различные точки, $A_m\neq 0$ — постоянные матрицы порядка $n\times n$. Особыми для уравнения (1) и системы (2) являются точки $z_1,\ \ldots,\ z_k,\ \infty$. Для Ф. у. (1) справедливо тождество Фукса:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}\rho_j^m+\rho_j^\infty\right)=(k-1)\,\frac{n(n-1)}{2},$$

где $\rho_1^m,\ \ldots,\ \rho_n^m$ — характеристич. показатели в точке z_m, а $\rho_1^\infty,\ \ldots,\ \rho_n^\infty$ — в точке ∞. Ф. у. (и системы) наз. также регулярными уравнениями (системами). Этот класс уравнений и систем был введен Л. Фуксом [1].

Пусть D — сфера Римана с проколами в точках $z_1,\ \ldots,\ z_k,\ \infty$. Любое нетривиальное решение Ф. у. (1) (соответственно любая компонента решения системы (2)) есть аналитическая в области D функция. Как правило, эта функция бесконечнозначна, а все особые точки уравнения (1) (системы (2)) являются ее точками ветвления бесконечного порядка.

Ф. у. 2-го порядка с особыми точками $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_k,\ \infty$ имеет вид

$$w''+\sum_{m=1}^{k}\frac{1-(\rho_1^m+\rho_2^m)}{z-z_m}\,w'+$$
$$+\sum_{m=1}^{k}\left[\frac{\rho_1^m\rho_2^m\prod_{j=1}'^{k}(z_m-z_j)}{z-z_m}+Q_{k-2}(z)\right]\times$$
$$\times\frac{w}{\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)}=0, \quad (3)$$

где $Q_{k-2}(z)$ — многочлен степени $k-2$. Преобразование $w=(z-z_m)^l\,\tilde{w}$ переводит Ф. у. в Ф. у., причем

$$(\rho_1^m,\ \rho_2^m)\longrightarrow(\rho_1^m-l,\ \rho_2^m-l),$$
$$(\rho_1^\infty,\ \rho_2^\infty)\longrightarrow(\rho_1^\infty+l,\ \rho_2^\infty+l),$$

а характеристич. показатели в остальных особых точках не меняются. С помощью таких преобразований уравнение (3) приводится к виду

$$w''+\sum_{m=1}^{k}\frac{1-(\rho_2^m+\rho_1^m)}{z-z_m}w'+$$

$$+(\bar{\rho}_1^{\infty}\bar{\rho}_2^{\infty}z^{n-2}+d_0z^{n-3}+\ldots+d_{n-2})\frac{w}{\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)}=0,$$

$$\bar{\rho}_j^{\infty}=\rho_j^{\infty}+\sum_{m=1}^{k}\rho_j^m.$$

Ф. у. 2-го порядка, имеющее N особых точек, полностью определяется заданием характеристич. показателей в этих точках тогда и только тогда, когда $N<4$. С помощью дробно-линейного преобразования уравнение приводится к виду: а) $N=1$, $\tilde{w}''=0$; б) $N=2$, $\zeta^2\tilde{w}''+a\zeta\tilde{w}'+b\tilde{w}=0$ (Эйлера уравнение); в) $N=3$ — *Папперица уравнение* (или уравнение Римана).

Матричное Ф. у. имеет вид

$$\frac{dW}{dz}=\sum_{m=1}^{k}\frac{WU_m}{z-z_m}, \qquad (4)$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — различные точки, W — матрица-функция порядка $n\times n$, $U_m\neq 0$ — постоянные матрицы. Матрица U_m наз. дифференциальной подстановкой в точке z_m. Пусть γ — простая замкнутая кривая с началом в неособой точке b, положительно ориентированная и содержащая внутри себя только одну особую точку z_m. Если $W(z)$ — голоморфное в точке b решение уравнения (4), то при аналитич. продолжении вдоль γ

$$W\longrightarrow V_mW,$$

где V_m — постоянная матрица, наз. интегральной подстановкой в z_m. А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [2]) поставил для систем вида (4) задачу, к-рая наз. прямой регулярной задачей Пуанкаре. Она состоит из следующих трех задач:

А) представление решения $W(z)$ во всей области его существования;

Б) построение интегральных подстановок в точках z_m;

В) аналитич. характеристика особенностей решений.

В частности, решение задачи Б) позволяет построить группу монодромии уравнения (4). Решение задачи Пуанкаре было получено И. А. Лаппо-Данилевским [3]. Пусть $L_b\left(z_{j_1}, \ldots, z_{j_\nu}\,|\,z\right)$, $j_m\in\{1, \ldots, k\}$, $\nu=1, 2, \ldots$, — гиперлогарифмы:

$$L_b(z_m\,|\,z)=\int_b^z\frac{dz}{z-z_m}, \quad L_b(z_{j_1}, \ldots, z_{j_\nu}\,|\,z)=$$

$$=\int_b^z\frac{L_b\left(z_{j_1}, \ldots, z_{j_{\nu-1}}\,|\,z\right)}{z-z_{j_\nu}}dz,$$

$W_0(z)$ — элемент (росток) в точке b решения уравнения (4), нормированный условием $W_0(b)=I$ и $W(z)$ — аналитическая в области D матрица-функция, порожденная этим элементом. Тогда $W(z)$ есть целая функция от матриц $U_1, \ldots, U_k$ и разлагается в ряд

$$W(z)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, k)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(z_{j_1}, \ldots, z_{j_\nu}\,z),$$

к-рый сходится равномерно по z на любом компакте $K\subset D$. Интегральная подстановка V_m в точке z_m, отвечающая решению $W(z)$, есть целая функция от матриц $U_1, \ldots, U_k$ и разлагается в ряд

$$V_m=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, k)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}P_j(z_{j_1}, \ldots, z_{j_\nu}\,|\,b),$$

где P_j выражаются через гиперлогарифмы (см. [3], [6]).

Получены также формулы, дающие решение задачи В) (см. [3]).

Лит.: [1] Fuchs L., «J. reine und angew. Math.», 1866, Bd 66, S. 121—60; 1868, Bd 68, S. 354—85, [2] Пуанкаре А., Избр. труды, пер. с франц., т. 3, М., 1974; [3] Лаппо-Данилевский И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с франц., М.,1957; [4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М.,1958, [5] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950; [6] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, М., 1974; [7] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939. *М. В. Федорюк.*

ФУКСОВА ГРУППА — *дискретная группа* голоморфных преобразований (открытого) круга K на сфере Римана, т. е. круга или полуплоскости на комплексной плоскости. Чаще всего в качестве K берут верхнюю полуплоскость

$$U=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$$

или единичный круг

$$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}.$$

В первом случае элементы Ф. г. являются дробно-линейными преобразованиями

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d}$$

с действительными коэффициентами, и Ф. г. представляет собой не что иное, как *дискретную подгруппу* группы PSL_2. Во втором случае элементы Ф. г. являются дробно-линейными преобразованиями с псевдоунитарными матрицами.

Если рассматривать круг K как конформную модель плоскости Лобачевского, то Ф. г. может быть определена как дискретная группа его движений, сохраняющих ориентацию. Ф. г. представляют собой частный случай *клейновых групп*.

Произвольные Ф. г. впервые рассматривались А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [2]) в 1882 в связи с проблемой униформизации. Группы были названы им фуксовыми в честь Л. Фукса, работа [1] к-рого стимулировала введение этого понятия. Для описания Ф. г. Пуанкаре применил комбинаторно-геометрич. метод, ставший впоследствии одним из основных методов теории дискретных групп преобразований. Понятие Ф. г. послужило основой для теории автоморфных функций, созданной А. Пуанкаре и Ф. Клейном (F. Klein).

Ф. г., сохраняющая какую-либо точку в замыкании $\bar{K}$ круга K или прямую в смысле геометрии Лобачевского, наз. элементарной. Если Γ — неэлементарная Ф. г., то множество $L(\Gamma)$ предельных точек орбиты точки $x\in\bar{K}$, лежащее на граничной окружности ∂K, не зависит от x и наз. предельным множеством группы Γ. Группа Γ наз. Ф. г. 1-го рода, если $L(\Gamma)=\partial K$, и 2-го рода — в противном случае (тогда $L(\Gamma)$ — нигде не плотное совершенное подмножество в ∂K).

Конечно порожденная Ф. г. является Ф. г. 1-го рода тогда и только тогда, когда площадь (в смысле геометрии Лобачевского) ее фундаментальной области конечна. В качестве фундаментальной области такой группы Γ всегда может быть выбран выпуклый многоугольник P плоскости Лобачевского со сторонами

$$a_1, b_1', a_1', b_1, \ldots, a_g, b_g', a_g', b_g, c_1, c_1', \ldots, c_n, c_n'$$

таким образом, что

$$a_i=\alpha_i(a_i'), \quad b_i=\beta_i(b_i'), \quad c_i=\gamma_i(c_i')$$

для нек-рых элементов

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \quad \beta_1, \ldots, \beta_g, \quad \gamma_1, \ldots, \gamma_n,$$

порождающих группу Г с определяющими соотношениями

$$\prod_{i=1}^{g}(\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1})\prod_{i=1}^{n}\gamma_i=1,$$
$$\gamma_i^{k_i}=1,\quad i=1,\ldots,n,$$

где k_i — целое число $\geqslant 2$ или ∞. Элемент γ_i оставляет на месте вершину C_i многоугольника P, общую сторонам c_i и c_i'. Он является эллиптическим, если $k_i<\infty$, и параболическим, если $k_i=\infty$; в последнем случае вершина C_i лежит на окружности ∂K, т. е. является бесконечно удаленной точкой плоскости Лобачевского. Всякий эллиптич. или параболич. элемент группы Г сопряжен степени нек-рого однозначно определенного образующего γ_i. Углы многоугольника P при вершинах C_i, $i=1,\ldots,n$, равны $2\pi/k_i$, сумма всех остальных углов равна 2π. Стороны a_i и a_i', а также b_i и b_i', c_i и c_i' имеют одинаковую длину. Обратно, всякий выпуклый многоугольник на плоскости Лобачевского, удовлетворяющий этим условиям, является фундаментальным многоугольником описанного выше типа нек-рой конечно порожденной Ф. г. 1-го рода.

Всякая система образующих группы Г, к-рая получается описанным способом, наз. с т а н д а р т н о й. При абстрактном изоморфизме конечно порожденных Ф. г. 1-го рода, отображающем множество параболич. элементов одной группы на множество параболич. элементов другой группы, всякая стандартная система образующих переходит в стандартную систему образующих.

Площадь фундаментальной области группы Г равна $-2\pi\chi(\Gamma)$, где

$$\chi(\Gamma)=\chi(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)=2-2g-\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k_i}\right).$$

Набор чисел $(g;\ k_1,\ldots,\ k_n)$, где $k_1,\ldots,\ k_n$ считаются неупорядоченными, является топологич. инвариантом группы Г как группы гомеоморфизмов круга и наз. ее с и г н а т у р о й. Единственным ограничением на сигнатуру является условие

$$\chi(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)<0. \qquad (*)$$

Для подгруппы Δ конечного индекса Ф. г. Г имеет место ф о р м у л а Р и м а н а — Г у р в и ц а:

$$\chi(\Delta)=\chi(\Gamma)\,[\Gamma:\Delta].$$

Во всякой Ф. г. существует подгруппа конечного индекса, не имеющая элементов конечного порядка.

Факторпространство K/Γ компактифицируется путем добавления конечного числа точек, соответствующих бесконечно удаленным вершинам фундаментального многоугольника. На компактифицированном пространстве S имеется единственная комплексная структура, для к-рой отображение факторизации $p\colon K\longrightarrow S$ голоморфно. При этом S является римановой поверхностью рода g, а отображение p — регулярным разветвленным накрытием с индексами ветвления $k_1,\ \ldots,\ k_n$. Обратно, т е о р е м а у н и ф о р м и з а ц и и утверждает, что для любой компактной римановой поверхности S рода g с отмеченными точками $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и для любых $k_1,\ \ldots,\ k_n$ (k_i — целое число $\geqslant 2$ или ∞), удовлетворяющих условию (*), существует регулярное голоморфное разветвленное накрытие $p\colon K\longrightarrow S$, ветвящееся в точности над точками $x_1,\ \ldots,\ x_n$ с индексами ветвления $k_1,\ \ldots,\ k_n$ соответственно. Накрытие p определено однозначно с точностью до автоморфизма круга K. Его группа скольжений есть Ф. г. сигнатуры $(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$.

Конечно порожденные Ф. г. 1-го рода фиксированной сигнатуры $(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ могут быть параметризованы точками нек-рого $(3n-3+n)$-мерного комплексного многообразия, гомеоморфного клетке,— т. н. п р о с т р а н с т в а Т а й х м ю л л е р а $T(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ (см. [4]). При этом двум точкам пространства Тайхмюллера соответствует одна и та же (с точностью до сопряженности в группе автоморфизмов круга) Ф. г. тогда и только тогда, когда эти точки эквивалентны относительно нек-рой дискретной группы голоморфных преобразований пространства $T(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ — т. н. м о д у л я р н о й г р у п п ы $\mathrm{Mod}(g;k_1,\ldots,k_n)$. Имеется изоморфизм

$$T(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)\xrightarrow{\sim} T(g;\ \underbrace{\infty,\ \ldots,\ \infty}_{n}),$$

при к-ром группа $\mathrm{Mod}(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ переходит в подгруппу конечного индекса группы $\mathrm{Mod}(g;\ \infty,\ \ldots,\ \infty)$.

Если Ф. г. сигнатуры $(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ содержит подгруппу конечного индекса сигнатуры $(h;\ l_1,\ \ldots,\ l_m)$, то пространство $T(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ естественным образом вкладывается в виде замкнутого подмножества в пространство $T(h;\ l_1,\ \ldots,\ l_m)$. В нек-рых исключительных случаях эти пространства совпадают [10]. Напр., $T(2)=T(0;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$; это означает, что всякая компактная риманова поверхность рода 2 допускает гиперэллиптич. инволюцию и, значит, является гиперэллиптич. кривой.

Для Ф. г. сигнатуры $(0;\ k_1,\ k_2,\ k_3)$, называемых т р е у г о л ь н ы м и г р у п п а м и, и только для них, пространство Тайхмюллера состоит из одной точки. Всякая треугольная группа является подгруппой индекса 2 в группе, порожденной отражениями относительно сторон треугольника с углами $\frac{\pi}{k_1}$, $\frac{\pi}{k_2}$, $\frac{\pi}{k_3}$ (см. *Отражений группа*). Примером треугольной группы служит м о д у л я р н а я г р у п п а К л е й н а; ее сигнатура равна $(0;\ 2,\ 3,\ \infty)$.

Всякая конечно порожденная Ф. г. 2-го рода топологически (как группа гомеоморфизмов круга) изоморфна конечно порожденной Ф. г. 1-го рода и допускает аналогичное геометрич. описание, с той разницей, что нек-рые пары сторон c_i, c_i' фундаментального многоугольника не имеют общих точек, даже бесконечно удаленных, а соответствующие образующие γ_i являются гиперболич. преобразованиями. Компактифицированное факторпространство представляет собой риманову поверхность с краем.

Всякая бесконечно порожденная Ф. г. является свободным произведением циклич. подгрупп. Ее фундаментальная область может быть построена как предел фундаментальных областей конечно порожденных групп (см. [5]).

Лит.: [1] F u c h s L., «J. reine und angew. Math.», 1880, Bd 89, S. 151—69; [2] П у а н к а р е А., Теория фуксовых групп, в кн.: Избр. труды, т. 3, пер. с франц., М., 1974, с. 9—62; [3] F r i c k e R., K l e i n F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd 1—2, Lpz., 1897—1912; [4] А л ь ф о р с Л., Б е р с Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961; [5] К р у ш к а л ь С. Л., А п а н а с о в Б. Н., Г у с е в с к и й Н. А., Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах, Новосиб., 1981; [6] Н а т а н з о н С. М., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 4, с. 145—60; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 16, М., 1978, с. 191—245; [8] L e h n e r J., Discontinuous groups and automorphic functions, Providence, 1964; [9] M a g n u s W., Noneuclidean tesselations and their groups, N. Y., 1974; [10] S i n g e r m a n D., «J. London Math. Soc.», 1972, v. 6, № 1, p. 29—38. *Э. Б. Винберг.*

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА, г р у п п а П у а н к а р е,— первая абсолютная *гомотопическая группа* $\pi_1(X,\ x_0)$. Пусть I — отрезок $[0,\ 1]$, $\partial I=\{0,\ 1\}$ — его граница. Элементами Ф. г. пунктированного топологич. пространства $(X,\ x_0)$ служат гомотопич. классы замкнутых путей в X, т. е. классы гомотопных rel $\{0,\ 1\}$ непрерывных отображений пары $(I,\ \partial I)$ в $(X,\ x_0)$. Путь s_1s_2:

$$s_1s_2(t)=\begin{cases}s_1(2t), & t\leqslant 1/2,\\ s_2(2t-1), & t\geqslant 1/2,\end{cases}$$

наз. произведением путей s_1 и s_2. Гомотопич. класс произведения зависит только от классов сомножителей, возникающая операция, вообще говоря, некоммутативна. Единицей служит класс постоянного отображения в x_0, обратным к классу $\bar{\varphi}$, содержащему путь $\varphi(t)$, служит класс пути $\psi(t)=\varphi(-t)$. Непрерывному отображению $f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$ соответствует гомоморфизм

$$f_{\#}(\bar{\varphi})=\overline{f\circ\varphi}:\pi_1(X, x_0)\longrightarrow\pi_1(Y, y_0),$$

т. е. π_1 является функтором на категории топологич. пространств в категорию (неабелевых) групп. Для любого пути φ, соединяющего точки x_1 и x_2, определен изоморфизм

$$\hat{\varphi}:\pi_1(X, x_2)\longrightarrow\pi_1(X, x_1),\ \hat{\varphi}(u)\,t=$$
$$=\begin{cases}\varphi(3t), & t\leqslant 1/3,\\ u(3t-1), & 1/3\leqslant t\leqslant 2/3,\\ \varphi(3-3t), & 2/3\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

зависящий только от гомотопич. класса пути φ. Группа $\pi_1(X, x_0)$ действует автоморфизмами на $\pi_n(X, x_0)$, в случае $n=1$ элемент $\bar{\varphi}$ действует как внутренний автоморфизм $\bar{u}\mapsto\bar{\varphi}\bar{u}\bar{\varphi}^{-1}=\hat{\varphi}(\bar{u})$. Гомоморфизм Гуревича h: $\pi_1(X, x_0)\longrightarrow H_1(X)$ является эпиморфизмом с ядром $[\pi_1, \pi_1]$ (теорема Пуанкаре).

Линейно связное топологич. пространство с нулевой Ф. г. наз. односвязным. Ф. г. произведения $\Pi_\alpha(X_\alpha)$ пространств изоморфна прямому произведению Ф. г. сомножителей: $\pi_1(\Pi_\alpha(X_\alpha))=\Pi_\alpha\pi_1(X_\alpha)$. Пусть (X, x_0) — линейно связное топологич. пространство, $\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ — покрытие X замкнутой относительно пересечений системой открытых множеств U_λ таких, что $x_0\in\bigcap_\lambda U_\lambda$, тогда $\pi_1(X, x_0)$ — прямой предел диаграммы $\{G_\lambda, \varphi_{\lambda\mu\#}\}$, где $G_\lambda=\pi_1(U_\lambda, x_0)$, а $\varphi_{\lambda\mu\#}$ индуцировано включением $\varphi_{\lambda\mu}$: $U_\lambda\longrightarrow U_\mu$ (теорема Зейферта—Ван Кампена). Напр., если дано покрытие, состоящее из U_0, U_1, U_2, и $U_0=U_1\cap U_2$ односвязно, то $\pi_1(X, x_0)$ есть свободное произведение групп $\pi_1(U_1, x_0)$ и $\pi_1(U_2, x_0)$. В случае клеточного пространства утверждение теоремы справедливо также для замкнутых клеточных подпространств в X.

Для клеточного пространства X, нульмерный остов к-рого состоит из единственной точки x_0, каждая одномерная клетка $e^1_\lambda\in X$ задает образующую Ф. г. $\pi_1(X, x_0)$, каждая двумерная клетка $e^2_\lambda\in X$ задает соотношение, отвечающее приклеивающему отображению клетки e^2_λ.

Пусть X обладает покрытием $\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ таким, что гомоморфизм включения $\pi_1(U_\lambda, z)=\pi_1(X, z)$ нулевой для любой точки z. Тогда существует *накрытие* p: $\tilde{X}\to X$ с $\pi_1(\tilde{X}, x)=0$. В этом случае группа коммутирующих с p гомеоморфизмов пространства $\tilde{X}$ на себя (скольжений) изоморфна $\pi_1(X, x_0)$, порядок группы $\pi_1(X, x_0)$ равен мощности слоя $p^{-1}x_0$. Для отображения f: $(Y, y_0)\to(X, x_0)$ линейно связных пространств такого, что $f_{\#}(\pi_1(Y, y_0))=0$, существует поднятие $\tilde{f}$: $Y\longrightarrow\tilde{X}$, $p\circ\tilde{f}=f$. Накрытие p: $\tilde{X}\longrightarrow X$ наз. универсальным.

Лит.: [1] Масси У., Столлингс Дж., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1977, [2] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии, М., 1977; [3] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

А. В. Хохлов.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ дискретной группы Γ преобразований топологич. пространства X — подмножество $D\subset X$, содержащее элементы из всех орбит группы Γ, причем из орбит общего положения — ровно по одному элементу. Имеются различные варианты точного определения Ф. о. Иногда Ф. о. наз. любое подмножество, принадлежащее заданной σ-алгебре (напр., борелевское) и содержащее по одному представителю из каждой орбиты. Однако если X — топологич. многообразие, то Ф. о. обычно наз. подмножество $D\subset X$, являющееся замыканием открытого подмножества и такое, что подмножества γD, $\gamma\in\Gamma$, не имеют попарно общих внутренних точек и образуют локально конечное покрытие пространства X. Напр., в качестве Ф. о. группы параллельных переносов плоскости $\mathbb{R}^2$ на целочисленные векторы может быть взят квадрат

$$\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

Выбор Ф. о., как правило, неоднозначен.

Э. Б. Винберг.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, последовательность Коши, точек метрического пространства X — последовательность $x_n\in X$, $n=1, 2, \ldots$ такая, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n>n_0$ и $m>n_0$ выполняется неравенство $\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$.

Обобщением Ф. п. является понятие *направленности* Коши в равномерном пространстве. Пусть X — равномерное пространство с равномерностью $\mathcal{U}=\{U\}$. Направленность $\{x_\alpha\colon \alpha\in A\}$, $x_\alpha\in X$, A — направленное множество, наз. направленностью Коши, если для каждого элемента $U\in\mathcal{U}$ существует такой индекс $\alpha_0\in A$, что для всех $\alpha\in A$ и $\beta\in A$, следующих в A за α_0, имеет место включение $(x_\alpha, x_\beta)\in U$.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

Л. Д. Кудрявцев.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — базис векторного пространства действительных (комплексных) решений этой системы. (Система может состоять и из одного уравнения.) Более подробно это определение формулируется следующим образом.

Множество действительных (комплексных) решений $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ (заданных на нек-ром множестве E) линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений наз. Ф. с. р. этой системы уравнений (на множестве E) при выполнении совокупности следующих двух условий: 1) если действительные (комплексные) числа $C_1, \ldots, C_n$ таковы, что функция

$$C_1x_1(t)+\ldots+C_nx_n(t)$$

тождественно равна нулю на E, то все числа $C_1, \ldots, C_n$ равны нулю; 2) для всякого действительного (комплексного) решения $x(t)$ рассматриваемой системы уравнений найдутся действительные (соответственно комплексные) числа $C_1, \ldots, C_n$ (не зависящие от t) такие, что

$$x(t)=C_1x_1(t)+\ldots+C_nx_n(t)\ \text{при всех}\ t\in E.$$

Если $\|c_{ij}\|$, $i, j=1, \ldots, n$ — произвольная невырожденная $(n\times n)$-матрица, а $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ есть Ф. с. р., то $\left\{\sum_{j=1}^n c_{1j}x_j(t), \ldots, \sum_{j=1}^n c_{nj}x_j(t)\right\}$ также есть Ф. с. р.; всякая Ф. с. р. получается таким преобразованием из данной Ф. с. р.

Если система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x}=A(t)\,x, \tag{1}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$ (или $x\in\mathbb{C}^n$), а

$$A(\cdot):(\alpha, \beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\ \text{(соответственно}\ (\alpha, \beta)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)),$$

причем отображение $A(\cdot)$ суммируемо на каждом отрезке, содержащемся в (α, β) ((α, β) — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$), то векторное пространство решений этой системы изоморфно $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$). Следовательно, система (1) имеет бесконечно мно-

го Ф. с. р., и каждая такая Ф. с. р. состоит из n решений. Напр., для системы уравнений

$$\dot{u}=u,\quad \dot{v}=-v$$

произвольная Ф. с. р. имеет вид

$$\left\{\begin{pmatrix}e^{t}u_1\\ e^{-t}v_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}e^{t}u_2\\ e^{-t}v_2\end{pmatrix}\right\},$$

где $\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}$ — произвольные линейно независимые векторы-столбцы.

Всякая Ф. с. р. системы (1) имеет вид

$$\{X(t,\tau)x_1,\ \ldots,\ X(t,\tau)x_n\},$$

где $X(t,\tau)$ — *Коши оператор* системы (1), τ — произвольное фиксированное число из интервала (α,β), а $x_1,\ \ldots,\ x_n$ — произвольный фиксированный базис пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$).

Если система дифференциальных уравнений состоит из одного уравнения

$$x^{(k)}+a_1(t)x^{(k-1)}+\ldots+a_k(t)x=0, \qquad (2)$$

где функции

$$a_1(t),\ \ldots,\ a_k(t):(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}\ (\text{или }(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{C})$$

суммируемы на каждом отрезке, содержащемся в (α,β) (где (α,β) — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$), то векторное пространство решений этого уравнения изоморфно $\mathbb{R}^k$ (соответственно $\mathbb{C}^k$). Следовательно, уравнение (2) имеет бесконечно много Ф. с. р., и каждая из них состоит из k решений. Напр., уравнение

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\quad \omega\neq 0,$$

имеет Ф. с. р. $\{\cos\omega t,\ \sin\omega t\}$; общее действительное решение этого уравнения дается формулой

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

Если система дифференциальных уравнений имеет вид

$$x^{(k)}=A_1(t)x^{(k-1)}+\ldots+A_k(t)x, \qquad (3)$$

где $x\in\mathbb{R}^n$ (или $x\in\mathbb{C}^n$) и при всяком $i=1,\ \ldots,\ k-1$ отображение

$$A_i(\cdot):(\alpha,\beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\ (\text{или }(\alpha,\beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))$$

суммируемо на каждом отрезке, содержащемся в (α,β) (где (α,β) — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$), то пространство решений этой системы уравнений изоморфно $\mathbb{R}^{kn}$ (соответственно $\mathbb{C}^{kn}$); Ф. с. р. системы (3) существуют, и каждая из них состоит из kn решений.

Для линейных однородных систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старших производных, даже если коэффициенты системы постоянные, число решений, входящих в Ф. с. р. (т. е. размерность векторного пространства решений), вычисляется иногда не столь просто, как в вышеприведенных случаях. (В [1], § 11 рассмотрено такое вычисление для линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, не разрешенных относительно старших производных.)

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974. *В. М. Миллионщиков.*

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ линейного дифференциального уравнения с частными производными — решение дифференциального уравнения с частными производными $Lu(x)=0$, $x\in\mathbb{R}^n$, с коэффициентами класса C^∞ в виде функции $I(x,y)$, удовлетворяющей при фиксированном $y\in\mathbb{R}^n$ уравнению

$$LI(x,y)=\delta(x-y),\quad x\neq y,$$

к-рая понимается в смысле теории обобщенных функций, где δ — дельта-функция. Ф. р. существует для всякого дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, а также для произвольных эллиптич. уравнений. Напр., для эллиптич. уравнения

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}=0$$

с постоянными коэффициентами a_{ij}, образующими положительно определенную матрицу a, Ф. р. служит функция

$$I(x,y)=\begin{cases}\left[\sum_{i,\,j=1}^{n}A_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right]^{(2-n)/2}, & n>2,\\ \log\left[\sum_{i,\,j=1}^{n}A_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right], & n=2,\end{cases}$$

где A_{ij} — алгебраич. дополнение к a_{ij} в матрице a.

В теории эллиптич. уравнений Ф. р. широко используются при изучении краевых задач с помощью интегральных уравнений.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966, [3] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, пер. с англ., М., 1958

А. П. Солдатов.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ГРУППОИД — группоид (категория, все морфизмы к-рой — изоморфизмы), определенный для топологич. пространства X; объектами являются точки X, морфизмами объекта x_0 в x_1 — гомотопич. классы $\mathrm{rel}\{0,1\}$ путей с началом x_0 и концом в x_1, композицией — произведение классов путей. Группа изоморфизмов объекта x_0 на себя совпадает с *фундаментальной группой* $\pi_1(X,x_0)$. *А. В. Хохлов.*

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ КЛАСС — 1) Ф. к. $(n-1)$-связного (т. е. такого, что $\pi_i(X)$ при $i\leqslant n-1$) топологич. пространства X — элемент r_n группы $H^n(X;\pi_n(X))$. Соответствующий при изоморфизме $H^n(X;\pi)\approx\mathrm{Hom}(H_n(X);\pi)$, в к-рый вырождается формула универсальных коэффициентов

$$0\longrightarrow\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X);\pi)\longrightarrow H^n(X;\pi)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X);\pi)\longrightarrow 0,$$

гомоморфизму h^{-1}, обратному к гомоморфизму Гуревича h: $\pi_n(X)\longrightarrow H_n(X)$ (являющемуся по теореме Гуревича (см. *Гомотопическая группа*) изоморфизмом). Если X является клеточным разбиением (клеточным пространством), то Ф. к. r_n совпадает с первым *препятствием* к построению сечения *Серра расслоения* $\Omega X\longrightarrow EX\longrightarrow X$, к-рое лежит в $H^n(X,\pi_{n-1}(\Omega X))=H^n(X;\pi_n(X))$, а также с первым препятствием к гомотопии тождественного отображения $\mathrm{id}\colon X\longrightarrow X$ постоянному отображению. В случае, когда $(n-1)$-мерный остов клеточного разбиения X состоит из одной точки (на самом деле это предположение общности не ограничивает, поскольку любое $(n-1)$-связное клеточное разбиение гомотопически эквивалентно клеточному разбиению без клеток положительной размерности, меньшей n), замыкание каждой n-мерной клетки является n-мерной сферой и потому ее характеристич. отображение определяет нек-рый элемент группы $\pi_n(X)$. Поскольку эти клетки образуют базис группы $C_n(X)$, тем самым определена n-мерная коцепь из $C^n(X;\pi_n(X))$. Эта коцепь является коциклом, класс когомологий к-рого и есть Ф. к.

2) Ф. к., ориентационный класс, связного ориентируемого n-мерного многообразия M без края (соответственно, с краем ∂M) — образующая $[M]$ группы $H_n(M)$ (соответственно, группы $H_n(M,\partial M)$), являющейся свободной циклич. группой. Если многообразие M триангулируемо, то Ф. к. представляет собой класс гомологий цикла, яв-

ляющегося суммой всех когерентно ориентированных n-мерных симплексов произвольной его триангуляции. Для каждого q гомоморфизм

$$D_M: H^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M), \quad D_M: x \longrightarrow x \cap [M],$$

где $\cap$-произведение определяется формулой

$$(x \cup y)(c) = x(y \cap c), \quad \dim x + \dim y = \dim c,$$

является изоморфизмом, называемым *Пуанкаре двойственностью* (если многообразие M имеет край ∂M, то D_M: $H^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M, \partial M)$). О Ф. к. говорят также и для неориентируемых (но связных) многообразий M без края; в этом случае под ним понимается единственный отличный от нуля элемент группы $H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ (если многообразие имеет край ∂M, то группы $H_n(M, \partial M; \mathbb{Z}_2)$). В этом случае двойственность Пуанкаре также имеет место.

Лит.: [1] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969; [2] Мошер Р. Э., Тангора М. К., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970; [3] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [4] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [5] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ КОЦИКЛ клеточного пространства X такого, что $(n-1)$-остов X^{n-1} является точкой x_0,— коцепь из $C^n(X, \pi_n(X))$, значение к-рой на клетке e_i^n есть элемент $\pi_n(X, x_0)$, соответствующий замыканию $\overline{e_i^n}$. Класс когомологий Ф. к. является *фундаментальным классом* пространства X. *А. В. Хохлов.*

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ЦИКЛ, n-мерного многообразия цикл, задающий *фундаментальный класс* этого многообразия.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976, [2] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [3] Милнор Дж., Сташеф Д., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

А. В. Хохлов.

ФУНКТОР — отображение одной *категории* в другую, согласованное со структурой категории. Точнее, одноместным ковариантным функтором из категории $\mathfrak{K}$ в категорию $\mathfrak{C}$, или, короче, Ф. из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{C}$, наз. пара отображений ($\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K} \to \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K} \to \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$), обозначаемых обычно одной и той же буквой, напр. F (F: $\mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{C}$), подчиненных условиям:

1) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ для каждого $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$;

2) $F(\alpha\beta) = F(\alpha) \cdot F(\beta)$ для любых морфизмов $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, $\beta \in H_{\mathfrak{K}}(B, C)$.

Ф. из категории $\mathfrak{K}^*$, двойственной категории $\mathfrak{K}$, в категорию $\mathfrak{C}$ наз. одноместным контравариантным функтором из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{C}$. Таким образом, для контравариантного Ф. F: $\mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{C}$ по-прежнему должно выполняться условие 1), а вместо условия 2) — условие 2*) $F(\alpha\beta) = F(\beta) \cdot F(\alpha)$ для любых морфизмов $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, $\beta \in H_{\mathfrak{K}}(B, C)$.

n-местным функтором из категорий $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ в категорию $\mathfrak{C}$, ковариантным по аргументам $1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n$ и контравариантным по остальным аргументам, наз. функтор из декартова произведения категорий

$$\prod_{i=1}^{n} \tilde{\mathfrak{K}}_i$$

в категорию $\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i$ при $i = i_1, \ldots, i_k$ и $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i^*$ при остальных i. Двуместные Ф., ковариантные по обоим аргументам, наз. бифункторами.

Примеры функторов. 1) Тождественное отображение произвольной категории $\mathfrak{K}$ в себя есть одноместный ковариантный Ф., к-рый наз. тождественным функтором категории и обозначается $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$. 2) Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория, $\mathfrak{S}$ — категория множеств, A — фиксированный объект из $\mathfrak{K}$. Сопоставление каждому $X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ множества $H^A(X) = H_{\mathfrak{K}}(A, X)$ и каждому морфизму α: $X \longrightarrow Y$ отображения $H^A(\alpha)$: $H^A(X) \longrightarrow H^A(Y)$, где $\gamma H^A(\alpha) = \gamma\alpha$ для каждого $\gamma \in H^A(X)$, является Ф. из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{S}$. Этот Ф. наз. основным ковариантным функтором из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{S}$ с представляющим объектом A. Аналогично, сопоставляя объекту X множество $H_A(X) = H_{\mathfrak{K}}(X, A)$ и морфизму α: $Y \longrightarrow X$ отображение $H_A(\alpha)$: $H_A(X) \to H_A(Y)$, где $\gamma H_A(\alpha) = \alpha\gamma$, строится основной контравариантный функтор из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{S}$ с представляющим объектом A. Эти Ф. обозначаются H^A и H_A соответственно. Если $\mathfrak{K}$ — категория векторных пространств над полем K, то Ф. H_K задает переход от пространства E к сопряженному пространству линейных функционалов E^*. В категории топологических абелевых групп Ф. H_Q, где Q — факторгруппа группы действительных чисел по подгруппе целых чисел, сопоставляет каждой группе ее группу характеров. 3) Сопоставление каждой паре объектов X, Y произвольной категории множества $H(X, Y)$, а каждой паре морфизмов α: $X' \longrightarrow X$, β: $Y \longrightarrow Y'$ — отображения $H(\alpha, \beta)$: $H(X, Y) \longrightarrow H(X', Y')$, определяемого равенством $\gamma H(\alpha, \beta) = \alpha\gamma\beta$ для любого $\gamma \in H(X, Y)$, является двуместным Ф. в категорию $\mathfrak{S}$, контравариантным по первому аргументу и ковариантным по второму.

В любой категории с конечными произведениями произведение можно рассматривать как n-местный Ф., ковариантный по всем аргументам, при любом натуральном n. Как правило, конструкции, к-рые определяются для любого объекта категории или для любой последовательности объектов фиксированной длины независимо от индивидуальных свойств объектов, являются Ф. Таковы, напр., конструкция свободных алгебр нек-рого многообразия универсальных алгебр, к-рые единообразно сопоставляются каждому объекту категории множеств, конструкция фундаментальной группы топологич. пространства, конструкции групп гомологий и когомологий различных размерностей и т. д.

Любой Ф. F: $\mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{C}$ определяет отображение каждого множества $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ в множество $H_{\mathfrak{C}}(F(A), F(B))$, сопоставляя морфизму α: $A \longrightarrow B$ морфизм $F(\alpha)$: $F(A) \to F(\beta)$. Ф. F наз. унивалентным, если все указанные отображения инъективны, и полным, если все эти отображения сюръективны. Для всякой *малой категории* $\mathfrak{D}$ сопоставление $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D} \longrightarrow H_D$ можно продолжить до полного унивалентного Ф. J из $\mathfrak{D}$ в категорию $F(\mathfrak{D}^*, \mathfrak{S})$ *диаграмм* со схемой $\mathfrak{D}$ над категорией множеств $\mathfrak{S}$.

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [3] Mac Lane S., Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie, B., 1972; [4] Schubert H., Kategorien, I—II, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [5] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко.

***K*-ФУНКТОР** в алгебраической геометрии — инвариант когомологич. типа, сопоставляемый схемам в алгебраич. K-теории. Точнее говоря, в алгебраич. K-теории строится контравариантный функтор

$$X \longmapsto K_*(X) = \coprod_{i \geqslant 0} K_i(X)$$

из категории схем в категорию градуированных коммутативных колец [1]. K-Ф. родствен этальным когомологиям, однако между ними есть важное отличие: K-теория несет в себе обширную «целочисленную» информацию, к-рая отсутствует в этальных когомологиях, имеющих конечные коэффициенты.

Первое применение K-теории в алгебраич. геометрии совпадает с ее возникновением. Это доказательство обобщения (в частности, на гладкие многообразия про

извольной размерности) классич. *Римана—Роха теоремы* (см. [2]). После создания высшей алгебраич. K-теории, то есть когомологич. теории функторов K_i, $i>0$ (см. [1], [12]) начинается интенсивное проникновение ее идей в алгебраич. геометрию. К настоящему времени можно выделить следующие области исследований в этом направлении.

1) Изучение алгебраич. циклов на алгебраич. многообразиях. Пусть X — гладкое алгебраич. многообразие, $CH(X)$ — кольцо Чжоу алгебраич. циклов на X по модулю рациональной эквивалентности. Тогда имеют место изоморфизмы

$$CH(X)\otimes\mathbb{Q}\cong K_0(X)\otimes\mathbb{Q},$$
$$CH(X)\cong\coprod_{i\geqslant 0}H^i(X,\mathscr{K}_i),$$

где $\mathscr{K}_i$ — пучок в топологии Зарисского, связанный с предпучком $U\longrightarrow K_i\cdot\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$. Эти факты являются основой для изучения колец $CH(X)$ методами K-теории. В частности, этими методами доказаны теоремы о конечности для групп Чжоу 0-циклов на арифметич. поверхностях [4].

2) Значения дзета-функции и L-функции алгебраич. многообразий в целых точках. Имеются гипотезы о связи значений дзета-функций полей алгебраич. чисел в целых точках с порядками подгрупп кручения в K-Ф. их колец целых, а также значений L-функций многообразий над полями алгебраич. чисел в целых точках с рангами их групп K_i и объемами решеток, порождаемых образом K-Ф. в их когомологиях (см. [1], [9]). Эти гипотезы подтверждаются в ряде частных случаев, они дополняют гипотезы Берча — Суиннертона-Дайера (см. *Дзета-функция* в алгебраической геометрии).

3) Теория полей классов в высших размерностях описывает группу Галуа максимального абелева расширения полей рациональных функций арифметич. схем размерности $i\geqslant 1$, а также соответствующих локальных объектов (i-мерных локальных полей [7], [10]). В этом описании роль, к-рую обычно играет мультипликативная группа размерности 1, выполняют группы K_i Милнора.

4) Связь кристаллич. когомологий и деформаций K-Ф. (см. [3]).

5) Теория характеристич. классов в алгебраич. K-теории и теорема Римана — Роха — Гротендика (см. [5], [11]).

6) Вычисление алгебраического K-Ф. для широкого класса схем. В частности, вычислены K-Ф. с конечными коэффициентами алгебраически замкнутых полей [8].

Лит.: [1] Algebraic K-theory, v. 1, p. 85—147, v. 2, p. 489—501, B.— Hdlb.— N. Y., 1973; [2] Théorie des intersections et théorème de Riemann — Roch, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [3] Bloch S., «Publ. math. IHES», 1977, № 47, p. 187—268; [4] Colliot Thélène J.-L., Sansuc J.-J., Soulé C., «C. r. Acad. sci.», 1982, t. 294, ser. 1, p 749—52; [5] Gillet H., «Adv. in math.», 1981, v 40, p. 203—89; [6] Harris B., Segal G., «Ann. math.», 1975, v. 101, № 1, p. 20—33; [7] Kato K., «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo», 1979—80, Sec. IA, v. 26, № 2, p. 303—76, v. 27, № 3, p. 603—83; [8] Suslin A. A., «Invent. Math.», 1983, v. 73, № 2, p. 241—45; [9] Бейлинсон А. А., «Функциональный анализ», 1980, т. 14, в. 2, с. 46—47, [10] Паршин А. Н., «Докл. АН СССР», 1978, т. 243, № 4, с. 855—58, [11] Шехтман В. В., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 6, с. 179—80; [12] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 20, М., 1982, с. 71—152.

В. В. Шехтман.

ФУНКТОРНЫЙ МОРФИЗМ — аналог понятия гоморфизма (левых) модулей с общим кольцом скаляров (роль кольца при этом играет область определения функторов, а сами функторы играют роль модулей). Пусть F_1 и F_2 — одноместные ковариантные функторы из категории $\mathfrak{R}$ в категорию $\mathfrak{C}$. Функторным морфизмом $\varphi\colon F_1\longrightarrow F_2$ наз. такое сопоставление каждому объекту A из $\mathfrak{R}$ морфизма $\varphi_A\colon F_1(A)\longrightarrow F_2(A)$, что для любого морфизма $\alpha\colon A\longrightarrow B$ из $\mathfrak{R}$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(\alpha)} & F_1(B) \\ \varphi_A\downarrow & & \downarrow\varphi_B \\ F_2(A) & \xrightarrow[F_2(\alpha)]{} & F_2(B). \end{array}$$

Если $F_1=F_2$, то, полагая $\varphi_A=1_{F_1(A)}$, получают т. н. тождественный морфизм функтора F_1. Если $\varphi\colon F_1\longrightarrow F_2$ и $\psi\colon F_2\longrightarrow F_3$ — два Ф. м., то, полагая $(\varphi\psi)_A=\varphi_A\psi_A$, получают Ф. м. $\varphi\psi\colon F_1\longrightarrow F_3$, называемый произведением φ и ψ. Композиция Ф. м. ассоциативна. Поэтому для малой категории $\mathfrak{R}$ все функторы из $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{C}$ и их Ф. м. образуют т. н. категорию функторов $\mathrm{Funct}(\mathfrak{R},\mathfrak{C})$, или категорию диаграмм со схемой $\mathfrak{R}$.

Пусть $\varphi\colon F_1\longrightarrow F_2\colon\mathfrak{R}\longrightarrow\mathfrak{C}$ — Ф. м. и $G\colon\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{R}$, $H\colon\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{N}$ — два функтора. Формулы

$$\forall B\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}\ (G*\varphi)_B=\varphi_{G(B)},$$
$$\forall A\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}\ (\varphi*H)_A=H(\varphi_A)$$

определяют Ф. м. $G*\varphi\colon GF_1\longrightarrow GF_2$ и $\varphi*H\colon F_1H\longrightarrow F_2H$ соответственно. Тогда для любых Ф. м. $\varphi\colon F_1\longrightarrow F_2\colon\mathfrak{R}\longrightarrow\mathfrak{C}$ и $\psi\colon H_1\longrightarrow H_2\colon\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{N}$ справедливо соотношение

$$(\varphi*H_1)(F_2*\psi)=(F_1*\psi)(\varphi*H_2).$$

Ф.м. наз. также естественными преобразованиями функторов. По аналогии с Ф. м. одноместных функторов определяются Ф. м. многоместных функторов.

М. Ш. Цаленко.

ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТЕОРИЯ — область математич. анализа, в к-рой изучаются вопросы представления и приближения функций, их локальные и глобальные свойства. Для современной Ф. д. п. т. характерно широкое применение теоретико-множественных методов наряду, естественно, с классическими.

Таким образом, объектом изучения в Ф. д. п. т. является функция. По поводу этого понятия Н. Н. Лузин [3] писал: «Оно не сложилось сразу, но, возникнув более двухсот лет тому назад в знаменитом споре о звучащей струне, подверглось глубоким изменениям уже в начавшейся тогда энергичной полемике. С тех пор идут непрестанное углубление и эволюция этого понятия, которые продолжаются до настоящего времени. Поэтому ни одно отдельное формальное определение не может охватить всего содержания этого понятия...». В соответствии с этим представляется вполне естественным отнести истоки зарождения Ф. д. п. т. ко времени спора о колеблющейся струне [Л. Эйлер (L. Euler), Д. Бернулли (D. Bernoulli), Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert), Ж. Лагранж (J. Lagrange) и др.], хотя становление этой теории происходило в 19 в. [Ж. Фурье (J. Fourier), О. Коши (A. Cauchy), Н. И. Лобачевский, П. Дирихле (P. Dirichlet), Б. Риман (B. Riemann), П. Л. Чебышев, К. Жордан (C. Jordan) и др.].

В классич. анализе изучались в основном функции, имеющие определенную степень гладкости. Однако во 2-й пол. 19 в. в анализе четко обрисовались нек-рые проблемы, ждавшие своего решения и касающиеся более общих классов функций, а также более глубокого изучения и гладких функций. К таким проблемам следует отнести проблемы меры множества, длин кривых и площадей поверхностей, приближения и представления функций, первообразной и интеграла, взаимосвязи интегрирования и дифференцирования, почленное интегрирование и дифференцирование рядов, свойства функций, полученных в результате предельного перехода и др. Решение этих проблем имело принципиальное значение для математики. Классич. методы анализа

уже не могли дать достаточно удовлетворительного ответа на такого типа вопросы. В связи с этим и возникла в кон. 19 в. настоятельная необходимость нового критич. пересмотра основ математич. анализа, что и было осуществлено в кон. 19— нач. 20 вв. на базе *множеств теории*, чем и завершилось создание основ современной Ф. д. п. т.

Обычно современную Ф. д. п. т. условно делят на три части: 1) дескриптивная теория, 2) метрическая теория, 3) теория приближения.

Особенно близки между собой первые две части, основы к-рых были заложены Э. Борелем (E. Borel), Р. Бэром (R. Baire), А. Лебегом (H. Lebesgue) и др.

1) В дескриптивной теории функций изучаются свойства тех или иных классов функций, полученных в результате предельных переходов. Это изучение (на базе и в связи с дескриптивной теорией множеств) показало, что понятие функции крайне сложно. В этом направлении были открыты *Бэра классы* функций, к-рые оказались самым тесным образом связаны с классификацией *борелевских множеств*.

Основополагающие результаты по дескриптивной теории множеств и функций были получены в Советском Союзе во 2-м и 3-м десятилетиях 20 в. (Н. Н. Лузин, М. Я. Суслин, П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Л. В. Келдыш, П. С. Новиков и др.).

2) В метрич. теории функций изучаются свойства функций на основе понятия меры множества. Современное понятие меры множества (*Лебега мера*) было введено А. Лебегом в 1902. Тогда же на базе этого понятия им была создана и теория интеграла (*Лебега интеграл*). Эти два крайне важных понятия — мера и интеграл — образуют фундамент метрич. теории функций, к-рая занимается изучением свойств функций, производных, интегралов, функциональных рядов и т. п.

Первые крупные результаты в России в этом направлении были получены во 2-м десятилетии 20 в. Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным (см. *Егорова теорема*, *Лузина С-свойство*). Создателем и руководителем школы метрич. теории функций в СССР был Н. Н. Лузин.

К метрич. теории функций следует отнести теорию *суммирования* рядов и последовательностей, а также теорию *почти периодических функций*. Эта последняя была создана работами П. Боля (P. Bohl), Х. Бора (H. Bohr), Н. Н. Боголюбова, Г. Вейля (H. Weyl), В. В. Степанова и др.

Исследования по метрич. теории функций и созданные в ней понятия и методы оказали особенно большое влияние на различные области современной математики, а именно: во многих аналитич. исследованиях по разным разделам математики редко обходятся без меры и интеграла Лебега (или соответствующих их аналогов и обобщений).

3) Основы теории приближения функций действительного переменного были заложены в классич. работах П. Л. Чебышева (сер. 19 в.). Им было введено чрезвычайно важное понятие *наилучшего приближения* $E_n(f)$ и доказана одна из основных теорем о наилучшем приближении функций многочленами (*Чебышева теорема*). Дальнейшее развитие этой теории в 19 в. происходило главным образом в России — в трудах Е. И. Золотарева, А. Н. Коркина и братьев А. А. и В. А. Марковых. Большую роль в теории приближения сыграла *Вейерштрасса теорема* о возможности приближения непрерывных функций многочленами.

В нач. 20 в. было выяснено, что дифференциальные свойства функций влияют на быстроту стремления к нулю $E_n(f)$ при $n\to\infty$ [А. Лебег, Э. Борель, Ш. Валле Пуссен (Ch. Vallée Poussin)].

Важнейшие задачи, относящиеся к выяснению связей между структурными свойствами функций и скоростью их приближения полиномами, были решены С. Н. Бернштейном и Д. Джексоном.

Начиная с 30-х гг. исследования в СССР по теории приближения функций действительного переменного приобретают особенно большой размах. Наряду с исследованиями С. Н. Бернштейна здесь в первую очередь следует отметить крупные достижения А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского, а также их учеников.

Лит.: [1] Бэр Р., Теория разрывных функций, пер. с франц., М.—Л., 1932; [2] Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953, [3] его же, Собр. соч., т. 3, М., 1959, с. 319—41; [4] Ляпунов А. А., Новиков П. С., Дескриптивная теория множеств, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет, М.— Л., 1948; [5] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934; [6] Камке Э., Интеграл Лебега — Стилтьеса, пер. с нем., М., 1959; [7] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [8] Ульянов П. Л., Метрическая теория функций, в кн.: История отечественной математики, т. 3, К., 1968; [9] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [10] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.— Л., 1934; [11] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [12] Чебышев П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1859), Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947, с. 151—235; [13] Лозинский С. М., Натансон И. П., Метрическая и конструктивная теория функций вещественной переменной, в кн.: Математика в СССР за сорок лет, т. 1, М., 1959; [14] Никольский С. М., Теория приближения функций многочленами, в кн.: История отечественной математики, т. 3, К., 1968; [15] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977.

П. Л. Ульянов.

ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТЕОРИЯ — в широком смысле слова теория функций, областью определения к-рых является нек-рое множество точек z комплексной плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ (функции одного комплексного переменного) или множество точек $z=(z_1,\ldots,z_n)$ комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$, $n>1$ (функции многих комплексных переменных). В узком смысле слова Ф. к. п. т. есть теория *аналитических функций* одного или многих комплексных переменных.

Как самостоятельная дисциплина Ф. к. п. т. оформилась примерно к сер. 19 в. в качестве теории аналитич. функций. Основополагающими здесь были работы О. Коши (A. Cauchy), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) и Б. Римана (B. Riemann), к-рые подходили к развитию теории с различных позиций.

По Вейерштрассу, функция $w=f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ наз. аналитической (или голоморфной) в области $D\subset\mathbb{C}$, если в окрестности каждой точки $z_0\in D$ она разлагается в степенной ряд

$$w=f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k; \qquad (1)$$

в случае многих комплексных переменных, когда $D\subset\mathbb{C}^n$, $n>1$, ряд (1) понимается как кратный степенной ряд. Для определения аналитич. функции достаточно даже, чтобы сходящийся ряд (1) был задан в окрестности одной единственной точки z_0, ибо ее значения в других точках z_1 и соответствующие ряды могут быть определены в процессе *аналитического продолжения* вдоль различных путей, расположенных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (или в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n>1$) и соединяющих точки z_0 и z_1.

При аналитич. продолжении могут встретиться *особые точки*, аналитич. продолжение в к-рые, хотя бы вдоль нек-рых путей, невозможно. Эти особые точки определяют общее поведение аналитич. функции в том отношении, что если два пути L_1 и L_2, соединяющие одни и те же фиксированные точки z_0 и z_1, не гомотопны, т. е. если L_2 нельзя непрерывно деформировать в L_1, не переходя при этом через особые точки, то значения функции $f(z_1)$, получаемые при аналитич. продолжении вдоль L_1 и L_2, могут оказаться различными. Следовательно, *полная аналитическая функция* $w=f(z)$, получаемая аналитич. продолжением исходного

элемента (1) по всевозможным путям, может оказаться многозначной в своей естественной области определения на $\mathbb{C}$ (или на $\mathbb{C}^n$, $n>1$). Таковы, напр., функции $w=\sqrt{z}$ или $w=\ln z$. Можно избавиться от этой многозначности, запретив аналитич. продолжение по некоторым путям, устроив, как говорят, р а з р е з ы на комплексной плоскости и выделив однозначные *ветви аналитической функции*. Однако более совершенный способ превращения многозначной аналитич. функции в однозначную состоит в том, что ее следует рассматривать не как функцию точки комплексной плоскости, а как функцию точки *римановой поверхности*, состоящей из нескольких листов, накрывающих комплексную плоскость и определенным образом соединяющихся между собой. В случае многих переменных вместо римановой поверхности возникает *риманова область*, многолистно накрывающая пространство $\mathbb{C}^n$, $n>1$.

О. Коши в своем построении теории аналитич. функций исходил из понятия м о н о г е н н о с т и. Функцию $w=f(z)$, $z\in D\subset\mathbb{C}$, он называл моногенной, если она имеет всюду в D м о н о д р о м н у ю (т. е. однозначную и непрерывную, кроме, быть может, полюсов) п р о и з в о д н у ю. Несколько расширяя это понятие, под моногенной на множестве $E\subset D$ функцией $w=f(z)$ обычно понимают такую (однозначную) функцию, для к-рой существует во всех точках $z_0\in E$ п р о и з в о д н а я п о м н о ж е с т в у E

$$f'_E(z)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \qquad (2)$$

Моногенность в смысле Коши, когда $E=D$, совпадает с аналитичностью. О. Коши развил теорию интегрирования аналитич. функций, доказав важную теорему о *вычетах*, *Коши интегральную теорему* и введя понятие *Коши интеграла*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \qquad (3)$$

выражающего значение аналитич. функции $f(z)$ через ее значения на любом замкнутом контуре Γ, охватывающем точку z и не содержащем внутри или на Γ особых точек $f(z)$. Как простейшее интегральное представление аналитич. функций, понятие интеграла Коши сохраняется и для функций многих переменных.

Введя комплексные переменные $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$, можно записать любую функцию двух переменных x и y: $w=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ как функцию от z и $\bar z$. *Коши—Римана условия*, выделяющие среди таких функций аналитические, состоят в том, что функции $w=u(x,y)+iv(x,y)$ должны быть дифференцируемыми по совокупности переменных (x,y), причем всюду в D должно выполняться равенство

$$\frac{\partial w}{\partial\bar z}=0, \qquad (4)$$

или, подробнее, $u'_x=v'_y$, $u'_y=-v'_x$.

Условия (4) означают, что действительная и мнимая части аналитич. функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ должны быть *сопряженными гармоническими функциями*. В случае аналитич. функций многих комплексных переменных условия (4) должны выполняться по всем переменным $\bar z_\nu$, $\nu=1,\ldots,n$.

Для Б. Римана наиболее важным было то обстоятельство, что выделяемая условиями (4) аналитич. функция $w=f(z)$ осуществляет при определенных условиях *конформное отображение* области D на некрую другую область на плоскости комплексного переменного w. Связь аналитич. функций с конформными отображениями открывает путь для решения ряда задач математич. физики.

Дальнейшее развитие Ф. к. п. т. происходило и происходит прежде всего как углубление и расширение теории аналитич. функций (см., напр., *Граничные задачи теории аналитических функций*, *Граничные свойства аналитических функций*, *Единственности свойства* аналитических функций, *Интегральное представление аналитической функции*, *Мероморфная функция*, *Многолистная функция*, *Однолистная функция*, *Целая функция)*. Важное значение имеют связанные с аналитич. функциями проблемы аппроксимации и интерполирования функций. При этом оказывается, что в теории аналитич. функций многих переменных специфика и трудность задач таковы, что они поддаются решению лишь с привлечением самых современных методов алгебры, топологии и анализа.

Большое теоретическое и прикладное значение имеет изучение граничных свойств голоморфных функций, в частности интеграла типа Коши (см. *Коши интеграл*), получаемого из (3), когда значения $f(\zeta)$ на контуре Γ задаются совершенно произвольно, его многомерных аналогов и других интегральных представлений.

Важные для приложений *обобщенные аналитические функции* получаются, в своей простейшей форме, как решения более общего, чем (4), уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial\bar z}+A(z)\,w+B(z)\,\bar w=F(z).$$

Их основные свойства (в случае одного переменного) довольно подробно исследованы.

Большое значение для самой теории аналитич. функций (в частности, для теории римановых поверхностей) и для приложений имеет изучение *квазиконформных отображений*.

Развивается также теория *аналитических функций абстрактных* со значениями в различных векторных пространствах.

Лит.: [1] П р и в а л о в И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; [2] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [3] Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [4] В л а д и м и р о в В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [5] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., т. 1—2, М., 1976, [6] В е к у а И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959. *Е. Д. Соломенцев.*

ФУНКЦИЙ ТЕОРИЯ — раздел математики, в к-ром изучаются общие свойства *функций*. Ф. т. распадается на две части: *функций действительного переменного теория* и *функций комплексного переменного теория*.

ФУНКЦИОНАЛ — отображение f произвольного множества X в множество $\mathbb{R}$ действительных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Если X наделено структурой *векторного пространства*, *топологического пространства*, упорядоченного множества, то возникают соответственно важные классы линейных, непрерывных, монотонных Ф.

Лит.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981. *В. И. Соболев.*

ФУНКЦИОНАЛ о т м а р к о в с к о г о п р о ц е с с а — случайная величина или случайная функция, зависящая измеримым образом от траектории марковского процесса; условие измеримости варьируется в зависимости от конкретной ситуации. В общей теории марковских процессов принимается следующее определение Ф. Пусть в измеримом пространстве $(E,\mathcal{B})$ задан необрывающийся однородный марковский процесс $X=(x_t,\mathcal{F}_t,\mathsf{P}_x)$ с операторами временно́го сдвига θ_t, и пусть $\mathcal{N}$ — наименьшая из σ-алгебр в пространстве элементарных событий, содержащих любое событие вида $\{\omega\colon x_t\in\mathcal{B}\}$, где $t\geqslant 0$, $B\in\mathcal{B}$, а $\overline{\mathcal{N}}$ — пересечение всех пополнений $\mathcal{N}$ по всевозможным мерам P_x $(x\in E)$. Случайная функция γ_t, $t\geqslant 0$, наз. ф у н к ц и о н а л о м о т м а р к о в с к о г о п р о ц е с с а X, если

при каждом $t \geqslant 0$ величина γ_t измерима относительно σ-алгебры $\overline{\mathcal{N}}_t \cap \mathcal{F}_t$.

Особый интерес представляют мультипликативные и аддитивные Ф. от марковских процессов. Первые из них выделяются условием $\gamma_{t+s} = \gamma_t \cdot \theta_t \gamma_s$, вторые — условием $\gamma_{t+s} = \gamma_t + \theta_t \gamma_s$, $s,\ t \geqslant 0$, причем функцию γ_t считают непрерывной справа на $[0, \infty)$ (с другой стороны, иногда приходится предполагать эти условия выполняющимися лишь P_x-почти наверное для любых фиксированных $s,\ t \geqslant 0$). Соответствующие формулировки принимаются в случае обрывающихся и неоднородных процессов. Примеры аддитивных Ф. от марковского процесса $X = (x_t,\ \zeta,\ \mathcal{F}_t,\ \mathsf{P}_x)$ можно получить, приравняв γ_t при $t < \zeta$ к $f(x_t) - f(x_0)$, или к $\int_0^t f(x_s)\,ds$, или к сумме скачков случайной функции $f(x_s)$ при $s \in [0,\ t]$, где $f(x)$ — ограниченная и измеримая относительно $\mathcal{B}$ функция (второй и третий примеры корректны лишь при нек-рых дополнительных условиях). Переход от любого аддитивного Ф. γ_t к $\exp \gamma_t$ доставляет пример мультипликативного Ф. В случае стандартного марковского процесса интересным и важным примером мультипликативного Ф. служит случайная функция, равная 1 при $t < \tau$ и 0 при $t \geqslant \tau$, где τ — момент первого выхода X из нек-рого множества $A \in \mathcal{B}$, т. е. $\tau = \inf\{t \in [0,\ \zeta) : x_t \notin A\}$.

С мультипликативными Ф., подчиненными условию $0 \leqslant \gamma_t \leqslant 1$, связано одно естественное преобразование марковского процесса — **переход к подпроцессу**. По переходной функции $P(t,\ x,\ B)$ процесса $X = (x_t,\ \zeta,\ \mathcal{F}_t,\ \mathsf{P}_x)$ строят новую

$$\tilde{\mathsf{P}}(t,\ x,\ B) = \int_{\{x_t \in B\}} \gamma_t \mathsf{P}_x\{d\omega\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

причем может оказаться, что $\tilde{\mathsf{P}}(0,\ x,\ E) < 1$ в нек-рых точках $x \in E$. Новой переходной функции в $(E,\ \mathcal{B})$ соответствует нек-рый марковский процесс $\tilde{X} = (\tilde{x}_t,\ \tilde{\zeta},\ \tilde{\mathcal{F}}_t,\ \mathsf{P}_x)$, к-рый вместе с исходным можно реализовать на одном и том же пространстве элементарных событий с одними и теми же мерами P_x, $x \in E$, причем так, что $\tilde{\zeta} \leqslant \zeta$, $\tilde{x}_t = x_t$ при $0 \leqslant t < \tilde{\zeta}$ и что σ-алгебра $\tilde{\mathcal{F}}_t$ является следом σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ в множестве $\{\omega : \tilde{\zeta} > t\}$. Процесс $\tilde{X}$ наз. **подпроцессом марковского процесса** X, получаемым в результате «убивания» или сокращения времени жизни. Подпроцесс, отвечающий мультипликативному Ф. из последнего примера, наз. **частью** X **на множестве** A; его фазовым пространством естественно считать не все $(E,\ \mathcal{B})$, а лишь $(A,\ \mathcal{B}_A)$, где $\mathcal{B}_A = \{B \in \mathcal{B} : B \subset A\}$.

Аддитивные Ф. $\gamma_t \geqslant 0$ порождают другой тип преобразований марковских процессов — **случайную замену времени**, к-рая сводится к изменению времени прохождения различных участков траектории. Пусть, напр., $\gamma_t \geqslant 0$ — непрерывный аддитивный Ф. от стандартного марковского процесса X, причем $\gamma_t > 0$ при $t > 0$. Тогда $Y = (X_{\tau_t},\ \gamma_{\zeta-},\ \mathcal{F}_{\tau_t},\ \mathsf{P}_x)$ является стандартным марковским процессом, где $\tau_t = \sup\{s : \gamma_s \leqslant t\}$ при $t \in [0,\ \gamma_{\zeta-})$. При этом говорят, что Y получен из X в результате случайной замены $t \longrightarrow \tau_t$.

Хорошо изучены различные классы аддитивных Ф., в первую очередь от стандартных процессов.

Лит.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [2] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [3] его же, Марковские процессы, М., 1963; [4] Revuz D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 148, p. 501—31; [5] Benveniste A., «Lect. Notes Math.», 1973, № 321, p. 1—24. *М. Г. Шур.*

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ — свойство множеств A и B топологич. пространства X, когда существует непрерывная действительная функция f на X такая, что замыкания множеств $f(A)$ и $f(B)$ (по отношению к обычной топологии действительной прямой $\mathbb{R}$) не пересекаются. Напр., пространство вполне регулярно, если всякое замкнутое множество отделимо от каждого одноточечного множества, с ним не пересекающегося. Пространство нормально, если функционально отделимы любые два его замкнутые непересекающиеся подмножества. Если в пространстве функционально отделимы каждые два одноточечных (различных) множества, то оно наз. **функционально хаусдорфовым**. Содержание данных определений не изменяется, если вместо непрерывных действительных функций привлечь непрерывные отображения в плоскость, в отрезок или в гильбертов кирпич.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *А. В. Архангельский.*

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, производная Вольтерра, — одно из первых понятий производной в бесконечномерном пространстве. Пусть $I(y)$ — нек-рый функционал от непрерывной функции одного переменного $y(x)$; x_0 — нек-рая внутренняя точка отрезка $[x_1,\ x_2]$; $y_1(x) = y_0(x) + \delta y(x)$, где вариация $\delta y(x)$ отлична от нуля в малой окрестности $[a,\ b]$ точки x_0; $\sigma = \int_a^b \delta y(x)\,dx$. Предел

$$\lim_{\sigma \to 0,\ a \to x_0,\ b \to x_0} \frac{I(y_1) - I(y_0)}{\sigma}$$

в предположении, что он существует, наз. **функциональной производной** функционала I и обозначается $\left.\frac{\delta I(y_0)}{\delta y}\right|_{x = x_0}$. Напр., для простейшего функционала классического вариационного исчисления

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ \dot{y})\,dx$$

его Ф. п. имеет вид

$$\left.\frac{\delta I(y_0)}{\delta y}\right|_{x = x_0} = \frac{\partial F(x_0,\ y_0(x_0),\ \dot{y}_0(x_0))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{F(x_0, y(x_0), \dot{y}(x_0))}{\partial \dot{y}},$$

т. е. представляет собой левую часть уравнения Эйлера, являющегося необходимым условием минимума функционала $I(y)$.

В теоретич. вопросах понятие Ф. п. имеет лишь историч. интерес и практически вытеснено понятиями *Гато производной* и *Фреше производной*. Однако понятие Ф. п. с успехом применяется в численных методах классического вариационного исчисления (см. *Вариационное исчисление*; численные методы). *И. Б. Вапнярский.*

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА — множество функций с нек-рым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого множества. Ф. с. являются одним из основных объектов математич. кибернетики и дискретной математики и отражают следующие главные особенности реальных и абстрактных *управляющих систем*: функционирование (в Ф. с. это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях Ф. с.). Примерами Ф. с. являются *многозначные логики*, алгебры *автоматов*, алгебры *вычислимых функций* и др. Ф. с. обладает определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при исследовании Ф. с. с позиций математич. кибернетики, математич. логики и алгебры. Так, с позиций математич. кибернетики Ф. с. рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетич. систем;

с позиций математич. логики — как модели логик, т. е. как системы предложений с логич. операциями над ними; с точки зрения алгебры — как универсальные алгебры.

Важной особенностью Ф. с., выделяющей их из общего класса универсальных алгебр, является их содержательная связь с реальными кибернетич. моделями управляющих систем. Эта связь, с одной стороны, определяет серию существенных требований, к-рые накладываются на Ф.с., а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение. Проблематика Ф. с. обширна и имеет много общего с проблематикой многозначных логик. К числу важнейших задач для Ф. с. относятся задачи о полноте, о сложности выражения одних функций через другие, о тождественных преобразованиях, о синтезе и анализе и другие.

Изучение Ф. с. осуществлялось путем исследования конкретных модельных Ф. с., среди к-рых одной из первых изучались двузначная и трехзначная, а затем и k-значная логики. Наряду с этими Ф. с. интенсивно изучаются алгебры автоматов, такие, как Ф. с. функций с задержками, Ф. с. *ограниченно-детерминированных функций* и детерминированных функций, счетнозначные логики, Ф. с. вычислимых функций, Ф. с. неоднородных функций и другие.

Вместе с накоплением модельных Ф. с. и изучением их свойств вырабатывались общие понятия Ф. с., анализировались Ф. с. с точки зрения решения упомянутых задач для них. В качестве обобщений реальных Ф. с. могут рассматриваться и универсальные алгебры, однако в этом случае теряются основные достоинства реальных Ф. с. и прежде всего такие, как конструктивность множеств и операций и ряд других.

Достаточную общность имеет следующий подход к пониманию Ф. с. Суть подхода состоит в рассмотрении в качестве Ф. с. пар вида $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$, где $\mathfrak{M}$ является множеством функций k-значной или счетно-значной логики или множеством последовательностных функций, а также множеством нек-рых ближайших обобщений таких функций (напр., частичных или неоднородных функций и т. п.); а в качестве Ω выступает множество в определенном смысле автоматных операций, к-рые обладают теми нужными свойствами, какими наделены операции в примерах упомянутых Ф. с.: это и локальность информации о функциях, используемой при применении операций к функциям, и вычислимый характер операций, причем вычислимый в определенном смысле простейшими, т. е. автоматными, средствами, и конструктивность заданий самих операций и т. п. Само понятие Ф. с. в соответствии с реальными Ф. с. распадается на понятия истинностной Ф. с. и последовательностной Ф. с. В первом случае в паре $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$ множество $\mathfrak{M}$ состоит из функций многозначной логики, а во втором — из последовательностных функций, т. е. функций, определенных на словах. Все реальные Ф. с. оказываются либо истинностными, либо последовательностными Ф. с.

Важную роль при изучении Ф. с. играет оператор замыкания I_Ω, к-рый соответствует Ф. с. $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$, если ее рассматривать как частичную универсальную алгебру. Этот оператор, как и операции из Ω, наз. автоматным. Установлено, что классы автоматных и алгебраич. операторов замыкания совпадают. Отсюда, в частности, следует, что все реальные Ф. с. являются истинностными или последовательностными Ф.с. и с формальной точки зрения.

Лит.: [1] Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 5—142; [2] его же, «Научный Совет АН СССР «Кибернетика». Информационные материалы», 1970, № 5 (42), с. 5—15; [3] его же, «Труды международного конгресса математиков», Хельсинки, 1978, с. 963—71; [4] Post E. L., Two-valued iterative systems of mathematical logic, Princeton (N. J.), 1941; [5] Кудрявцев В. Б., Функциональные системы, М., 1982.

В. Б. Кудрявцев.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — гомоморфизм нек-рой алгебры функций A в алгебру $L(X)$ непрерывных линейных операторов в топологич. векторном пространстве X. Ф. и. — один из основных инструментов общего спектрального анализа и теории банаховых алгебр, к-рый позволяет использовать в этих дисциплинах функционально-аналитич. методы. Обычно A — топологическая (в частности, нормированная) алгебра функций на нек-ром подмножестве K пространства $\mathbb{C}^n$, содержащая многочлены переменных $z^1, \ldots, z^n$ (часто K — плотное подмножество), так что Ф. и. $\varphi\colon A \longrightarrow L(X)$ является естественным продолжением полиномиального исчисления $p(z^1, \ldots, z^n) \longrightarrow p(T_1, \ldots, T_n)$ коммутирующих операторов $T_i = \varphi(z^i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; в этом случае говорят, что набор $T = (T_1, \ldots, T_n)$ допускает A-исчисление, и пишут $\varphi(T) = f(T) = f(T_1, \ldots, T_n)$. A-исчисление для T — это род спектральной теоремы, так как соответствие $a \longrightarrow \langle \varphi(a)x, x' \rangle$, где $x \in X$, $x' \in X^*$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственность между X и X^*, определяет слабое операторнозначное A-распределение, перестановочное с T.

Классическое Ф. и. Неймана — Мурье — Данфорда ($A = C(K)$, X — рефлексивное пространство) приводит к операторной (проекторной) спектральной мере

$$\varepsilon = \varepsilon_T : f(T_1, \ldots, T_n) = \int f d\varepsilon.$$

Ф. и. Рисса — Данфорда ($n = 1$, $A = \mathrm{Hol}(\sigma(T))$ — все функции, голоморфные на спектре $\sigma(T)$ оператора T) приводит к формуле

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda,$$

где $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ — резольвента оператора, γ — контур, охватывающий $\sigma(T)$, вплоть до к-рого регулярна функция f. Формулы последнего типа для многих переменных (операторов) зависят от записи линейного функционала на $\mathrm{Hol}(\sigma(T))$ и способа определения совместного спектра $\sigma(T)$ набора $T = (T_1, \ldots, T_n)$ (от определения $\sigma(T)$ зависит и объем Ф. и.).

Если T — спектральный оператор, S и N — его скалярная и квазинильпотентная части соответственно, а $f \in \mathrm{Hol}(\sigma(T))$, то формула

$$f(T) = \sum\nolimits_{n \geqslant 0} \frac{N^n}{n!} \int_{\sigma(T)} f^{(n)} d\varepsilon,$$

где ε — разложение единицы T, позволяет распространить Ф. и. Рисса — Данфорда для T на более широкий класс функций. В частности, если $N^{m+1} = \mathcal{O}$, то T допускает Ф. и. на классе $C^m(\sigma(T))$ m раз непрерывно дифференцируемых функций. Если T — оператор скалярного типа, то в эту формулу можно подставить ограниченные борелевские функции на $\sigma(T)$. В частности, такое Ф. и. допускают нормальные операторы в гильбертовом пространстве. Верно и обратное: если оператор T допускает Ф. и. (для операторов в рефлексивных пространствах достаточно предполагать существование Ф. и. на классе непрерывных функций), то T — спектральный оператор скалярного типа (в гильбертовом пространстве — линейно подобный нормальному оператору).

Для операторов с достаточно медленным ростом резольвенты вблизи спектра построена [5] теория неаналитических $C\{M_k\}$-исчислений, опирающаяся на классы Карлемана $C(\{M_k\}, \sigma(T))$ и использующая формулу

$$f(T) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda d\bar{\lambda},$$

где $\tilde{f}$ — т. н. $\bar{\partial}$-продолжение функции f за пределы

спектра $\sigma(T)$, т. е. финитная C^1-функция в $\mathbb{C}$, для которой

$$f=\tilde{f}|_{\sigma(T)},\ \left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{z}}(\lambda)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot h_{\{M_k\}}(c\,\mathrm{dist}(\lambda,\ K));$$

здесь

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}+i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}\right),$$

$$h_{\{M_k\}}(r)\overset{\text{def}}{=}\inf_n r^{n-1}\frac{M_n}{n!},$$

а оператор T удовлетворяет условию

$$\|R(\lambda,\ T)\|\leqslant\left(h_{\{M_k\}}(\mathrm{dist}(\lambda,\ K)|\ln\mathrm{dist}(\lambda,\ K)|^{-1}\right).$$

С другой стороны, более широкие (чем $\mathrm{Hol}(\sigma(T))$ исчисления возникают как следствия оценок операторных многочленов $p(T)$; напр., если X — гильбертово пространство, то неравенство Неймана — Хайнца

$$\|p(T)\|\leqslant\max\{|p(\zeta)|:|\zeta|\leqslant\|T\|\}$$

приводит к Ф. и. Сёкефальви-Надя—Фояша (A — алгебра всех голоморфных и ограниченных в круге $\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|<1\}$ функций, T — сжатие без унитарных частей), а оно — к многочисленным приложениям в теории функциональной модели для сжимающих операторов. Аналог неравенств Неймана — Хайнца для симметричных пространств функций порождает Ф. и. в терминах мультипликаторов (соответствующих сверточных пространств, [8]).

Применения. Тип Ф. и., допускаемый оператором T, является инвариантом относительно линейного подобия $T\to V^{-1}TV$ и успешно используется для классификации операторов. В частности, построена обширная теория т. н. A-скалярных операторов, применимая ко многим классам операторов, не укладывающихся в классическую спектральную теорию. Для успешного использования Ф. и. имеют значения т. н. теоремы об отображении спектра:

$$\sigma(f(T))=f(\sigma(T)),\ f\in A,$$

для всех перечисленных выше Ф. и. такие теоремы доказаны (после надлежащего осмысления правой части формулы).

Если алгебра A содержит мелкие разбиения единицы (напр., $A=C^\infty$), то A-Ф. и. позволяет построить локальный спектральный анализ и, в частности, доказать существование нетривиальных инвариантных подпространств оператора T (если $\sigma(T)$ — не одноточечное множество); пример — оператор T (в банаховом пространстве), спектр которого лежит на гладкой кривой γ, и $S_0\ln+\ln+\delta(r)dr<\infty$, где $\delta(r)=\max\{\|R(\lambda;\ T)\|:\mathrm{dist}(\lambda,\ \gamma)\geqslant r\}$. Следствием локального анализа является и теорема Шилова об идемпотентах [2].

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962, ч. 3, М., 1974, [2] Бурбаки Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972, [3] Waelbroeck L., Étude spectrale des algèbres complètes, Brux., 1960; [4] Taylor J. L., «Acta math.», 1970, v. 125, № 1—2, p. 1—38; [5] Дынькин Е. М., «Записки науч. семин. ЛОМИ», 1972, т. 30, с. 33—39; [6] von Neumann J., «Math. Nachr.», 1950/51, Bd 4, S. 258—81, [7] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970, [8] Пеллер В. В., «Матем. заметки», 1979, т. 25, № 6, с. 899—912; [9] Colojoară I., Foiaş C., Theory of generalized spectral operators, N. Y.— L., 1968; [10] Любич Ю. И., Мацаев В. И., «Матем. сб.», 1962, т. 56, № 4, с. 433—68; [11] Микусинский Я., Операторное исчисление, пер. с польск., М., 1956; [12] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973.

Н. К. Никольский, В. В. Пеллер.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ — *бинарное отношение* R на множестве A, удовлетворяющее соотношению $R^{-1}\circ R\subseteq\Delta$, где Δ — диагональ множества A. Это означает, что из $(a,\ b)\in R$ и $(a,\ c)\in R$ следует, что $b=c$, т. е. каждому $a\in A$, стоящему на первом месте, соответствует не более одного $b\in A$ на втором месте в паре из R. Таким образом, отношение R определяет (быть может, не всюду определенную) функцию на множестве A. При выполнении соотношения $R^{-1}\circ R=\Delta$ эта функция всюду определена и взаимно однозначна. *О. А. Иванова.*

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение (линейное или нелинейное), в к-ром неизвестным является элемент какого-либо банахова пространства, конкретного (функционального) или абстрактного, т. е. уравнение вида

$$P(x)=y,\qquad(1)$$

где $P(x)$ — нек-рый, вообще говоря, нелинейный оператор, переводящий элементы пространства X типа B в элементы пространства Y того же типа. Если Ф. у. содержит еще и числовой (или общий функциональный) параметр λ, то вместо (1) пишут

$$P(x;\ \lambda)=y,$$

где $x\in X$, $y\in Y$, $\lambda\in\Lambda$, Λ — пространство параметров.

Уравнениями вида (1) являются конкретные или абстрактные дифференциальные уравнения, обыкновенные и с частными производными, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, функционально-дифференциальные и более сложные уравнения математич. анализа, а также системы алгебраич. уравнений, конечные и бесконечные, уравнения в конечных разностях и др.

В линейном случае рассматриваются Ф. у. 1-го рода $Ax=y$ и 2-го рода $x-\lambda Ax=y$, где A — линейный оператор из X в Y, а λ — параметр. При этом формально Ф. у. 2-го рода может быть записано в виде уравнения 1-го рода $Tx=y$ ($T=I-\lambda A$). Однако выделение тождественного оператора I оказывается целесообразным, так как оператор A может обладать лучшими свойствами, чем оператор T, что позволяет полнее исследовать рассматриваемое уравнение.

Ф. у. рассматриваются также и в др. пространствах, напр. в пространствах, нормированных элементами полуупорядоченных пространств.

Если решения Ф. у. являются элементами пространства операторов, то такие Ф. у. наз. операторными уравнениями (о. у.), конкретными или абстрактными. Здесь также могут быть алгебраич. о. у., линейные и нелинейные, дифференциальные, интегральные и другие о. у. Напр., пусть в нормированном кольце $[X]=[X\to X]$ линейных операторов, переводящих пространство X типа B в себя, рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение на бесконечном промежутке $0\leqslant\lambda\leqslant\infty$:

$$\frac{dx}{d\lambda}=-Ax\ (=-xA),\ x(0)=x_0,\qquad(2)$$

где A, $x_0\in[X]$, $x(\lambda)$ — абстрактная функция со значениями в банаховом пространстве $[X]$. Это уравнение является простейшим абстрактным линейным дифференциальным о. у., оно получается, напр., из применения прямого метода вариации параметра к построению операторов вида $P(A)=e^{-A\lambda}$, $0\leqslant\lambda\leqslant\infty$, в частности проекторов $P(A)$ ($[P(A)]^2=P(A)$) с единичной нормой. Проекторы вида $P(A)$, $P(AC)$ и $P(CA)$, $C\in[X]$, применяются, напр., при построении прямым методом вариации параметра явных и неявных псевдообратных операторов и псевдорешений линейных Ф. у., а также собственных элементов (собственных подпространств) оператора A. Сведение различных задач к задачам для уравнения (2) и др. является весьма удобным при разработке приближенных методов решения. Интерес представляют также о. у. вида

$$\frac{dx}{d\lambda}=A(\lambda)x+F(\lambda)\ (=xA(\lambda)+F(\lambda)),\ x(0)=x_0,$$

где $A(\lambda)$, $F(\lambda)$ — абстрактные функции со значениями из $[X]$, и др. линейные и нелинейные о. у.

В нек-рых задачах, связанных с дифференциальными и др. уравнениями, приходится исследовать линейные алгебраич. о. у. вида $Ax+xB=y$ и подобные им. Здесь x — искомый, а A, B, y — заданные линейные операторы, принимающие, быть может, и нулевые значения.

Под Ф. у. в узком смысле этого слова понимают уравнения, в к-рых искомые функции связаны с известными функциями одного или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции. Напр., пусть $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$,— заданные функции и $C_i(x)=f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где Ψ — произвольные постоянные. Исключение C_i из $n+1$ уравнения вида

$$\Psi(\varphi_\nu(x))=f(\varphi_\nu(x), C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$\nu=0, 1, 2, \ldots, n, \ \varphi_0(x)=x,$$

приводит к Ф. у. вида

$$F[x, \Psi(x), \Psi(\varphi_1(x)), \Psi(\varphi_2(x)), \ldots, \Psi(\varphi_n(x))]=0, \quad (3)$$

к-рое будет иметь решение $\Psi(x)=f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Построение Ф. у. представляет собой прямую задачу функционального исчисления, аналогичную с определением производных высшего порядка в дифференциальном исчислении.

Исключение C_i из $n+1$ уравнения вида

$$\Psi^{\nu+1}(x)=f(\Psi^\nu(x), C_1, C_2, \ldots, C_n), \ \nu=0, 1, 2, \ldots, n,$$
$$\Psi^0(x)=x, \ \Psi^1(x)=\Psi(x), \ \Psi^2(x)=\Psi(\Psi^1(x)), \ldots,$$

приводит к Ф. у. вида

$$F[x, \Psi(x), \Psi^2(x), \ldots, \Psi^{n+1}(x)]=0, \quad (4)$$

имеющему решение $\Psi(x)=f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Иногда Ф. у. различаются по порядкам и классам. Под *порядком уравнения* подразумевается порядок искомой функции, входящей в уравнение, а под *классом уравнения* — число данных функций, к к-рым применяется неизвестная функция. Так, уравнение (3) является Ф. у. 1-го порядка и $(n+1)$-го класса. Уравнение (4) является Ф. у. $(n+1)$-го порядка и 1-го класса.

Соотношения (3) и (4) являются тождествами относительно x, уравнениями их называют постольку, поскольку искомой является функция $\Psi(x)$.

Уравнения (3) и (4) являются Ф. у. с одним независимым переменным. Могут рассматриваться Ф. у. с несколькими независимыми переменными, Ф. у. дробных порядков и др., а также системы совместных Ф. у. При этом Ф. у. или системы Ф. у. могут содержать в себе большее число существенных, существенно различимых между собой переменных, чем искомая функция с максимальным числом переменных.

К системам Ф. у. приходят, напр., при определении произвольных функций, входящих в интегралы уравнений с частными производными и удовлетворяющих условиям задачи. Если в интеграл входит n произвольных функций, то, подчиняя их n условиям, получают n совместных Ф. у. Системы Ф. у. в нек-рых случаях удобно записываются в более краткой записи в виде векторного или матричного Ф. у.

Ф. у. можно также рассматривать как выражение свойства, характеризующего тот или иной класс функций [напр., Ф. у. $f(x)=f(-x)$ $(f(-x)=-f(x))$ характеризует класс четных (нечетных) функций; Ф. у. $f(x+1)=f(x)$ — класс функций, имеющих период 1, и т. д.].

Одними из простейших Ф. у. являются, напр., уравнения Коши

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y)=f(x)+f(y), \ f(x+y)=f(x)f(y), \\ f(xy)=f(x)+f(y), \ f(xy)=f(x)f(y), \end{array}\right\} \quad (5)$$

непрерывные решения к-рых имеют соответственно вид (в классе разрывных функций могут быть и др. решения):

$$f(x)=Cx, \ e^{Cx}, \ C\ln x, \ x^C \ (x>0).$$

Ф. у. (5) могут служить средством для определения указанных функций при дополнительном требовании непрерывности. Рассматриваются также обобщенные Ф. у. Коши относительно трех и более неизвестных функций и др., а также Ф. у. в комплексной области. Ф. у. вида $F(f(x), f(y), f(x+y))=0$ и вида $\Phi(f(x), f(y), f(xy))=0$ носят название соответственно *теорема сложения* и *теорема умножения* функции $f(t)$. Простейшими Ф. у., в к-рых искомая функция зависит от двух переменных, являются, напр., уравнения

$$\varphi(x, y)+\varphi(y, z)=\varphi(x, z) \text{ и } \varphi(x, y)\varphi(y, z)=\varphi(x, z),$$

решения к-рых имеют соответственно вид

$$\varphi(y, z)=\Psi(y)-\Psi(z) \text{ и } \varphi(x, y)=\Psi(y)/\Psi(x),$$

где Ψ — произвольная функция.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [2] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [3] Давиденко Д. Ф., в кн.: Математическое программирование и смежные вопросы. Вычислительные методы, М., 1976, с. 187—212; [4] Канторович Л. В., «Успехи матем наук», 1956, т. 11, в. 6, с. 99—116; [5] Давиденко Д. Ф., в кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика, Новосиб., 1980, с. 59—65; [6] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [7] Энциклопедия элементарной математики, кн. 3, Функции и пределы, М.—Л., 1952; [8] Ацель Я., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 3, с. 3—68; [9] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 7 изд., М., 1969.

Д. Ф. Давиденко.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; методы решения — методы нахождения точных или приближенных решений функциональных конкретных или абстрактных уравнений, т. е. уравнений вида

$$P(x)=y, \quad (1)$$

где $P(x)$ — нек-рый, вообще говоря, нелинейный оператор, переводящий элементы пространства X типа B (или другого типа) в элементы пространства Y того же типа (см. *Функциональное уравнение*). Точные решения в виде аналитич. выражений получаются лишь для немногих типов Ф. у., поэтому особое значение имеют приближенные методы решения.

Для нахождения решений общих Ф. у. вида (1) развит ряд методов, напр. метод бесконечных степенных рядов, метод последовательных приближений, метод Галеркина (метод моментов), метод касательных гипербол, метод Чебышева (касательных парабол), метод Ньютона — Канторовича и его модификации, метод наискорейшего спуска и др., а также методы вариации параметра (прямые, итерационные и комбинированные) определенных типов и их различные модификации, в том числе и с последовательной аппроксимацией обратного оператора. Общие методы применяются к решению различных конкретных Ф. у. математич. анализа. Кроме того, существуют специальные методы решения конкретных Ф. у., в том числе и численные методы, напр. метод сеток и др. Метод вариации параметра, метод Ньютона — Канторовича и нек-рые др. из указанных методов имеют также и теоретич. значение, так как с их помощью можно делать заключение о существовании, единственности и области расположения решения Ф. у., не находя самого решения, что подчас не менее важно, чем фактич. знание решения. Ниже в качестве примера рассматривается прямой метод вариации параметра.

Пусть в банаховом пространстве $[X]=[X \to X]$ линейных ограниченных операторов задано нелиней-

ное операторное обыкновенное дифференциальное уравнение на бесконечном промежутке

$$\frac{dx}{d\lambda} = x(I - Ax)\ (= (I - xA)\,x),\quad x(0) = x_0, \qquad (2)$$

где A, x_0, $I \in [X]$ (A, x_0 — заданные, I — тождественный оператор), $x(\lambda)$ — абстрактная функция со значениями из $[X]$ (X — пространство типа B). К решению уравнения (2) приводится прямым методом вариации параметра задача построения обратного оператора A^{-1} для обратимого оператора A, решение линейного операторного уравнения вида $I - Ax = 0$ и др. задачи. Если спектр оператора Ax_0 (x_0A) расположен в правой полуплоскости, то задача (2) имеет единственное решение $x(\lambda)$, $x(0) = x_0$, $\forall \lambda \in [0, \infty)$.

Аналитич. применение к задаче Коши (2) методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений приводит к целому классу прямых методов вариации параметра решения операторного уравнения (2), а следовательно, и решения тех задач, к-рые сводятся к задаче (2). Напр., метод Эйлера с неравномерным шагом h_k приводит к следующему методу построения оператора A^{-1}:

$$x_{k+1} = x_k + h_k x_k (I - Ax_k)\ (+h_k (I - x_kA)\,x_k),$$
$$k = 0, 1, 2 \ldots \qquad (3)$$

Шаги h_k в формуле (3) выбирают различными способами. Когда спектр оператора $I - Ax_0$ ($I - x_0A$) расположен на действительной оси в интервале $[-\rho_0, 0]$, $0 < \rho_0 < \infty$, весьма эффективным является следующий способ выбора шагов h_k:

$$h_k = 1/(1 + \rho_k),\ \rho_{k+1} = \rho_k L_k,\ 4L_k = \rho_k/(1 + \rho_k),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,\ h_{k+1} = 4h_k/(1 + h_k)^2. \qquad (4)$$

При этом быстрота сходимости метода (3) имеет порядок выше, чем 2^k, норма невязки убывает по закону $\rho_{k+1} = \rho_k^2/4\,(1 + \rho_k)$. Случай интервала $[0, \bar{\rho}_0]$, $0 < \bar{\rho}_0 < 1$, выгодно сводится к рассмотренному одним шагом метода (3) при

$$h = 1/(1 - \bar{\rho}_0),\ \rho_0 = \bar{\rho}_0^2/4\,(1 - \bar{\rho}_0).$$

Относительно сходимости метода (3), (4) для конкретных операторных уравнений можно высказать на основании общих фактов те или иные результаты в зависимости от того, какое пространство берется за основу.

К решению задачи (2) сводятся также задача построения проекторов вида

$$P(Ax_0)\ (P(x_0A)),\ P(K) = e^{-K\lambda}\big|_{\lambda=\infty},\ K \in [X],$$

[случай, когда спектр оператора $I - Ax_0$ ($I - x_0A$) расположен в интервале $[-\rho_0, 1]$] и задача построения псевдообратных операторов x^+ (^+x) для оператора A таких, что

$$I - Ax^+ = P(Ax_0),\quad I - {}^+xA = P(x_0A),\quad x^+ = {}^+x.$$

Для непосредственного построения проекторов $P(Ax_0)$ ($P(x_0A)$) метод (3), (4) можно переписать в виде

$$P_{k+1} = P_k + h_k P_k (P_k - I),\quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$P_0 = I - Ax_0\ (P_0 = I - x_0A).$$

В зависимости от расположения спектра и свойств оператора A в качестве x_0 выбирают, напр., операторы I, A, A^* или др.

К абстрактному линейному функциональному обыкновенному дифференциальному уравнению ($0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$)

$$\frac{dy}{d\lambda} = x_0(b - Ay),\ y(0) = y_0, \qquad (5)$$

где b, $y_0 \in X$, x_0, $A \in [X]$, $y(\lambda)$ — абстрактная функция со значениями в X, сводится прямым методом вариации параметра задача непосредственного построения псевдорешений y^+ линейных Ф. у. вида

$$b - Ay^+ = P(Ax_0)(b - Ay_0) \qquad (6)$$

или Ф. у. $b - Ay^+ = 0$, если $P(Ax_0)(b - Ay_0) = 0$. К задаче (5) сводятся также и др. задачи, в том числе задачи для дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными, интегральные уравнения и др. Формула

$$y(\lambda) = e^{-x_0A\lambda}y_0 + r(\lambda)\,x_0b,\ r(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-x_0A(\lambda - s)}\,ds,$$

дает единственное решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $y(0) = y_0$.

Применение к задаче (5), напр., метода Эйлера с шагом h_{k+1} вперед приводит к следующему методу построения псевдорешений y^+ Ф. у. (6):

$$y_{k+1} = y_k + h_{k+1}x_0(b - Ay_k),\quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

Шаги h_{k+1} выбирают, напр., через корни многочленов Чебышева $T_N(t)$:

$$h_j = 2[M + m - (M - m)\,t_j]^{-1},$$
$$t_j = \cos[(2\varkappa_j - 1)\,\pi/2N],\quad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad (8)$$

когда x_0A — самосопряженный оператор с ненулевой частью спектра на отрезке $[m, M]$, $0 < m \leqslant M$, $P_N = (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_N)$ — нек-рое упорядочение чисел $1, 2, \ldots, N$ для устойчивости счета, N — порядок требуемого многочлена. Метод (7), (8) дает оптимальную оценку сходимости только на N-м шаге. При $N = 2^l$ (или $\approx 2^l$) весьма эффективным является выбор шагов в (7) последовательно через корни многочленов Чебышева

$$T_2(t) - T_0(t),\ T_1(t),\ T_1(t),\ T_2(t),\ T_2(t), \ldots$$
$$\ldots,\ T_{2^{l-2}}(t),\ T_{2^{l-2}}(t)$$

вместо многочлена $T_N(t)$, что существенно упрощает задачу упорядочения шагов h_j и повышает эффективность счета, особенно при больших N. В этом случае погрешность оптимально уменьшается после употребления всех упорядоченных корней каждого многочлена, что важно для упрощения контроля счета. В случае, если $P(Ax_0)(b - Ay_0) = 0$, то $P(x_0A) \times (y^+ - y_0) = 0$; при этом, если $P(x_0A)$ — ортопроектор, то $y^+ - y_0$ является нормальным решением Ф. у. $A(y^+ - y_0) = b - Ay_0$. С другой стороны, из (7) вытекает

$$b - Ay_{k+1} = U_{k+1}(b - Ay_0),\ U_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1}(I - h_iAx_0),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом, если $P(Ax_0)$ — проектор, то

$$\|U_k - P(Ax_0)\| \leqslant 2q^k/(1 + q^{2k}) \longrightarrow 0$$

при $k \longrightarrow \infty$ ($q = (\sqrt{M} - \sqrt{m})/(\sqrt{M} + \sqrt{m})$).

Существуют также прямые методы вариации параметра типа метода Эйлера, использующие рекуррентные соотношения для многочленов Чебышева и близких к ним (без явного использования корней этих многочленов), с убыванием погрешности на каждом шаге. Эти методы являются многошаговыми и обладают повышенной быстротой сходимости. Применение к задаче (5) метода Эйлера с шагом h_{k+1} назад дает следующий эффективный класс методов

$$y_{k+1} = y_k + h_{k+1}(I + h_{k+1}x_0A)^{-1}\,x_0(b - Ay_0),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$b - Ay_{k+1} = W_{k+1}(b - Ay_0),$$

$$W_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1}(I + h_iAx_0)^{-1},\quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом, если $P(Ax_0)$ — проектор и $h_i>0$ такие, что для любого i

$$\|(I-P(Ax_0))(I+h_iAx_0)^{-1}\|\leqslant\rho_i<1,$$

то

$$\|W_k-P(Ax_0)\|\leqslant\prod_{i=1}^{k}\rho_i\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

Существуют аналогичные методы и для решения нелинейных Ф. у. и операторных уравнений, а также методы с повышенной степенью точности типа методов Рунге — Кутта s-го порядка точности и др. типов.

Решения Ф. у. в узком смысле этого слова и систем таких уравнений могут быть как конкретными функциями, так и классами функций, зависящих от произвольных параметров или произвольных функций. В теории Ф. у. известно мало общих методов решения таких уравнений. Поэтому в каждом частном случае необходимо, как правило, исследовать степень общности полученного решения.

Одним из более или менее общих методов решения Ф. у. является метод сведения их к решению уравнений в конечных разностях. Пусть, напр., имеется Ф. у. n-го порядка и 1-го класса вида

$$F(x,\ \varphi(x),\ \varphi^2(x),\ \ldots,\ \varphi^n(x))=0, \tag{9}$$

где функция F задана, функция $\varphi(x)$ — искомая;

$$\varphi^0(x)=x,\ \varphi^1(x)=\varphi(x),\ \varphi^2(x)=\varphi(\varphi(x)),\ \ldots$$

При этом полагают $x=u_z$, $\varphi(x)=u_{z+1}$. Здесь переход от x к $\varphi(x)$ заменяется введением нового переменного z и изменением z на 1 в функции u_z. После такой замены уравнение (9) принимает вид

$$F(u_z,\ u_{z+1},\ \ldots,\ u_{z+n})=0. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) в конечных разностях n-го порядка дает выражение для u_z через z и n произвольных периодич. функций C_i от z с периодом, равным единице. Решение Ф. у. (9) в самом общем виде представляется системой двух совместных уравнений

$$\left.\begin{aligned}u_z=x&=f(z,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),\\ u_{z+1}=\varphi(x)&=f(z+1,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Выбирая в качестве C_i их частные значения, можно из (11) исключить z и получить таким образом частное решение уравнения (9). Напр., для Ф. у. 2-го порядка

$$\varphi[\varphi(x)]+a\varphi(x)+bx=0 \tag{12}$$

общее решение (11) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}u_z=x&=C_1\ \lambda_1^z+C_2\lambda_2^z,\\ u_{z+1}=\varphi(x)&=C_1\lambda_1^{z+1}+C_2\lambda_2^{z+1},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения $\lambda^2+a\lambda+b=0$, C_1 и C_2 — произвольные постоянные периодич. функции с периодом, равным единице. Если для C_1 и C_2 дать значение произвольных постоянных и исключить z из (13), то получается полное решение Ф. у. (12):

$$\frac{x\lambda_2-\varphi(x)}{\lambda_2-\lambda_1}=C_1\left[\frac{x\lambda_1-\varphi(x)}{C_2(\lambda_1-\lambda_2)}\right]^{\gamma},\quad\gamma=\ln\lambda_1/\ln\lambda_2.$$

Метод сведения к уравнениям в конечных разностях применяется также и при решении прямых задач функционального исчисления. Пусть, напр., задана функция $\varphi(x)=a+bx$ и пусть требуется построить выражение $\varphi^n(x)$ ($\varphi^i(x)=\varphi(\varphi^{i-1}(x))$). При этом полагают $\varphi^n(x)=u_n$ и записывают уравнение в конечных разностях $u_{n+1}=a+bu_n$, решением к-рого является $u_n=Cb^n+a/(1-b)$. Отсюда при $n=0$ получают $u_0=x=C+a/(1-b)$, т. е. $C=x-a/(1-b)$. Таким образом,

$$\varphi^n(x)=\alpha_n+\beta_nx,\ \alpha_n=a(b^n-1)/(b-1),\ \beta_n=b^n.$$

Здесь же при желании можно записать и Ф. у. вида $\varphi^n(x)=\beta_{n-1}\varphi(x)+\alpha_{n-1}$, решением к-рого при любом n является $\varphi(x)$ и др. Решая это Ф. у. тем же методом, можно построить и др. значения $\varphi(x)$. В частности, для нечетных n получается еще одно действительное решение $\varphi(x)=-bx+a(1+b)/(1-b)$.

Для решения Ф. у. применяется также метод подстановок. Пусть, напр., имеется Ф. у.

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y. \tag{14}$$

Применяя последовательно подстановки

$$x=0,\ y=t;\ x=\frac{\pi}{2}+t,\ y=\frac{\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{2}+t,$$

из (14) получают соответственно уравнения

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t,\quad f(\pi+t)+f(t)=0$$

и

$$f(\pi+t)+f(-t)=2b\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-2b\sin t,$$

где обозначено $f(0)=a$, $f(\pi/2)=b$. Отсюда путем вычитания из суммы первых двух уравнений третьего уравнения получают $2f(t)=2a\cos t+2b\sin t$. Общим решением исходного Ф. у. (14) является функция $f(x)=a\cos x+b\sin x$. Этот метод применим также и к др. уравнениям типа

$$H[f(x+y),\ f(x-y),\ f(x),\ x,\ y]=0$$

при нек-рых предположениях относительно функции H. К уравнениям других типов применяются различные другие подстановки.

Метод подстановок применяется и для сведения одних Ф. у. к другим уравнениям того же типа, в частности к Ф. у. с известными решениями. Напр., Ф. у.

$$f((x+y)/2)=f(x)/2+f(y)/2 \tag{15}$$

может быть приведено к Ф. у. Коши

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{16}$$

с непрерывным решением $f(x)=Cx$. С этой целью подставляют в (15) $x+y$ вместо x и 0 вместо y:

$$f((x+y)/2)=f(x+y)/2+a/2,\ a=f(0).$$

Сравнивая это с исходным Ф. у. (15), получают Ф. у. вида $f(x+y)=f(x)+f(y)-a$, откуда $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x)=f(x)-a$ и $\varphi(x)=Cx$. Решением является функция $f(x)=Cx+a$.

Для сведения к другим Ф. у. того же типа применяют также логарифмирование и др. приемы. Напр., решение Ф. у.

$$f(x+y)=f(x)\,f(y) \tag{17}$$

путем логарифмирования можно свести к решению Ф. у. (16). Непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая Ф. у. (17), всегда строго положительна, а функция $\varphi(x)=\ln f(x)$ — непрерывна (как результат суперпозиции непрерывных функций) и удовлетворяет условию $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x)=Cx$. Решением является функция $f(x)=e^{Cx}=a^x$.

Во многих случаях для решения Ф. у. применяется также метод сведения их к дифференциальным уравнениям. Напр., Ф. у. (14) можно свести к уравнению вида $f''(x)=-f(x)$. К этому уравнению сводятся и другие Ф. у. Этот метод дает лишь решения, принадлежащие классу дифференцируемых функций. Решение, напр., Ф. у. Коши (16) при условии дифференцируемости функции $f(x)$ можно найти следующим образом. Дифференцируя (16) по x, получают $f'(x+y)=f'(x)$, и так как y здесь произвольное, то $f'(x)=C$. Тогда интегрирование дает $f(x)=Cx+C_1$, где C_1 — новая постоянная. Подставляя найденное выражение для $f(x)$ снова в Ф. у. (16), устанавливают, что при всех

значениях x и y должно быть $C_1=0$. Решением является функция $f(x)=Cx$.

Для решения Ф. у. в ряде случаев применяют также и метод итераций.

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1949, т. 28, с. 104—44; [2] Красносельский М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [5] Давиденко Д. Ф., в кн.: Приближенные методы решения операторных уравнений и их приложения, Иркутск, 1982, с. 71—83; [6] Мертвецова М. А. «Докл. АН СССР», 1953, т. 88, № 4, с. 611—14; [7] Нечепуренко М. И., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 2, с. 163—70; [8] Тамме Э. Э., «Докл. АН СССР», 1955, т. 103, № 5, с. 769—72; [9] Мысовских И. П., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1953, № 11, с. 25—48; [10] Давиденко Д. Ф., в кн.: Совещание по программированию и матем. методам решения физических задач, Дубна, 1974, с. 542—48; [11] Бельтюков Б. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 5, с. 927—31; [12] Ваарманн О., «Изв. АН Эст. ССР», 1971, т. 20, № 4, с. 386—93; [13] Давиденко Д. Ф., в кн.: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики, М., 1981, с. 61—63; [14] Ливенцов А. И., «Матем. сб.», 1876, т. 8, в. 1, с. 80—160; [15] Синцов Д. М., «Изв. физ.-матем. об-ва Казанск. ун-та», 1903, сер. 2, т. 13, № 2, с. 46—72.

Д. Ф. Давиденко.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — часть современного математического анализа, основной целью к-рой является изучение функций $y=f(x)$, где, по крайней мере, одна из переменных x, y меняется по бесконечномерному пространству. В самых общих чертах такое изучение распадается на три части: 1) введение и изучение бесконечномерных пространств как таковых; 2) изучение простейших функций, а именно, когда x бесконечномерно, а y одномерно (такие функции носят название *функционалов*, откуда и произошло название «Ф. а.»); 3) изучение общих функций указанного типа — *операторов*. Наиболее полно изучены линейные функции $X\ni x\mapsto f(x)=y\in Y$ — линейные операторы. Их теория является по существу обобщением *линейной алгебры* на бесконечномерный случай. Для методов Ф. а. характерно объединение подходов классич. анализа и алгебры, что приводит к установлению связей между на первый взгляд весьма отдаленными разделами математики.

Ф. а. как самостоятельная математич. дисциплина начал складываться на рубеже 19 и 20 вв. и окончательно оформился в 20—30 гг. этого столетия, с одной стороны, под влиянием изучения конкретных классов линейных операторов — интегральных операторов и связанных с ними интегральных уравнений, а с другой — под влиянием чисто внутреннего развития современной математики с ее желанием обобщить и тем самым осознать истинную природу тех или иных закономерностей. Огромное влияние на развитие Ф. а. имела также квантовая механика, так как ее основные понятия, например энергия, оказались линейными операторами в бесконечномерных пространствах (к-рые физики вначале не вполне строго интерпретировали как бесконечномерные матрицы).

1. Понятие пространства. Наиболее общими пространствами, фигурирующими в Ф. а., являются *топологические векторные пространства*. Так называется векторное (линейное) пространство X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}^1$ (или каким-либо другим полем, напр. действительных чисел $\mathbb{R}^1$), к-рое одновременно является и топологич. пространством, причем линейная структура и топология согласованы в том смысле, что линейные операции непрерывны в рассматриваемой топологии. В частности, если X — метрич. пространство, то возникает метрическое векторное пространство.

Более частная, однако очень важная, ситуация возникает, когда в векторном пространстве X аксиоматически вводится понятие нормы $\|x\|$ (длины) векторов $x\in X$. Векторное пространство с нормой наз. нормированным пространством. Оно метризуемо. Метрика ρ в нем вводится формулой: $\rho(x, y)=\|x-y\|$. Векторное пространство с нормой называется *банаховым пространством*, если оно полно относительно указанной метрики.

В огромном количестве задач возникает ситуация, когда в векторном пространстве X можно ввести *скалярное произведение* (x, y) для любых двух его векторов, обобщающее обычное скалярное произведение в трехмерном пространстве. Пространство, наделенное скалярным произведением, наз. предгильбертовым, оно является частным случаем нормированного пространства. Если это пространство полное, то оно называется гильбертовым пространством.

В Ф. а. изучаются бесконечномерные пространства, т. е. такие пространства, в к-рых существует бесконечное множество линейно независимых векторов.

С геометрич. точки зрения наиболее простыми являются гильбертовы пространства $X=H$, свойства к-рых больше всего напоминают свойства конечномерных пространств благодаря возможности ввести через скалярное произведение понятие, аналогичное углу между двумя векторами. В частности, два вектора $x, y\in H$ наз. ортогональными ($x\perp y$), если $(x, y)=0$. В H справедлив следующий результат: пусть G — подпространство H. Тогда для любого вектора $x\in H$ существует его проекция x_G на G, т. е. такой вектор $x_G\in G$, что $x-X_G$ ортогонально любому вектору из G. Благодаря этому факту большое число геометрич. конструкций, имеющих место для конечномерных пространств, переносится на гильбертовы пространства, где они часто приобретают аналитич. характер.

Геометрич. вопросы резко усложняются при переходе от гильбертовых пространств к банаховым и тем более к общим топологическим векторным пространствам в связи с невозможностью ортогонального проектирования в них. Напр., в пространстве $l_p(p\geqslant 1)$ векторы $e_n=(0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$ образуют базис в том смысле, что для каждого вектора $x\in l_p$ справедливо «покоординатное» разложение:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Построение базиса в пространстве $C[a, b]$ уже намного сложнее; вместе с тем базисы удавалось строить в каждом из известных примеров банаховых пространств. Возникла проблема: возможно, базис существует в каждом банаховом пространстве? Эта проблема, несмотря на усилия многих математиков, не поддавалась решению более 40 лет и лишь в 1972 была решена отрицательно (см. [23]). В Ф. а. важное место занимает «геометрическая» тематика, посвященная выяснению свойств различных множеств в банаховом и других пространствах, напр. выпуклых, компактных (последнее означает, что из всякой последовательности точек такого множества Q можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке из Q) и т. п. Здесь часто просто формулируемые вопросы имеют весьма нетривиальные решения. Эта проблематика тесно связана с изучением изоморфизма пространств, с нахождением универсальных представителей в том или ином классе пространств.

Детально изучены конкретные функциональные пространства, т. к. свойства этих пространств обычно определяют характер решения задачи, получаемого методами Ф. а. Примером могут служить т. н. вложения теоремы для Соболева пространств $W_p^l(G)$, $G\subseteq\mathbb{R}^n$ и различные их обобщения.

В связи с запросами современной математич. физики возникло большое количество конкретных пространств, в к-рых естественно ставятся задачи и изучение к-рых весьма существенно.

Эти пространства обычно строятся из исходных при помощи нек-рых конструкций. Вот наиболее употребительные из этих конструкций в простейших вариантах.

1) Образование ортогональной суммы $H=\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ гильбертовых пространств H_n, $n=1, 2,\ldots,$ — конструкция пространства H по пространствам H_n, подобная образованию H по одномерным пространствам.

2) Переход к факторпространству: в векторном пространстве X задается вырожденное скалярное произведение (x, y) (т. е. для $x\neq 0$ возможно равенство $(x, x)=0$); гильбертово пространство H образуется пополнением X относительно $(\cdot, \cdot)$, после предварительного отождествления с 0 тех векторов, для к-рых $(x, x)=0$.

3) Образование тензорного произведения $\bigotimes_{j=1}^{n} H_j$ — аналогичное переходу от функции одной переменной $f(x_1)$ к функциям многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; сходная конструкция применяется и для бесконечного числа сомножителей; рассматриваются также симметричные или антисимметричные тензорные произведения, состоящие в случае функций из функций многих переменных, обладающих этими свойствами.

4) Образование проективного предела X банаховых пространств X_α, где α пробегает нек-рое множество индексов A: по определению, $X=\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha$; топология в X, грубо говоря, задается сходимостью $x_n\longrightarrow x$, к-рая означает, что $\|x_n-x\|\longrightarrow 0$ по норме каждого X_α.

5) Образование индуктивного предела X банаховых пространств X_α: по определению, $X=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, топология в X, грубо говоря, задается сходимостью $x_n\longrightarrow x$, к-рая означает, что все x_n лежат в нек-ром X_α и по норме этого пространства $\|x_n-x\|\longrightarrow 0$.

6) Интерполяция — образование по двум пространствам X_1 и X_2 «промежуточных» X_α, где $\alpha\in(1, 2)$, напр. построение по $W_p^1(G)$ и $W_p^2(G)$ пространств $W_p^\alpha(G)$ с дробной производной $\alpha\in(1, 2)$.

Процедуры 4), 5) обычно применяются при построении топологических векторных пространств. Среди таких пространств отметим весьма важный класс т. н. *ядерных пространств*, каждое из к-рых строится как проективный предел гильбертовых пространств H_α, обладающих тем свойством, что для каждого $\alpha\in A$ найдется $\beta\in A$ такое, что $H_\beta\subseteq H_\alpha$ и оператор вложения $H_\beta\ni x\longrightarrow x\in H_\alpha$ — оператор Гильберта — Шмидта (см. ниже п. 3).

Разработан большой и важный раздел Ф. а., в к-ром изучаются топологические и нормированные векторные пространства с введенной аксиоматически структурой полуупорядоченности, обладающей естественными свойствами (полуупорядоченные пространства).

2. Функционалы. В Ф. а. существенную роль играет изучение *непрерывных функционалов* и *линейных функционалов*; их свойства тесно связаны со свойствами исходного пространства X.

Пусть X — банахово пространство, X' — совокупность линейных непрерывных функционалов на нем; X' — векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения их на число, оно становится банаховым, если ввести норму

$$\|l\|=\sup_{x\in X}\frac{|l(x)|}{\|x\|}.$$

Пространство X' носит название сопряженного к X.

Если X конечномерно, то всякий линейный функционал имеет вид

$$l(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j\bar{a}_j,$$

где x_j — координаты вектора x при разложении по некоторому базису, а a_j — числа, определяемые функционалом. Оказывается, что такая же формула имеет место и в случае, когда $X=H$ — гильбертово (теорема Рисса), именно, в этом случае $l(x)=(x, a)$, где a — нек-рый вектор из H. Эта формула показывает, что в случае гильбертова пространства сопряженное к нему по существу с ним совпадает.

В случае банахова пространства ситуация гораздо сложнее: можно строить $X''=(X')'$, $X'''=(X'')'$, ... и эти пространства могут оказаться все различными. Вместе с тем всегда существует канонич. вложение X в X'', а именно, каждому $x\in X$ можно сопоставить функционал L_x, полагая $L_x(l)=l(x)$, $l\in X'$. Пространства, для к-рых $X''=X$, наз. рефлексивными. Вообще, в случае банахова пространства непростым является даже вопрос о существовании нетривиальных (т. е. отличных от 0) линейных функционалов. Этот вопрос легко решается в положительном смысле с помощью *Хана — Банаха теоремы*.

Сопряженное пространство X' в известном смысле «лучше» исходного X. Так, напр., в X' можно ввести, наряду с нормой, другую (слабую) топологию, к-рая в терминах сходимости означает, что $l_n\longrightarrow l$, если $l_n(x)\longrightarrow l(x)$ для каждого $x\in X$. В этой топологии шар из X' будет компактным (чего никогда не будет для бесконечномерных пространств относительно топологии, порождаемой нормой). Это обстоятельство дает возможность более детально изучить ряд геометрич. вопросов для множеств из сопряженного пространства (например, установить структуру выпуклых множеств и т. п.).

Для ряда конкретных пространств X сопряженные пространства X' могут быть найдены. Однако для большинства банаховых и в особенности топологических векторных пространств функционалы являются элементами новой природы, не выражающимися просто средствами классич. анализа. Элементы сопряженного пространства носят название обобщенных функций.

Для многих вопросов Ф. а. и его приложений существенную роль играют тройки пространств $\Phi'\supseteq H\supseteq\Phi$, где H — исходное гильбертово пространство, Φ — топологическое векторное пространство (в частности, гильбертово с другим скалярным произведением), а Φ' — сопряженное ему пространство, элементы к-рого можно понимать как обобщенные функции. Само пространство H носит тогда название оснащенного гильбертова пространства.

Изучение линейных функционалов на X во многом способствует более глубокому пониманию природы исходного пространства X. С другой стороны, в большом количестве задач возникает необходимость изучать общие функции $X\ni x\to f(x)\in C'$, т. е. *нелинейные функционалы*, в случае бесконечномерного X. Так как шар в таком пространстве X некомпактен, то их изучение часто связано с существенными трудностями, хотя, напр., такие понятия, как дифференцируемость $f(x)$, ее аналитичность и т. п. легко обобщаются. Можно рассматривать совокупность функций $X\ni x\mapsto f(x)\in\mathbb{C}^1$, обладающих определенными свойствами, как новое топологическое векторное пространство функций «бесконечного числа переменных». Такие функции также появляются при конструировании бесконечных тензорных произведений $\bigotimes_{n=1}^{\infty} H_n$ пространств функций

от одной переменной. Изучение подобных пространств, операторов в них и т. п. связано с потребностями квантовой теории поля (см. [22]).

3. Операторы. Главными объектами изучения в Ф. а. являются операторы $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$, где X, Y — топологические векторные (большей частью нормированные или гильбертовы) пространства, прежде всего *линейные операторы*.

В случае конечномерных X и Y из линейности оператора следует, что он имеет вид

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, \ldots, M,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координаты вектора X в нек-ром базисе, $(Ax)_1, \ldots, (Ax)_M$ — аналогичные координаты вектора $y = Ax$. Таким образом, в конечномерном случае каждому линейному оператору A в фиксированных базисах в X и в Y соответствует матрица

$$\| a_{jk} \|_{j,\,k=1}^{M,\,N},$$

через к-рую A выражается просто. Изучение линейных операторов в этом случае является предметом линейной алгебры.

Положение резко усложняется при переходе к бесконечномерным (даже гильбертовым) X и Y. Здесь прежде всего возникают два класса операторов: непрерывные, для к-рых функция $X \ni x \mapsto Ax \in Y$ непрерывна (их также называют ограниченными, так как непрерывность оператора в случае банаховых пространств эквивалентна ограниченности его), и неограниченные, где такой непрерывности нет. Операторы первого типа более простые, однако второй тип чаще встречается, так, дифференциальные операторы именно второго типа.

Наиболее изучен важный, в частности для квантовой механики, класс *самосопряженных операторов* в гильбертовом пространстве H.

С самосопряженными операторами тесно связаны другие классы операторов в H (т. н. *унитарные операторы*, *нормальные операторы*), к-рые также хорошо изучены.

Из общих фактов, касающихся ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X, можно выделить построение операционного исчисления аналитич. функций от них. Именно, р е з о л ь в е н т о й о п е р а т о р а A наз. оператор $R_z = (A - zI)^{-1}$, где I — единичный оператор, а $z \in \mathbb{C}^1$. Точки z, для к-рых обратный оператор $(A - zI)^{-1}$ существует, наз. р е г у л я р н ы м и т о ч к а м и оператора A, дополнение к множеству регулярных точек наз. с п е к т р о м $s(A)$ оператора A. Спектр всегда не пуст и содержится в круге $|z| \leqslant \|A\|$; собственные значения оператора A, разумеется, входят в $s(A)$, но спектр, вообще говоря, ими не исчерпывается. Если $f(z)$ — аналитич. функция, определенная в окрестности $s(A)$, а Γ — нек-рый замкнутый контур, охватывающий $s(A)$ и входящий в область аналитичности $f(z)$, то полагают

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) R_z \, dz$$

и наз. $f(A)$ ф у н к ц и е й о т о п е р а т о р а. Если $f(z)$ — многочлен, то $f(A)$ получается простой заменой z в этом многочлене на A. Соответствие $f(z) \mapsto f(A)$ обладает важным свойством гомоморфизма:

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \quad (fg)(A) = f(A)\, g(A).$$

Таким образом, при определенных условиях на A можно определить, например, e^A, $\sin A$, $\sqrt{A}$ и т. п.

Среди специальных классов операторов, действующих в банаховом пространстве X, наиболее важную роль играют т. н. *вполне непрерывные операторы* или *компактные операторы*. Если A компактен, то уравнение вида $x - Ax = y$ ($y \in X$ — заданный, $x \in X$ — искомый векторы) хорошо изучено. Для него справедливы аналоги всех фактов, имеющих место для линейных уравнений в конечномерном пространстве (т. н. т е о р и я Ф р е д г о л ь м а). Для компактных операторов A исследованы условия, обеспечивающие полноту в X системы собственных и присоединенных векторов A, т. е. возможность приближения любого вектора из X линейными комбинациями собственных и присоединенных векторов, и т. п. Вместе с тем даже для компактных операторов возникают естественно формулируемые вопросы, с трудом поддающиеся доказательству (напр., теорема о том, что у всякого такого оператора существует отличное от 0 и всего X инвариантное подпространство G, т. е. такое G, что $AG \subseteq G$; в конечномерном случае существование G тривиально следует из непустоты спектра).

Спектр компактного A дискретен и может сгущаться лишь к 0. В соответствии со скоростью его приближения к 0 выделяются важные подклассы класса компактных операторов. Так, весьма часто встречаются Гильберта — Шмидта операторы. Если A — оператор в $H = L_2(G)$, то он — оператор Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда он интегральный и его ядро $K(t, s)$ суммируемо с квадратом по двум переменным. Подробно изучены также компактные Вольтерра операторы. Изучались также спектральные операторы, для к-рых имеется аналог разложения единицы $E(\lambda)$ и т. п. (см. [8]).

4. Банаховы алгебры и теория представлений. На ранних этапах развития Ф. а. изучались задачи, для постановки и решения к-рых необходимы были лишь линейные операции над элементами пространства.

Одним из мощных приемов в математике является представление абстрактных математич. объектов более простыми. Так, напр., спектральную теорему можно интерпретировать как представление самосопряженного оператора в виде оператора умножения измеримых функций нек-рого класса на независимую переменную. Если рассмотреть умножение функций того же класса на борелевские функции, то получают представление коммутативного нормального кольца операторов в гильбертовом пространстве. Более общий пример представления доставляет нам одна из главных теорем теории коммутативных банаховых алгебр.

Пусть A — коммутативная банахова алгебра, для простоты с единицей, т. е. банахово пространство, в к-ром определена коммутативная и ассоциативная операция умножения элементов $x \cdot y$, x, $y \in A$, и пусть норма удовлетворяет условию $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Пусть, далее $\mathfrak{M}$ — множество всех максимальных идеалов. Тогда в $\mathfrak{M}$ можно так ввести локально компактную топологию, что каждый элемент $x \in A$ отобразится в комплекснозначную непрерывную функцию $x(m)$, $m \in \mathfrak{M}$, причем сумме $x + y$ и произведению $x \cdot y$ соответствует сумма $x(m) + y(m)$ и произведение $x(m) \cdot y(m)$ соответствующих функций (см. [7]). В некоммутативном случае теория представлений наиболее полно изучена для т. н. алгебр с инволюцией (см. *Банахова алгебра*).

Значительно полнее теория представлений развита для топологич. групп.

5. Нелинейный Ф. а. Одновременно с развитием и углублением понятия пространства шло развитие и обобщение понятия функции. В конечном счете пришли к необходимости рассматривать отображения (не обязательно линейные) одного пространства в другое. Одной из центральных задач нелинейного Ф. а. является изучение таких отображений. Как и в линейном случае, отображение пространства в числа (действительные или комплексные) наз. функционалом. Для нели-

нейных отображений (в частности, нелинейных функционалов) можно различными способами определить понятие дифференциала, производной по направлению и т. д., аналогичные соответствующим понятиям классического математического анализа (см. [11], [13], [15]).

Важной задачей нелинейного Ф. а. является задача отыскания неподвижных точек отображения (см. [11], [13], [15]).

При изучении собственных векторов нелинейного отображения, содержащего параметр, возникает существенное для нелинейного анализа явление — т. н. ветвления точки (см. [15]).

При исследовании неподвижных точек и точек ветвления широко используются топологич. методы: обобщения на бесконечномерные пространства теоремы Брауэра — Боля о существовании неподвижных точек отображений конечномерных пространств, индексы отображений и т. п.

6. Применение Ф. а. в математической и теоретической физике. Ниже указано, в каких разделах математич. физики применяются те или иные главы Ф. а.

1) Спектральная теория операторов — во всех теориях квантовой физики: в квантовой теории n тел, квантовой теории поля, квантовой статистич. физике. Кроме этого, спектральная теория применяется при изучении моделей динамич. систем в классич. механике, при изучении линеаризованных уравнений гидродинамики, при исследовании гиббсовских полей и т. д.

2) Теория рассеяния — в квантовой физике. Следует отметить, что современная математич. теория рассеяния первоначально возникла в физике. В последнее время теория рассеяния (обратная задача) получила много применений при интегрировании модельных нелинейных уравнений математической физики.

3) Банаховы алгебры — в квантовой теории поля, особенно т. н. аксиоматич. теории поля, при изучении различных интегрируемых моделей квантового поля и статистич. физики. В этих вопросах используются также алгебры Неймана.

4) Теория возмущений, главным образом теория возмущений линейных операторов,— почти во всех областях математич. физики: в квантовой теории поля, статистич. физике, равновесной и неравновесной (особенно при исследовании т. н. кинетич. уравнений, сложных спектров многочастичных систем и т. д.).

5) Функциональное интегрирование и меры в функциональных пространствах — в конструктивной квантовой теории поля и в квантовой статистич. физике.

6) Различные интегральные представления (теорема Рисса, теорема Крейна — Мильмана, теорема Шоке и др.) — в аксиоматич. квантовой теории поля, в статистич. физике.

7) Векторные пространства (главным образом гильбертовы) — в квантовой теории, в статистич. физике.

8) Обобщенные функции — везде в математич. физике, как важный аналитич. аппарат.

Лит. [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966, [2] Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948; [3] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965, [4] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [5] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961; [6] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958, [7] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960; [8] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; их же, Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, пер. с англ., М., 1966; их же, Линейные операторы. Спектральные операторы, пер. с англ., М., 1974; [9] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [10] Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 6, с 89—185; [11] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959; [12] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [13] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [14] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [15] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965, [16] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [17] его же, Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968, [18] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [19] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [20] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [21] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [22] Шварц А. С., Математические основы квантовой теории поля, М., 1975; [23] Энфло П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—55.

Ю. М. Березанский, Б. М. Левитан.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ — определитель, элементами к-рого являются функции. Ф. о. определенных видов играют важную роль в математич. анализе. Прежде всего это относится к *якобианам* и *вронскианам*. Понятие якобиана существенно используется при изучении дифференцируемых отображений областей евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, при замене переменного в кратных интегралах, при выяснении условий, когда система уравнений определяет неявную функцию или когда система заданных функций зависима, и т. п. Понятие вронскиана широко применяется в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Л. Д. Кудрявцев.

ФУНКЦИЯ — одно из основных понятий математики. Пусть заданы два множества X и Y и каждому элементу $x\in X$ поставлен в соответствие элемент $y\in Y$, к-рый обозначен через $f(x)$. В этом случае говорят, что на множестве X задана функция f (а также — что переменная y есть функция переменной x, или что y зависит от x) и пишут $f: X \to Y$.

В античной математике идея функциональной зависимости не была явно выражена и не являлась самостоятельным объектом исследования, хотя и был известен широкий круг конкретных систематически изучавшихся функциональных соответствий. В зачаточной форме понятие Ф. появляется в трудах ученых в средние века, но лишь в работах математиков 17 в., и прежде всего у П. Ферма (P. Fermat), Р. Декарта (R. Descartes), И. Ньютона (I. Newton) и Г. Лейбница (G. Leibniz), это понятие стало оформляться как самостоятельное. Термин «Ф.» впервые появился у Г. Лейбница. Для задания Ф. использовались геометрич., аналитич. и кинематич. концепции, но постепенно стало превалировать представление о Ф. как о нек-ром аналитич. выражении. В четкой форме это было сформулированс в 18 в.; И. Бернулли (J. Bernoulli) принадлежит определение, что «функцией переменной величины... называется количество, составленное каким угодно способом из переменной величины и постоянных». Л. Эйлер (L. Euler), приняв это определение, написал в своем курсе анализа, что «весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций» [1]. У Л. Эйлера появился уже и более общий подход к понятию Ф. как зависимости одной переменной величины от другой. Эта точка зрения получила свое дальнейшее развитие в трудах Ж. Фурье (J. Fourier), Н. И. Лобачевского, П. Дирихле (P. Dirichlet), Б. Больцано (B. Bolzano), О. Коши (A. Cauchy), где стало выкристаллизовываться представление о Ф. как о соответствии между двумя число-

выми множествами. Так, в 1834 Н. И. Лобачевский [2] писал: «Общее понятие функции требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, к-рое подает средство испытывать все числа и выбрать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной». Определение Ф. как соответствия между двумя произвольными (не обязательно числовыми) множествами в 1887 было сформулировано Р. Дедекиндом (R. Dedekind) [3].

Понятие соответствия, а следовательно, и понятие Ф., иногда сводится к другим понятиям (множеству [4], отношению [5] или несколько другим теоретико-множественным и логико-математич. концепциям [6]), а иногда принимается за первичное, неопределимое понятие [7], поскольку, как это выразил, напр., А. Чёрч (A. Church): «В конечном счете понятие функции — или какое-либо сходное понятие, напр., понятие класса,— приходится считать первоначальным, или неопределимым» [8].

Ниже рассматривается понятие Ф., основанное на понятии множества и простейших операций над множествами.

Говорят, что число элементов множества A равно 1, или что множество A состоит из одного элемента, если в нем имеется элемент a и нет других (иначе говоря, если после вычитания из множества A множества $\{a\}$ получается пустое множество). Непустое множество A наз. множеством из двух элементов или парой: $A=\{a, b\}$, если после вычитания из него множества, состоящего только из одного элемента $a\in A$, останется множество, к-рое также состоит из одного элемента $b\in A$ (это определение не зависит от выбора указанного элемента $a\in A$).

Если задана пара $A=\{a, b\}$, то пара $\{a, \{a, b\}\}$ наз. упорядоченной парой элементов $a\in A$ и $b\in A$ и обозначается (a, b). Элемент $a\in A$ наз. ее первым элементом, а элемент $b\in A$ — вторым.

Если заданы множества X и Y, то множество всех упорядоченных пар (x, y), $x\in X$, $y\in Y$, наз. произведением множеств X и Y и обозначается через $X\times Y$. При этом не предполагается, что обязательно множество X отлично от множества Y, т. е. возможен случай, когда $X=Y$.

Всякое множество $f=\{(x, y)\}$ упорядоченных пар (x, y), $x\in X$, $y\in Y$, такое, что для любых пар $(x', y')\in f$ и $(x'', y'')\in f$ из условия $y'\neq y''$ следует, что $x'\neq x''$, наз. функцией, или, что то же самое, отображением.

Наряду с терминами «Ф.» и «отображение» употребляются равнозначные им в определенных ситуациях термины «преобразование», «морфизм», «соответствие».

Множество всех первых элементов упорядоченных пар (x, y) нек-рой функции f наз. *областью определения* (или множеством определения) этой функции и обозначается X_f, а множество всех вторых элементов *областью значений* (множеством значений) и обозначается Y_f. Само множество упорядоченных пар $f=\{(x, y)\}$, рассматриваемое как подмножество произведения $X\times Y$, наз. графиком функции f.

Элемент $x\in X_f$ наз. аргументом Ф. или независимой переменной, а элемент $y\in Y$ — зависимой переменной.

Если $f=\{(x, y)\}$ есть функция, то пишут $f: X_f\longrightarrow Y$ и говорят, что f отображает множество X_f в множество Y. В случае $X=X_f$ пишется просто $f: X\longrightarrow Y$.

Если $f: X\longrightarrow Y$ — Ф. и $(x, y)\in f$, то пишут $y=f(x)$ (иногда просто $y=fx$, или $y=xf$), а также $f: x\longmapsto y$, $x\in X$, $y\in Y$, и говорят, что Ф. f ставит в соответствие элементу x элемент y (отображение f отображает элемент x в элемент y) или, что тоже самое, элемент y соответствует элементу x. В этом случае говорят также, что элемент y является значением Ф. f в точке x, или образом элемента x при отображении f.

Наряду с символом $f(x_0)$ для обозначения значения Ф. f в точке x_0 употребляется также обозначение $f(x)|_{x=x_0}$.

Иногда сама функция f обозначается символом $f(x)$. Обозначение Ф. $f: X\longrightarrow Y$ и ее значения в точке $x\in X$ одним и тем же символом $f(x)$ обычно не приводит к недоразумению, так как в каждом конкретном случае, как правило, всегда бывает ясно, о чем именно идет речь. Обозначение $f(x)$ часто оказывается удобнее обозначения $f: x\longmapsto y$ при вычислениях. Напр., запись $f(x)=x^2$ удобнее и проще использовать при аналитич. преобразованиях, чем запись $f: x\longmapsto x^2$.

При заданном $y\in Y$ совокупность всех таких элементов $x\in X$, что $f(x)=y$ наз. прообразом элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$. Таким образом,

$$f^{-1}(y)=\{x: x\in X,\ f(x)=y\}.$$

Очевидно, если $y\in Y\setminus Y_f$, то $f^{-1}(y)=\varnothing$.

Пусть задано отображение $f: X\longrightarrow Y$. Иначе говоря, каждому элементу $x\in X$ поставлен в соответствие нек-рый единственный элемент $y\in Y$, и каждый элемент $y\in Y_f\subset Y$ поставлен в соответствие хотя бы одному элементу $x\in X$. Если $Y=X$, то говорят, что отображение f отображает множество X в себя. Если $Y=Y_f$, т. е. множество Y совпадает с множеством значений функции f, то говорят, что f отображает множество X на множество Y, или что отображение f является сюръективным отображением, короче *сюръекцией*. Таким образом, отображение $f: X\longrightarrow Y$ есть сюръекция, если для любого элемента $y\in Y$ существует, по крайней мере, один такой элемент $x\in X$, что $f(x)=y$.

Если при отображении $f: X\longrightarrow Y$ разным элементам $x\in X$ соответствуют разные элементы $y\in Y$, т. е. при $x'\neq x''$ имеет место $f(x')\neq f(x'')$, то отображение f наз. взаимно однозначным отображением X в Y, а также однолистным отображением, или *инъекцией*. Таким образом, отображение $f: X\longrightarrow Y$ однолистно (инъективно) тогда и только тогда, когда прообраз каждого элемента y принадлежащего множеству значений функции f, т. е. $y\in Y_f$, состоит в точности из одного элемента. Если отображение $f: X\longrightarrow Y$ является одновременно взаимно однозначным и на множество Y (см. *Взаимно однозначное соответствие*), т. е. является одновременно инъекцией и сюръекцией, то оно наз. биективным отображением, или *биекцией*.

Если $f: X\longrightarrow Y$ и $A\subset X$, то множество

$$S=\{y: y\in Y,\ y=f(x),\ x\in A\},$$

т. е. множество всех тех y, в каждый из к-рых при отображении f отображается хотя бы один элемент из подмножества A множества X, наз. образом подмножества A и пишется $S=f(A)$. В частности, всегда $Y_f=f(X)$. Для образов множеств $A\subset X$ и $B\subset X$ справедливы следующие соотношения

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B),$$
$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B),$$
$$f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B),$$

а если $A\subset B$, то $f(A)\subset f(B)$.

Если $f: X\to Y$ и $S\subset Y$, то множество

$$A=\{x: x\in X,\ f(x)\in S\}$$

наз. прообразом множества S и пишут $A=f^{-1}(S)$. Таким образом, прообраз множества S состоит из всех тех элементов $x\in X$, к-рые при отображении f отображаются в элементы из S, или, что

то же самое, к-рое состоит из всех прообразов элементов $y \in S$: $f^{-1}(S) = \bigcup_{y \in S} f^{-1}(y)$. Для прообразов множеств $S \subset Y$ и $T \subset Y$ справедливы соотношения

$$f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T),$$
$$f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T),$$
$$f^{-1}(S \setminus T) = f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(T),$$

а если $S \subset T$, то $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$.

Если $A \subset X$, то функция $f: X \longrightarrow Y$ естественным образом порождает функцию, определенную на множестве A, ставящую в соответствие каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$. Эта функция наз. сужением функции f на множестве A и иногда обозначается f_A. Таким образом, $f_A: A \longrightarrow Y$ и для любого $x \in A$ имеет место $f_A: x \longmapsto f(x)$. Если множество A не совпадает со множеством X, то сужение f_A функции f на множестве A имеет другую область определения, чем функция f, и, следовательно, является другой, чем f, функцией.

Если $f: X \longrightarrow Y$ и каждый элемент $y \in Y_f$ представляет из себя множество каких-то элементов $y \in \{z\}$, причем среди этих множеств имеется по крайней мере одно непустое множество, состоящее не из одного элемента, то такая Ф. f наз. *многозначной функцией*. При этом элементы множества $f(x) = \{z\}$ часто наз. значениями Ф. f в точке x. Если каждое множество $f(x)$, $x \in X$, состоит только из одного элемента, то Ф. f наз. также однозначной функцией.

Если $f: X \longrightarrow Y$ и $g: Y \longrightarrow Z$, то Ф. $F: X \longrightarrow Z$, определенная для каждого $x \in X$ формулой $F(x) = g(f(x))$, наз. композицией (суперпозицией) функций f и g, или *сложной функцией*, и обозначается $g \circ f$.

Пусть задана Ф. $f: X \longrightarrow Y$ и Y_f — множество ее значений. Совокупность всевозможных упорядоченных пар вида $(y, f^{-1}(y))$, $y \in Y_f$, образует Ф., к-рая наз. *обратной функцией* для Ф. f и обозначается f^{-1}. Обратная функция f^{-1} ставит в соответствие каждому элементу $y \in Y_f$ его прообраз $f^{-1}(y)$, т. е. нек-рое множество элементов. Тем самым обратная Ф. является, вообще говоря, многозначной функцией. Если отображение $f: X \longrightarrow Y$ однолистно, то обратное отображение является однозначной функцией и отображает множество значений Ф. Y_f на ее область определения X.

Числовые функции. Важным классом Ф. являются численнозначные функции $f: X \longrightarrow Y$, $Y \subset \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел. Над численнозначными функциями можно производить различные арифметич. операции. Если даны две численнозначные Ф. f и g, определенные на одном и том же множестве X, а λ — нек-рое число, то Ф. λf определяется как Ф., принимающая в каждой точке $x \in X$ значение $\lambda f(x)$; Ф. $f+g$ — как Ф., принимающая в каждой точке значение $f(x)+g(x)$; Ф. fg — как Ф., принимающая в каждой точке значение $f(x)\,g(x)$; наконец, f/g — как Ф., в каждой точке $x \in X$ равная $\frac{f(x)}{g(x)}$ (что, конечно, имеет смысл лишь при $g(x) \neq 0$).

Ф. $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ наз. действительнозначной функцией ($\mathbb{R}$ — множество действительных чисел). Действительнозначная функция $f: X \longrightarrow Y$ наз. ограниченной сверху (ограниченной снизу) на множестве X, если множество ее значений ограничено сверху (ограничено снизу). Иначе говоря, Ф. $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничена сверху (ограничена снизу) на множестве X, если существует такая постоянная c, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant c$ (соответственно неравенство $f(x) \geqslant c$). Ф. f, ограниченная на множестве X как сверху, так и снизу, наз. просто ограниченной на этом множестве. Верхняя (нижняя) грань множества значений функции $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ наз. верхней (нижней) гранью функции f.

Большую роль в математич. анализе играют числовые функции, или, более подробно, численнозначные функции числового аргумента, т. е. Ф. $f: X \to Y$, где $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$. Если множество определения функции и множество ее значений являются подмножествами множества действительных чисел, то такая Ф. наз. действительной функцией, или, более подробно, действительной функцией действительного аргумента. Обобщением понятия числовой Ф. является, прежде всего, численнозначная функция нескольких числовых аргументов — т. н. числовые функции многих переменных. Дальнейшее обобщение числовых функций составляют векторнозначные функции (см. *Вектор-функция*) и вообще Ф., множества определений и значений к-рых наделены определенными структурами. Напр., если множества значений Ф. принадлежат к нек-рому векторному пространству, то такие Ф. можно складывать, если к кольцу — то их можно складывать и умножать, если к множеству, в к-ром имеется определенного рода упорядоченность, — то в этом случае можно на функции обобщить понятия ограниченности числовых функций, верхней и нижней граней и т. п. Наличие топологич. структур на множествах X и Y позволяет ввести понятие *непрерывной функции* $f: X \to Y$. В случае когда X и Y — топологические векторные пространства для Ф. $f: X \to Y$, вводится понятие дифференцируемой функции.

Способы задания функций. Числовые Ф. (и нек-рые их обобщения) могут задаваться с помощью формул. Такой способ их задания наз. аналитическим. Для этого используется нек-рый запас изученных и специально обозначенных Ф. (прежде всего, элементарных Ф.), алгебраич. действия, композиция и предельный переход (что включает в себя такие операции математич. анализа, как дифференцирование, интегрирование, суммирование рядов), напр.:

$$y = ax + b,\quad y = ax^2,\quad y = 1 + \sqrt{\ln \cos 2\pi x},$$
$$\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},$$
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$
$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx.$$

Класс функций, представимых в определенном смысле в виде сумм рядов, даже одних только тригонометрических, очень широк. Аналитически Ф. могут задаваться явным образом, т. е. формулами вида $y = f(x)$, а также и как *неявные функции*, т. е. уравнениями вида $F(x, y) = 0$. Иногда функция задается с помощью нескольких формул, напр.,

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ x - 1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Ф. может быть задана также с помощью описания соответствия. Пусть, напр., каждому числу $x > 0$ поставлено в соответствие число 1, числу 0 — число 0, а каждому $x < 0$ — число -1. В результате получают функцию, определенную на всей числовой оси и принимающую три значения: 1, 0, -1. Эта Ф. имеет специальное обозначение $\operatorname{sign} x$. Другой пример: каждому рациональному числу поставлено в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число 0. Полученная функция наз. *Дирихле функцией*. Одна и та же Ф. может быть задана различными способами, так Ф $\operatorname{sign} x$ и функция Дирихле могут быть определены не только с помощью словесного описания, но и формулами.

Всякая формула является символич. записью некрого ранее описанного соответствия, так что в конце концов нет принципиального различия между заданием функции с помощью формулы или с помощью словесного описания соответствия; это различие чисто внешнее. Следует иметь в виду, что всякая вновь определенная тем или иным способом Ф., если для нее ввести специальное обозначение, может служить для определения других Ф. с помощью формул, включающих этот новый символ. Однако при аналитич. задании Ф. весьма существенным является запас Ф. и операций, используемых в формулах, задающих данные Ф.; обычно этот запас стараются сделать по возможности минимальным, а входящие в него Ф. и операции выбрать в определенном смысле наиболее простыми.

Когда речь идет о действительных функциях одного действительного аргумента, то для наглядного представления о характере функциональной зависимости часто строятся графики Ф. на координатной плоскости, иначе говоря, для Ф. $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, на плоскости переменных x и y рассматривается множество точек

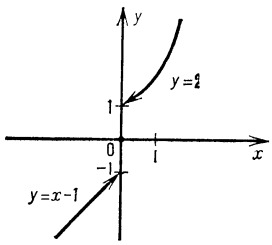


Рис 1.

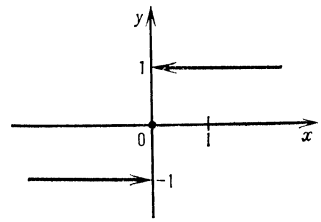


Рис 2.

$(x, f(x))$, $x \in X$. Так, график Ф. (*) имеет вид, изображенный на рис. 1, график Ф. sign x — на рис. 2, а график Ф. $y=1+\sqrt{\ln \cos 2\pi x}$, состоящий из отдельных точек, на рис. 3. Графич. изображение Ф. также может служить для задания функциональной зависимости.

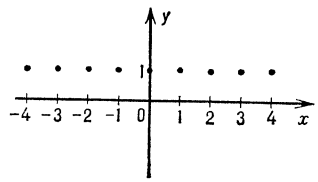


Рис 3.

Это задание будет приближенно, потому что измерение отрезков практически можно производить лишь с определенной степенью точности, не говоря уже о том, что когда область определения Ф. неограничена, то ее принципиально невозможно нарисовать на координатной плоскости.

Широко используется также табличный метод задания числовых Ф. либо в виде готовых таблиц значений Ф. в определенных точках, либо посредством введения этих данных в машинную память, либо путем составления программ для их вычисления на компьютерах.

Классификация числовых функций. Простейшими числовыми Ф. являются *элементарные функции*, среди к-рых следует выделить алгебраич. многочлены, тригонометрич. полиномы, а также *рациональные функции*. Особая роль этих Ф. состоит в том, что один из методов изучения и использования более общих Ф. основан на приближении их алгебраич. многочленами, тригонометрич. полиномами или рациональными Ф., а также Ф., составленными из указанных Ф. определенным образом (см. *Сплайн*). Раздел теории Ф., занимающийся изучением аппроксимаций Ф., посредством наборов простых в каком-то смысле Ф., наз. *приближения теорией*. В этой теории большое значение имеют также приближения Ф. посредством агрегатов, составленных из специальных Ф., являющихся собственными функциями нек-рых операторов.

Важный класс, содержащий в себе рациональные Ф., составляют *аналитические функции*, т. е. Ф., представимые в виде степенных рядов. Аналитич. Ф. делятся на *алгебраические функции*, т. е. такие Ф. $y=f(x_1, \ldots, x_n)$, к-рые могут быть заданы уравнением $P(x_1, \ldots, x_n, y)=0$, где P — неприводимый многочлен с комплексными коэффициентами, и трансцендентные, т. е. не являющиеся алгебраическими. С понятием *производной* связаны классы определенное число раз дифференцируемых Ф., с понятием *интеграла* — классы интегрируемых в том или ином смысле Ф., с понятием непрерывности — класс непрерывных Ф. С помощью последовательного поточечного предельного перехода из класса непрерывных Ф. получаются *Бэра классы* функций (см. также *Борелевская функция*). На понятиях измеримого множества и меры базируется определение *измеримых функций*. Раздел теории Ф., изучающий свойства Ф., связанные с понятием меры, обычно наз. *метрической теорией функций*.

При объединении Ф., обладающих нек-рыми общими свойствами, возникают функциональные пространства. Так, все Ф., определенные на одном и том же множестве X n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и, напр. измеримые по Лебегу, соответственно непрерывные или удовлетворяющие *Гёльдера условию* данного порядка, образуют векторные пространства. Аналогично векторные пространства составляют пространства m раз (непрерывно) дифференцируемых Ф., $m=1, 2, \ldots$, бесконечно дифференцируемые Ф., финитные Ф., аналитич. Ф. и мн. другие классы Ф.

В ряде векторных пространств Ф. можно ввести норму. Напр., в пространстве непрерывных на компакте X функций $f: X \to \mathbb{C}$ нормой является функционал $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$; нормированное пространство непрерывных функций с этой нормой обозначается $C(X)$. Если в пространстве измеримых Ф. $f: X \to \mathbb{C}$, определенных на пространстве $(X, \mathfrak{S}, \mu)$, где X — нек-рое множество, $\mathfrak{S}$ — нек-рая σ-алгебра его подмножеств, а μ — мера, определенная на множествах $A \in \mathfrak{S}$, положить

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < +\infty, \\ \sup\limits_{x \in X} \operatorname{vrai} |f(x)|, & \text{если } p = +\infty, \end{cases}$$

то функционал $\|f\|_p$ на множестве Ф., для к-рых $\|f\|_p < +\infty$, является *нормой*. Пространство Ф. с такой нормой обычно наз. л е б е г о в ы м п р о с т р а н с т в о м ф у н к ц и й $L_p(X)$. Из других функциональных пространств, играющих важную роль в математич. анализе, следует отметить *Гёльдерово пространство*, *Никольского пространство*, *Орлича пространство*, *Соболева пространство*. Все эти пространства являются полными метрич. пространствами, что в большой степени и обусловливает изучение мн. задач как самой теории Ф., так и задач из смежных разделов математики в этих пространствах и нек-рых их обобщениях. Связи между различными нормами Ф., принадлежащих одновременно разным функциональным пространствам, изучаются в теории вложения функциональных пространств (см. *Вложения теоремы*). Важным свойством основных функциональных пространств является плотность в них бесконечно дифференцируемых Ф., что позволяет изучать ряд свойств входящих в эти пространства Ф. на достаточно гладких Ф., перенося затем полученные результаты на все Ф. рассматриваемого пространства с помощью предельного перехода.

Зависимость функций — свойство систем Ф., обобщающее понятие их линейной зависимости и означаю-

щее, что между значениями Ф. из данной системы существуют определенные связи, в частности значения одной из них выражаются через значения остальных. Напр., Ф. $f_1(x)=\sin^2 x$ и $f_2(x)=\cos^2(x)$ зависимы на всей числовой прямой, поскольку всегда $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $\overline{D}$ — ее замыкание, $f:\overline{D}\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $f(x)=\{y_i=f_i(x),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, $x\in\overline{D}$. Функции f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, наз. зависимыми на $\overline{D}$, если существует такая непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция $F(y)$, $y\in\mathbb{R}^n$, множество нулей к-рой образует нигде не плотное в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество, что композиция $F\circ f$ тождественно равна нулю на $\overline{D}$.

Функции f_i: $G\longrightarrow\mathbb{R}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, наз. зависимыми на области $G\subset\mathbb{R}^n$, если они зависимы на замыкании $\overline{D}$ любой области $D\subset G$ такой, что $\overline{D}\subset G$.

Непрерывно дифференцируемые в области $G\subset\mathbb{R}^n$ функции f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, зависимы на G тогда и только тогда, когда их *якобиан*

$$\frac{\partial(f_1,\ \ldots,\ f_n)}{\partial(x_1,\ \ldots,\ x_n)}$$

тождественно равен нулю на области G.

Пусть теперь

$$f_i:G\longrightarrow\mathbb{R}^m,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\leqslant n,\ G\subset\mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Если для Ф. $y_i=f_i(x)$, $x\in G$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, $G\subset\mathbb{R}^n$, существуют открытое в $R^{m-1}_{y_1y_2\ldots y_{m-1}}$ множество Γ и непрерывно дифференцируемая на Γ функция $\Phi(y_1,\ \ldots,\ y_{m-1})$ такие, что в любой точке $x\in G$ выполняются условия

$$(f_1(x),\ \ldots,\ f_{m-1}(x))\in\Gamma$$

и

$$\Phi(f_1(x),\ \ldots,\ f_{m-1}(x))=f_m(x),$$

то Ф. f_m наз. зависимой на множестве G от Ф. $f_1,\ \ldots,\ f_{m-1}$.

Если Ф. f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m=n$, непрерывны в области G и в окрестности каждой точки $x\in G$ одна из них зависит от остальных, то Ф. f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, зависимы на области G.

Если в окрестности каждой точки $x\in G$ одна из непрерывно дифференцируемых в области $G\subset\mathbb{R}^n$ функций f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\leqslant n$, зависит от остальных, то в любой точке области G ранг матрицы Якоби

$$\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

меньше m, т. е. градиенты ∇f_1, ∇f_2, $\ldots$, ∇f_m линейно зависимы в каждой точке $x\in G$.

Пусть Ф. (1) непрерывно дифференцируемы на области $G\subset\mathbb{R}^n$ и ранг их матрицы Якоби (2) в каждой точке $x\in G$ не превышает нек-рого числа r, $1\leqslant r<m\leqslant n$, а в нек-рой точке $x^{(0)}\in G$ равен r. Иначе говоря, существуют такие переменные $x_{j_1},\ \ldots,\ x_{j_r}$ и функции $y_{i_1}=f_{i_1}(x)$, $y_{i_2}=f_{i_2}(x)$, $\ldots$, $y_{i_r}=f_{i_r}(x)$, что

$$\left.\frac{\partial(f_{j_1},\ f_{i_2},\ \ldots,\ f_{i_r})}{\partial(x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_r})}\right|_{x=x^{(0)}}\neq 0. \tag{3}$$

Тогда ни в какой окрестности точки $x^{(0)}$ ни одна из Ф. f_{i_1}, f_{i_2}, $\ldots$, f_{i_r} не является зависимой от остальных из них и существует такая окрестность точки $x^{(0)}$, что каждая из оставшихся Ф. f_i, $i\neq i_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ r$, зависит на этой окрестности от Ф. f_{i_1}, f_{i_2}, $\ldots$, f_{i_r}. В частности, если градиенты ∇f_1, ∇f_2, $\ldots$, ∇f_m линейно зависимы во всех точках области G и в нек-рой точке $x^{(0)}\in G$ среди них $(m-1)$ линейно независимы, и, следовательно, один из них, напр. ∇f_m, является линейной комбинацией остальных, то существует такая окрестность точки $x^{(0)}$, что на этой окрестности Ф. f_m зависит от остальных Ф. $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{m-1}$.

Лит.: [1] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечных, пер с лат., 2 изд., т. 1, М., 1961, [2] Лобачевский Н. И., Полное собр. соч., т. 5, М.— Л., 1951; [3] Дедекинд Р., Что такое числа и для чего они служат?, пер. с нем., Казань, 1905, [4] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937, [5] Тарский А., Введение в логику и методологию дедуктивных наук, пер. с англ., М., 1948, [6] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966, [7] Frege G., Function, Begriff, Bedeutung, Göttingen, 1962, S. 79—95; [8] Черч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960, [9] Юшкевич А. П., «Истор.-матем. исследования», 1966, в. 17, с 123—50; [10] Медведев Ф. А., Очерки истории теории функций действительного переменного, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

L-ФУНКЦИЯ — обобщение *дзета функции* за счет введения *характеров*. L-ф. составляют сложной природы класс специальных функций комплексного переменного, определяемых *Дирихле рядами* или *Эйлера произведениями* с характерами. Они служат основным инструментом для изучения аналитич. методами арифметики соответствующих математич. объектов: поля рациональных чисел, алгебраич. полей, алгебраич. многообразий над конечными полями и т. п. Простейшими представителями L-ф. являются *Дирихле L-функции*. Остальные L-ф. представляют собой более или менее близкие аналоги и обобщения этих L-ф.

А. Ф. Лаврик.

ФУНКЦИЯ МНОЖЕСТВ — отображение f нек-рой совокупности Σ подмножеств данного множества X в другое множество, обычно в множество $\mathbb{R}$ действительных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Важным классом Ф. м. являются аддитивные функции множеств, для к-рых

$$f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\Big)=\sum_{i=1}^{n} f(M_i), \tag{*}$$
$$M_i\in\Sigma,\ M_i\cap M_j=\varnothing,\ i\neq j,$$

и σ-аддитивные функции множеств, к-рые удовлетворяют равенству (*) и для счетной совокупности множеств. Если f принимает лишь неотрицательные значения, $R(\varnothing)=0$ и Σ является σ-алгеброй, то такая функция наз. мерой.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

В. И. Соболев.

ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛ — континуальный аналог *Фурье ряда*. Для функции, заданной на конечном промежутке действительной оси, важное значение имеет представление ее рядом Фурье. Для функции $f(x)$, заданной на всей оси, аналогичную роль играет разложение f в интеграл Фурье:

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,dx, \tag{1}$$

где

$$A=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi\,d\xi,$$
$$B=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{2}$$

Разложение (1) можно формально строить в предположениях, обеспечивающих существование написанных интегралов. Оно справедливо, напр., для гладкой финитной функции $f(x)$. Имеется большое число признаков, обеспечивающих равенство (1) в том или ином смысле. Подстановка (2) в (1) дает т. н. интегральную формулу Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi, \tag{3}$$

обоснование к-рой и приводит к упомянутым признакам. Большую пользу приносит при этом представление $f(x)$ простым интегралом Фурье

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

к-рое получается из (3), если записать внешний интеграл как предел по интервалу $(0, N)$ и поменять порядок интегрирования. В прикладных науках представление (1) часто интерпретируется как разложение по гармоникам: если

$$D(\lambda)=\sqrt{|A(\lambda)|^2+|B(\lambda)|^2},\ \cos\varphi(\lambda)=\frac{B(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$$\sin\varphi(\lambda)=\frac{A(\lambda)}{D(\lambda)},$$

то (1) принимает вид:

$$f(x)=\int_0^\infty D(\lambda)\sin[\lambda x+\varphi(\lambda)]\,d\lambda$$

и таким образом f представляется в виде суперпозиции гармоник, частоты λ к-рых непрерывно заполняют действительную полуось $(0, \infty)$, а амплитуда D и начальная фаза φ зависят от λ.

Во многих случаях (в частности, для комплекснозначных функций f) разложение (1) удобнее представлять в экспоненциальной форме:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda,\ C(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde f(\lambda),\qquad(4)$$

где

$$\tilde f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx.\qquad(5)$$

Функция $\tilde f(\lambda)$ именуется при этом *Фурье преобразованием* функции f (в прикладных науках $C(\lambda)$ наз. частотной характеристикой, или спектром, f).

При условии, что функция $f(x)$ суммируема: $f\in L_1(-\infty, +\infty)$, функция $\tilde f$ ограничена, равномерно непрерывна на оси и $\tilde f(\lambda)\to 0$ при $|\lambda|\to\infty$. Функция $\tilde f(\lambda)$ может оказаться несуммируемой и интеграл (4) — несуществующим. Однако равенство (4) допускает разумное истолкование, если воспользоваться методами суммирования интегралов [при этом можно рассматривать не только поточечную сходимость, но и сходимость в среднем]. Напр., средние арифметические усеченных Ф. и.

$$\frac{1}{N}\int_0^N d\omega\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda\right]\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^N\left(1-\frac{|\lambda|}{N}\right)\tilde f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\frac{2\sin^2\frac{N(x-\xi)}{2}}{N(x-\xi)^2}\,d\xi$$

суммируемой функции $f(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду и в среднем при $N\to\infty$. При наличии дополнительных ограничений на функцию $f(x)$ получаются более конкретные утверждения. Напр., если $f\in L_1$ и имеет ограниченную вариацию в окрестности x, то

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{+\omega}\tilde f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda.\qquad(6)$$

В приложениях часто используется разложение

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$

верное для кусочно гладкой в каждом конечном интервале абсолютно интегрируемой функции $f(x)$, где интеграл справа понимается в смысле главного значения (6). Ф. и. изучается также в предположении локальной суммируемости функции f и при тех или иных требованиях, накладывающих ограничения на поведение f в ∞. Пусть, напр., $f\in L_p$, $1\leqslant p\leqslant 2$, тогда

$$\tilde f(\lambda)=\lim_{A\to\infty}{}^{p'}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{+A}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx,\qquad(7)$$

где предел понимается в смысле сходимости в среднем порядка p', $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ [однако предел в (7) существует и в смысле сходимости почти всюду]. Простую форму приобретает этот результат при $p=2$ (см. *Планшереля теорема*).

Аналогично строится теория кратных Ф. и., когда речь идет о разложении функции, заданной в n-мерном пространстве. Понятие Ф. и. распространяется также и на обобщенные функции.

Лит.: [1] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948, [2] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965.

П. И. Лизоркин.

ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — интегральный оператор, обобщенное ядро к-рого является быстроосциллирующей функцией или интегралом от такой функции. Операторы такого типа возникли при исследовании асимптотики быстроосциллирующих решений уравнений с частными производными (см. [1], [2]) и при исследовании особенностей фундаментальных решений гиперболич. уравнений (см. [1], [2], [3]).

I. Канонический оператор Маслова (КОМ). Пусть Λ есть n-мерное *лагранжево многообразие* класса C^∞ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}_{x,p}$, где $x\in\mathbb{R}^n$, $p\in\mathbb{R}^n$, и $d\sigma$ — объем на Λ. Каноническим атласом наз. локально конечное счетное покрытие многообразия Λ ограниченными односвязными областями Ω_j (картами), в каждой из к-рых в качестве координат можно взять либо переменные x, либо p, либо смешанный набор

$$(p_\alpha, x_\beta),\ \alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s),\ \beta=(\beta_1, \ldots, \beta_{n-s}),$$

не содержащий сопряженных пар (p_j, x_j). КОМ действует из $C_0^\infty(\Lambda)$ в $C(\mathbb{R}^n_x)$. Канонич. операторы $K(\Omega_j)$ вводятся следующим образом.

1) Пусть карта Ω_j — неособая, т. е. Ω_j задается уравнением $p=p(x)$ и

$$(K(\Omega_j)\varphi)(x)=\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|}\exp\left[i\lambda\int_{r^0}^{r}(p,\,dx)\right]\varphi(r),$$
$$r=(x,\,p(x)).$$

Здесь $\lambda\geqslant 1$ — параметр, $r^0\in\Omega_j$ — фиксированная точка, $(p,\,dx)=\sum_{j=1}^n p_j\,dx_j$, и функция $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

2) Пусть в карте Ω_j локальные координаты суть p, т. е. Ω_j задается уравнением $x=x(p)$ и пусть

$$(K(\Omega_j)\varphi)(x)=F^{-1}_{\lambda,\,p\to x}\left\{\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dp}\right|}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[i\lambda\left(\int_{r^0}^{r}(p,\,dx)-(x(p),\,p)\right)\right]\varphi(r)\right\},$$
$$r=(x(p),\,p).$$

Здесь F^{-1} есть λ-преобразование Фурье

$$F^{-1}_{\lambda,\,p\to x}\psi(p)=\left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp[i\lambda(x,\,p)]\,\psi(p)\,dp.$$

Аналогично определяется $K(\Omega_j)$ в случае, когда координаты в Ω_j — набор (p_α, x_β). Пусть $\oint_l(p,\,dx)=0$ и индекс Маслова $\operatorname{ind}\gamma=0$ для любого замкнутого пути l, лежащего на Λ. Вводится разбиения единицы класса C^∞ на Λ;

$$\sum_{j=1}^\infty e_j(x)=1\text{ при }\operatorname{supp}e_j\subset\Omega_j$$

и фиксируется точка $r^0\in\Omega_{j_0}$. КОМ определяется формулой

$$(K_\Lambda\varphi(r))(x)=\sum_j c_j K(\Omega_j)(e_j\varphi)(x),$$

$$c_j=\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\gamma_j\right),$$

и γ_j — индекс Маслова цепочки карт, соединяющих карты Ω_{j_0} и Ω_j.

Точка $r \in \Lambda$ наз. неособой, если в ее окрестности Λ задается уравнением $p = p(x)$. Пусть пересечение карт Ω_i, Ω_j непусто и связно, $r \in \Omega_i \cap \Omega_j$ — неособая точка и (p_α, x_β), $(p_{\tilde\alpha}, x_{\tilde\beta})$ — координаты в этих картах. Индексом Маслова пары карт Ω_i, Ω_j наз. число

$$\gamma_{ij} = \sigma_-\left(\frac{\partial x_\alpha(r)}{\partial p_\alpha}\right) - \sigma_-\left(\frac{\partial x_{\tilde\alpha}(r)}{\partial p_{\tilde\alpha}}\right),$$

где $\sigma_-(A)$ — число отрицательных собственных значений матрицы A. Индекс Маслова цепочки карт определяется по аддитивности. Аналогично определяется индекс Маслова $\operatorname{ind} l$ пути l. Индекс Маслова $\operatorname{ind} \pmod 4$ пути на лагранжевом многообразии есть целочисленный гомотопич. инвариант (см. [1], [3]). КОМ инвариантен относительно выбора канонич. атласа локальных координат в картах и разбиения единицы, в следующем смысле: если K_Λ, $\tilde K_\Lambda$ — два КОМ, то в $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(K_\Lambda \varphi - \tilde K_\Lambda \varphi)(x) = O(\lambda^{-1}),\ \lambda \to \infty$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$.

Важнейший результат теории КОМ — формула коммутации КОМ и λ-дифференциального (или λ-псевдодифференциального [3]) оператора.

Пусть $L(x, \lambda^{-1}D)$ — дифференциальный оператор с действительным символом $L(x, p)$ класса C^∞, и выполнены условия: $L(x, p) = 0$ на Λ. Многообразие Λ и объем $d\sigma$ инвариантны относительно гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Тогда справедлива формула коммутации (здесь $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$, $\lambda \to \infty$):

$$L(x, \lambda^{-1}D)(K_\Lambda \varphi)(x) = \frac{1}{i\lambda} K_\lambda [R\varphi + O(\lambda^{-1})],$$

$$R\varphi = \left[\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x, p)}{\partial x_j\, \partial p_j}\right]\varphi, \qquad (1)$$

где $d/d\tau$ — производная в силу гамильтоновой системы. Следующие члены разложения (1) и оценки остаточных членов см. [3]. Уравнение $R\varphi = 0$ наз. уравнением переноса. Из формулы коммутации следует, что если $R\varphi = 0$, то функция $u = K_\Lambda \varphi$ есть формальное асимптотич. решение уравнения $L(x, \lambda^{-1}D)u = 0$.

Метод КОМ позволил решить следующие задачи.

1) Построение асимптотики решения задачи Коши с быстроосциллирующими начальными данными в большом (т. е. за любое конечное время) для строго гиперболич. систем дифференциальных уравнений с частными производными, для систем Дирака, Максвелла, теории упругости, для уравнения Шрёдингера (см. [1], [9] — [6], а также *Квазиклассическое приближение*), а также решения нек-рых смешанных задач [4].

2) Построение асимптотики серий собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов, ассоциированных с инвариантными относительно соответствующей гамильтоновой системы лагранжевыми многообразиями (см. [1], [3]).

3) Построение асимптотич. разложения по гладкости фундаментального решения строго гиперболич. системы уравнений с частными производными (см. [1], [5], [6]).

4) Построение коротковолновой асимптотики функции Грина, решения задачи о рассеянии и амплитуды рассеяния для уравнения Шрёдингера асимптотики спектральной функции (см. [5] — [7]).

Развит новый вариант КОМ на лагранжевых многообразиях с комплексным ростком (см. [8], [9]).

II. Интегральный оператор Фурье (ИОФ).

Пусть X, Y — ограниченные области в $\mathbb{R}^{N_1}_x$, $\mathbb{R}^{N_2}_y$, $N = N_1 + N_2$, $\Gamma = X \times Y \times (\mathbb{R}^N_0 \setminus \{0\})$ и $u(y) \in C_0^\infty(Y)$. ИОФ наз. оператор

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+2N}{4}}} \int_{\mathbb{R}^N_\theta} \int_Y \exp[i\varphi(x, y, \theta)] \times p(x, y, \theta)\, u(y)\, dy\, d\theta. \qquad (2)$$

Здесь φ (фазовая функция) — действительная и положительно однородная по θ порядка 1, $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$ и $\nabla_{x, y, \theta}\varphi \neq 0$ при $\theta \neq 0$. Функция $p \in C^\infty(\Gamma)$ (символ) и в простейшем случае разлагается при $|\theta| \to \infty$ в асимптотич. ряд

$$p = \sum_{j=0}^\infty p_j\left(x, y, \frac{\theta}{|\theta|}\right)|\theta|^{m + \frac{n-2n}{4} - j}.$$

Интеграл (2) сходится после соответствующей регуляризации и определяет непрерывный линейный оператор $A: C_0^\infty(Y) \to D(X)$. Ядро оператора A равно

$$K(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+2N}{4}}} \int_{\mathbb{R}^N_\theta} \exp[i\varphi(x, y, \theta)]\, p(x, y, \theta)\, d\theta.$$

Функция $K(x, y) \in D'(X \times Y)$ и бесконечно дифференцируема вне проекции πC на $X \times Y$ множества $C = \{(x, y, \theta) \in \Gamma : \varphi'_\theta = 0\}$. Особенности K зависят только от тейлоровского разложения символа p в окрестности C (при фиксированной фазе φ). Пусть фаза φ невырождена, т. е. дифференциалы $d_{x, y, \theta}\varphi'_{\theta_j}$, $1 \leqslant j \leqslant N$ линейно независимы на C'; тогда C — гладкое многообразие размерности n. Оператору A отвечает гладкое, коническое (по переменному (ζ, η), двойственному к $z = (x, y)$) лагранжево многообразие $\Lambda \subset T^*(X \times Y) \setminus \{0\}$ размерности n — образ C при отображении

$$C \ni (z, \theta) \to (z, \varphi'_z) \in \Lambda. \qquad (3)$$

В дальнейшем оператор A рассматривается на плотностях $u(y)$ порядка 1/2:

$$A: C_0^\infty(X, \Omega_{1/2}) \to D'(Y, \Omega_{1/2}),$$

т. е. $u(y) \to u(\tilde y)\sqrt{|d\tilde y/dy|}$ при замене переменных $y \to \psi(\tilde y)$. Символу p ставится в соответствие плотность $b(z, \tau)$ порядка 1/2 на Λ, к-рая является образом $p\sqrt{d_C}$ при отображении (3), где $d_C = \left|\frac{D(\lambda, \varphi'_\theta)}{D(x, \theta)}\right|^{-1}$ и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — координаты на Λ первого порядка однородности по τ, перенесенные с помощью (3) на C. Плотность b при $|\tau| \to \infty$ разлагается в асимптотич. ряд

$$b(z, \tau) = \sum_{j=0}^\infty b_j\left(z, \frac{\tau}{|\tau|}\right)|\tau|^{m - \frac{n}{4} - j},$$

коэффициент b_0 наз. главным символом оператора A.

Пусть оператор A представим в виде (2), но с другой невырожденной фазовой функцией $\tilde\varphi(x, y, \tilde\theta)$, $\tilde\theta \in \mathbb{R}^N$ и с другим символом $\tilde p(x, y, \tilde\theta)$. Тогда для этого представления многообразие Λ остается прежним, величина $\sigma = \operatorname{sign}\varphi''_{\theta\theta} - \operatorname{sign}\tilde\varphi''_{\tilde\theta\tilde\theta}$ постоянна, а главный символ $\tilde b_0$ равен

$$\tilde b_0 = \exp\left[\frac{i\pi\sigma}{4}\right]\tilde b_0.$$

Общее определение ИОФ таково. Пусть X, Y — гладкие многообразия размерности N_1, N_2 и $\Lambda \subset T_*(X \times Y) \setminus \{0\}$ — конич. гладкое лагранжево много-

образие размерности $n=N_1+N_2$. Для любой точки $\lambda\in\Lambda$ существует невырожденная фазовая функция такая, что построенное по ней лагранжево многообразие локально совпадает с Λ. Пусть $\{x'_j, y'_j, \varphi_j, N^j, \Gamma_j, u_j\}$ — множество объектов, состоящих из:

а) локальных координатных окрестностей $X'\subset X$, $Y'\subset Y$ с локальными координатами $x\in\mathbb{R}^{N_1}$, $y\in\mathbb{R}^{N_2}$, $z=(x, y)$;

б) целого числа N и невырожденной фазовой функции φ, определенной в $\Gamma=X'\times Y'\times(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$ и такой, что отображение

$$\{(z, \theta)\in\Gamma,\ \varphi'_\theta(z, \theta)=0\}\ni(z, \theta)\longrightarrow(z, \varphi'_z)$$

есть диффеоморфизм на открытое подмножество $U\subset\Lambda$. ИОФ наз. оператор

$$A=\sum A_j,$$

где A_j имеет вид (2), $N=N^j$, $\varphi=\varphi_j-\pi\frac{N^j}{4}$ и носитель символа $p=p_j$ содержится в множестве $K_j\times\mathbb{R}^{N^j}$, K_j — компакт в $X'_j\times Y'_j$. Класс таких операторов A обозначают $I^m(\Lambda)$.

Пусть $\tilde{S}^{m-\frac{n}{4}}(\Lambda, \Omega_{1/2})$ — множество однородных порядка $m-\frac{n}{4}$ по τ плотностей на Λ порядка $1/2$. По главным символам $b_0(z, \tau)$ операторов A_j естественным образом строится главный символ $b_0(z, \tau)\in\tilde{S}^{\frac{m-n}{4}}(\Lambda, \Omega_{1/2}\otimes L)$ оператора A, так что отображение

$$I^m(\Lambda)/I^{m-1}(\Lambda)\longrightarrow\tilde{S}^{m-\frac{n}{4}}(\Lambda, \Omega_{1/2}\otimes L)$$

есть изоморфизм (см. [2], [14]).

Наиболее важным для приложений ИОФ к дифференциальным уравнениям с частными производными является случай, когда проекции $\Lambda\to T^*(Y)$ — локальные диффеоморфизмы. Тогда $N_1=N_2$, и плотность d_C равна

$$d_C^{-1}=\det\begin{Vmatrix}\varphi''_{\theta\theta} & \varphi''_{\theta x}\\ \varphi''_{y\theta} & \varphi''_{yx}\end{Vmatrix},$$

и ограничен оператор

$$I^0(\Lambda)\ni\Lambda: L^2_{\mathrm{loc}}(Y, \Omega_{1/2})\longrightarrow L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega_{1/2}).$$

Так же, как и для КОМ, для ИОФ есть формулы коммутации с дифференциальными операторами со всеми вытекающими из них следствиями. Локально ИОФ можно представить в виде интеграла по параметру от КОМ (см. [10]). ИОФ применяется:

1) Для построения параметрикса и изучения микролокальной структуры особенностей (волновых фронтов) решений гиперболич. уравнений, уравнений главного типа и краевых задач (см. [2], [14]).

2) При исследовании вопроса о локальной и глобальной разрешимости и субэллиптичности уравнений (см. [12]).

3) Для получения асимптотики спектральной функции псевдодифференциальных операторов (см. [13]).

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965, [2] Хермандер Л., «Математика», 1972; т. 16, № 1, с. 17—61, № 2, с. 67—136; [3] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976, [4] Федорюк М. В., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 6, с. 67—115; [5] Кучеренко В. В., «Теор. и матем. физика», 1969, т. 1, № 3, с. 384—406; [6] Вайнберг Б. Р., Асимптотические методы в уравнениях математической физики, М., 1982; [7] его же, «Матем. сб.», 1984, т. 123, № 2, с. 195—211; [8] Кучеренко В. В., в кн: Итоги науки и техники Современные проблемы математики, т. 8, М., 1977, с. 41—136; [9] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [10] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978, [11] Лере Ж., Лагранжев анализ и квантовая механика, пер. с франц., М., 1981, [12] Егоров Ю. В., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 2, с. 57—114; [13] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978, [14] Treves F., Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators, v. 1—2, N. Y.—L., 1980.

Б. Р. Вайнберг, М. В. Федорюк.

ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ — коэффициенты

$$c_i=\frac{\int_X f\varphi_i\,dx}{\int_X\varphi_i^2\,dx},\quad c_i=\frac{\int_X f\overline{\varphi}_i\,dx}{\int_X\varphi_i\overline{\varphi}_i\,dx}\qquad(*)$$

разложения функции $f(x)$, определенной на пространстве X по ортогональной системе действительнозначных (комплекснозначных) функций на X. Если $\{\varphi_i\}$ — ортогональная система в гильбертовом (предгильбертовом) пространстве, то для элемента f этого пространства числа $c_i=\frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$ также наз. Ф. к. f по системе $\{\varphi_i\}$. Ж. Фурье (J. Fourier) впервые исследовал тригонометрич. ряды с коэффициентами, определяемыми согласно (*).

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер с нем., М., 1958.

Т. П. Лукашенко.

ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ почти периодической функции — коэффициенты a_n *Фурье ряда*, соответствующего данной почти периодич. функции $f(x)$:

$$f(x)\sim\sum_n a_n e^{i\lambda_n x},$$

где

$$a_n=M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda_n x}\,dx.$$

Коэффициенты a_n вполне определяются теоремой о существовании среднего значения

$$a(\lambda)=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\},$$

к-рое отлично от нуля только на счетном множестве значений $\lambda=\lambda_n$.

Е. А. Бредихина.

ФУРЬЕ МЕТОД, метод разделения переменных, — метод отыскания частных решений дифференциальных уравнений

$$(Lu)(x, y)=Mu-Nu=0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^m,\qquad(1)$$

где $M(N)$ — линейные дифференциальные выражения, содержащие производные только по переменным $x(y)$, с коэффициентами, также зависящими только от $x(y)$. Функция

$$u(x, y)=v(x)w(y)\qquad(2)$$

будет решением уравнения (1), если существует такая константа λ, что

$$Mv+\lambda v=0,\ Nw+\lambda w=0.\qquad(3)$$

Напр., для уравнения колебаний струны

$$u_{xx}-u_{yy}=0,\ m=n=1,\qquad(4)$$

$M\varphi=N\varphi-\varphi''$ и решение (2) принимает вид

$$u(x, y)=\begin{cases}(c_1x+c_2)(c_3x+c_4),\ \lambda=0,\\ (c_1e^{\mu x}+c_2)(c_3e^{\mu y}+c_4),\ \lambda=-\mu^2,\\ (c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x)(c_3\cos\mu y+c_4\sin\mu y),\\ \qquad\lambda=\mu^2,\end{cases}\qquad(5)$$

где c_i, $1\leqslant i\leqslant4$ — произвольные постоянные и $\mu>0$. В полуполосе $0\leqslant x\leqslant\pi$, $y\geqslant0$ при $c_1=0$, $\lambda=\mu^2$, $\mu=1, 2, \ldots$, решения (5) удовлетворяют краевому условию

$$u(0, y)=u(\pi, y)=0,\ y\geqslant0.\qquad(6)$$

Составленный из этих функций ряд

$$U(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\,(a_n\cos ny+b_n\sin ny)\qquad(7)$$

доставляет решение начально-краевой задачи (4), (6) и

$$U(x, 0)=\varphi(x),\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, 0)=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

если a_n и nb_n являются коэффициентами Фурье

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx\,dx,$$

$$nb_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)\sin nx\,dx$$

от достаточно гладких начальных данных φ и ψ. Аналогичным образом можно получать решения начально-краевых задач для более общих классов уравнений (1), при этом роль теории рядов Фурье, связанных с разложением (7), играет спектральная теория линейных операторов.

Ф. м. тесно связан со специальными функциями, к-рые являются решениями уравнений (3) при $m=n=1$ для частных случаев операторов M и N, многие из этих функций первоначально возникли таким способом. Напр., при применении этого метода к уравнению Гельмгольца

$$u_{xx}+u_{yy}+u=0,$$

записанного в полярных координатах в виде (1) с

$$M=r^2\frac{\partial}{\partial r^2}+r\frac{\partial}{\partial r}+r^2,\ N=-\frac{\partial}{\partial\theta^2},$$

первое уравнение в (3) является уравнением Бесселя.

Одно и то же дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, целое семейство систем координат, в к-рых оно допускает разделение переменных, т. е. приводится к виду (1). Задача разыскания таких систем координат тесно связана с групповыми свойствами дифференциальных уравнений. Применение методов теории групп Ли позволяет описать все решения с разделенными переменными многих классич. уравнений математич. физики (Лапласа, Гельмгольца, Шрёдингера, волнового уравнения и др.). На этом пути получается также целый ряд соотношений из теории специальных функций.

Метод разделения переменных был предложен для решения волнового уравнения Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert, 1749), с достаточной полнотой метод был развит в нач. 19 в. Ж. Фурье (J. Fourier) и в полной общности сформулирован М. В. Остроградским в 1828.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976, [2] Миллер У., Симметрия и разделение переменных, пер. с англ., М., 1981. *А. П. Солдатов.*

ФУРЬЕ ПОКАЗАТЕЛИ почти периодической функции — действительные числа λ_n в *Фурье ряде*, соответствующем данной почти периодич. функции $f(x)$:

$$f(x)\sim\sum_n a_n e^{i\lambda_n x},$$

где a_n — *Фурье коэффициенты* функции $f(x)$. Множество показателей Фурье функции $f(x)$ наз. спектром этой функции. В отличие от периодич. случая спектр почти периодич. функции может иметь предельные точки на конечном расстоянии и даже быть всюду плотным. Поэтому поведение ряда Фурье почти периодич. функции существенно зависит от арифметич. структуры ее спектра. *Е. А. Бредихина.*

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, одно из *интегральных преобразований*, — линейный оператор F, действующий в пространстве, элементами к-рого являются функции $f(x)$ от n действительных переменных. Минимальной областью определения F считается совокупность $D=C_0^\infty$ бесконечно дифференцируемых финитных функций φ. Для таких функций

$$(F\varphi)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi. \qquad (1)$$

В нек-ром смысле наиболее естественной областью определения F является совокупность S бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, исчезающих на бесконечности вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|$. Формула (1) сохраняется для $\varphi\in S$ и при этом $(F\varphi)(x)\equiv\psi(x)\in S$. Более того, F осуществляет изоморфизм S на себя, обратное отображение F^{-1} — обращение Ф. п., обратное преобразование Фурье, — задается формулой:

$$\varphi(x)=(F^{-1}\psi)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,e^{ix\xi}\,d\xi. \qquad (2)$$

Формула (1) еще действует в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ суммируемых функций. Дальнейшее расширение области определения оператора F требует обобщения формулы (1). В классич. анализе такие обобщения строятся для локально суммируемых функций с теми или иными ограничениями на их поведение при $|x|\to\infty$ (см. *Фурье интеграл*). В теории обобщенных функций определение оператора F освобождено от многих требований классич. анализа.

Основные задачи, связанные с изучением Ф. п. F: исследование области определения Φ оператора F и области его значений $F\Phi=\Psi$, свойства отображения F: $\Phi\to\Psi$ (в частности, условия существования обратного оператора F^{-1} и его выражение). Формула обращения Ф. п. весьма проста:

$$F^{-1}[g(x)]=F[g(-x)].$$

Под действием Ф. п. линейные операторы в исходном пространстве, инвариантные относительно сдвига, переходят в пространстве образов в операторы умножения (при нек-рых условиях). В частности, свертка функций f и g переходит в произведение функций Ff и Fg:

$$F(f*g)=Ff\cdot Fg,$$

дифференцирование порождает умножение на независимую переменную:

$$F(D^\alpha f)=(ix)^\alpha Ff.$$

В пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, оператор F определен формулой (1) на множестве $D_F=L_1\cap L_p(\mathbb{R}^n)$ и является ограниченным оператором из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

$$\left\{(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|(Ff)(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}$$

(неравенство Хаусдорфа—Юнга). По непрерывности F допускает продолжение на все пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$, к-рое (для $1<p\leqslant 2$) дается формулой

$$(Ff)(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{R\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\int_{|\xi|<R}f(\xi)\,e^{-i\xi x}\,d\xi=\tilde f(x), \qquad (3)$$

где сходимость понимается по норме пространства $L_q(\mathbb{R}^n)$. Если $p\neq 2$, образ пространства L_p под действием оператора F не совпадает с L_q, т. е. вложение $FL_p\subset L_q$ строгое при $1\leqslant p<2$ (случай $p=2$ см. в статье *Планшереля теорема*). Обратный оператор F^{-1} определен на FL_p формулой

$$(F^{-1}\tilde f)(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{R\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\int_{|\xi|<R}\tilde f(\xi)\,e^{i\xi x}\,d\xi,$$

$$1<p\leqslant 2.$$

Задача о распространении Ф. п. на возможно широкий класс функций постоянно возникает в анализе и его приложениях. См., напр., *Фурье преобразование обобщенной функции.*

Лит.: [1] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965, [3] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974. *П. И. Лизоркин.*

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ обобщенной функции — расширение операции преобразования Фурье с основных функций на *обобщенные функции*. Пусть K — пространство основных функций, на к-ром определена операция преобразования Фурье F,

$$\varphi \longrightarrow F[\varphi] = \int \varphi(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx,\ \varphi \in K,$$

причем F — изоморфизм K на пространство основных функций $\tilde{K}$. Тогда операция преобразования Фурье $f \to F[f]$, определяемая на пространстве обобщенных функций $\tilde{K}'$ равенством

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]),\ \varphi \in K,$$

осуществляет изоморфизм $\tilde{K}'$ на пространство основных функций K'.

Примеры. 1) $K = S = \tilde{K},\ K' = S' = \tilde{K}'$. Здесь обратной операцией к F служит операция

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-\xi)],\ f \in S'$$

и справедливы основные формулы для $f \in S'$

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f],\ F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f].$$

2) $K = \bigcap\limits_{s \geqslant 0} L_s^2,\ \tilde{K} = D_{L^2} = \bigcap\limits_{s \geqslant 0} H_s,\ \tilde{K}' = D'_{L^2} = \bigcup\limits_{s \geqslant 0} H_{-s}$, где L_s^2 — совокупность функций φ таких, что $(1 + (\xi)^2)^{s/2}\, \varphi \in L^2$ и $H_s = \tilde{L}_s^2,\ -\infty < s < \infty$.

3) $K = D,\ \tilde{K} = Z$, где Z — совокупность целых функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию роста: существует число $a = a_f \geqslant 0$, что для любого $N \geqslant 0$ найдется $C_N > 0$ такое, что

$$|\varphi(z)| \leqslant c_N e^{a|\operatorname{Im} z|} (1 + |z|)^{-N},\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Ряды Фурье обобщенной функции. Если обобщенная функция f — периодическая с n-периодом $T = (T_1, \ldots, T_n),\ T_j > 0$, то $f \in S'$ и ее можно разложить в тригонометрич. ряд

$$f(x) = \sum\nolimits_{|k|=0}^{\infty} c_k(f)\, e^{i(k\omega, x)},\ |c_k(f)| \leqslant A(1 + |k|)^m,$$

сходящийся к f в S'; здесь

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi}{T_n}\right),\ k\omega = \left(\frac{2\pi k_1}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi k_n}{T_n}\right).$$

Примеры. 4) $F(x^\alpha) = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi)$, в частности $F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi)$.

5) $F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha$, в частности $F[\delta] = 1$.

6) $F[\theta] = \frac{i}{\xi + i0} = \pi\delta(\xi) + iP\frac{1}{\xi}$, где θ — функция Хевисайда.

Преобразование Фурье свертки обобщенных функций. Пусть прямое произведение $f(x) \times g(y)$ обобщенных функций f и g из $D'(\mathbb{R}^n)$ допускает расширение на функции вида $\varphi(x+y),\ \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Именно, пусть для любой последовательности $\eta_k(x; y),\ k \to \infty$, из $D(\mathbb{R}^{2n})$ со свойствами: $|D^\alpha \eta_k(x; y)| \leqslant c_\alpha,\ \eta_k(x; y) \rightrightarrows 1,\ D^\alpha \eta_k(x; y) \rightrightarrows 0,\ |\alpha| \geqslant 1,\ k \to \infty$ (равномерно на любом компакте), числовая последовательность

$$(f(x) \times g(y),\ \eta_k(x; y)\, \varphi(x+y)),\ k \longrightarrow \infty,$$

имеет предел, обозначаемый $(f(x) \times g(y), \varphi(x+y))$, не зависящий от последовательности $\{\eta_k\}$ из указанного класса. В этом случае функционал $f * g$, действующий по формуле $(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y),\ \varphi(x+y)),\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, наз. сверткой обобщенных функций f и g, $f * g \in D'(\mathbb{R}^n)$. Свертка существует не для любых пар обобщенных функций f и g. Она заведомо существует, если при любом $R > 0$ множество

$$T_R = [(x, y) : x \in \operatorname{supp} f,\ y \in \operatorname{supp} g,\ |x+y| \leqslant R]$$

ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$ (в частности, если f или g финитна). Если свертка $f * g$ существует, то она коммутативна, $f * g = g * f$, и коммутирует со сдвигом и с производной: $f * D^\alpha g = D^\alpha (f * g) = D^\alpha f * g$; δ-функция Дирака играет роль «единицы»: $f = \delta * f = f * \delta$. Свертка — неассоциативная операция. Однако существуют ассоциативные (и коммутативные) сверточные алгебры. Единицей в них служит дельта-функция Дирака δ. Сверточную алгебру образует, напр., множество D'_Γ, состоящее из обобщенных функций из $D'(\mathbb{R}^n)$ с носителем в выпуклом остром замкнутом конусе Γ с вершиной в O. Множество $S'_\Gamma = S' \cap D'_\Gamma$ образует сверточную подалгебру алгебры D'_Γ. Обозначают: $D'_+ = D'_{[0, \infty)},\ S'_+ = S'_{[0, \infty)}$ (при $n = 1$). Формула Ф. п. свертки

$$F[f * g] = F[f]\, F[g]$$

справедлива в следующих случаях:

а) $f \in S',\ g$ — финитна,

б) f и $g \in D'_{L^2}$,

в) $f \in D',\ g$ — финитна,

г) f и $g \in S'_\Gamma$. В этом случае произведение $F[f]\, F[g]$ обобщенных функций $F[f]$ и $F[g]$ понимается как граничное значение в S' произведения $\tilde{f}(\zeta)\, \tilde{g}(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$ при $\eta \to 0,\ \eta \in \operatorname{int} \Gamma^*$, где $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ обозначают преобразования Лапласа f и g (см. *Обобщенных функций произведение*).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979, [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, в. 1, М., 1958, [3] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 2, P., 1951; [4] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р., Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход, пер. с англ., М., 1976. *В. С. Владимиров.*

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЕ — преобразование, используемое для гармонич. анализа функций, заданных на дискретном множестве точек.

Если на множестве точек $t_k = k\Delta t$ функция задана своими значениями $x_k,\ k = \overline{0, N-1},\ \Delta t = T/N,\ T > 0$ — период функции, то Ф. п. д. вектора $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ есть вектор $\hat{x} = Fx$, где F — матрица с элементами

$$\exp\{-2\pi i \omega_m t_k\},$$

i — мнимая единица, $\omega_m = m\Delta\omega,\ m = \overline{0, N-1},\ \Delta\omega = 1/T$. Компоненты вектора $\hat{x}$ аналогичны коэффициентам Фурье в обычных тригонометрич. разложениях. Ф. п. д. используется для приближенного вычисления этих коэффициентов, спектров, авто- и взаимно корреляционных функций и т. п. Прямое вычисление Ф. п. д. требует выполнения около N^2 арифметич. операций и большой затраты машинного времени. Метод быстрого преобразования Фурье (см. [1]) позволил существенно сократить число операций. При $N = n_1 n_2 \ldots n_m$ этот метод выполняет Ф. п. д. приблизительно за $N(n_1 + n_2 + \ldots + n_m)$ операций, повышая точность вычислений. Особенно удобные для реализации алгоритмы получаются при $N = 2^m$. Имеется значительное число программ, реализующих или использующих быстрое преобразование Фурье для решения прикладных задач. Метод быстрого преобразования Фурье включает в себя широко известные экономичные способы вычисления Ф. п. д., напр. метод Рунге (см. [2]).

Лит.: [1] Cooley J., Tukey J., «Math. Comput.», 1965, v. 19, p. 297—301; [2] Runge C. Z., «Math. Phys.», 1903, v. 48, p. 443. *В. А. Морозов.*

ФУРЬЕ РЯД по ортогональным многочленам — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \qquad (1)$$

где многочлены $\{P_n(x)\}$ ортонормированы на интервале (a, b) с весом $h(x)$ (см. *Ортогональные многочлены*), а коэффициенты $\{a_n\}$ вычисляются по формуле

$$a_n = \int_a^b h(x) f(x) P_n(x)\, dx, \qquad (2)$$

причем функция $f(x)$ входит в класс функций $L_2 = L_2[a, b, h(x)]$, квадрат к-рых суммируем (интегрируем по Лебегу) с весовой функцией $h(x)$ по интервалу ортогональности (a, b).

Как и у любого ортогонального ряда, частичные суммы $\{s_n(x, f)\}$ ряда (1) приближают функцию $f(x)$ наилучшим образом в метрике пространства L_2 и выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (3)$$

Для доказательства сходимости ряда (1) в отдельной точке x или на нек-ром множестве из (a, b) обычно применяется равенство

$$f(x) - s_n(x, f) = \mu_n [a_n(\varphi_x) P_{n+1}(x) - a_{n+1}(\varphi_x) P_n(x)],$$

где $\{a_n(\varphi_x)\}$ — коэффициенты Фурье вспомогательной функции

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, \quad t \in (a, b),$$

при фиксированном x, а μ_n — коэффициент из формулы Кристоффеля—Дарбу. Если отрезок ортогональности $[a, b]$ конечен, $\varphi_x(t) \in L_2$ и последовательность $\{P_n(x)\}$ ограничена в данной точке x, то ряд (1) сходится к значению $f(x)$.

Коэффициенты (2) можно определять и для функции $f(t)$ из класса $L_1 = L_1[a, b, h(t)]$, т. е. для функций, суммируемых с весом $h(t)$ на интервале (a, b). В случае конечного отрезка $[a, b]$ условие (3) имеет место, если $f(t) \in L_1 = L_1[a, b, h(t)]$, а последовательность $\{P_n(t)\}$ ограничена равномерно на всем отрезке $[a, b]$. При этих условиях ряд (1) сходится в нек-рой точке $x \in [a, b]$ к значению $f(x)$, если $\varphi_x(t) \in L_1[a, b, h(t)]$.

Пусть A — та часть интервала (a, b), где последовательность $\{P_n(t)\}$ ограничена равномерно, $B = [a, b] \setminus A$ и $L_p(A) = L_p[A, h(t)]$ — класс функций, суммируемых в степени p по множеству A с весом $h(t)$. Если при фиксированном $x \in A$ имеем $\varphi_x(t) \in L_1(A)$ и $\varphi_x(t) \in L_2(B)$, то ряд (1) сходится к $f(x)$.

Для рядов (1) имеет место принцип локализации условий сходимости: если две функции $f(t)$ и $g(t)$ из пространства L_2 совпадают в интервале $(x-\delta, x+\delta)$, где $x \in A$, то Ф. р. по ортогональным многочленам этих двух функций в точке x сходятся или расходятся одновременно. Аналогичное утверждение справедливо, если $f(t)$ и $g(t)$ входят в пространства $L_1(A)$ и $L_2(B)$, причем $x \in A$.

Для классических ортогональных многочленов имеют место теоремы о равносходимости ряда (1) с нек-рым ассоциированным тригонометрич. рядом Фурье (см. *Равносходящиеся ряды*).

Равномерная сходимость ряда (1) на всем конечном отрезке ортогональности $[a, b]$ или на части его обычно исследуется с помощью неравенства Лебега

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) \right| \leqslant [1 + L_n(x)] E_n(f), \quad x \in [a, b],$$

где функция Лебега

$$L_n(x) = \int_a^b h(t) \left| \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_k(t) \right| dt$$

не зависит от функции $f(x)$, а $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ многочленами степени не выше n. В зависимости от свойств весовой функции $h(x)$ последовательность функций Лебега $\{L_n(x)\}$ в разных точках отрезка $[a, b]$ может возрастать с различной скоростью. А для всего отрезка $[a, b]$ вводятся постоянные Лебега

$$L_n = \max_{x \in [a, b]} L_n(x),$$

к-рые возрастают неограниченно при $n \to \infty$, причем для различных систем ортогональных многочленов постоянные Лебега могут возрастать с различной скоростью. Из неравенства Лебега следует, что если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} L_n E_n(f) = 0,$$

то ряд (1) сходится к функции $f(x)$ равномерно на всем отрезке $[a, b]$. С другой стороны, скорость сходимости последовательности $\{E_n(f)\}$ к нулю зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$. Поэтому во многих случаях нетрудно сформулировать достаточные условия, при к-рых правая часть неравенства Лебега стремится к нулю при $n \to \infty$ (см., напр., *Лежандра многочлены*, *Чебышева многочлены*, *Якоби многочлены*). В общем случае произвольного веса конкретные результаты получаются, если для рассматриваемых ортогональных многочленов известны асимптотич. формулы или оценки.

Лит.: [1] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [2] Геронимус Я. Л., Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., 1958; [3] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979, см. также лит. при ст. *Ортогональные многочлены*.

П. К. Суетин.

ФУРЬЕ РЯД почти периодической функции — ряд вида

$$f(x) \sim \sum_n a_n e^{-i\lambda_n x}, \qquad (*)$$

где λ_n — *Фурье показатели*, a_n — *Фурье коэффициенты* почти периодич. функции $f(x)$. Ряд (*) соответствует любой числовой почти периодич. функции. Поведение Ф. р. существенно зависит от структуры множества показателей Фурье этой функции, а также от ограничений, наложенных на коэффициенты Фурье этой функции.

Напр., имеют место следующие теоремы. Если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,$$

то существует *Безиковича почти периодическая функция*, для к-рой тригонометрич. ряд (*) является ее Ф. р. Если $a_n > 0$ для равномерной почти периодич. функции, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

сходится. Если показатели Фурье равномерной почти периодич. функции линейно независимы, то Ф. р. этой функции сходится абсолютно. Если равномерная почти периодич. функция имеет лакунарный Ф. р., то он сходится равномерно.

Лит.: [1] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [2] Купцов Н. П., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 4 (142), с. 117—78; [3] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6 (132), с. 3—82.

Е. А. Бредихина.

ФУРЬЕ РЯД функции $f(x)$ по ортонормированной на промежутке (a, b) системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ — ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

коэффициенты к-рого определяются по формулам

$$c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x)\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

и наз. коэффициентами Фурье функции f. О функции f в общем случае предполагается, что она интегрируема с квадратом на (a, b). Для многих систем $\{\varphi_k\}$ это требование можно ослабить, заменив его каким-либо другим, обеспечивающим существование всех интегралов (1).

По тригонометрич. системе Ф. р. определяется для каждой функции f, интегрируемой на $(0, 2\pi)$. Это ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (2)$$

с коэффициентами

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx. \qquad (3)$$

Аналогично строятся Ф. р. для функций от многих переменных. Дальнейшие обобщения приводят к коэффициентам Фурье и Ф. р. элементов гильбертова пространства.

Наиболее глубоко разработана теория Ф. р. по тригонометрич. системе, к-рые были первыми примерами Ф. р. Имея в виду Ф. р. по тригонометрич. системе, обычно говорят просто о Ф. р., не указывая, по какой системе они строятся.

Ф. р. составляют значительную часть теории *тригонометрических рядов*. Впервые Ф. р. появились в работах Ж. Фурье (J. Fourier, 1807), посвященных исследованию задач теплопроводности. Он предложил для представления функции f, заданной на $(0,2\pi)$, тригонометрич. рядом брать ряд (2) с коэффициентами, определяемыми по формулам (3). Такой выбор коэффициентов является естественным со многих точек зрения. Напр., если ряд (2) сходится к функции $f(x)$ равномерно, то почленное интегрирование приводит к выражению коэффициентов a_k и b_k по формулам (3). С помощью почленного интегрирования эти формулы получал еще Л. Эйлер (L. Euler, 1777).

С помощью формул (3) Ф. р. (2) строится для каждой функции, интегрируемой на $[0, 2\pi]$. Интегрируемость функции может пониматься по-разному, напр. как интегрируемость по Риману или по Лебегу. В зависимости от этого говорят о рядах Фурье—Римана, Фурье—Лебега и т. п. Сами понятия интегралов Римана и Лебега возникли в значительной степени в связи с исследованиями Ф. р. Современный вид теория Ф. р. приобрела после построения интеграла Лебега, после чего она развивается главным образом как теория рядов Фурье—Лебега. Ниже о функции f предполагается, что она имеет период 2π и интегрируема по Лебегу на периоде.

В теории Ф. р. изучается связь свойств функций со свойствами их Ф. р., в частности исследуются вопросы представления функций с помощью Ф. р.

К работе Ф. Бесселя (F. Bessel, 1828) восходит доказательство минимального свойства частных сумм Ф. р.: для функций $f\in L^2$ среди тригонометрич. полиномов порядка n

$$t_n(x)=A_0+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

наименьшее значение интегралу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-t_n(x)]^2\,dx$$

доставляет частная сумма Ф. р. (2) функции f:

$$s_n(f, x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Это наименьшее значение равно

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

Отсюда следует *Бесселя неравенство*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx,$$

выполняющееся для каждой функции f из L^2.

Система тригонометрич. функций является *замкнутой системой*, т. е. если $f\in L^2$, то справедливо *Парсеваля равенство*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx,$$

где a_k, b_k—коэффициенты Фурье функции f. В частности, для функций f из L^2 сходится ряд

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2). \qquad (4)$$

Имеет место и обратное утверждение: если для системы чисел a_k, b_k ряд (4) сходится, то эти числа являются коэффициентами Фурье нек-рой функции $f\in L^2$ [Ф. Рисс (F. Riesz), Э. Фишер (E. Fischer), 1907].

Коэффициенты Фурье каждой интегрируемой функции стремятся к нулю. Эту теорему наз. теоремой Римана — Лебега. Б. Риман (B. Riemann) доказал ее для рядов Фурье—Римана, А. Лебег (H. Lebesgue) — для рядов Фурье—Лебега.

Если функция f абсолютно непрерывна, то Ф. р. производной f' можно получить почленным дифференцированием Ф. р. функции f. Отсюда следует, что если производная порядка $r\geqslant 0$ функции f абсолютно непрерывна, то для коэффициентов Фурье функции f справедлива оценка

$$a_k,\ b_k=o(k^{-(r+1)}),\quad k\longrightarrow\infty.$$

Первый признак сходимости Ф. р. получил П. Дирихле (P. Dirichlet, 1829). Его результат (*Дирихле теорема*) можно сформулировать так: если функция f имеет на периоде конечное число максимумов и минимумов и непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, в к-рых она может иметь разрывы 1-го рода, то Ф. р. функции f сходится для всех x, причем в точках непрерывности он сходится к $f(x)$, а в точках разрыва к $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. В дальнейшем это утверждение было распространено на произвольные функции ограниченной вариации [К. Жордан (C. Jordan), 1881].

Согласно принципу локализации, доказанному Б. Риманом (1853), сходимость или расходимость Ф. р. функции f в точке x и значение суммы в случае сходимости зависят только от поведения функции f в как угодно малой окрестности точки x.

Известно много разных признаков сходимости Ф. р. в точке. Р. Липшиц (R. Lipschitz, 1864) установил, что Ф. р. функции f сходится в точке x, если для достаточно малых h выполнено условие $|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|^{\alpha}$, где M и α — нек-рые положительные постоянные. Более общим является *Дини признак*: Ф. р. функции f сходится в точке x к числу S, если сходится интеграл

$$\int_0^{\pi}|\varphi_x(t)|\,\frac{dt}{t},$$

где $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2S$. В качестве числа S обычно выступает значение $f(x)$. Напр., если Ф. р. функции f сходится в точке x, в к-рой эта функция непрерывна, то сумма ряда обязательно равна $f(x)$.

А. Лебег (1905) доказал, что если при $h\to 0$ справедливы оценки

$$\int_0^{h}|\varphi_x(t)|\,dt=o(h),$$

$$\int_h^{\pi}|\varphi_x(t+h)-\varphi_x(t)|\,\frac{dt}{t}=o(1),$$

то Ф. р. функции f сходится в точке x к числу S. Этот *Лебега признак* сильнее как всех приведенных выше, так и *Валле Пуссена признака* и *Юнга признака*. Но проверка его обычно затруднительна.

Признак сходимости другого типа дает теорема Харди — Литлвуда (1932): Ф. р. функции f сходится в точке x, если выполнены следующие условия:

1) при $h\to 0$

$$f(x+h)-f(x)=o\left(\ln^{-1}\frac{1}{|h|}\right),$$

2) для коэффициентов Фурье функции f справедливы оценки

$$a_k=O(k^{-\delta}),\ b_k=O(k^{-\delta}),\ \delta>0.$$

Наряду с признаками сходимости Ф. р. в точке, изучаются признаки равномерной сходимости. Пусть функция f имеет период 2π и непрерывна. Тогда ее Ф. р. сходится к ней равномерно на всей числовой оси, если $\omega(f,\delta)$ — *непрерывности модуль* функции f — удовлетворяет условию

$$\omega(f,\ \delta)\ln\delta\longrightarrow 0\ \text{ при }\ \delta\longrightarrow 0$$

(*Дини—Липшица признак*) или если f имеет ограниченную вариацию (*Жордана признак*).

Отсюда можно получать признаки равномерной сходимости Ф. р. на нек-ром отрезке, если воспользоваться принципом локализации для равномерной сходимости, к-рый формулируется так. Если две функции равны на отрезке $[a,\ b]$, то на каждом строго внутреннем к нему отрезке $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, Ф. р. этих функций или оба равномерно сходятся или оба не являются равномерно сходящимися. Другими словами, равномерная сходимость Ф. р. функции f на отрезке зависит только от поведения функции f в произвольно малом расширении этого отрезка.

П. Дюбуа-Реймон (P. Du Bois Reymond, 1873) установил, что непрерывность функции в нек-рой точке не гарантирует сходимость ее Ф. р. в этой точке. В дальнейшем было доказано, что Ф. р. непрерывной функции может расходиться на всюду плотном множестве точек меры нуль, имеющем вторую категорию.

Если о функции не предполагать ничего, кроме интегрируемости, то ее Ф. р. может оказаться расходящимся почти всюду или даже всюду. Первые примеры таких функций построил А. Н. Колмогоров (1923). Позднее было выяснено, что этим свойством могут обладать Ф. р. и самой функции и функции, сопряженной с ней.

Еще в 1915 Н. Н. Лузин высказал гипотезу, что Ф. р. каждой функции из L^2 сходится почти всюду. Долгое время в этом направлении получали лишь частные результаты. В общем виде задача оказалась очень трудной и только в 1966 Л. Карлесон (L. Carleson) доказал справедливость этой гипотезы (см. *Карлесона теорема*). Ф. р. функций из L^p при $p>1$ также сходятся почти всюду. Пример Колмогорова показывает, что дальнейшее усиление этого результата в терминах пространств L^p невозможно.

Поскольку частные суммы Ф. р. не всегда сходятся, рассматривается *суммирование рядов Фурье*, когда для представления функции используются те или иные средние частных сумм ее Ф. р. Один из наиболее простых примеров — *Фейера суммы*, являющиеся средними арифметическими частных сумм Ф. р. $s_k(f,\ x)$,

$$\sigma_n(f,\ x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k(f,\ x).$$

Для каждой интегрируемой функции f суммы $\sigma_n(f,\ x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, при этом сходятся в каждой точке непрерывности f, а если f непрерывна всюду, то сходятся равномерно.

Согласно *Данжуа—Лузина теореме*, если тригонометрич. ряд (2) сходится абсолютно на множестве положительной меры, то сходится ряд

$$\sum_k(|a_k|+|b_k|)\qquad(5)$$

и, значит, ряд (2) абсолютно сходится для всех x. Таким образом, абсолютная сходимость ряда (2) эквивалентна сходимости ряда (5).

С. Н. Бернштейн (1934) доказал, что если модуль непрерывности $\omega(f,\ \delta)$ функции f удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(f,\ \frac{1}{n}\right)<\infty,$$

то Ф. р. функции f сходится абсолютно. Это условие нельзя ослабить: если функция типа модуля непрерывности $\omega(\delta)$ такова, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

расходится, то найдется функция f, для модуля непрерывности к-рой выполняется оценка $\omega(f,\ \delta)\leqslant\omega(\delta)$, а ее Ф. р. не сходится абсолютно.

В частности, абсолютно сходятся Ф. р. функций, удовлетворяющих *Липшица условию* порядка $\alpha>\frac{1}{2}$. А при $\alpha=\frac{1}{2}$ абсолютной сходимости может не быть (С. Н. Бернштейн, 1914).

Если функция f имеет ограниченную вариацию и ее модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\omega\left(f,\ \frac{1}{n}\right)}<\infty,\qquad(6)$$

то Ф. р. функции f сходится абсолютно (см. [9]). Условие (6) ослабить нельзя (см. [10]).

В отличие от предыдущих следующая теорема дает критерий абсолютной сходимости для индивидуальной функции. Для абсолютной сходимости Ф. р. функции необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,e_n(f),$$

где $e_n(f)$ — наилучшее приближение функции f в метрике пространства L^2 тригонометрич. полиномами, содержащими n гармоник (см. [11]).

Ряд (2) можно рассматривать как действительную часть степенного ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-ib_k)\,e^{ikx}.$$

Мнимую часть

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k\cos kx+a_k\sin kx)\qquad(7)$$

наз. рядом, сопряженным с рядом (2).

Пусть $f\in L$ и (2) — ее Ф. р. Тогда для почти всех x существует функция

$$\tilde f(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

(И. И. Привалов, 1919). Функцию $\tilde f$ наз. сопряженной с f, она может быть неинтегрируемой. Но если $\tilde f\in L$, то Ф. р. функции $\tilde f$ является ряд (7) (В. И. Смирнов, 1928).

Во многих случаях по свойствам функции f или ее Ф. р. (2) удается установить те или иные свойства сопряженного ряда (7), напр. его сходимость в метрике L^p, сходимость или суммируемость в точке, почти всюду и т. п.

Изучаются также свойства Ф. р. при специальных предположениях об их коэффициентах. Напр., *лакунарные тригонометрические ряды*, когда отличны от

нуля только коэффициенты с номерами n_m, образующими *лакунарную последовательность*, т. е. такими, что $n_{m+1}/n_m \geqslant \lambda > 1$. Другой пример специальных рядов — ряды с монотонными коэффициентами.

Все сказанное выше относилось к Ф. р. вида (2). Для Ф. р. по переставленной тригонометрич. системе нек-рые свойства Ф. р. по тригонометрич. системе, взятой в обычном порядке, не имеют места. Напр., существует такая непрерывная функция, что ее Ф. р. после нек-рой перестановки расходится почти всюду (см. [12] — [15]).

Теория Ф. р. для функций многих переменных разработана в меньшей степени. Часть многомерных результатов аналогична одномерным. Но имеются и существенные отличия.

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_N)$ — точка N-мерного пространства, $k=(k_1, \ldots, k_N)$ есть N-мерный вектор с целочисленными координатами и $(k, x)=k_1x_1+\ldots+k_Nx_N$. Для функции $f(x)$, имеющей период 2π по каждой переменной и интегрируемой по Лебегу на N-мерном кубе $[0,2\pi]^N$, Ф. р. по тригонометрич. системе наз. ряд

$$\sum\nolimits_k c_k e^{i(k, x)}, \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем k и

$$c_k=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i(k, x)}\, dx$$

— коэффициенты Фурье функции f. Ф. р. (8) записан в комплексной форме. Запись его в тригонометрич. форме как ряда по произведениям косинусов и синусов кратных дуг более громоздка.

Возможны различные определения частных сумм ряда (8), напр. частные суммы по прямоугольникам

$$\sum\nolimits_{|k_1|\leqslant n_1}\cdots\sum\nolimits_{|k_N|\leqslant n_N} c_k e^{i(k, x)},$$

по кругам

$$\sum\nolimits_{|k|\leqslant n} c_k e^{i(k, x)}, \tag{9}$$

где n — радиус и $|k|=\sqrt{k_1^2+\ldots+k_N^2}$.

Для представления функций круговые частные суммы (9) менее пригодны, чем их средние Рисса

$$\sum\nolimits_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)^{\alpha} c_k e^{i(k, x)}.$$

Для средних Рисса порядка $\alpha\geqslant\frac{N-1}{2}$ Ф. р. функций из L^2 справедлив принцип локализации, а для меньших α это не так (С. Бохнер, S. Bochner, 1936). Средние Рисса круговых частных сумм критич. порядка $\alpha=\frac{N-1}{2}$ играют существенную роль и в других вопросах Ф. р. функций многих переменных.

Существует непрерывная функция двух переменных, Ф. р. к-рой не сходится по прямоугольникам ни в одной внутренней точке квадрата $[0, 2\pi]^2$ (см. [16]).

Нек-рые результаты, относящиеся к Ф. р. по тригонометрич. системе, допускают значительные обобщения, напр. могут быть соответствующим образом перенесены на спектральные разложения, отвечающие самосопряженным эллиптическим дифференциальным операторам.

Лит., [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965; [3] Харди Г. Х., Рогозинский В. В., Ряды Фурье, пер. с англ., М., 1959; [4] Лузин Н. А., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951, [5] Lebesgue H., Leçons sur les séries trigonométriques, P., 1906; [6] Паплаускас А. Б., Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М., 1966; [7] Ульянов П. Л., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 1, с. 3—69; [8] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М., там же, 1976, т. 31, в. 6, с. 28—83, [9] Salem R., «Duke Math. J.», 1943, v. 10, p. 23—31; [10] Бочкарев С. В., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1973, т. 37, с. 630—38; [11] Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1955, т. 102, с. 37—40; [12] Kolmogoroff A., Menschoff D., «Math. Z.», 1927, Bd 26, S. 432—41; [13] Zahorski Z., «C. r. Acad. sci.», 1960, t 251, p. 501—03; [14] Ульянов П. Л., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3, с. 61—142; [15] Олевский А. М., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, с. 28—31, [16] Fefferman C., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 77, p. 191—95.

С. А. Теляковский.

ФУРЬЕ ЧИСЛО — один из критериев подобия нестационарных тепловых процессов. Характеризует соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемой системы (тела), к-рый зависит от размеров тела и коэффициента его теплопроводности. Ф. ч. $\mathrm{Fo}=at_0/l^2$, где $a=\lambda/\rho c$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, c — удельная теплоемкость, l — характерный линейный размер тела, t_0 — характерное время изменения внешних условий.

Название по имени Ж. Фурье (J. Fourier).

По материалам одноименной статьи БСЭ-3.

ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ ИНТЕГРАЛ, интеграл Ганкеля,— аналог *Фурье интеграла* для *Бесселя функций*, имеющий вид

$$f(x)=\int_0^{\infty}\lambda J_\nu(\lambda x)\, d\lambda\int_0^{\infty} y J_\nu(\lambda y)\, f(y)\, dy. \tag{*}$$

Формула (*) может быть получена из *Фурье—Бесселя ряда* для интервала $(0, l)$ переходом к пределу при $l\to+\infty$. Г. Ганкель (H. Hankel, 1875) установил теорему: если функция $f(x)$ кусочно непрерывная и имеет ограниченную вариацию на любом интервале $0<x<l$, интеграл

$$\int_0^{\infty}\sqrt{x}\,|f(x)|\,dx$$

сходится, то формула (*) справедлива при $\nu>-1/2$ во всех точках непрерывности $f(x)$, $0<x<+\infty$. В точках разрыва x_0, $0<x_0<+\infty$, правая часть формулы (*) равна $[f(x_0-0)+f(x_0+0)]/2$, при $x_0=0$ она дает $f(0+)/2$.

Аналоги Ф.—Б. и. (*) для цилиндрич. функций $Z_\nu(x)$ других типов также справедливы, но пределы интегралов должны быть соответственно изменены.

Е. Д. Соломенцев.

ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ РЯД — разложение функции $f(x)$ в ряд

$$f(x)=\sum\nolimits_{m=1}^{\infty} c_m J_\nu\left(x_m^{(\nu)}\cdot\frac{x}{a}\right),\ 0<x<a, \tag{*}$$

где $f(x)$ — заданная в интервале $(0, a)$ функция, $J_\nu(x)$ — *Бесселя функция* порядка $\nu>-\frac{1}{2}$, $x_m^{(\nu)}$ — положительные нули функции $J_\nu(x)$, расположенные в порядке возрастания; коэффициенты ряда c_m имеют следующие значения

$$c_m=\frac{2}{a^2J_{\nu+1}^2\left(x_m^{(\nu)}\right)}\int_0^a rf(r)J_\nu\left(x_m^{(\nu)}\cdot\frac{r}{a}\right)dr.$$

Если $f(x)$ — кусочно непрерывная функция, заданная на интервале (o, a) и интеграл

$$\int_0^a\sqrt{r}\,|f(r)|\,dr<\infty,$$

то Ф.— Б. р. сходится и сумма его равна $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ в каждой внутренней точке x интервала $(0, a)$, в окрестности к-рой $f(x)$ имеет ограниченную вариацию.

Л. Н. Кармазина.

ФУРЬЕ — СТИЛТЬЕСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — одно из *интегральных преобразований*, родственное *Фурье преобразованию*. Пусть функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение на $(-\infty, +\infty)$. Функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,dF(y) \tag{*}$$

наз. преобразованием Фурье—Стилтьеса для F. Функция φ, определенная интегралом (1), ограниченна и непрерывна. Всякая периодич. функция $\varphi(x)$, разлагающаяся в ряд Фурье $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ с абсолютно сходящимся рядом коэффициентов, может быть записана в форме интеграла (*) с $F(x)=\sum_{n\leqslant x} a_n$.

Формула (*) допускает обращение: если $F(x)$ имеет ограниченное изменение и

$$\mathring{F}(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2},\ \text{то}$$

$$\mathring{F}(x)-\mathring{F}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\frac{e^{i\xi x}-1}{i\xi}\,d\xi,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения на ∞.

Если в формуле (*) в качестве функции $F(x)$ допустить лишь неубывающие функции ограниченной вариации, то совокупность получающихся непрерывных функций $\varphi(x)$ полностью характеризуется свойством: для любой системы действительных чисел $t_1,\ldots,t_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}\varphi(t_i-t_j)\,\xi_i\overline{\xi}_j\geqslant 0,$$

каковы бы ни были комплексные числа $\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_n$ (теорема Бохнера — Хинчина). Такие функции наз. положительно определенными. Ф.-С. п. находит широкое применение в теории вероятностей, где неубывающую функцию

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(x)$$

подчиняют дополнительным ограничениям $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=1$, $P(x)$ непрерывна слева, и именуют распределением, функцию

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}\,dP(y)$$

— характеристической функцией [распределения $P(x)$]. Теорема Бохнера—Хинчина выражает тогда необходимое и достаточное условие того, что непрерывная функция $\Phi(x)$ [для к-рой $\Phi(0)=1$] является характеристической функцией нек-рого распределения.

Теория Ф.-С. п. развита и в n-мерном случае.

Лит. [1] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962, [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965, [3] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969. *П. И. Лизоркин.*

ФУРЬЕ — СТИЛТЬЕСА РЯД — ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dF(x),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dF(x),$$

$$n=0,\ 1,\ \ldots,$$

(интегралы понимаются в смысле Стилтьеса), $F(x)$ — функция с ограниченным изменением на $[0,\ 2\pi]$. Иначе можно записать

$$dF(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\qquad(*)$$

Если $F(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,\ 2\pi]$, то (*) есть ряд Фурье функции $F'(x)$. В комплексной форме ряд (*) имеет вид

$$dF(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx},$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inx}\,dF(x),$$

при этом

$$F(x)-c_0x\sim C_0+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{in}e^{inx},\quad n\neq 0,$$

и $\{c_n\}$ будет ограниченной. Если $c_n\to 0$, то F непрерывна на $[0,\ 2\pi]$. Существует непрерывная функция $F(x)$, для к-рой $c_n\not\to 0$ при $n\to+\infty$. Ряд (*) суммируем методом Чезаро $(C,\ r)$, $r>0$, почти всюду на $[0,\ 2\pi]$ к $F'(x)$.

Лит. [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965. *А. А. Конюшков.*

X

ХААРА МЕРА — ненулевая положительная мера μ на σ-кольце M подмножеств E локально компактной группы G, порожденном семейством всех компактных подмножеств, принимающая конечные значения на всех компактных подмножествах в G и удовлетворяющая либо условию левоинвариантности: $\mu(E)=\mu(gE)$ для всех $E\in M$, $g\in G$, где $gE=\{gx|x\in E\}$, либо условию правоинвариантности: $\mu(E)=\mu(Eg)$ для всех $E\in M$, $g\in G$, где $Eg=\{xg|x\in E\}$. Соответственно говорят о лево- или правоинвариантной Х. м. Всякая Х. м. μ-регулярна, т. е.

$$\mu(E)=\sup_k\{\mu(K)\mid K\subset E,\ K \text{ компактно}\}$$

для всех $E\in M$.

Левоинвариантная (а также правоинвариантная) Х.м. существует и определена однозначно с точностью до положительного множителя; это было установлено А. Хааром [1] (при дополнительном предположении о сепарабельности группы G).

Если f — финитная непрерывная функция на G, то f интегрируема относительно левоинвариантной Х. м. на G и соответствующий интеграл левоинвариантен (см. *Инвариантное интегрирование*), т. е.

$$\int_G f(g)\,d\mu(g)=\int_G f(g_0g)\,d\mu(g)$$

для всех $g_0\in G$. Аналогичным свойством обладает правоинвариантная Х. м. Мера Хаара всей группы G конечна тогда и только тогда, когда G компактна.

Если μ — левоинвариантная Х. м. на G, то для любого $g_0\in G$ имеет место равенство

$$\int_G f(gg_0^{-1})d\mu(g)=\Delta(g_0)\int_G f(g)\,d\mu(g),$$

где Δ — непрерывный гомоморфизм группы G в мультипликативную группу R^+ положительных действительных чисел, не зависящий от выбора непрерывной финитной функции f на G. Гомоморфизм Δ наз. модулем группы G; мера $\Delta(g^{-1})d\mu(g)$ является правоинвариантной Х. м. на G. Если $\Delta(g)\equiv1$, то группа G наз. унимодулярной; в этом случае левоинвариантная Х. м. является также и правоинвариантной и наз. двусторонне инвариантной. В частности, любая компактная, дискретная и абелева локально компактная группа, а также любая связная полупростая или нильпотентная группа Ли унимодулярна. Унимодулярность группы G равносильна также тому, что любая левоинвариантная Х. м. μ на G инверсионно инвариантна, т. е. $\mu(E^{-1})=\mu(E)$ для всех $E\in M$.

Если G — группа Ли, то интеграл по левоинвариантной (правоинвариантной) Х. м. на G определяется формулой

$$\int_G f(x)\,d\mu(x)=\int_G f\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n,$$

где ω_i — линейно независимые левоинвариантные (правоинвариантные) дифференциальные формы 1-го порядка на G (см. *Маурера — Картана форма*), $n=\dim G$. Модуль группы Ли G определяется формулой

$$\Delta(x)=|\det \mathrm{Ad}\,x|,\quad x\in G,$$

где Ad — присоединенное представление.

Примеры. 1) Х. м. на аддитивной группе $\mathbb{R}$ и на факторгруппе $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (группа вращений окружности) совпадает с обычной лебеговской мерой. 2) Полная линейная группа $GL(n,\Phi)$, $\Phi=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, унимодулярна, причем Х. м. имеет вид

$$d\mu(x)=|\det x|^{-k}\,dx,$$

где $k=n$ при $\Phi=\mathbb{R}$ и $k=2n$ при $\Phi=\mathbb{C}$, а dx — лебеговская мера в евклидовом пространстве всех матриц порядка n над полем Φ.

Если G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа, X — однородное пространство G/H, Δ и δ — модули групп G и H соответственно, χ — непрерывный гомоморфизм группы G в $\mathbb{R}^+$, задаваемый формулой

$$\chi(h)=\delta(h)\Delta(h^{-1}),\quad h\in H,$$

то существует положительная мера ν на σ-кольце T множеств $E\subset G/H=X$, порожденном семейством компактных подмножеств в X, однозначно определяемая условием:

$$\int_{G/H}\Big(\int_H f(gh)\,d\mu(h)\Big)d\nu(g)=\int_G f(g)\,\chi(g)\,d\nu(g),$$

где f — любая непрерывная финитная функция на G, $g=gH\in X$, причем

$$\int_X h(g^{-1}x)\,\nu(x)=f(g)\int_X h(x)\,d\nu(x)$$

для всех непрерывных финитных функций f на X.

Лит.: [1] Хаар А., «Ann. Math.», 1933, v. 34, p. 147—69, [2] Бурбаки Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1970, [3] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950, [4] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956, [5] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

Д. П. Желобенко, А. И. Штерн.

ХААРА СИСТЕМА — одна из классических ортонормированных систем функций. Функции Хаара $\chi_n(t)$ этой системы определяются на отрезке $[0,1]$ следующим образом:

$$\chi_1(t)\equiv1 \text{ на } [0,1];$$

если $n=2^m+k$, $k=1,\ldots,2^m$, $m=0,1,\ldots$, то

$$\chi_n(t)=\begin{cases}\sqrt{2^m} & \text{при } t\in((2k-2)/2^{m+1},\,(2k-1)/2^{m+1}),\\ -\sqrt{2^m} & \text{при } t\in((2k-1)/2^{m+1},\,2k/2^{m+1}),\\ 0 & \text{при } t\notin[(k-1)/2^m,\,k/2^m].\end{cases}$$

Во внутренних точках разрыва функции Хаара полагаются равными полусумме своих предельных значений справа и слева, а на концах отрезка $[0,1]$ — своим предельным значениям изнутри отрезка.

Система $\{\chi_n(t)\}$ определена А. Хааром ([1]). Она ортонормирована на отрезке $[0,1]$. Ряд Фурье по этой системе от любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции сходится к ней равномерно. Более того, если

$\omega(\sigma, f)$ — модуль непрерывности функции $f(t)$ на отрезке $[0, 1]$, то для частных сумм $S_n(t, f)$ порядка n ряда Фурье—Хаара функции $f(t)$ справедливо неравенство

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - S_n(t, f)| \leqslant 12\omega(1/n, f), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Х. с. является базисом в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$. Если $f(t) \in L_p[0, 1]$ и $\omega_p(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(t)$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, то (см. [3])

$$\|f(t) - S_n(t, f)\|_{L_p[0, 1]} \leqslant 24\omega_p(1/n, f), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Х. с. является безусловным базисом в пространстве $L_p[0, 1]$ при $1 < p < \infty$.

Если функция $f(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0, 1]$, то ее ряд Фурье—Хаара сходится к ней в любой точке Лебега этой функции и, в частности, почти всюду на $[0, 1]$. При этом сходимость (и абсолютная сходимость) ряда Фурье—Хаара в фиксированной точке отрезка $[0, 1]$ зависит лишь от значений функции в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Для рядов Фурье — Хаара существенно отличаются друг от друга следующие свойства: а) абсолютная сходимость всюду; б) абсолютная сходимость почти всюду; в) абсолютная сходимость на множестве положительной меры; г) абсолютная сходимость ряда коэффициентов Фурье. Для тригонометрич. рядов все эти свойства равносильны.

Свойства коэффициентов Фурье — Хаара резко отличаются от свойств тригонометрич. коэффициентов Фурье. Напр., если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, а $a_n(f)$ — ее коэффициенты Фурье по системе $\{\chi_n(t)\}$, то справедливо неравенство

$$|a_n(f)| \leqslant (1/\sqrt{2n})\,\omega(1/n, f), \quad n \geqslant 2,$$

откуда следует, что

$$a_n(f) = o(n^{-1/2}), \quad n \to \infty.$$

В то же время коэффициенты Фурье — Хаара непрерывных функций не могут убывать слишком быстро если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и

$$a_n(f) = o(n^{-3/2}),$$

то $f(t) \equiv \text{const}$ на $[0, 1]$.

Для функций $f(t) \in L^p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$, справедливы следующие оценки (см. [3]):

$$|a_n(f)| \leqslant n^{(1/p)-(1/2)}\omega_p(1/n, f), \quad n = 1, 3, \ldots,$$

$$\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |a_n(f)|^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 8 \cdot 2^{n(1/p-1/2)}\omega_p(1/2^n, f), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Если же $f(t)$ имеет конечную вариацию $V(f)$ на отрезке $[0,1]$, то

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |a_n(f)| \leqslant (3/2\sqrt{2^n})\,V(f), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Все эти неравенства являются точными в смысле порядка убывания их правых частей при $n \to \infty$ (в соответствующих классах) (см. [3]).

Интересной особенностью отличаются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(t), \qquad (*)$$

безусловно сходящиеся почти всюду: если ряд вида $(*)$ при любом порядке следования его членов сходится почти всюду на множестве $E \subset [0, 1]$ положительной меры Лебега (исключительное множество меры нуль может зависеть от порядка следования членов ряда $(*)$), то этот ряд сходится абсолютно почти всюду на $[0, 1]$. Для рядов вида $(*)$ справедлив следующий критерий: чтобы ряд $(*)$ сходился почти всюду на измеримом множестве $E \subset [0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(t)$ сходился почти всюду на E.

Ряды Хаара могут служить для представления измеримых функций: для любой конечной почти всюду на отрезке $[0,1]$ измеримой функции $f(t)$ существует ряд вида $(*)$, к-рый почти всюду на $[0,1]$ сходится к функции $f(t)$. При этом конечность функции $f(t)$ существенна: не существует ряда вида $(*)$, сходящегося к $+\infty$ (или $-\infty$) на множестве положительной меры Лебега.

Лит.: [1] Haar A., «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 331—71; [2] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963, [3] Ульянов П. Л., «Матем. сб.», 1964, т. 63, № 3, с. 356—91, [4] его же, там же, 1967, т. 72, № 2, с. 193—225, [5] Голубов Б. И., в сб. Итоги науки. Математический анализ 1970, М., 1971, с. 109—43.

Б. И. Голубов.

ХААРА УСЛОВИЕ — условие на непрерывные линейно независимые на ограниченном замкнутом множестве M евклидова пространства функции $x_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$. Сформулировано А. Хааром ([1]). Х. у. гарантирует для любой непрерывной на M функции $f(t)$ единственность полинома наилучшего приближения (н. п.) по системе $\{x_k(t)\}$, т. е. полинома

$$P_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t), \qquad (*)$$

для к-рого

$$\max_{t \in M} |f(t) - P_{n-1}(t)| =$$

$$= \min_{\{a_k\}} \max_{t \in M} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k(t) \right|.$$

Х. у. состоит в том, что любой нетривиальный полином вида $(*)$ должен иметь в M не более $n-1$ различных нулей. Чтобы для любой непрерывной на M функции $f(t)$ существовал единственный полином н. п. по системе $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$, необходимо и достаточно, чтобы эта система удовлетворяла Х. у. Систему функций, удовлетворяющих Х.у., наз. *Чебышева системой*. Для таких систем справедлива *Чебышева теорема* и *Валле Пуссена теорема* (об альтернансе). Х. у. достаточно для единственности полинома н. п. по системе $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$ в метрике $L[a, b]$ ($M = [a, b]$) для любой непрерывной на $[a, b]$ функции.

Лит.: [1] Haar A., «Math. Ann.», 1918, Bd 78, [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965.

Ю. Н. Субботин.

ХАДВИГЕРА ГИПОТЕЗА — задача комбинаторной геометрии о покрытии выпуклого тела фигурами специального вида, выдвинутая Х. Хадвигером [1]. Пусть K — выпуклое тело n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а $b(K)$ — минимальное число тел, гомотетичных K с коэффициентом гомотетии k, $0 < k < 1$, достаточное для покрытия тела K. Х. г. заключается в следующем: для любого ограниченного $K \subset \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$n + 1 \leqslant b(K) \leqslant 2^n. \qquad (*)$$

Причем неравенство $b(K) = 2^n$ характеризует параллелепипед (см. [1]). Х. г. подтверждена для случая $n \leqslant 2$; для $n \geqslant 3$ имеются (1984) лишь частные результаты. Напр., для любого n-мерного ограниченного многогранника $K \subset \mathbb{R}^n$, каждые две вершины к-рого принадлежат двум различным параллельным опорным гиперплоскостям к K, справедливы неравенства $(*)$. Причем $b(K)$ совпадает с числом вершин K, а в множестве таких многогранников равенство $b(K) = 2^n$ проверяется только для параллелепипеда. Этот результат связан с решением одной из *Эрдёша задач* о числе точек в $\mathbb{R}^n$, каждые три из к-рых образуют не тупоугольный треугольник. Х. г. связана и с *покрытия*, *разбиения* и *освещения задачами*. Напр., Х. г. может быть рассмотрена как обобщение *Борсука проблемы*

о разбиении множества на части меньшего диаметра для случая, когда $\mathbb{R}^n$ заменяется пространством Минковского. Для неограниченного $K \subset \mathbb{R}^n$ число $b(K)$ либо равно $b(K')$, где K' выпуклое и ограниченное тело с меньшим числом измерений, либо ∞. Напр., для $K \subset \mathbb{R}^3$ число $b(K)$ принимает одно из значений: 1, 2, 3, 4, ∞ (см. [2]).

Лит. [1] Hadwiger H., «Archiv Math.», 1957, v. 8, p 212—13, [2] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Кишинев, 1978. *П. С. Солтан.*

ХАНА РАЗЛОЖЕНИЕ — разбиение множества X, на σ-алгебре Σ подмножеств к-рого задана σ-аддитивная функция множеств f, на два подмножества X_+, X_-, $X_+ \cup X_- = X$ такие, что $f(M) \geqslant 0$, если $M \in \Sigma$, $M \subset X_+$ и $f(M) \leqslant 0$, если $M \in \Sigma$, $M \subset X_-$. Такое разбиение X, вообще говоря, не однозначно.

Лит. [1] Данфорд Г., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962. *В. И. Соболев.*

ХАНА — БАНАХА ТЕОРЕМА: линейный функционал $f(x)$, определенный на линейном многообразии L действительного или комплексного векторного пространства X, может быть продолжен до линейного функционала $F(X)$, определенного на всем X, если существует полунорма $p(x)$ такая, что

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (*)$$

для любого $x \in L$. Такое продолжение определяется, вообще говоря, неоднозначно, но для любого из них неравенство

$$|F(x)| \leqslant p(x)$$

при любом $x \in X$ сохраняется.

В случае действительного пространства X полунорму можно заменить положительно однородным функционалом, а неравенство $(*)$ — односторонним неравенством $f(x) \leqslant p(x)$, остающимся справедливым и для продолженного функционала. Если X — банахово пространство, то в качестве $p(x)$ можно взять $\|f\|_L \cdot \|x\|$, и тогда $\|F\|_X = \|f\|_L$. Доказана Х. Ханом (1927) и независимо С. Банахом (1929).

Лит. [1] Hahn H., «J. reine und angew. Math.», 1927, Bd 157, S 214, [2] Banach S., «Stud. math.», 1929, v. 1, p. 211—16, 223—39; [3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981, [4] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977. *В. И. Соболев.*

ХАНТА — СТЕЙНА ТЕОРЕМА — утверждение, содержащее условия, при выполнении к-рых существует максиминный инвариантный критерий в задаче статистич. проверки гипотез.

Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, надлежит проверить гипотезу $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, причем предполагается, что семейство $\{\mathsf{P}_\theta\}$ доминировано нек-рой σ-конечной мерой μ. Далее, пусть на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ действует группа преобразований $G = \{g\}$, оставляющая инвариантной задачу проверки гипотезы H_0 против H_1, и пусть $\mathcal{A}$ — борелевское σ-поле подмножеств группы G. Х.—С. т. утверждает, что если выполняются условия:

1) отображение $(x, g) \longrightarrow gx$ $(\mathcal{B} \times \mathcal{A})$-измеримо, причем $Ag \in \mathcal{B}$ для любого множества $A \in \mathcal{A}$ и любого элемента $g \in G$;

2) на $\mathcal{A}$ существует асимптотически правоинвариантная последовательность мер ν_n в том смысле, что для любых $g \in G$ и $A \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n \to \infty} |\nu_n(Ag) - \nu_n(A)| = 0,$$

то для любого статистич. критерия, предназначенного для проверки H_0 против H_1, критич. функция к-рого есть $\varphi(x)$, найдется (почти) инвариантный критерий с критич. функцией $\psi(x)$ такой, что при всех $\theta \in \Theta$

$$\inf_{\bar{G}} \mathsf{E}_{g\theta}\, \varphi(X) \leqslant \mathsf{E}_\theta\, \psi(X) \leqslant \sup_{\bar{G}} \mathsf{E}_{g,\theta} \varphi(X),$$

где $\bar{G} = \{\bar{g}\}$ — группа, индуцированная группой G.

Из Х.—С. т. следует, что если существует статистический критерий уровня α с критич. функцией φ_0, максимизирующий $\inf_{\theta \in \Theta_1} \mathsf{E}_\theta \varphi_0(X)$, то существует и (почти) инвариантный критерий с таким же свойством.

Условие 2) заведомо выполняется, когда группа G является локально компактной, на к-рой задана правоинвариантная мера Хаара. Х.—С. т. показывает, что если группа G удовлетворяет условиям теоремы, то в любой задаче статистич. проверки гипотез, инвариантной относительно G, в к-рой существует равномерно наиболее мощный критерий, этот критерий является максиминным.

Напротив, пусть в нек-рой задаче статистич. проверки гипотез, инвариантной относительно группы G, установлено, что равномерно наиболее мощный критерий не является максиминным. Это означает, что нарушены условия Х.-С. т. В связи с этим возникает вопрос: может ли заданный критерий быть максиминным в другой задаче проверки гипотез, инвариантной относительно той же группы G? Ответ на этот вопрос уже зависит не только от группы G, но и от самого семейства распределений $\{P_\theta\}$.

Х.—С. т. была получена Хантом (G. Hunt) и Стейном (C. Stein) в 1946, см. [1].

Лит. [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979, [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975. *М. С. Никулин.*

ХАРАКТЕР C^*-алгебры A — ненулевой полунепрерывный снизу полуконечный *след* f на C^*-*алгебре* A, удовлетворяющий следующему условию: если φ — полунепрерывный снизу полуконечный след на C^*-алгебре A и $\varphi(x) \leqslant f(x)$ для всех $x \in A^+$, то $\varphi(x) = \lambda f(x)$ для нек-рого неотрицательного числа λ и всех элементов $x \in A^+$, лежащих в замыкании идеала $\mathfrak{N}_f$, порожденного множеством $\{x : x \in A^+,\ f(x) < +\infty\}$. Существует канонич. взаимно однозначное соответствие между множеством классов квазиэквивалентности ненулевых факторпредставлений C^*-алгебры A, допускающих след, и множеством характеров C^*-алгебры A, определенных с точностью до положительного множителя; это соответствие устанавливается формулой $f(x) = \chi(\pi(x))$, $x \in A$, где π — факторпредставление C^*-алгебры A, допускающее след χ. Если след f на C^*-алгебре A конечен, то Х. C^*-алгебры наз. конечным характером; конечный характер непрерывен. Существует каноническое взаимнооднозначное соответствие между множеством классов квазиэквивалентности ненулевых факторпредставлений конечного типа C^*-алгебры A и множеством конечных Х. C^*-алгебры A с нормой 1. Если A коммутативна, то любой характер коммутативной алгебры A есть Х. C^*-алгебры A. Если A — групповая C^*-алгебра компактной группы G, то Х. C^*-алгебры A конечны, и Х. C^*-алгебры A с нормой 1 соответствует нормализованным характерам компактной группы G.

Лит. [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974. *А. И. Штерн.*

ХАРАКТЕР ассоциативной алгебры A над полем k — ненулевой гомоморфизм алгебры A в k. Х. алгебры A иногда называют также мультипликативным функционалом на A. Любой Х. $\chi: A \longrightarrow k$ сюръективен и обладает свойством $\chi(1) = 1$. Ядро $\operatorname{Ker}\chi$ есть максимальный идеал в A.

Если A — конечно порожденная коммутативная алгебра и поле k алгебраически замкнуто, то любой максимальный идеал в A является ядром единствен-

ного Х., так что соответствие между Х. и максимальными идеалами биективно. Совокупность Specm A всех Х. коммутативной алгебры A, называемая ее максимальным спектром, обладает естественной структурой алгебраического *аффинного многообразия*. Каждый элемент $a \in A$ определяет функцию $\tilde{a}$ на Specm A, заданную формулой $\tilde{a}(\chi) = \chi(a)$, причем функции $\tilde{a}$ составляют алгебру регулярных функций на Specm A. Обратно, если X — аффинное алгебраич. многообразие и A — алгебра регулярных функций на X, то Specm A отождествляется с X: каждой точке $x \in X$ соответствует характер χ_x, действующий по формуле $\chi_x(a) = a(x)$.

Аналогичными свойствами обладают Х. коммутативной банаховой алгебры A над полем $\mathbb{C}$. Любой Х. $\chi: A \to \mathbb{C}$ непрерывен, его норма $\|\chi\| \leqslant 1$. Любой максимальный идеал в A является ядром единственного Х. алгебры A. Множество $\Phi(A)$ всех Х., рассматриваемое как подмножество единичного шара в A^*, снабженного слабой топологией, компактно и наз. спектром алгебры A, причем имеется естественный гомоморфизм алгебры A в алгебру непрерывных функций на $\Phi(A)$. Напр., если A — алгебра всех комплекснозначных непрерывных функций на компакте X, снабженная нормой $\|f\| = \max\limits_X |f|$, то $\Phi(A)$ отождествляется с X: каждому элементу $x \in X$ соответствует Х. χ_x, действующий по формуле $\chi_x(f) = f(x)$, $f \in A$. Характер χ симметрической коммутативной банаховой алгебры A наз. эрмитовым, если $\chi(a^*) = \chi(a)$ $(a \in A)$; χ эрмитов тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\chi$ — симметрический максимальный идеал.

Лит. [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.

А. И. Штерн.

ХАРАКТЕР группы — гомоморфизм данной группы в нек-рую стандартную абелеву группу A. Обычно в качестве A берется либо мультипликативная группа k^* нек-рого поля k, либо подгруппа

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

группы $\mathbb{C}^*$. Понятие Х. группы было первоначально введено для конечных групп G и $A = T$ (впрочем, в этом случае всякий Х. $G \to \mathbb{C}^*$ принимает значения в T).

Изучение Х. групп сводится к случаю абелевых групп, поскольку имеется естественный изоморфизм между группами $\operatorname{Hom}(G, A)$ и $\operatorname{Hom}(G/(G, G), A)$, где (G, G) — коммутант группы G. Характеры $G \to k^*$ составляют линейно независимую систему в пространстве всех k-значных функций на G. Характер $G \to k^*$ однозначно продолжается до Х. групповой алгебры $k[G]$. Характеры $G \to k^*$ являются одномерными линейными представлениями группы G над k; понятие *характера* представления группы в одномерном случае совпадает с понятием Х. группы. Иногда Х. группы называют Х. любого ее конечномерного представления (и даже само это представление).

Характер топологической группы G — это непрерывный гомоморфизм $G \to T$. Если G — локально компактная абелева группа, то ее Х. разделяют точки, т. е. для любых $a, b \in G$, $a \neq b$, существует такой Х. α: $G \to T$, что $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Для хаусдорфовых абелевых групп G это утверждение, вообще говоря, неверно (см. [3]). Характер алгебраической группы G над алгебраически замкнутым полем K — это рациональный гомоморфизм $G \to K^*$.

В теории чисел важную роль играют Х. мультипликативной группы $\mathbb{Z}_k^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_k$ по модулю k, к-рые взаимно однозначно соответствуют *Дирихле характерам* (mod k): характеру α: $\mathbb{Z}_k^* \to T$ отвечает характер Дирихле χ: $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, определяемый формулой

$$\chi(n) = \begin{cases} \alpha(n + k\mathbb{Z}), & \text{если } (n, k) = 1; \\ 0, & \text{если } (n, k) \neq 1. \end{cases}$$

См. также *Характеров группа*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Моррис С., Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп, пер. с англ., М., 1980; [3] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1, М., 1976.

А. Л. Онищик.

ХАРАКТЕР конечномерного представления полупростой алгебры Ли — функция, сопоставляющая каждому весу представления размерность соответствующего весового подпространства. Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — линейное представление и V_λ — весовое подпространство, отвечающее $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, то Х. представления φ (или $\mathfrak{g}$-модуля V) записывается в виде

$$\operatorname{ch} V = \sum\nolimits_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} (\dim V_\lambda)\, e^\lambda$$

и рассматривается как элемент группового кольца $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$. Если $k = \mathbb{C}$ и $\varphi = d\Phi$, где $\Phi: G \to \mathrm{GL}(V)$ — аналитическое линейное представление группы Ли G, алгеброй Ли к-рой является $\mathfrak{g}$, то e^λ можно рассматривать как функцию на $\mathfrak{h}$ и $\operatorname{ch} V$ совпадает с функцией $x \mapsto \chi_\Phi(\exp x)$ $(x \in \mathfrak{h})$, где χ_Φ — Х. представления Ф. Х. представления алгебры Ли обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{ch}(V_1 \oplus V_2) = \operatorname{ch} V_1 + \operatorname{ch} V_2,$$

$$\operatorname{ch}(V_1 \otimes V_2) = \operatorname{ch} V_1 \cdot \operatorname{ch} V_2.$$

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969, [2] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978.

А. Л. Онищик.

ХАРАКТЕР полугруппы — ненулевой гомоморфизм коммутативной полугруппы S с единицей в мультипликативную полугруппу комплексных чисел, состоящую из всех чисел с модулем 1 и нуля. Иногда под Х. полугруппы понимают ненулевой гомоморфизм в мультипликативную полугруппу комплексных чисел, модуль к-рых $\leqslant 1$. Оба понятия Х. полугруппы эквивалентны, если S — *клиффордова полугруппа*. Множество S^* всех Х. полугруппы S образует коммутативную полугруппу с единицей (полугруппу характеров) относительно поточечного умножения $*$

$$(\chi * \psi)(a) = \chi(a)\psi(a), \quad a \in S,\ \chi, \psi \in S^*.$$

Идеал P полугруппы S наз. вполне изолированным, если $S \setminus P$ есть подполугруппа. Множество всех вполне изолированных идеалов коммутативной полугруппы с единицей образует полурешетку относительно операции объединения, изоморфную полурешетке идемпотентов (см. *Идемпотентов полугруппа*) полугруппы S^*. Характеры коммутативной полугруппы S отделяют элементы из S, если для любых $a, b \in S$, $a \neq b$, найдется $\chi \in S^*$ такой, что $\chi(a) \neq \chi(b)$. Если S с единицей, то Х. полугруппы S отделяют элементы из S тогда и только тогда, когда S — *сепаративная полугруппа*. Задача описания полугруппы X. произвольной коммутативной полугруппы с единицей сводится к описанию Х. полугруппы, являющейся полурешеткой групп; соответствующее описание для случая, когда эта полурешетка удовлетворяет условию минимальности, см., напр. [1], § 5.5. Имеется абстрактная характеризация полугрупп Х. [2].

Для любого $a \in S$, $\chi \in S^*$ отображение $\tilde{a}: \chi \mapsto \chi(a)$, $\chi \in S^*$, является Х. полугруппы S^*, т. е. $\tilde{a} \in S^{**}$. Отображение $\omega: a \mapsto \tilde{a}$ является гомоморфизмом S в

S^{**} (так. наз. канонич. гомоморфизм). Если ω является изоморфизмом S на S^{**}, то говорят, что для S справедлива теорема двойственности. Теорема двойственности справедлива для коммутативной полугруппы S с единицей тогда и только тогда, когда S — инверсная полугруппа [3]. О вопросах двойственности для Х. полугрупп в топологич. случае см. *Топологическая полугруппа.*

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972, [2] Лесохин М. М., «Изв. вузов. Матем.», 1970, № 8, с. 67—74; [3] Austin C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 109, № 2, p. 245—56. *Б. П. Танана, Л. Н. Шеврин.*

ХАРАКТЕР представления π ассоциативной алгебры A — функция φ на алгебре A, определенная формулой $\varphi(x)=\chi(\pi(x))$ для $x\in A$, где χ — линейный функционал, определенный на нек-ром идеале I в алгебре $\pi(A)$ и удовлетворяющий условию $\chi(ab)=\chi(ba)$ для всех $a\in I$, $b\in\pi(A)$. Если представление π конечномерно или если алгебра $\pi(A)$ содержит ненулевой конечномерный оператор, то в качестве χ обычно рассматривается след оператора. Пусть A есть C^*-алгебра, π — такое представление C^*-алгебры A, что *Неймана алгебра* $\mathfrak{A}$, порожденная алгеброй $\pi(A)$, является фактором полуконечного типа; пусть χ' — точный нормальный полуконечный след на $\mathfrak{A}$, χ — линейное продолжение следа χ' на идеал $\mathfrak{M}_{\chi'}$; если множество $\{x: x\in A,\ \chi'(\pi(x))<+\infty\}$ отлично от нуля, то формула $\varphi(x)=\chi(\pi(x))$, $x\in A$, определяет Х. представления алгебры A, ограничение к-рого на A^+ есть *характер* C^*-алгебры A. Во многих случаях Х. представления алгебры определяет представление однозначно с точностью до нек-рого отношения эквивалентности; напр., характер неприводимого конечномерного представления определяет представление однозначно с точностью до эквивалентности; Х. фактор представления C^*-алгебры, допускающего след, определяет представление однозначно с точностью до квазиэквивалентности.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969, [3] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974. *А. И. Штерн.*

ХАРАКТЕР представления π группы G — в случае конечномерного представления функция χ_π на группе G, определяемая формулой

$$\chi_\pi(g)=\operatorname{tr}\pi(g),\quad g\in G.$$

Для произвольных непрерывных представлений топологич. группы G над полем $\mathbb{C}$ это определение обобщается следующим образом:

$$\chi_\pi(g)=\chi(\pi(g))\ \text{для}\ g\in G,$$

где χ — линейный функционал, определенный на нек-ром идеале I в алгебре A, порожденной семейством операторов $\pi(g)$, $g\in G$, и инвариантный относительно внутренних автоморфизмов алгебры A; в нек-рых случаях Х. представления π наз. Х. представления нек-рой *групповой алгебры* группы G, определенного представлением π (см. *Характер* представления ассоциативной алгебры).

Х. прямой суммы (тензорного произведения) конечномерных представлений равен сумме (произведению) Х. этих представлений. Х. конечномерного представления группы является функцией, постоянной на классах сопряженных элементов; Х. непрерывного конечномерного унитарного представления группы есть непрерывная положительно определенная функция на группе.

Во многих случаях Х. представления группы определяет представление однозначно с точностью до эквивалентности; напр., Х. неприводимого конечномерного представления над полем характеристики 0 определяет представление однозначно с точностью до пространственной эквивалентности; Х. конечномерного непрерывного унитарного представления компактной группы — с точностью до унитарной эквивалентности.

Х. представления локально компактной группы G, допускающего продолжение до представления алгебры непрерывных финитных функций на G, может определяться мерой на G; в частности, Х. регулярного представления унимодулярной группы задается точечной вероятностной мерой, сосредоточенной в единичном элементе группы G. Х. представления π группы Ли G, допускающего продолжение до представления алгебры $C_0^\infty(G)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на G, может определяться обобщенной функцией на G. Если G — нильпотентная или линейная полупростая группа Ли, то Х. неприводимых унитарных представлений π группы G определяются локально интегрируемыми функциями ψ_π по формуле

$$\chi_\pi(f)=\int_G f(g)\,\psi_\pi(g)\,dg,\quad f\in C_0^\infty(G);$$

эти Х. определяют представления π однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.

Если группа G компактна, то любая непрерывная положительно определенная функция на G, постоянная на классах сопряженных элементов, разлагается в ряд по Х. неприводимых представлений π_α группы G, сходящийся равномерно на G; эти Х. χ_{π_α} образуют ортонормированную систему в пространстве $L^2(G)$, полную в подпространстве функций из $L^2(G)$, постоянных на классах сопряженных элементов в G. Если $\chi_\rho=\sum_\alpha m_\alpha\chi_{\pi_\alpha}$ — разложение Х. непрерывного конечномерного представления ρ группы G по Х. χ_{π_α}, то m_α — целые числа, являющиеся кратностями, с к-рыми π_α входят в ρ. Если ρ — непрерывное представление группы G в квазиполном бочечно локально выпуклом топологич. пространстве E, то существует максимальное подпространство E_α в E такое, что ограничение представления ρ на E_α кратно представлению π_α, и существует непрерывный проектор P_α пространства E на подпространство E_α, определяемый равенством

$$P_\alpha=\chi_{\pi_\alpha}(e)\int_G\overline{\chi_{\pi_\alpha}(g)}\,\rho(g)\,dg,$$

где dg — такая мера Хаара на G, что $\int_G dg=1$.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [4] Фробениус Г., Теория характеров и представлений групп, пер. с нем., Хар., 1937; [5] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [6] Littlewood D., The theory of group characters, 2 ed., Oxf., 1950. *А. И. Штерн.*

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ в теории вероятностей и математической статистике — теоремы, устанавливающие связь между типом распределения случайных величин или случайных векторов и нек-рыми общими свойствами функций от них.

Пример 1. Пусть X — трехмерный случайный вектор такой, что:

1) его проекции X_1, X_2, X_3 на какие-либо три взаимно ортогональные оси независимы и

2) плотность $p(x)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, распределения вероятностей X зависит только от $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Тогда распределение X нормально и

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right\},$$

где $\sigma>0$ — нек-рая постоянная (закон Максвелла для распределения скоростей молекул при стационарном состоянии газа).

Пример 2. Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ случайный вектор с независимыми и одинаково распределенными компонентами $X=(X_1, \ldots, X_n)$. Если распределение нормально, то «эмпирическое среднее»

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_j$$

и «эмпирическая дисперсия»

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2$$

будут независимыми случайными величинами. Обратно, если они независимы, то распределение X нормально.

Пример 3. Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор с независимыми и одинаково распределенными компонентами, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — отличные от нуля постоянные. Случайные величины

$$Y_1 = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$$

и

$$Y_n = b_1X_1 + \ldots + b_nX_n$$

будут независимы тогда и только тогда, когда X имеет нормальное распределение. Последнее утверждение остается верным, если предположение, что Y_1 и Y_2 независимы, заменить предположением, что они одинаково распределены, добавив, однако, нек-рые ограничения на коэффициенты a_j и b_j.

Подобного рода характеризация распределения случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$ свойством одинаковой распределенности или независимости двух многочленов $Q_1(X)$ и $Q_2(X)$ дается рядом Х. т., играющих важную роль в математич. статистике.

Лит.: [1] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972.

Ю. В. Прохоров.

ХАРАКТЕРИСТИК МЕТОД — метод численного интегрирования уравнений гиперболич. типа. В гиперболич. области существует линейная комбинация исходных уравнений, в к-рую входят лишь внутренние производные вдоль характеристич. поверхностей. При этом существенно упрощаются решаемые уравнения. В Х. м. решение рассчитывается на характеристич. сетке, к-рая выстраивается в процессе счета, тем самым точно учитывается область зависимости решения. Для Х. м. доказаны существование решения и сходимость. Наиболее широкое применение Х. м. нашел при решении задач механики сплошных сред (см. [1]). Напр., уравнения в характеристич. форме

$$\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial p}{\partial x} \pm \rho c\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (2)$$

представляют собой линейную комбинацию традиционных уравнений газовой динамики: неразрывности, импульса и энергии. Здесь и ниже ρ — плотность, u — скорость, J — внутренняя энергия единицы массы, $p=p(\rho, J)$ — давление, T — температура, x — пространственная координата, t — время. Ставится задача Коши: решение ищется в области $t>0$ при заданных параметрах на линии $t=0$. Энтропией наз. интеграл $S(\rho, J)=\text{const}$ уравнения

$$dJ - \frac{p(\rho, J)}{\rho^2}d\rho = 0.$$

Тогда (1) имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = 0. \qquad (1')$$

В левых частях (1′) и (2) стоят производные $\frac{dS}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, взятые в направлениях

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad (3)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c, \qquad (4)$$

называемых характеристиками. Система (1), (2) имеет три семейства действительных характеристик. Вдоль характеристики (3) выполнено соотношение

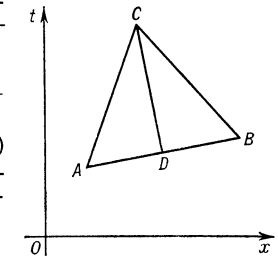
$$dS = 0,$$

а вдоль характеристик (4) — соотношения

$$dp \pm \rho c\, du = 0. \qquad (5)$$

Через точку A (см. рис.) проводится характеристика (4) в сторону возрастания t

$$\frac{x-x_A}{t-t_A} = u_A + c_A.$$



Через ближайшую к точке A справа — точку B — проводится характеристика (4) другого семейства

$$\frac{x-x_B}{t-t_B} = u_B - c_B,$$

C — точка пересечения характеристик. При замене выполняемых вдоль характеристик дифференциальных соотношений (5) разностными получают алгебраич. систему

$$(p_C - p_A) + \rho_A c_A (u_C - u_A) = 0,$$
$$(p_C - p_B) - \rho_B c_B (u_C - u_B) = 0,$$

из к-рой определяются p_C и u_C. Из точки C проводится характеристика (3)

$$\frac{x-x_C}{t-t_C} = u_C$$

до пересечения с линией AB в точке D. Значение энтропии S в точке D определяется путем интерполяции между точками A и B (при этом $S_C = S_D$). Из уравнений

$$p(\rho_C, J_C) = p_C,$$
$$S(\rho_C, J_C) = S_C$$

находятся значения внутренней энергии J_C и плотности ρ_C в точке C. По известным данным в двух точках A и B находится решение при большем значении времени t в точке C. Эта процедура вычислений повторяется для каждой пары точек. Затем, используя новые точки C в качестве исходных A, B, делается следующий шаг по t. Расчет проводится до необходимых величин t. Однако из-за нелинейности уравнений газовой динамики счет может прекратиться в определенный момент времени, если характеристики одного семейства будут касаться друг друга или пересекаться.

Описанная разностная схема имеет первый порядок точности (аналог метода ломаных Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений). Повышения точности можно достигнуть путем пересчета и т. д.

Х. м. можно решать стационарные многомерные задачи в области гиперболичности (для газовой динамики — сверхзвуковые течения). При этом можно определить положение вторичных ударных волн в местах, где происходит пересечение или касание характеристик одного семейства. Х. м. рассчитываются задачи с небольшим числом разрывов, так как при скоплении особенностей вычисления затруднены. Расчет Х. м. состоит из ряда элементарных задач: расчет внутренней точки, точек на ударной волне или на обтекаемом теле и т. п.

Возможно построение численных схем Х. м., позволяющих вести счет по «слоям» — сеточно-характеристический метод (см. [2]).

Лит.: [1] Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик, М., 1961; [2] Магомедов К. М., Холодов А. С., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1969, т. 9, № 2, с. 373—86

Ю. М. Давыдов.

ХАРАКТЕРИСТИКА — одно из основных понятий в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Роль Х. проявляется в существенных свойствах этих уравнений, таких, как локальные свойства решений, разрешимость различных задач, их корректность и др.

Пусть

$$L(x,\ D)=\sum_{|\nu|\leqslant m} a_\nu(x)\,D^\nu$$

— линейный дифференциальный оператор с частными производными порядка m, а

$$\sigma(x,\ \xi)=\sum_{|\nu|=m} a_\nu(x)\,\xi^\nu$$

— его символ. Здесь $x,\ \xi\in\mathbb{R}^n$, $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ — мультииндекс, $|\nu|=\nu_1+\ldots+\nu_n$, $a_\nu:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$D^\nu=D_1^{\nu_1}\ldots D_n^{\nu_n},$$

$$D_j^\nu f=(\partial/\partial x_j)^\nu f,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ \xi^n=\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_n^{\nu_n},\ j,\ m,\ n\in\mathbb{N}.$$

Пусть S — гиперповерхность, определенная в $\mathbb{R}^n$ уравнением $\varphi(x)=0$, причем $\varphi_x(x)=\operatorname{grad}\varphi(x)\neq 0$ при $x\in S$,

$$\sigma(x,\ \varphi_x(x))=0. \tag{1}$$

В этом случае S наз. характеристической поверхностью, или характеристикой, для оператора $L(x,\ D)$. Другие названия Х.: характеристическое многообразие, характеристическая линия (в случае $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^2$).

Ниже рассмотрен пример задачи Коши. Пусть S — произвольная (не обязательно характеристическая) гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, определенная уравнениями

$$\varphi(x)=0,\ \varphi_x(x)\neq 0.$$

Пусть $u_0,\ \ldots,\ u_{m-1}$ — функции, определенные на S в окрестности U точки $x_0\in S$, и поставлена задача Коши

$$L(x,\ D)\,u=f,\ x\in U,$$

$$u=u_0,\ \frac{\partial u}{\partial n}=u_1,\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}=u_{m-1},\ x\in S,$$

относительно неизвестной функции u. Здесь f — заданная функция, $L(x,\ D)$ — заданный линейный дифференциальный оператор порядка m, n — ортонормированный вектор к S. Считая, для определенности, $(\partial/\partial x_n)\varphi(x)\neq 0$, $x\in U$, заменой переменных

$$x\longrightarrow x',\ \text{где } x_j'=x_j,\ j=1,\ \ldots,\ n-1,\ x_n'=\varphi(x),$$

приходят к уравнению

$$\sigma(x,\ \varphi_x(x))\left(\frac{\partial}{\partial x_n'}\right)^m u+\Sigma\ldots=f. \tag{2}$$

Невыписанное выражение под знаком Σ не содержит частных производных от функции u по x_n' порядка m. Возникают два случая:

1) $\sigma(x,\ \varphi_x(x))\neq 0,\quad x\in U,$

2) $\sigma(x,\ \varphi_x(x))=0,\ x=x_0.$

В первом случае деление уравнения (2) на σ приводит к уравнению, разрешенному относительно старшей частной производной по переменной x_n', т. е. записанному в нормальной форме. Начальным условиям можно придать вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n'}\right)^j u(x_1',\ \ldots,\ x_{n-1}',\ 0)=u_j(x_1',\ \ldots,\ x_{n-1}'),$$

$$j=0,\ \ldots,\ m-1.$$

Такая постановка задачи Коши хорошо изучена и, напр. при аналитически заданных функциях в уравнении и в начальных условиях, существует единственное решение этой задачи в классе аналитич. функций в достаточно малой окрестности точки x_0. Во втором случае точка x_0 является характеристической, а если равенство (1) верно для всех $x\in S$, то поверхность S является Х. В этом случае начальные данные не могут быть произвольными и исследование задачи Коши усложняется.

Напр., для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}=0 \tag{3}$$

могут быть заданы начальные условия на одной из его Х. $x_1=0$:

$$u(0,\ x_2)=u_0(x_2),\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(0,\ x_2)=u_1(x_2). \tag{4}$$

Если функция u_1 отлична от постоянной, то задача Коши (3), (4) не имеет решения в пространстве C^2. Если же функция u_1 постоянна, напр. равна $a\in\mathbb{R}$, то решение неединственно в C^2, т. к. им может быть любая функция вида

$$u(x_1,\ x_2)=ax_1+b(x_1)+u_0(x_2),$$

где

$$b,\ u_0\in C^2,\ b(0)=b'(0)=0.$$

Таким образом, задача Коши существенно различается в зависимости от того, заданы ли начальные данные на характеристической поверхности или нет.

Х. обладает свойством инвариантности при преобразовании независимых переменных: если $\varphi(x)$ есть решение уравнения (1) и если преобразование $x\longrightarrow x'$ переводит $\varphi(x)\longrightarrow\psi(x')$, $a_\nu(x)\longrightarrow b_\nu(x')$, то $\psi(x')$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma_1(x_1',\ \psi_{x'}(x'))=0,$$

где

$$\sigma_1(x',\ \xi)=\sum_{|\nu|=m} b_\nu(x')\,\xi^\nu.$$

Другое свойство Х. таково, что относительно Х. S оператор $L(x,\ D)$ является *внутренним дифференциальным оператором*.

Эллиптические линейные дифференциальные операторы определяются как операторы, для к-рых не существует Х. (действительных). Определение гиперболич. и параболич. операторов также тесно связано с понятием Х. Так, линейный дифференциальный оператор 2-го порядка относится к гиперболич. типу, если он имеет два семейства Х., и к параболическому, если — одно. Знание Х. дифференциального уравнения позволяет свести это уравнение к более простому виду. Напр., пусть задано гиперболич. уравнение

$$a_{20}(x_1,\ x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+a_{11}(x_1,\ x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+$$

$$+a_{02}(x_1,\ x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0. \tag{5}$$

Для него уравнение Х. (1) имеет вид

$$a_{20}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right]^2+a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+a_{02}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right]^2=0.$$

Последнее уравнение определяет два различных семейства Х.:

$$\varphi_1(x)=\psi_1(x)-c_1=0,\ c_1\in\mathbb{R},$$

$$\varphi_2(x)=\psi_2(x)-c_2=0,\ c_2\in\mathbb{R}.$$

Существуют две Х. из этих семейств такие, что соответствующие им функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определяют замену переменных $x\to x'$ по формулам

$$x_1'=\varphi_1(x),\ x_2'=\varphi_2(x)$$

и приводят уравнение (5) к канонич. виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1' \partial x_2'} = 0.$$

Для нелинейного дифференциального уравнения

$$F(x,\ u,\ D^\nu u,\ D^\mu u) = 0, \qquad (6)$$

где μ, $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндексы, причем $|\nu| \leqslant m-1$, $|\mu| = m$, Х. S определяется как гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ с уравнением $\varphi(x) = 0$, причем при $x \in S$. $\varphi_x(x) \neq 0$ и $\sigma(x,\ \varphi_x(x)) = 0$. Символ в этом случае для оператора (6), задаваемого функцией $F(x,\ u,\ v,\ w)$, определяется так:

$$\sigma(x,\ \xi) = \sum_{|\mu|=m} F_w(x,\ u,\ D^\nu u,\ D^\mu u)\,\xi^\mu.$$

Кроме переменных x и ξ, очевидно, σ может зависеть от u, $D^\nu u$, $D^\mu u$. Пусть, напр., задано уравнение 1-го порядка ($m=1$). Кроме того, для простоты $n=2$. Уравнение (6) принимает вид

$$F\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0$$

с функцией $F(x, y, z, p, q)$. Уравнение Х.:

$$F_p\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + F_q\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0.$$

Т. к. решение этого уравнения $\varphi(x_1, x_2)$ фактически может зависеть от u, $\partial u/\partial x_1$, $\partial u/\partial x_2$, то ее задают в параметрич. виде

$$x_1 = x(t),\ x_2 = y(t),\ u = z(t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = p(t),\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = q(t),$$

причем эти функции удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$x'(t) = F_p,\ y'(t) = F_q,\ z'(t) = pF_p + qF_q,$$
$$p'(t) = -F_x - pF_z,\ q'(t) = -F_y - qF_z.$$

Геометрически это определяет т. н. *характеристическую полосу* (при $\alpha < t < \beta$). Проекция этой полосы на пространство $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ определяет такую кривую линию в $\mathbb{R}^3$, что в каждой своей точке она касается плоскости с направляющими коэффициентами $p(t)$, $q(t)$. Эта кривая также наз. Х. уравнения (6).

Лит.: [1] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными, пер. с япон., М., 1977. [2] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966. [3] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [4] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961, [5] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Уравнения в частных производных математической физики, М., 1970. [6] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981, [7] Михлин С. Г., Курс математической физики, М., 1968; [8] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977.

Ю. В. Комленко.

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛЯ — целое положительное простое число или число 0, однозначно определяемое для данного поля следующим образом. Если для нек-рого $n>0$

$$0 = ne = \underbrace{e + \ldots + e}_{n \text{ слагаемых}},$$

где e — единица поля K, то наименьшее из таких n будет простым числом и оно наз. характеристикой поля K. Если же такого числа не существует, то говорят, что Х. п. K равна нулю, или что K — поле нулевой характеристики. Иногда такое поле наз. полем без характеристики или полем бесконечной (∞) характеристики. Всякое поле нулевой характеристики содержит подполе, изоморфное полю всех рациональных чисел, а поле конечной характеристики p — подполе, изоморфное полю классов вычетов по модулю p.

О. А. Иванова.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ в теории дифференциальных уравнений с частными производными — то же, что *характеристика*.

Ю. В. Комленко.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА — подгруппа H группы G, инвариантная относительно всех автоморфизмов группы G.

О. А. Иванова.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПОЛОСА дифференциального уравнения с частными производными 1-го порядка — однопараметрическое семейство

$$x = x(t),\ u = y(t),\ u_x = p(t)$$

непрерывно дифференцируемых в интервале $\alpha < t < \beta$ функций, удовлетворяющих уравнениям

$$x'(t) = F_p,\ y'(t) = pF_p,\ p'(t) = -F_x - pF_y,$$

где умножение векторов понимается скалярно;

$$F(x,\ u,\ u_x) = 0 \qquad (*)$$

— нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка относительно неизвестной функции u: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Здесь $u_x = \operatorname{grad} u$, $F(x, y, p)$: $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x,\ p \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Значение Х. п. состоит в том, что она используется при исследовании и нахождении решений уравнения ($*$).

См. также *Характеристика*.

Лит. [1] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966; [2] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

Ю. В. Комленко.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ множества E пространства X — функция $\chi(x)$, равная 1 при $x \in E$, и равная 0 при $x \in CE$ (где CE — дополнение E в X). Любая функция $\chi(x)$ со значениями в $\{0, 1\}$ является Х. ф. нек-рого множества, а именно множества $E = \{x\colon \chi(x) = 1\}$. Свойства Х. ф.:

1) $\chi_{CE} = 1 - \chi_E$, $\chi_{F \setminus F} = \chi_F(1 - \chi_F)$;
2) если $F \subset E$, то $\chi_{E \setminus F} = \chi_E - \chi_F$;
3) если $E = \bigcup\limits_\alpha E_\alpha$, то $\chi_E = \sup\limits_\alpha \{\chi_{E_\alpha}\}$;
4) если $E = \bigcap\limits_\alpha E_\alpha$, то $\chi_E = \inf\limits_\alpha \{\chi_{E_\alpha}\}$;
5) если $E_1, E_2, \ldots$ попарно непересекающиеся, то $\chi_{\bigcup E_K} = \sum_1^\infty \chi_{E_K}$;
6) если $E = \bigcap\limits_K E_K$, то $\chi_E = \prod_1^\infty \chi_{E_K}$.

Лит. [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

А. А. Конюшков.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, преобразование Фурье — Стилтьеса вероятностной меры μ, — комплекснозначная функция, заданная на всей числовой оси $\mathbb{R}^1$ формулой

$$\hat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, d\mu(x),\ t \in \mathbb{R}^1.$$

Х. ф. случайной величины X по определению есть Х. ф. ее вероятностного распределения

$$\mu_X(B) = \mathsf{P}\{X \in B\},\ B \subset \mathbb{R}^1.$$

Метод, связанный с использованием Х. ф., был впервые применен А. М. Ляпуновым и позднее стал одним из основных аналитич. методов теории вероятностей. Особенно эффективно он используется при доказательстве предельных теорем теории вероятностей, напр. доказательство центральной предельной теоремы для независимых одинаково распределенных случайных

величин со 2-ми моментами сводится к элементарному соотношению

$$\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \longrightarrow \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Основные свойства Х. ф. 1) $\hat{\mu}(0)=1$ и $\hat{\mu}$ положительно определена, т. е.

$$\sum \alpha_k \overline{\alpha}_l \hat{\mu}(t_k-t_l) \geqslant 0$$

для любых конечных наборов комплексных чисел α_k и аргументов $t_k \in \mathbb{R}^1$.

2) $\hat{\mu}$ равномерно непрерывна на всей оси $\mathbb{R}^1$.

3) $|\hat{\mu}(t)| \leqslant 1$, $|\hat{\mu}|(t_1)-\hat{\mu}(t_2)|^2 \leqslant$

$$\leqslant 2(1-\operatorname{Re}\hat{\mu}(t_1-t_2)),\quad t,\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}^1.$$

4) $\overline{\hat{\mu}(t)}=\hat{\mu}(-t)$; в частности, $\hat{\mu}$ принимает только действительные значения (и является четной функцией) в том и только том случае, когда соответствующее вероятностное распределение симметрично, т. е. $\mu(B)=\mu(-B)$, где $-B=\{x: -x \in B\}$.

5) Х. ф. однозначно определяет меру; имеет место формула обращения:

$$\mu(a, b)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{ibt}}{it}\hat{\mu}(t)\,dt$$

для любых интервалов (a, b), концы к-рых имеют нулевую μ-меру. Если $\hat{\mu}$ интегрируема (абсолютно, если интеграл понимать в смысле Римана) на $\mathbb{R}^1$, то соответствующая функция распределения имеет плотность p и

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-itx)\,\hat{\mu}(t)\,dt,\quad x \in \mathbb{R}^1.$$

6) Х. ф. свертки двух вероятностных мер (суммы двух независимых случайных величин) есть произведение их Х. ф.

Следующие три свойства выражают связь между существованием моментов случайной величины и степенью гладкости ее Х. ф.

7) Если $\mathsf{E}|X|^n < \infty$ для нек-рого натурального n, то при всех натуральных $r \leqslant n$ существуют производные порядка r от Х. ф. $\hat{\mu}_X$ случайной величины X и имеет место равенство

$$\hat{\mu}_X^{(r)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^r\exp(itx)\,d\mu_X(x),\quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Т. о., $\mathsf{E}X^r=i^{-r}\hat{\mu}_X^{(r)}(0)$, $r \leqslant n$.

8) Если существует $\hat{\mu}_X^{(2n)}(0)$, то $\mathsf{E}X^{2n} < \infty$.

9) Если $\mathsf{E}|X|^n < \infty$ для всех n и

$$\overline{\lim}\ \frac{(\mathsf{E}|X|^n)^{1/n}}{n}=\frac{1}{R},$$

то при всех $|t| < R$ имеет место

$$\hat{\mu}_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mathsf{E}|X|^k.$$

Использование метода Х. ф. главным образом основано на указанных выше свойствах Х. ф., а также на следующих двух теоремах.

Теорема Бохнера (описание класса Х. ф.). Пусть функция f задана на $\mathbb{R}^1$ и $f(0)=1$. Для того чтобы f была Х. ф. нек-рой вероятностной меры, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна и положительно определена.

Теорема Леви (непрерывность соответствия). Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность вероятностных мер, а $\{\hat{\mu}_n\}$ — последовательность их Х. ф. Тогда $\{\mu_n\}$ слабо сходится к нек-рой вероятностной мере μ (т. е. $\int \varphi\,d\mu_n \to \int \varphi\,d\mu$ для произвольной непрерывной ограниченной функции φ) в том и только том случае, если $\{\hat{\mu}_n(t)\}$ в каждой точке $t \in \mathbb{R}^1$ сходится к нек-рой непрерывной функции f; в случае сходимости функция $f=\hat{\mu}$. Отсюда следует, что относительная компактность (в смысле слабой сходимости) семейства вероятностных мер равносильна равностепенной непрерывности в нуле семейства соответствующих Х. ф.

Теорема Бохнера позволяет смотреть на преобразование Фурье — Стилтьеса как на изоморфизм между полугруппой (относительно операции свертки) вероятностных мер в $\mathbb{R}^1$ и полугруппой (относительно поточечного умножения) положительно определенных непрерывных равных в нуле единице функций на $\mathbb{R}^1$. Теорема Леви утверждает, что этот алгебраич. изоморфизм является и топологич. гомеоморфизмом, если в полугруппе вероятностных мер иметь в виду топологию слабой сходимости, а в полугруппе положительно определенных функций — топологию равномерной сходимости на ограниченных множествах.

Известны выражения Х. ф. основных вероятностных мер (см. [1], [2]), напр., Х. ф. гауссовой меры со средним m и дисперсией σ^2 есть $\exp\left(imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$.

Для неотрицательных целочисленных случайных величин X, наряду с Х. ф., используется ее аналог — производящая функция

$$\Phi_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\,\mathsf{P}\{X=k\},$$

связанная с Х. ф. соотношением $\mu_X(t)=\Phi_X(e^{it})$.

Х. ф. вероятностной меры μ в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется аналогично:

$$\hat{\mu}(t)=\int_{\mathbb{R}^n}\exp(i\langle t,\ x\rangle)\,d\mu(x),\quad t \in \mathbb{R}^n,$$

где $\langle t, x\rangle$ означает скалярное произведение. Сформулированные выше факты справедливы и для Х. ф. вероятностных мер в $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979, [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, пер. с англ., М., 1967; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 2 изд., М., 1973; [4] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983. *Н. Н. Вахания.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ КЛАСС — естественное сопоставление с каждым расслоением $\xi=(E, p, B)$ (как правило, векторным) определенного типа нек-рого класса когомологий базы B (наз. Х. к. данного расслоения). Естественность означает, что Х. к. расслоения, индуцированного отображением $f: B' \to B$, совпадает с образом при $f^*: H^*(B) \to H^*(B')$ Х. к. расслоения ξ над B. Характеристический класс многообразия — класс когомологий многообразия, являющийся Х. к. его касательного расслоения. Х. к. многообразий связаны с важными топологич. характеристиками многообразий, такими, как ориентируемость, *эйлерова характеристика*, *сигнатура* и т. д.

Примеры.

Ориентируемость расслоения. Имеет место точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow SO_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

Отображение

$$w_1=(\det)_*: H^1(B;\ O_n(\mathbb{R})) \to H^1(B;\ \mathbb{Z}_2)$$

сопоставляет с каждым действительным векторным расслоением ξ класс $w_1(\xi)$, к-рый наз. первым классом Штифеля — Уитни расслоения ξ, здесь $H^1(B; O_n(\mathbb{R}))$ — когомологии с коэффициентами в пучке ростков непрерывных функций со значениями в $O_n(\mathbb{R})$ (см. *G-Расслоение*). Точная когомологич. последовательность показывает, что группа расслоения ξ редуцируется

к $SO_n(\mathbb{R})$, т. е. расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi)=0$.

Первый класс Чжэня. Дана короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^0 \longrightarrow 0.$$

Связывающий гомоморфизм δ: $H^1(B;\ \mathbb{C}^0) \longrightarrow H^2(B;\ \mathbb{Z})$ соответствующей когомологич. последовательности сопоставляет с каждым одномерным комплексным расслоением ξ над B двумерный класс когомологий базы B, наз. первым классом Чжэня расслоения ξ и обозначаемый $c_1(\xi)$. Иными словами, если $g_{\alpha\beta}$: $u_\alpha \cap u_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^0$ — функции перехода расслоения ξ, то выбором произвольных значений логарифмов $\ln g_{\alpha\beta}$ получается двумерный целочисленный коцикл $\{k_{\alpha\beta\gamma}\}$:

$$k_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\alpha\beta}+\ln g_{\beta\gamma}+\ln g_{\gamma\alpha})$$

и $c_1(\xi)$ есть по определению класс когомологий этого коцикла.

Спинорная структура. Имеет место точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R}) \longrightarrow 1,$$

где $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ — группа, определяемая в теории *Клиффорда алгебр*. Связывающее отображение w_2: $H^1(B;\ SO_n(\mathbb{R})) \longrightarrow H^2(B;\ \mathbb{Z}_2)$ соответствующей когомологич. последовательности наз. вторым классом Штифеля — Уитни. Структурная группа ориентированного векторного расслоения ξ может быть редуцирована к $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $w_2(\xi)=0$.

Класс Эйлера. Пусть база B действительного векторного расслоения $\xi=(E,\ p,\ B)$ есть гладкое компактное N-мерное многообразие с краем ∂B (возможно пустым), и нулевое сечение i: $B \longrightarrow E$ приведено в «общее положение с самим собой». Пусть близкое и изотопное к i вложение i': $B \longrightarrow E$ трансверсально регулярно относительно $i(B) \subset E$. Тогда $X=i^{-1}(i'(B) \cap i(B))$ будет подмногообразием B и $\partial X \subset \partial B$, $\operatorname{codim} X = n = \dim \xi$. Следовательно, $[X] \in H_{N-n}(B,\ \partial B)$. Двойственный к $[X]$ класс когомологий наз. классом Эйлера расслоения ξ и обозначается $e(\xi) \in H^n(B)$. Расслоение ξ имеет не обращающееся в нуль сечение тогда и только тогда, когда $e(\xi)=0$. Если B связно, $\partial B=\varnothing$, а ξ — касательное расслоение, то $\dim X=0$, следовательно, X состоит из конечного числа точек. Класс $[X] \subset H_0(B)$ определяется в этом случае целым числом, к-рое обозначается через $\chi(B)$ и совпадает с эйлеровой характеристикой B.

Построение классов Штифеля — Уитни и Чжэня на языке теории *препятствий* (см. [6] — [8]) проводится так. Пусть η: $E \xrightarrow{p} B$ — *Серра расслоение*, и B — связное клеточное разбиение. Тогда гомотопич. тип слоя $F = p^{-1}(x)$ не зависит от $x \in B$. Если $\pi_q(F)$ — первая нетривиальная гомотопич. группа слоя F и B односвязно, то первое препятствие к построению сечений s: $B \longrightarrow E$ лежит в группе $H^{q+1}(B;\ \pi_q(F))$. Это препятствие $\varkappa(\eta)$ инвариантно связано с расслоением η. Иногда инвариант $\varkappa(\eta)$ наз. Х. к. расслоения η. Пусть ξ — комплексное векторное расслоение над B, $\dim \xi = n$. Для каждого $1 \leqslant q \leqslant n$ с ξ ассоциируется другое расслоение η^q со слоем U_n/U_{q-1} (комплексным многообразием Штифеля). Из точных последовательностей расслоений следует, что $\pi_i(U_n/U_{q-1})=0$ при $i < 2q-1$, $\pi_{2q-1}(U_n/U_{q-1})=\mathbb{Z}$, так что $\varkappa(\eta^q) \in H^{2q}(B)$. Этот класс наз. q-м классом Чжэня расслоения ξ, $c_q(\xi)=\varkappa(\eta^q)$.

Если ξ — действительное расслоение, $F=\mathbb{R}^n$, то слоем расслоения η^q будет O_n/O_{q-1}. Так как

$$\pi_{q-1}(O_n/O_{q-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{если } q \text{ четно и } q < n, \\ \mathbb{Z}, & \text{если } q \text{ нечетно или } q=n; \end{cases}$$

$$\pi_i(O_n/O_{q-1})=0$$

при $i < q-1$, то класс

$$\varkappa(\eta^q) \in \begin{cases} H^q(B), & \text{если } q \text{ нечетно или } q=n, \\ H^q(B;\ \mathbb{Z}_2), & \text{если } q \text{ четно и } q < n. \end{cases}$$

Классами Штифеля — Уитни расслоения ξ наз. классы

$$w_q(\xi)=\varkappa(\eta^q) \bmod 2 \in H^q(B;\ \mathbb{Z}_2).$$

Впрочем, если ξ неориентированно, то классы $\varkappa(\eta^q)$ определены корректно лишь с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

При $q=n$ многообразие Штифеля есть сфера S^{n-1} в действительном случае и S^{2q-1} — в комплексном. Задача о построении сечения расслоения η^n совпадает с задачей о построении не обращающегося в нуль сечения расслоения ξ. Первое препятствие в этом случае наз. классом Эйлера $e(\xi)$

$$e(\xi)=c_n(\xi) \in H^{2n}(B)$$

в комплексном случае,

$$e(\xi)=\varkappa(\eta^n) \in H^n(B)$$

в действительном ориентированном случае,

$$e(\xi)=w_n(\xi) \in H^n(B;\ \mathbb{Z}_2)$$

в действительном неориентированном случае.

Пусть E_D и E_S — пространства расслоений, ассоциированных с ξ со слоями: диск D^n и сфера S^{n-1}. Если i: $B \longrightarrow E_D$ — нулевое сечение, то $e(\xi)=i^*(u)$, где $u \in H^n(E_D,\ E_S)$ — *Тома класс* Пусть F — одно из тел $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{H}$ — тело кватернионов. Пусть h^* — мультипликативная теория когомологий, обладающая следующим свойством: для каждого конечномерного векторного пространства V над F можно выбрать естественно относительно вложений такой элемент $\alpha_V \in h^d(P(V))$, где $P(V)$ — многообразие всех одномерных подпространств в V, $P(V)=FP^{\dim V-1}$ и $d=\dim_{\mathbb{R}} F$, что $h^*(P(V))=h^*(pt)[\alpha_V]/(\alpha_V^n)$, где $n=\dim V$. Для случая $\dim V=2$ пусть α_V совпадает с фундаментальным классом (ориентацией) многообразия $P(V)$.

Пусть $\xi=(E,\ p,\ B)$ — векторное (в смысле F) расслоение над B со слоем V, $\dim \xi = n$, $P(\xi)$ — проективизация этого расслоения, т. е. локально тривиальное расслоение над B со слоем $P(V)$, пространство к-рого $P(E)$ состоит из всех одномерных подпространств в слоях расслоения ξ. Над пространством $P(E)$ имеется одномерное расслоение, пространство к-рого состоит из всех пар $(l,\ x)$, где l — одномерное подпространство слоя расслоения ξ, $l \in P(E)$, x — точка пространства l. Этому расслоению соответствует классифицирующее отображение j: $P(E) \longrightarrow P(V)$. Пусть $a=j^*(\alpha_V)$, $a \in h^d(P(E))$. Если снабдить группу $h^*(P(E))$ структурой $h^*(B)$-модуля с помощью гомоморфизма π^*, где π: $P(E) \longrightarrow B$ — проекция расслоения $P(\xi)$, то этот модуль свободен и имеет базис $1,\ a,\ \ldots,\ a^{n-1}$. Существуют однозначно определенные классы когомологий $\sigma_1(\xi),\ \sigma_2(\xi),\ \ldots,\ \sigma_n(\xi),\ \sigma_i(\xi) \in h^{di}(B)$, для к-рых

$$a^n - \pi^*(\sigma_1(\xi))\,a^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\pi^*(\sigma_{n-1}(\xi))\,a + (-1)^n \pi^*(\sigma_n(\xi))=0.$$

Для $F=\mathbb{R}$ условиям, налагаемым на теорию h^*, удовлетворяет, напр., теория $H^*(\cdot;\ \mathbb{Z}_2)$. В этом случае определенные выше Х. к. обозначаются через $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$ и наз. классами Штифеля — Уитни. Для $F=\mathbb{C}$ в качестве h^* можно взять обычную теорию когомологий H^*. Определенные выше классы для H^* обозначаются через $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ и наз. классами Чжэня. Впрочем, при $F=\mathbb{C}$ требуемым условиям удовлетворяет любая ориентированная теория когомологий. При $F=\mathbb{H}$ также можно рассматривать обычную теорию H^*. В этом случае определенные выше классы

обозначаются через p_1^s, p_2^s, .. , p_n^s и наз. симплектическими классами Понтрягина.

Пусть по-прежнему F — одно из тел $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, h^* — теория когомологий, удовлетворяющая требуемым выше условиям. Принцип расщепления: для произвольного векторного (в смысле F) расслоения ξ над B существуют пространство B' и отображение $f\colon B' \to B$, для к-рых расслоение $f^*\xi$ над B' распадается в прямую сумму одномерных расслоений, и гомоморфизм f^*: $h^*(B) \to h^*(B')$ мономорфен.

В частности, если ξ — универсальное комплексное расслоение над BU_n, то в качестве B' можно взять пространство $BT_n = \mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$ (n сомножителей), где T_n — максимальный тор в U_n, а в качестве f: $BT_n \to BU_n$ — отображение, индуцированное включением $T_n \subset U_n$. Отображение

$$f^*\colon H^{**}(BU_n) \to H^{**}(BT_n) = \mathbb{Z}\,[[x_1, \ldots, x_n]]$$

мономорфно, и образ f^* совпадает с кольцом всех симметрических формальных степенных рядов, зависящих от переменных x_1, ..., x_n, $\dim x_i = 2$.

Для произвольной топологич. группы G множество всех Х. к., определенных для главных G-расслоений и принимающих значения в теории когомологий h^*, находится во взаимно однозначном соответствии с $h^*(BG)$, где BG — *классифицирующее пространство* группы G. В частности, для векторных расслоений и для теории H^* задача описания всех Х. к. сводится к вычислению колец когомологий $H^*(BO_n)$, $H^*(BSO_n)$, $H^*(BU_n)$ и т. д.

Пусть G — компактная группа Ли, и T — максимальный тор в G. Включение $T \subset G$ индуцирует отображение $BT \to BG$ классифицирующих пространств. Пространство BT гомотопически эквивалентно произведению $\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$, в к-ром число сомножителей равно размерности тора T. Поэтому $H^{**}(BT) = \mathbb{Z}\,[[x_1, \ldots, x_n]]$, где $n = \dim T$, $\dim x_i = 2$. На торе T действует группа Вейля $\Phi(G) = N(T)/T$, где $N(T)$ — нормализатор T, следовательно, группа Вейля действует также и на BT. Если группа G связана и пространства G, G/T не имеют кручения в гомологиях, то гомоморфизм ρ^*: $H^{**}(BG) \to H^{**}(BT)$ мономорфен, и образ ρ^* совпадает с подкольцом всех инвариантных относительно группы Вейля элементов кольца $H^{**}(BT) = \mathbb{Z}\,[[x_1, \ldots, x_n]]$ (теорема Бореля).

Группа U_n удовлетворяет условиям теоремы. Диагональные унитарные матрицы образуют максимальный тор T_n группы U_n. Если элементы диагональной матрицы обозначить через t_1, ..., t_n, то группа Вейля состоит из всех перестановок переменных t_1, ..., t_n. Следовательно, $H^{**}(BU_n) = \mathbb{Z}\,[[c_1, \ldots, c_n]]$, где c_1, ..., c_n — элементарные симметрич. функции переменных x_1, ..., $x_n \in H^2(BT_n)$, совпадающие с классами Чжэня. Группа Sp_n также удовлетворяет требованиям теоремы Бореля. Группа Вейля порождена всеми перестановками x_1, ..., x_n и произвольными переменами знаков. Следовательно, $H^{**}(BSp_n) = \mathbb{Z}\,[[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]]$, где σ_1, ..., σ_n — элементарные симметрич. функции переменных x_1^2, ..., x_n^2. Группа SO_n не удовлетворяет требованиям теоремы Бореля, однако, если рассматривать в качестве кольца коэффициентов произвольное кольцо Λ, содержащее $1/2$, напр. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ при нечетных p или $\mathbb{Q}$, то видоизмененная таким образом теорема будет справедлива. Максимальный тор группы SO_n образован матрицами вида

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{Vmatrix} \oplus \begin{Vmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{Vmatrix} \oplus \ldots$$

и имеет размерность $[n/2]$. Группа Вейля порождена всеми перестановками α_1, ..., $\alpha_{[n/2]}$ и переменами знаков у четного числа этих символов при четном n и у произвольного числа символов при нечетном n. Поэтому $H^{**}(SO_{2k}; \Lambda) = \Lambda\,[[p_1, \ldots, p_{k-1}, e]]$, где p_1, ... , p_{k-1} — элементарные симметрич. функции перемен. ных x_1^2, ..., x_k^2, кроме последней, $e = x_1$, ..., x_k. Классы p_1, ..., p_{k-1}, $p_k = e^2$ совпадают с классами Понтрягина (см. ниже), e — класс Эйлера; $H^{**}(SO_{2k+1}; \Lambda) = \Lambda\,[[p_1, \ldots$ ..., $p_k]]$.

Классы $x_i \in H^2(BT_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ наз. образующими Вейля. Сами они не являются Х. к. (так как не лежат в $H^{**}(BU_n)$), но любой Х. к. выражается через них как симметрический формальный степенной ряд и любой симметрический формальный степенной ряд от $\{x_i\}$ задает Х. к. Напр., классу Эйлера c_n соответствует произведение $\prod_{i=1}^n x_i$.

Элемент (формальный степенной ряд) $e^{x_1} + \ldots + e^{x_n} \in \mathbb{Z}\,(x_1, \ldots, x_n) = H^{**}(BT_n)$ симметричен, и задает Х. к. — неоднородный элемент кольца $H^{**}(BU_n)$, обозначаемый ch, наз. характером Чжэня. Характер Чжэня «аддитивно-аддитивен» и «мультипликативно-мультипликативен», т. е.

$$\mathrm{ch}\,(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}\,(\xi) + \mathrm{ch}\,(\eta),$$
$$\mathrm{ch}\,(\xi \otimes \eta) = \mathrm{ch}\,(\xi) \cup \mathrm{ch}\,(\eta).$$

Классы Чжэня и кривизна. Пусть база B n-мерного векторного расслоения $\xi = (E, p, B)$ является гладким многообразием. Пусть в расслоении ξ задана произвольная *аффинная связность*. Если фиксировать локальную тривиализацию расслоения ξ в окрестности нек-рой точки базы, то в этой окрестности кривизна данной связности задается 2-формой Ω со значениями в векторном пространстве $gl(\mathbb{C}, n)$ комплексных $(n \times n)$-матриц. При замене локальной тривиализации расслоения значения формы Ω преобразуются по правилу $m \to gmg^{-1}$, где $g \in GL(\mathbb{C}, n)$ — матрица перехода от одной тривиализации к другой. Если φ: $\mathrm{gl}(\mathbb{C}, n) \to \mathbb{C}$ — однородный многочлен степени j, то $\varphi \circ \Omega$ — $\mathbb{C}$-значная внешняя форма степени $2j$. Если, кроме того, многочлен φ инвариантен относительно действия

$$\mathrm{GL}\,(\mathbb{C}, n) \times gl\,(\mathbb{C}, n) \to gl\,(\mathbb{C}, n),\ (g, m) \to g\,mg^{-1},$$

то форма $\varphi \circ \Omega$ не зависит от локальных тривиализаций и является $\mathbb{C}$-значной внешней формой на всем многообразии B. Можно показать, что $d(\varphi \circ \Omega) = 0$ и что изменение связности меняет $\varphi \circ \Omega$ лишь на точную форму. Так как коэффициенты $\mathrm{tr}\,(m^i)$ характеристического многочлена матрицы m инвариантны, то, полагая $\varphi_i(m) = \mathrm{tr}\,(m^i)$, получаются классы когомологий $[\varphi_i \circ \Omega] \in H^{2i}(B; \mathbb{C})$. Имеет место равенство $[\varphi_i \circ \Omega] = (C_i(\xi))^{\mathbb{C}}$, где $(C_i(\xi))^{\mathbb{C}}$ — классы Чжэня с комплексными коэффициентами.

Классами Понтрягина действительного векторного расслоения ξ наз. классы $p_i(\xi) = (-1)^i C_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C}) \in H^{4i}(B)$, здесь $\xi \otimes \mathbb{C}$ — комплексификация расслоения ξ. (Другое определение см. в [5].) Пусть база B n-мерного расслоения $\xi = (E, p, B)$ есть N-мерное многообразие с краем и σ — целочисленная неубывающая функция аргумента $h = 0, \ldots, n-1$. Система векторов $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^h$ наз. подчиненной функции σ; если $\dim \{u_1, \ldots, u_{h+\sigma(h)}\} \leqslant h$ при всех $h = 0, \ldots, h-1$. Пусть в расслоении выбраны сечения $v_1(x)$, ..., $v_m(x)$ в общем положении. Подмножество базы $\{x \in B \mid v_1(x), \ldots$ ..., $v_m(x)$ подчинена $\sigma\}$ есть псевдомногообразие коразмерности $\sigma(0) + \ldots + \sigma(n-1)$. Оно реализует относительный класс гомологий в $H_{N - \sum_0^{n-1} \sigma(i)}(B, \partial B)$, а двойственный ему класс когомологий в $H^{\sum_0^{n-1} \sigma(i)}(B)$ будет

Х. к. расслоения ξ. Класс $p_r(\xi)$ получается, если в качестве σ взять функцию

$\sigma(0)=\ldots=\sigma(n-2r-1)=0, \sigma(n-2r)=\ldots=\sigma(n-1)=2.$

Классы Понтрягина можно выразить через кривизну связности действительного расслоения аналогично тому, как это сделано для классов Чжэня.

Для произвольной градуированной $\mathbb{Q}$-алгебры A пусть $\Gamma_1 A$ — группа (относительно умножения) рядов вида $1+a_1+a_2+\ldots$, $\deg a_i=i$. Мультипликативной последовательностью наз. такая последовательность многочленов $\{K_i(x_1, \ldots, x_i)\}$, $K_i\in\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_i]$, что соответствие

$$a=(1+a_1+\ldots)\longrightarrow(1+K_1(a_1)+K_2(a_1,\ a_2)+\ldots)=K(a)$$

является гомоморфизмом групп $\Gamma_1 A\to\Gamma_1 A$ для любой градуированной $\mathbb{Q}$-алгебры A. В частности, $K_i(x_1, \ldots, x_i)$ однороден степени i, если $\deg x_j=j$. Если $A=\mathbb{Q}[t]$, то $\Gamma_1 A$ есть группа формальных степенных рядов, начинающихся с 1. Для любого $f(t)\in\Gamma_1(\mathbb{Q}[t])$ существует и единственна мультипликативная последовательность $K=\{K_i\}$, $K(1+t)=f(t)$. При этом

$$K_n(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\omega\in\Pi(n)}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}S_{i_1}\ldots{}_{i_r}(x_1, \ldots, x_n),$$

Здесь $f(t)=\sum_0^\infty\lambda_i t^i$, $\lambda_0=1$, суммирование производится по всем разбиениям n, т. е. $\omega=\{i_1, \ldots, i_r\}$, $i_1, \ldots, i_r\geqslant 0$, $i_1+\ldots+i_r=n$.

Мультипликативная последовательность, определяемая рядом

$$\frac{\sqrt{t}}{\operatorname{th}\sqrt{t}}=1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{45}t^2+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_k t^k+\ldots,$$

где B_k — числа Бернулли, обозначается обычно $L=\{L_i\}$. Пусть M^n — многообразие, $A=H^{4*}(M, \mathbb{Q})$, $p(M)=1+p_1(M)+\ldots+p_{[n/2]}(M)\in\Gamma_1 A$ — полный класс Понтрягина. Рациональное число $\langle L(p(M)), [M]\rangle$ наз. L-родом многообразия M^n. L-роды бордантных многообразий равны. Если n не делится на 4, то $\langle L(p(M)), [M]\rangle=0$. Если M^n — замкнутое многообразие размерности $n=4k$, то $\langle L(p(M)), [M]\rangle=I(M)$, где $I[M]$ — сигнатура квадратичной формы пересечения на $H_{2k}(M, \mathbb{Q})$ (теорема Хирцебруха о сигнатуре).

Для приложений важны многие специальные мультипликативные последовательности, напр. ряд $f(t)=\frac{t}{1-e^{-t}}$ задает мультипликативную последовательность T. Для комплексного расслоения ξ определен класс $\tau(\xi)=T(c(\xi))\in H^*(B(\xi))$, наз. классом Тодда расслоения ξ. Класс Тодда следующим образом связан с характером Чжэня ch:

$$1=(-1)^n\tau(\xi)\cdot\varphi_\xi^{-1}\operatorname{ch}\psi_\xi(1)\in H^*(B, \mathbb{Q}),\ n=\dim\xi,$$

здесь $\psi_\xi(1)$ — класс Тома в $K_{\mathbb{C}}$-теории, φ_ξ — *Тома изоморфизм* в H^*. Для действительного расслоения ξ определен класс $J(\xi)=T(\xi_{\mathbb{C}})\in H^*(B(\xi), \mathbb{Q})$, наз. индексным классом. Имеет место следующая теорема об индексе (Атьи—Зингера): индекс эллиптич. оператора D на компактном многообразии M размерности n равен

$$(-1)^n\{\operatorname{ch}u\cdot J(M)\}[M^\tau],$$

где M^τ — *Тома пространство* касательного расслоения, $u\in K(M^\tau)$ — класс символа оператора D.

Х. к. сферич. расслоений находятся во взаимно однозначном соответствии с когомологиями классифицирующего пространства BG_n.

Для нечетного простого p в размерностях, меньших $2p(p-1)-1$,

$$H^*(BG;\ \mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p[q_1,\ q_2,\ \ldots]\otimes\Lambda[\beta q_1,\ \beta q_2,\ \ldots],$$

где при всех n классы $q_i\in H^{2i(p-1)}(BG_n;\ \mathbb{Z}_p)$ выражаются по формуле $q_i=\varphi^{-1}P^i\varphi(1)$, здесь P^i — *Стипрода приведенные степени*, φ — изоморфизм Тома, $\Lambda[\beta q_1,\ \beta q_2,\ \ldots]$ — внешняя $\mathbb{Z}_p$-алгебра (теорема Милнора).

Классы q_i являются точными аналогами классов Штифеля — Уитни и так же, как и последние, могут рассматриваться как Х. к. сферич. расслоений, или как классы когомологий пространства BG. Наконец, $H^i(BSG_{2k};\ \mathbb{Q})=\mathbb{Q}[e]$, где e — класс Эйлера, $H^*(BG_{2k};\ \mathbb{Q})=\mathbb{Q}[e^2]$.

Показано, что вышеприведенная формула относительно $H^*(BG;\ \mathbb{Z}_p)$ неверна уже в размерности $2p(p-1)-1$: $H^{2p(p-1)-1}(BG;\ \mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}_p$, и образующая этой группы не выражается через q_i и βq_i, т. е. представляет собой первый экзотический Х. к.

Лит.: [1] Борель А., в кн.. Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 163—246, [2] Атья М., Зингер И., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5, с. 99—142, в. 6, с. 135—49; 1969, т. 24, в. 1, с. 127—82; 1972, т. 27, в. 4, с. 161—78, с. 179—88, [3] Bott R., «Lecture Notes in Mathematics», 1972, v. 299, p. 1—94, [4] Милнор Дж., «Математика», 1959, т. 3, № 4, с. 3—53; 1965, т. 9, № 4, с. 3—40; [5] Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1942, т. 35, с. 35—39; [6] Stiefel E., «Comment. math. helv.», 1935, v. 8, № 4, p. 305—53, [7] Whitney H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 43, p 785—805, [8] Chern S.-S., «Ann. Math.», 1946, v. 47, № 1, p 85—121; [9] Новиков С. П., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, с. 298—300, [10] Milnor J., «Comment. math. helv.», 1968, v. 43, № 1, p. 51—77, [11] Stasheff J., там же, p. 78—86; [12] Borel A., Hirzebruch F., «Amer. J. Math», 1958, v. 80, p. 458—538; 1959, v 81, p. 315—82; 1960, v. 82, p. 491—504, [13] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973, [14] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

А. Ф. Харшиладзе.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН матрицы $A=\|a_{ij}\|_1^n$ над полем K — многочлен над полем K

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}-\lambda\end{Vmatrix}=$$

$$=(-\lambda)^n+b_1(-\lambda)^{n-1}+\ldots+b_{n-1}(-\lambda)+b_n.$$

Степень Х. м. равна порядку квадратной матрицы A, коэффициент b_1 равен *следу* матрицы A ($b_1=\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$), коэффициент b_m равен сумме всех главных *миноров* m-го порядка, в частности $b_n=\det A$. Уравнение $p(\lambda)=0$ наз. характеристическим уравнением матрицы A, или вековым уравнением.

Корни Х. м., лежащие в K, наз. характеристическими значениями или собственными значениями матрицы A. Если K — числовое поле, употребляются также термины «характеристические числа» или «собственные числа». Иногда рассматривают корни Х. м. в алгебраич. замыкании поля K. Их обычно наз. характеристическими корнями матрицы A. Матрица A порядка n, рассматриваемая над алгебраически замкнутым полем (напр., над полем комплексных чисел) имеет n собственных значений λ_1, λ_2, ..., λ_n, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. См. также *Собственное значение*.

Подобные матрицы имеют один и тот же Х. м. Каждый многочлен над K со старшим коэффициентом $(-1)^n$ является характеристическим для нек-рой матрицы над K порядка n, наз. матрицей Фробениуса.

Лит. см. при статье *Матрица*. *Т. С. Пиголкина.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ — 1) Х. п. — то же, что *Ляпунова характеристический показатель*.

2) Х. п. линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффи-

циентами — частные от деления натуральных логарифмов мультипликаторов системы на период коэффициентов системы. В этом случае характеристические показатели Ляпунова системы равны действительным частям Х. п. этой системы. Эквивалентное определение: число α наз. Х. п. линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодич. коэффициентами, если эта система имеет комплексное решение вида $[\exp(\alpha t)]\, y(t)$, где вектор-функция $y(t)\not\equiv 0$ периодическая по t с тем же периодом, $t\in\mathbb{R}$, а $\alpha\in\mathbb{C}$.

3) Встречается также выражение «Х. п. решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений», причем рассматриваемая система, вообще говоря, нелинейная. Под этим понимаются Х. п. системы уравнений в вариациях данной системы вдоль данного ее решения, где, в свою очередь, термин «Х. п.» может пониматься как в смысле 1), так и в смысле 2).

В. М. Миллионщиков.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ — аналог понятия *характеристической функции*, используемый в бесконечномерном случае. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество, Γ — векторное пространство определенных на $\mathfrak{X}$ действительных функций, $\hat{C}(\mathfrak{X}, \Gamma)$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{X}$, относительно к-рой измеримы все функции из Γ. Х. ф. вероятностной меры μ, заданной на $\hat{C}(\mathfrak{X}, \Gamma)$, определяется как комплекснозначный функционал $\hat{\mu}$ на Γ равенством

$$\hat{\mu}(g)=\int_{\mathfrak{X}} \exp[ig(x)]\, d\mu(x),\quad g\in\Gamma.$$

Ниже имеется в виду наиболее важный и простой случай, когда $\mathfrak{X}$ есть сепарабельное действительное банахово пространство и Γ совпадает с его топологическим сопряженным $\mathfrak{X}^*$. В этом случае $\hat{C}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств пространства $\mathfrak{X}$. Понятие Х. ф. для бесконечномерных банаховых пространств ввел А. Н. Колмогоров [1].

Х. ф. случайного элемента X со значениями в $\mathfrak{X}$, по определению, есть Х. ф. его вероятностного распределения $\mu_X(B)=\mathsf{P}\{X\in B\}$, $B\subset\mathfrak{X}$.

Основные свойства Х. ф.:

1) $\hat{\mu}(0)=1$ и $\hat{\mu}$ положительно определен, т. е. $\sum_{k,l}\alpha_k\overline{\alpha_l}\hat{\mu}(x_k^*-x_l^*)\geqslant 0$ для любых конечных наборов комплексных чисел α_i и элементов $x_i^*\in\mathfrak{X}^*$;

2) $\hat{\mu}$ непрерывен в сильной топологии и секвенциально непрерывен в $*$-слабой топологии пространства $\mathfrak{X}^*$;

3) $|\hat{\mu}(x^*)|\leqslant 1$,

$$|\hat{\mu}(x_1^*)-\hat{\mu}(x_2^*)|^2\leqslant 2[1-\operatorname{Reel}\hat{\mu}(x_1^*-x_2^*)],$$
$$x^*,\ x_1^*,\ x_2^*\in\mathfrak{X}^*;$$

4) $\overline{\hat{\mu}(g)}=\hat{\mu}(-g)$; в частности $\hat{\mu}$ принимает только действительные значения (и является четным функционалом) в том и только в том случае, когда мера μ симметрична, т. е. $\mu(B)=\mu(-B)$, где $-B=\{x\colon -x\in B\}$;

5) Х. ф. однозначно определяет меру;

6) Х. ф. свертки двух вероятностных мер (суммы двух независимых случайных величин) есть произведение их Х. ф.

В конечномерном случае метод Х. ф. основан на теореме о непрерывности соответствия между мерами и их Х. ф., и на теореме об описании класса Х. ф. В бесконечномерном случае прямые аналоги этих теорем не имеют места. Если последовательность вероятностных мер (μ_n) слабо сходится к μ, то $(\hat{\mu}_n)$ поточечно сходится к $\hat{\mu}$ и эта сходимость равномерна на ограниченных множествах из $\mathfrak{X}^*$; если K есть слабо относительно компактное семейство вероятностных мер в $\mathfrak{X}$, то семейство $\{\hat{\mu}\colon \mu\in K\}$ равностепенно непрерывно в сильной топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Обратные утверждения верны только в конечномерном случае. Однако условия сходимости и слабой относительной компактности семейств вероятностных мер можно выразить в терминах Х. ф. (см. [2]). В отличие от конечномерного случая, не всякий положительно определенный нормированный (равный в нуле единице) непрерывный функционал является Х. ф.— непрерывности в метрич. топологии не хватает. Топология в $\mathfrak{X}^*$ наз. достаточной, соответственно необходимой, если в этой топологии непрерывность положительно определенного нормированного функционала достаточна, соответственно необходима, для того чтобы он был Х. ф. нек-рой вероятностной меры в $\mathfrak{X}$. Необходимая и достаточная топология наз. S-топологией. Пространство $\mathfrak{X}$ наз. S-пространством, если в $\mathfrak{X}^*$ существует S-топология. Гильбертово пространство является S-пространством (см. [3]).

Наиболее важный класс Х. ф.— характеристич. функционалы гауссовских мер. Мера μ в $\mathfrak{X}$ наз. центрированной гауссовской, если для всех $x^*\in\mathfrak{X}^*$

$$\hat{\mu}(x^*)=\exp\left[-\tfrac{1}{2}x^*(Rx^*)\right],\qquad (*)$$

где R — ограниченный линейный положительный оператор из $\mathfrak{X}^*$ в $\mathfrak{X}$ — ковариационный оператор меры μ, к-рый определяется соотношением

$$x^*(Rx^*)=\int x^{*2}(x)\, d\mu(x)$$

(см. [4]). В отличие от конечномерного случая, не всякий функционал вида $(*)$ является Х. ф.— нужны дополнительные ограничения на R, зависящие от пространства $\mathfrak{X}$. Напр., если $\mathfrak{X}=l_p$, $1\leqslant p<\infty$, то дополнительным (необходимым и достаточным) условием является условие $\sum r_{kk}^{p/2}<+\infty$, где $\|r_{ij}\|$ матрица оператора R в естественном базисе (см. [5]). В частности, в гильбертовом пространстве дополнительным условием является ядерность оператора R.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «C. r. Acad. sci.», 1935, t. 200, p. 1717—18, [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177—238, [3] Сазонов В. В., там же, 1958, т. 3, в. 2, с. 201—05, [4] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А., Вероятностные распределения в банаховых пространствах, М., 1985, [5] Vakhania N. N., «C. r. Acad. sci.», 1965, t. 260, p. 1560—62.

Н. Н. Вахания.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ в теории дифференциальных уравнений с частными производными — см. *Характеристика.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ в топологии — непрерывное отображение χ замкнутого n-мерного шара E^n в хаусдорфово топологич. пространство X, являющееся на внутренности $\overset{0}{E}{}^n$ шара гомеоморфизмом. Множество $e^n=\chi\left(\overset{0}{E}{}^n\right)$ наз. в этом случае клеткой пространства X, а χ — Х. о. клетки e^n. Если X — клеточное пространство, то клетками пространства X наз. те клетки пространства $|X|$, к-рые составляют клеточное разбиение X.

А. Ф. Харшиладзе.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, вековое уравнение, см. в ст. *Характеристический многочлен.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО — 1) Х.ч.— то же, что собственное число, собственное значение матрицы (см. *Характеристический многочлен*).

2) Х. ч. — значение *характеристического класса* касательного расслоения замкнутого многообразия на фундаментальном цикле этого многообразия.

А. Ф. Харшиладзе.

ХАРАКТЕРОВ ГРУППА группы G — группа всех *характеров* $X(G)=\operatorname{Hom}(G, A)$ группы G со

значениями в абелевой группе A относительно операции

$$(\alpha\beta)(g)=\alpha(g)\,\beta(g)\quad(g\in G,\ \alpha,\ \beta\in X(G)),$$

индуцированной операцией в A. В случае когда $A=T$,

$$X(G)\cong\prod_p \mathrm{Hom}\,(G,\ Z(p^\infty)),$$

где $Z(p^\infty)$ — квазициклические группы, взятые по одной для каждого простого числа p. Эта группа алгебраически компактна (см. *Сервантная подгруппа*). Если при этом G абелева, то $X(G)$ является *полной группой* тогда и только тогда, когда G — группа без кручения, и редуцированной тогда и только тогда, когда G периодична [4].

Группа характеров топологической группы G — группа $X(G)$ всех непрерывных гомоморфизмов $G\to T$, снабженная компактно открытой топологией. Она является хаусдорфовой абелевой топологич. группой. Если группа G локально компактна, то и $X(G)$ локально компактна, если G компактна, то $X(G)$ дискретна, а если G дискретна, то $X(G)$ компактна.

Примеры Х. г.:

$$X(T)\cong\mathbb{Z},\ X(\mathbb{Z})\cong T,\ X(\mathbb{R})\cong\mathbb{R},\ X(G)\cong G$$

для любой конечной дискретной абелевой группы G.

С каждым непрерывным гомоморфизмом топологических групп $\varphi\colon G\to H$ связан гомоморфизм Х. г. $\varphi^*: X(H)\to X(G)$. При этом соответствие $G\mapsto X(G)$, $\varphi\mapsto\varphi^*$ есть контравариантный функтор из категории топологических групп в категорию топологических абелевых групп. Если ограничиться категорией локально компактных абелевых групп G, то этот функтор определяет эквивалентность указанной категории и двойственной к ней категории (см. *Понтрягина двойственность*).

Группа характеров алгебраической группы G над полем K — группа $X(G)$ всех рациональных характеров $G\to K^*=G_m$. Если G — абелева аффинная алгебраич. группа, то $X(G)$ порождает пространство $K[G]$ (т. е. является базисом в этом пространстве) тогда и только тогда, когда G — *диагонализируемая алгебраическая группа*, т. е. изоморфна замкнутой подгруппе нек-рого тора G_m^s. При этом $X(G)$ — конечно порожденная абелева группа (без p-кручения, если char $K=p>0$) и $K[G]$ является групповой алгеброй группы $X(G)$ над K, что дает возможность определить двойственность между категорией диагонализируемых групп и категорией конечно порожденных абелевых групп (без p-кручения, если char $K=p>0$). В случае когда G — конечная группа (рассматриваемая как 0-мерная алгебраич. группа), эта двойственность совпадает с классич. *двойственностью* конечных абелевых групп.

Для любой связной алгебраич. группы G группа $X(G)$ не имеет кручения. В частности, диагонализируемая группа G является тором тогда и только тогда, когда $X(G)\cong\mathbb{Z}^s$.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972, [2] Моррис С., Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп, пер. с англ., М., 1980; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, пер. с англ., т. 1, М., 1974, [5] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

А. Л. Онищик.

ХАРАКТЕРОВ ФОРМУЛА, формула Вейля, — формула, выражающая *характер* $\mathrm{ch}\,V(\Lambda)$ неприводимого конечномерного представления полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 через его старший вес Λ:

$$\mathrm{ch}\,V(\Lambda)=\frac{\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w(\Lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w(\rho)}}=$$

$$=\frac{\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w(\Lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in R^+}(1-e^{-\alpha})}$$

(здесь W — *Вейля группа*, $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+}\alpha$ — полусумма положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Следствиями Х. ф. являются формула для размерности представления:

$$\dim V(\Lambda)=\prod_{\alpha\in R^+}\frac{(\Lambda+\rho,\ \alpha)}{(\rho,\ \alpha)}$$

и формула для кратности веса, а также формула Стейнберга для числа m_Λ вхождений неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля $V(\Lambda)$ в $V(\Lambda')\otimes V(\Lambda'')$:

$$m_\Lambda=\sum_{s,t\in W}\det(st)\,P(\Lambda+2\rho-s(\Lambda'+\rho)-t(\Lambda''+\rho)),$$

где $P(\mu)$ — число различных представлений элемента μ в виде суммы положительных корней (см. [1]).

Х. ф. обобщается на случай неприводимых представлений градуированных алгебр Ли, определяемых неразложимой *Картана матрицей* (см. также *Ли градуированная алгебра*). Это обобщение приводит к следующим комбинаторным тождествам:

$$e(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j t^{j(3j+1)/2}\quad(\text{тождество Эйлера}),$$

$$\frac{e^2(t)}{e(t^2)}=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j t^{j^2}\quad(\text{тождество Гаусса}),$$

$$e^3(t)=\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j(2j+1)^{j(j+1)/2}$$

(тождество Якоби),

где

$$e(t)=\prod_{n\geqslant 1}(1-t^n),$$

$$\prod_{j\geqslant 1}(1-t^{5j-4})^{-1}(1-t^{5j-1})^{-1}=$$

$$=\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^{n^2}}{(1-t)\cdot(1-t^n)}$$

(тождество Роджерса — Рамануджана) и другие (см. [3], [4]).

Аналог Х. ф. получен также для неприводимых представлений нек-рых простых *супералгебр* Ли. [2].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, пер. с франц., М., 1978, [2] Лейтес Д. А., «Функциональный анализ», 1980, т. 14, № 2, с. 35—38; [3] Kac V. G., «Adv. Math.», 1978, v. 30, p. 85—136, [4] Leprovsky J., в кн.: Lie algebras and related topics, B.— Hdlb.— N. Y., 1982.

Д. А. Лейтес.

ХАРДИ ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных. Пусть функция $f(x)=f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $n=2,\ 3,\ \ldots$, задана на n-мерном параллелепипеде

$$D_n=[a_1,\ b_1]\times\ldots\times[a_n,\ b_n]$$

и

$$\Delta_{h_k}(f;\ x)=f(x_1,\ \ldots,\ x_k+h_k,\ \ldots,\ x_n)-$$

$$-f(x_1,\ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_n),\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_k}(f;\ x)=\Delta_{h_k}\left(\Delta_{h_1,\ldots,h_{k-1}};\ x\right),\quad k=2,\ \ldots,\ n.$$

Пусть, далее, Π — произвольное разбиение параллелепипеда гиперплоскостями

$$x_s=x_s^{(r_s)},\ r_s=0,\ 1,\ \ldots,\ l_s;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$x_s^{(r_s)}<x_s^{(r_s+1)},\ x_s^{(0)}=a_s,\ x_s^{(l_s)}=b_s,\ x_s^{(r_s+1)}-x_s^{(r_s)}=h_s^{(r_s)}$$

на n-мерные параллелепипеды и $\tilde{H}_n$ — класс всех функций $f(x)$, для к-рых

$$\tilde{H}_n(f)=\sup_{\pi}\sum_{r_1=0}^{l_1-1}\dots\sum_{r_n=0}^{l_n-1}\left|\Delta_{h_1^{(r_1)}\dots h_n^{(r_n)}}\left(f;\ x_1^{(r_1)},\dots,\right.\right.$$
$$\left.\left.x_n^{(r_n)}\right)\right|<\infty.$$

Пусть, теперь, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, $s=1,\dots,n-1$ — целочисленный вектор, координаты к-рого удовлетворяют неравенствам $1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_s\leqslant n$ и $\bar{\alpha}$ — целочисленный вектор размерности $n-s$ такой, что его координаты образуют строго возрастающую последовательность и состоят из всех тех чисел $1,\dots,n$, к-рые не содержатся среди $\alpha_1,\dots,\alpha_s$. Тогда каждую точку $x\in D_n$ можно записать в виде $x=(x^{\alpha},\ x^{\bar{\alpha}})$. Если координаты $x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_s}$ точки $x\in D_n$ фиксированы на значениях $\overset{\circ}{x}_{\alpha_1},\dots,\overset{\circ}{x}_{\alpha_s}$, то будем писать $x=(\overset{\circ}{x}{}^{\alpha},\ x^{\bar{\alpha}})$.

Вариация Харди функции $f(x)$ на D_n:

$$H(f,\ D_n)\overset{\text{def}}{=}\sup_{\alpha}\sup_{\overset{\circ}{x}{}^{\alpha}}\tilde{H}_{n-s}(f(\overset{\circ}{x}{}^{\alpha},\ x^{\bar{\alpha}})).$$

Если $H(f,\ D_n)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) Х. в. на параллелепипеде D_n, а класс всех таких функций обозначается $H(D_n)$. Этот класс при $n=2$ был введен Г. Харди [1] (см. также [2]) в связи с исследованием сходимости двойных рядов Фурье. Он доказал, что прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$ класса $H(Q_2)$ ($Q_2=[0,\ 2\pi]\times[0,\ 2\pi]$), имеющей период 2π по каждой переменной, сходятся в каждой точке $(x_1,\ x_2)$ к числу

$$\frac{1}{4}\{f(x_1+0,\ x_2+0)+f(x_2+0,\ x_2-0)+$$
$$+f(x_1-0,\ x_2+0)+f(x_1-0,\ x_2-0)\},$$

где

$$f(x_1\pm 0,\ x_2\pm 0)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\varepsilon_1\to+0,\ \varepsilon_2\to+0}f(x_1\pm\varepsilon_1,\ x_2\pm\varepsilon_2).$$

Для того чтобы функция $f(x)$ входила в класс $H(D_n)$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где f_1 и f_2 такие конечные на D_n функции, что $\Delta_{h_1,\dots,h_k}(f;\ x)\geqslant 0$, $k=2,\dots,n$, при всех $x\in D_n$ и допустимых приращениях $h_1,\dots,h_n$. Класс $H(D_n)$ содержится в классе $A(D_n)$ функций, имеющих ограниченную *Арцела вариацию* на D_n.

Лит.: [1] Hardy G. H., «Quart. J. Math.», 1905, v. 37, № 1, p. 57—79; [2] Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, Bd 1, B., 1921. *Б. И. Голубов.*

ХАРДИ КЛАССЫ H^p, $p>0$, — классы аналитич. в круге $D=\{|z|<1\}$ функций $f(z)$, для к-рых

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_T|f(r\xi)|^p\,dm(\xi)\right\}^{1/p}<\infty,\qquad(*)$$

где $dm=|d\xi|/2\pi$ — нормированная мера Лебега на окружности $T=\{|\xi|=1\}$; это равносильно условию существования у субгармонич. функции $|f(z)|^p$ гармонич. мажоранты в D. К Х. к. причисляют также класс H^{∞} ограниченных аналитич. функций в D. Введенные Ф. Риссом [1] и названные им в честь Г. Харди (G. Hardy), первым рассмотревшего свойства p-средних в условии (*), Х. к. играют важную роль в различных вопросах граничных свойств функций, гармонич. анализа, теории степенных рядов, линейных операторов, случайных процессов, экстремальных и аппроксимационных задач.

При любых $0<q<p\leqslant\infty$ справедливы точные вложения $H^p\subset H^q\subset N$, где N — класс Неванлинны *ограниченного вида функций*, в частности функции Х. к. имеют почти всюду на T *угловые граничные значения* $f^*(\xi)$, по к-рым исходные функции $f(z)$ в D восстанавливаются однозначно. Если $f(z)\in H^p$, то $f^*(\xi)\in L^p(T)$ (обратное верно не для любой аналитич. функции $f(z)$) и

$$\lim_{r\to 1-}\int_T|f(r\xi)-f^*(\xi)|^p\,dm(\xi)=0.$$

Классы H^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, — это в точности классы аналитических в D функций $f(z)$, к-рые имеют граничные значения $f^*(\xi)\in L^p(T)$ и восстанавливаются по ним посредством интеграла Коши. Функции же, представимые в D интегралом типа Коши или Коши—Стильтьеса, принадлежат, вообще говоря, лишь классам H^p, $p<1$ (обратное неверно). Однолистные функции в D принадлежат всем классам H^p, $p<1/2$. Условие $f'(z)\in H^1$ необходимо и достаточно для того, чтобы аналитич. функция $f(z)$ была непрерывна в $\overline{D}$ и абсолютно непрерывна на T. Если функция $f(z)$ конформно отображает круг D на жорданову область G, то условие $f'(z)\in H^1$ равносильно спрямляемости контура ∂G (см. [2], [5]).

Существование взаимно однозначного соответствия между функциями Х. к. и их граничными значениями позволяет рассматривать, когда это удобно, функции $f(z)\in H^p$ как функции на T, при этом классы H^p становятся замкнутыми подпространствами банаховых (полных линейных метрических, если $p<1$) пространств $L^p(T)$. При $0<p<\infty$ эти подпространства совпадают с замыканиями в $L^p(T)$ многочленов от $\xi=e^{it}$, а при $1\leqslant p\leqslant\infty$ — с совокупностями тех функций из $L^p(T)$, коэффициенты Фурье к-рых равны нулю для отрицательных индексов. Теорема Рисса утверждает, что отображение P, выражаемое через ряды Фурье равенством

$$P\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{int}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{int},$$

является ограниченной проекцией банахова пространства $L^p(T)$ на H^p при любом $1<p<\infty$, но не при $p=1,\ \infty$. Отсюда вытекает совпадение действительных пространств $L^p_{\mathbb{R}}(T)$ и $\operatorname{Re}H^p$, $1<p<\infty$; при других же значениях p эти пространства существенно различны как по аппроксимативным характеристикам и структуре сопряженных пространств, так и (при $p=1$) в отношении свойств коэффициентов Фурье (см. [7], [9]).

Множества нулей $\{z_k\}$ нетривиальных функций Х. к. полностью характеризуются условием $\sum_k(1-|z_k|)<\infty$, обеспечивающим равномерную сходимость внутри D канонич. *Бляшке произведений*

$$B(z)=z^n\prod_k\frac{|z_k|}{z_k}\,\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k\cdot z}\in H^{\infty}.$$

Для любой функции $f(z)\in H^p$, $f(z)\not\equiv 0$, $p>0$, имеет место факторизация Рисса $f(z)=B(z)\cdot f_0(z)$, где $B(z)$ — произведение Бляшке, построенное по нулям функции $f(z)$, а $f_0(z)\in H^p$ и $f_0(z)\neq 0$ в D. Функция $f_0(z)$ в свою очередь разлагается в произведение $f_0(z)=F(z)\cdot S(z)$ внешней функции

$$F(z)=\exp\left\{\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}\ln\chi(\xi)\,dm(\xi)+i\alpha\right\},\quad\alpha\in\mathbb{R},$$

и внутренней сингулярной функции

$$S(z)=\exp\left\{-\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}\,d\mu(\xi)\right\},$$

где $\chi(\xi)\geqslant 0$, $\ln\chi(\xi)\in L^1(T)$, а $d\mu$ — неотрицательная сингулярная мера на T. Условия

$$f(z)\in H^p,\quad F(z)\in H^p,\quad\chi(\xi)\in L^p(T)$$

равносильны, при этом $|f^*(\xi)|=|F^*(\xi)|=\chi(\xi)$ почти всюду на T. Внутренние функции $G(z)$, имеющие вид $G(z)=B(z)\cdot S(z)$, полностью характеризуются условиями $|G(z)|<1$ в D и $|G^*(\xi)|=1$ почти всюду на T. Часто используют разложение $f(z)=\sqrt{f_0(z)}\cdot(\sqrt{f_0(z)}\,B(z))$ произвольной функции $f(z)\in H^1$ в произведение двух функций из H^2 (см. [4], [5]).

Класс H^2 занимает особое место среди Х. к., так как является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром и имеет простое описание через коэффициенты Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2 \Leftrightarrow \{a_n\}\in l^2.$$

Важную роль сыграло изучение оператора умножения на z, или оператора сдвига, в пространстве H^2; оказалось, что все инвариантные подпространства этого оператора порождены внутренними функциями $G(z)$, т. е. имеют вид $G(z)\cdot H^2$ (см. [4]).

Относительно поточечного умножения и sup-нормы класс H^∞ является банаховой алгеброй с весьма сложным строением пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ и границы Шилова (см. [4]); вопрос о плотности идеалов $(z-\xi)\cdot H^\infty$, $\xi\in D$, в пространстве $\mathfrak{M}$ с обычной топологией Гельфанда (т. н. проблема короны) был решен положительно на основе описания универсальных интерполяционных последовательностей — последовательностей $\{z_n\}$, $z_n\in D$, таких, что $\{\{f(z_n)\}: f(z)\in H^\infty\}=l^\infty$ (см. [5]).

Х. к. $H^p(G)$, $p>0$, аналитич. функций $f(z)$ в областях $G\subset\mathbb{C}$, отличных от круга, можно определить (в общем случае неэквивалентно) исходя либо из условия существования у функций $|f(z)|^p$ гармонич. мажоранты в G, либо из условия ограниченности интегралов $\int_{L_r}|f(z)|^p\,|dz|$ по семействам контуров $\{L_r\}$, $L_r\subset G$, в каком-то смысле приближающих границу области G. Первый способ позволяет определить также Х. к. на римановых поверхностях. Второй способ приводит к классам, лучше приспособленным для решения экстремальных и аппроксимационных задач; в случае жордановых областей G со спрямляемой границей последние классы наз. классами Смирнова и обозначаются $E^p(G)$ (см. [2]). Для полуплоскости, напр. $P=\{\mathrm{Re}\,z>0\}$, классы $H^p(P)$, $p>0$, определяемые условием

$$\sup_{x>0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p\,dy<\infty,$$

по свойствам близки к Х. к. для круга, однако их приложения в гармонич. анализе связаны уже не с теорией рядов Фурье, а с теорией преобразований Фурье.

Х. к. аналитич. функций $f(z)=f(z_1,\ldots,z_n)$ в единичном шаре B^n и единичном поликруге D^n пространства $\mathbb{C}^n$ определяются условием (*) с заменой окружности T соответственно сферой ∂B^n или остовом T^n поликруга. Специфика многомерного случая проявляется прежде всего в отсутствии простой характеристики множеств нулей и факторизации функций соответствующих Х. к. (см. [6], [10]). Х. к. определяются, причем различными способами, и для других областей в $\mathbb{C}^n$ (см. [10]).

Многомерными аналогами Х. к. (см. [3]) являются т. н. пространства Харди — пространства $H^p(\mathbb{R}^n)$, $p>0$, систем Рисса — действительных вектор-функций $F(x,y)=\{u_j(x,y)\}_{j=0}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y>0$, удовлетворяющих обобщенным условиям Коши—Римана

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j},\quad x_0=y,$$

для к-рых

$$\sup_{y>0}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|^p\,dx\right\}^{1/p}<\infty.$$

Определение этих пространств можно дать и в терминах лишь «действительных частей» $u_0(x,y)$ систем $F(x,y)$, потребовав, чтобы функция $u_0(x,y)$ была гармонической, а ее максимальная функция по некасательным путям

$$M_a u(x)=\sup_{t,y}\{|u_0(t,y)|:|t-x|<ay\}\in L^p(\mathbb{R}^n),\quad a>0.$$

При $p>1$ переход от функции $u_0(x,y)$ к ее граничным значениям дает отождествление пространств $H^p(\mathbb{R}^n)$ и $L^p(\mathbb{R}^n)$, поэтому интерес представляет лишь случай $p\leqslant 1$. Именно в рамках пространств $H^p(\mathbb{R}^n)$ были первоначально установлены такие фундаментальные результаты теории Х. к., как реализация сопряженного пространства $(H^1)^*$ в виде пространства функций ограниченного среднего колебания (см. [8], [9]) и атомич. разложение классов H^p, $p\leqslant 1$ (см. [7]). Характеристика Х. к. в терминах максимальной функции в ряде случаев требует привлечения вероятностных понятий, связанных с броуновским движением (см. [8]).

Абстрактные Х. к. возникают в теории равномерных алгебр и не связаны непосредственно с аналитич. функциями. Фиксируется замкнутая алгебра A непрерывных функций на компакте X и нек-рый гомоморфизм φ: $A\longrightarrow\mathbb{C}$; существует положительная мера $d\mu$ на X, представляющая φ: $\varphi(f)=\int_X f\cdot d\mu$, $f\in A$. По определению, классы $H^p(d\mu)$, $0<p\leqslant\infty$, суть замыкания (слабое замыкание при $p=\infty$) алгебры A в пространствах $L^p(d\mu)$; изучение классов $H^p(d\mu)$ позволяет получить дополнительную информацию об алгебре A (см. [11]).

Лит.: [1] Riesz F., «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 87—95; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Stein E., Weiss G., «Acta math.», 1960, v. 103, p. 25—62; [4] Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций, пер. с англ., М., 1963; [5] Duren P., Theory of H^p spaces, N. Y.— L., 1970; [6] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [7] Coifman R. R., Weiss G., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 83, № 4, p. 569—645; [8] Petersen K. E., Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation, L., 1977; [9] Koosis P., Introduction to H_p spaces. With an appendix on Wolff's proof of the corona theorem, Camb., 1980; [10] Rudin W., Function theory in the unit ball of C^n, N. Y.— B., 1980; [11] Гамелин Т., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973.

С. В. Шведенко.

ХАРДИ НЕРАВЕНСТВО для рядов: если $p>1$, $a_n\geqslant 0$ и $A_n=a_1+\ldots+a_n$, $n=1,2,\ldots$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p,$$

кроме случая, когда все a_n равны нулю. Константа $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ в этом неравенстве наилучшая.

Х. н. для интегралов

$$\int_0^{+\infty}x^{-p}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^p dx<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{+\infty}|f(x)|^p\,dx,\quad p>1$$

и

$$\int_0^{+\infty}\left|\int_x^{+\infty}f(t)\,dt\right|^p dx<p^p\int_0^{+\infty}|xf(x)|^p\,dx,\quad p>1.$$

Неравенства справедливы для всех функций, для к-рых конечны правые части неравенств, кроме случая, когда функция f почти всюду на интервале $(0,+\infty)$ равна нулю (в этом случае неравенства обращаются в равен-

ства). Константы $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ и p^p являются наилучшими. Интегральные Х. н. обобщаются на произвольные промежутки:

$$\int_a^b \left| x^{\alpha-1} \int_a^x f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant c \int_a^b |x^\alpha f(x)|^p\,dx, \quad \alpha < 1-\frac{1}{p},$$
$$\int_a^b \left| x^{\alpha-1} \int_x^b f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant c \int_a^b |x^\alpha f(x)|^p\,dx, \quad \alpha > 1-\frac{1}{p},$$
$$0 \leqslant a < b \leqslant +\infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty,$$

где c — нек-рые постоянные.

Обобщенными неравенствами Харди наз. неравенства вида

$$\int_a^b \left| \varphi(x) \int_a^x f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant c \int_a^b |\psi(x) f(x)|^p\,dx, \quad (1)$$
$$\int_a^b \left| \varphi(x) \int_x^b f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant c \int_a^b |\psi(x) f(x)|^p\,dx. \quad (2)$$

В случае $a=0$ и $b=+\infty$ неравенство (1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x>0} \left[\int_x^{+\infty} |\varphi(t)|^p\,dt\right]^{1/p} \left[\int_0^x |\psi(t)|^{-p'}\,dt\right]^{1/p'} < +\infty,$$

а неравенство (2) тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x>0} \left[\int_0^x |\varphi(t)|^p\,dt\right]^{1/p} \left[\int_x^{+\infty} |\psi(t)|^{-p'}\,dt\right]^{1/p'} < +\infty,$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Лит.: [1] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [3] Muckenhoupt B., «Studia math.», 1972, v. 44, p. 31—38. *Л. Д. Кудрявцев.*

ХАРДИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x) = \int_0^\infty C_\nu(xt)\, t f(t)\,dt,$$

где

$$C_\nu(z) = \cos p\pi J_\nu(z) + \sin p\pi Y_\nu(z),$$

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно. При $p=0$ Х. п. совпадает с одной из форм преобразования Ганкеля, при $p=1/2$ с Y-преобразованием. Х. п. предложено Г. Харди [1].

Формула обращения

$$f(t) = \int_0^\infty \Phi(tx)\, xF(x)\,dx,$$

где

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (x/2)^{\nu+2p+2n}}{\Gamma(p+n+1)\,\Gamma(\nu+p+n+1)}.$$

Х. п. определено также для нек-рых классов обобщенных функций.

Лит.: [1] Hardy G. H., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1925, v. 23, № 7, p. 61; [2] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ХАРДИ ПРИЗНАК равномерной сходимости функциональных рядов: если последовательность действительных функций $a_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, монотонна при каждом $x \in E$, где E — нек-рое множество, и равномерно стремится к нулю на E, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^\infty b_n(x)$ ограничена на E (функции $b_n(x)$ могут принимать комплексные значения), то ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)\, b_n(x)$ равномерно сходится на множестве E.

Х. п. установлен Г. Харди [1].

Лит.: [1] Hardy G. H., «Proc. Lond. Math. Soc. (2)», 1906, v. 4, p. 247—65. *Л. Д. Кудрявцев.*

ХАРДИ ТЕОРЕМА в теории функций комплексного переменного: если $f(z)$ — регулярная аналитич. функция в круге $|z|<R$, α — любое положительное число и

$$M_\alpha(r) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\alpha\,d\theta\right\}^{1/\alpha}, \quad 0<r<R,$$

— среднее значение, то $M_\alpha(r)$ есть неубывающая функция от r, логарифмически выпуклая относительно $\ln r$. Х. т. установлена Г. Харди [1].

Утверждение о логарифмич. выпуклости остается в силе и для функции $f(z)$, регулярной в кольце $0 \leqslant \rho < |z| < R$ (см. [1]).

Эта Х. т. обобщается для *субгармонических функций* в шаре пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (см. также [2]).

Лит.: [1] Hardy G. H., «Proc. Lond. Math. Soc. (2)», 1915, v. 14, p. 269—77; [2] Привалов И. И., Субгармонические функции, М. — Л., 1937. *Е. Д. Соломенцев.*

ХАРДИ — ЛИТЛВУДА ПРИЗНАК сходимости рядов Фурье: если 2π-периодич. функция $f(x)$ такова, что

$$f(x_0+h) - f(x_0) = o(1/\log 1/|h|), \quad |h| \to +0,$$

а коэффициенты Фурье a_n, b_n этой функции удовлетворяют условиям

$$a_n = O(n^{-\delta}), \quad b_n = O(n^{-\delta}), \quad n \to +\infty,$$

при нек-ром $\delta>0$, то ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.

Х.—Л. п. установлен Г. Харди и Дж. Литлвудом ([1]).

Лит.: [1] Hardy G. H., Littlewood J. E., «J. Lond. Math. Soc.», 1932, v. 7, p. 252—56; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 271. *Б. И. Голубов.*

ХАРДИ — ЛИТЛВУДА ПРОБЛЕМА — задача нахождения асимптотич. формулы для числа $Q(n)$ решений уравнения

$$p + x^2 + y^2 = n, \quad (1)$$

где p — простое, x и y — целые, n — натуральное число ($n \to \infty$). Аналогом этой задачи является проблема нахождения асимптотики для числа решений уравнения

$$p - x^2 - y^2 = l, \quad (2)$$

где $l \neq 0$ — фиксированное целое число, $p \leqslant n$ ($n \to \infty$).

Х. —Л. п. была поставлена Г. Харди (G. Hardy) и Дж. Литлвудом (J. Littlewood) в 1923 и рассмотрена ими на основе эвристич. и гипотетич. соображений.

Дисперсионный метод, разработанный Ю. В. Линником, позволил ему найти асимптотику для (1):

$$Q(n) = \pi A_0 \frac{n}{\ln n} \prod_{p/n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)} + R(n),$$

где

$$A_0 = \prod_{p/n}\left(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right), \quad R(n) = O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1,042}}\right).$$

Из аналогичной формулы для (2) следует бесконечность множества простых чисел вида $p=x^2+y^2+l$. С помощью дисперсионного метода найдена асимптотика для числа решений обобщенного уравнения Харди — Литлвуда $p+\varphi(x, y)$, где p — простое, $\varphi(x, y)$ — заданная примитивная положительно определенная квадратичная форма.

Рассмотрение аналогичного уравнения $p-\varphi(x, y)=l$ приводит к доказательству бесконечности множества простых чисел вида $p=\varphi(x, y)+l$.

Теорема Виноградова — Бомбьери о распределении простых чисел в арифметич. прогрессиях в среднем также доставляет решение Х.— Л. п., заменяя фактически расширенную гипотезу Римана теоремами типа *большого решета*.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [2] Бредихин Б. М., Линник Ю. В., «Матем. сб.», 1966, т. 71, № 2, с. 145—61; [3] Бредихин Б. М., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2, с. 89—130. *Б. М. Бредихин.*

ХАРДИ — ЛИТЛВУДА ТЕОРЕМА — 1) Х. — Л. т. в теории функций комплексного пе-

ременного: если $a_k \geqslant 0$, $k=0, 1, \ldots$, и для степенного ряда

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

с радиусом сходимости 1 имеет место на действительной оси асимптотич. равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sim \frac{1}{1-x}, \quad x \longrightarrow 1,$$

то для частичных сумм s_n имеет место асимптотич. равенство

$$s_n=\sum_{k=0}^{n} a_n \sim n, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Эта Х.— Л. т., установленная Г. Харди и Дж. Литлвудом [1], является одной из *тауберовых теорем*.

Лит.: [1] Hardy G. H., Littlewood J. E., «Proc. Lond. Math. Soc. (2)», 1914, v. 13, p. 174—91; [2] Титчмарш Е., Теория функций, пер. с англ., М.— Л., 1951.

Е. Д. Соломенцев.

2) Х.—Л. т. о неотрицательной суммируемой функции — теорема об интегральных свойствах нек-рой функции, связанной с данной. Установлена Г. Харди и Дж. Литлвудом ([1]). Пусть $f(x)$ неотрицательна и суммируема на $[a, b]$ и пусть

$$\theta(x)=\theta_f(x)=\sup_{\xi \in [a, b],\ \xi \neq x} \frac{1}{x-\xi} \int_{\xi}^{x} f(t)\,dt.$$

Тогда:

1) если $f \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, то

$$\int_a^b \theta^p(x)\,dx \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b f^p(x)\,dx;$$

2) если $f \in L(a, b)$, то для всех $\alpha \in (0, 1)$

$$\int_a^b \theta^{\alpha}(x)\,dx \leqslant \frac{2\,(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_a^b f(x)\,dx;$$

3) если $f(x)\ln^+ f(x) \in L(a, b)$, то

$$\int_a^b \theta(x)\,dx \leqslant 4\int_a^b f(x)\ln^+ f(x)\,dx + A,$$

где A зависит только от $b-a$. Здесь

$$\ln^+ u=\begin{cases} 0, & u < 1, \\ \ln u & u \geqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ — периодич. функция с периодом 2π, суммируемая на $[-\pi, \pi]$, и

$$M(x)=M_f(x)=\sup_{0 < |t| \leqslant \pi} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(u)|\,du.$$

Тогда $M_f(x) \leqslant \theta_{|f|}(x)$, где $\theta_{|f|}(x)$ построена для $[-2\pi, 2\pi]$. Из теоремы для $\theta(x)$ получаются интегральные неравенства для $M(x)$.

Лит.: [1] Hardy G., Littlewood J., «Acta math.», 1930, v. 54, p. 81—116; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965.

А. А. Конюшков.

ХАССЕ ИНВАРИАНТ — 1) Х. и. $h(A)$ центральной простой алгебры A над локальным полем K (соответственно над полями $K=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) — образ класса алгебры A при канонич. изоморфизме *Брауэра группы* поля K на группу всех комплексных корней из 1 (соответственно на группы $\{\pm 1\}$, $\{1\}$). Для циклич. алгебры A с образующими a, b и определяющими соотношениями $a^n=x$, $b^n=y$, $ba=\varepsilon ab$, где $x, y \in K^*$, $\varepsilon \in K$ — первообразный корень степени n из 1, Х. и. $h(A)$ совпадает с *норменным вычетом* (символом Гильберта) $(x, y)_n$. В частности, Х. и. алгебры кватернионов равен -1.

Для центральной простой алгебры A над глобальным полем K и любого нормирования v этого поля определяется локальный Х. и. $h_v(A)$ как Х. и. алгебры $A \otimes K_v$ над пополнением K_v поля K относительно топологии, определяемой нормированием v. Локальные Х. и. однозначно определяют класс алгебры A. Они связаны следующими условиями: 1) имеется лишь конечное число нормирований v, для к-рых $h_v(A) \neq 1$; 2) $\prod_v h_v(A)=1$ (закон взаимности). В остальном они могут принимать произвольные значения.

Х. и. предложен Х. Хассе [1], [2].

Лит.: [1] Hasse H., «Math. Ann.», 1931, Bd 104, S. 495—534; [2] его же, там же, 1933, Bd 107, S. 731—60; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972.

2) Х. и., инвариант Хассе—Минковского, символ Хассе, $\varepsilon(f)$ невырожденной квадратичной формы $f \sim a_1x_1^2+\ldots+a_nx_n^2$ над локальным полем K характеристики $\neq 2$ (соответственно над полями $K=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) — произведение

$$\prod_{i<j} (a_i, a_j)=\pm 1,$$

где $(\ ,\ )$ — квадратичный символ Гильберта, то есть $(a, b)=1$, если квадратичная форма ax^2+by^2 представляет 1 в поле K и $(a, b)=-1$ в противном случае. Х. и. зависит только от класса эквивалентности формы f, а не от выбора диагональной формы в этом классе. Иногда Х. и. определяют как произведение $\prod_{i \leqslant j} (a_i, a_j)$, что отличается от приведенного выше определения множителем $(d(f), d(f))$, где $d(f)$ — дискриминант формы f.

В случае локального поля K число n переменных, дискриминант и Х. и. определяют класс формы f. При $n \geqslant 3$ инварианты $d(f)$ и $\varepsilon(f)$ могут принимать любые значения независимо друг от друга; при $n=2$ исключается случай $d(f)=-1$, $\varepsilon(f)=-1$; при $n=1$ всегда $\varepsilon(f)=1$.

В случае $K=\mathbb{R}$ Х. и. выражается через сигнатуру, а именно,

$$\varepsilon(f)=(-1)^{s\,(s-1)/2},$$

где s — отрицательный индекс инерции формы f. В случае $K=\mathbb{C}$ всегда $\varepsilon(f)=1$.

Для невырожденной квадратичной формы f над глобальным полем K характеристики $\neq 2$ и любого нормирования v поля K определяется локальный Х. и. $\varepsilon_v(f)$ как Х. и. квадратичной формы f, рассматриваемой над пополнением K_v поля K относительно топологии, определяемой нормированием v. Число переменных, дискриминант, локальные Х. и. и сигнатуры над вещественными пополнениями поля K определяют класс формы f.

Необходимые и достаточные условия существования невырожденной квадратичной формы от n переменных над глобальным полем K характеристики $\neq 2$, имеющей заданный дискриминант $d \neq 0$, заданные локальные Х. и. ε_v и, для вещественных нормирований v — заданные отрицательные индексы инерции s_v, состоит в следующем:

a) $\varepsilon_v \neq 1$ лишь для конечного числа нормирований v;

b) $\prod_v \varepsilon_v=1$ (следствие *квадратичного закона взаимности*);

c) $\varepsilon_v=1$, если $n=1$ или $n=2$ и $d \in (-1)(K_v^*)^2$;

d) $\varepsilon_v=(-1)^{s_v(s_v-1)/2}$ для каждого вещественного нормирования v;

e) $\varepsilon_v=1$ для каждого комплексного нормирования v;

f) $\operatorname{sgn} d_v=(-1)^{s_v}$ для каждого вещественного нормирования v (здесь d_v — образ d при изоморфизме $K_v \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$).

Х. и. предложен Х. Хассе [1].

Лит.: [1] Hasse H., «J. reine angew. Math.», 1923, Bd 152, S. 129—48, 205—24; 1924, Bd 153, S. 12—43, 113—30, 158—62; [2] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, B.— [a. o.], 1963; [3] Lam T.-Y., The algebraic theory of quadratic forms, Reading (Mass.), 1973; [4] Кассельс Дж., Рациональные квадратичные формы, пер. с англ., М., 1982.

3) Х. и. эллиптической кривой X над полем K характеристики $p>0$ — число 0 или 1 в зависимости от того, является нулевым или биективным эндоморфизм группы когомологий $H^1(X, O_X)$, индуцированный *Фробениуса эндоморфизмом* кривой X. Кривые, для к-рых Х. и. равен 0, называются суперсингулярными.

Лит.: [1] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [2] Манин Ю. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 153—72. *Э. Б. Винберг.*

ХАССЕ ПРИНЦИП — один из центральных принципов диофантовой геометрии, сводящий вопрос о существовании рациональных точек на алгебраич. многообразии над глобальным полем к аналогичным вопросам над локальными полями.

Пусть M — нек-рый класс алгебраич. многообразий над глобальным полем K. В классе M выполнен Х. п., если для любого X из M такого, что для всех нетривиальных абсолютных значений v на K множество K_v-рациональных точек $X(K_v)$ многообразия X не пусто, множество K-рациональных точек $X(K)$ тоже не пусто (здесь K_v — пополнение поля K относительно v). В частности, если K — поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то из непустоты множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$ и множеств p-адических точек $X(\mathbb{Q}_p)$ для всех простых p вытекает непустота множества рациональных точек $X(\mathbb{Q})$. Х. п. выполнен для квадрик [2], тем самым он справедлив для алгебраич. кривых рода 0 (см. [3]). Для квадрик над числовым полем Х. п. сформулирован и доказан Х. Хассе [1]. Для кубич. гиперповерхностей Х. п., вообще говоря, неверен (см. [3], [4]); контрпримерами (над $\mathbb{Q}$) являются кривая $3x^2+4y^3+5z^3=0$ и поверхность $5x^3+12y^3+9z^3+10t^3=0$.

Для алгебраич. группы G над полем k выполнен Х. п., если он выполнен для класса алгебраич. многообразий $M(G)$, состоящего из всех главных однородных пространств над G (см. *Галуа когомологии*, *Вейля — Шатле группа*, а также [2], [3], [5]). Предполагается [5], и во многих случаях доказано, что Х. п. выполнен для односвязных или присоединенных полупростых алгебраич. групп. Неизвестны (1984) примеры абелевых многообразий G над числовым полем, для к-рых выполнен Х. п.

Лит.: [1] Hasse H., «J. reine und angew. Math.», 1924, Bd 153, S. 113—30; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Кассельс Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 1—48; [4] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [5] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968. *Ю. Г. Зархин.*

ХАУСДОРФА АКСИОМА — одна из *отделимости аксиом*. Введена Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff, 1914, см. [1]) при определении им понятия топологич. пространства. В топологич. пространстве выполняется Х. а., если любые две его (различные) точки обладают непересекающимися окрестностями. Пространство, удовлетворяющее Х. а., наз. хаусдорфовым пространством или T_2-пространством.

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937. *И. Г. Кошевникова.*

ХАУСДОРФА МЕРА — собирательное название класса мер, определенных на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(X)$ метрич. пространства X с помощью следующего построения: пусть $\mathfrak{A}$ — нек-рый класс открытых подмножеств X, $l=\{l(A), A\in\mathfrak{A}\}$ — неотрицательная функция, определенная на классе $\mathfrak{A}$, и

$$\lambda(B, \varepsilon)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n} l(A_i)\right\}, \quad \{A_i,\ i=1,\ \ldots,\ n\},$$

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{n} A_i\in\mathfrak{A}, \quad \operatorname{diam} A_i\leqslant\varepsilon, \quad n=1, 2, \ldots,$$

где нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям борелевского множества $B\subset X$ множествами из $\mathfrak{A}$ с диаметром, не превосходящим ε. Мерой Хаусдорфа λ, определяемой классом $\mathfrak{A}$ и функцией l, наз. предел

$$\lambda(B)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(B, \varepsilon).$$

Примеры Х. м.: 1) пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность всех шаров в X, $l(A)=(\operatorname{diam} A)^\alpha$, $\alpha>0$; соответствующая мера λ наз. α-мерой Хаусдорфа (линейной мерой Хаусдорфа при $\alpha=1$ или плоской мерой Хаусдорфа при $\alpha=2$); 2) $X=\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathfrak{A}$ — совокупность цилиндров с шаровыми основаниями и осями, параллельными направлению оси x_{n+1}; $l(A)$ равна n-мерному объему осевого сечения цилиндра $A\in\mathfrak{A}$, соответствующая Х. м. наз. цилиндрической мерой.

Х. м. введена Ф. Хаусдорфом [1].

Лит.: [1] Hausdorff F., «Math. Ann.», 1918, Bd 79, S. 157—79; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1962. *Р. Л. Минлос.*

ХАУСДОРФА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — метод суммирования числовых и функциональных рядов; введен Ф. Хаусдорфом [1]; определяется следующим образом. Последовательность $s=\{s_n\}$ подвергается последовательно трем линейным матричным преобразованиям:

$$t=\delta s, \quad \tau=\mu t, \quad \sigma=\delta t,$$

где δ — преобразование посредством треугольной матрицы $\{\delta_{nk}\}$:

$$\delta_{nk}=\begin{cases}(-1)^k\binom{n}{k}, & k\leqslant n,\\ 0, & k>n;\end{cases}$$

μ — диагональное преобразование посредством диагональной матрицы $\|\mu_{nk}\|$:

$$\mu_{nk}=\begin{cases}\mu_n, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}$$

где μ_n — числовая последовательность. Преобразование

$$\sigma=\lambda s,$$

где $\lambda=\delta\mu\delta$, $\{\mu_n\}$ — произвольная числовая последовательность, наз. общим хаусдорфовым преобразованием, а матрицу $\delta\mu\delta$ — матрицей Хаусдорфа. В матричной записи общее хаусдорфово преобразование имеет вид

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{nk}s_k,$$

где

$$\lambda_{nk}=\begin{cases}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k, & k\leqslant n,\\ 0, & k>n;\end{cases}$$

$$\Delta\mu_k=\mu_k-\mu_{k+1}, \quad \Delta^n\mu_k=\Delta^{n-1}\mu_k-\Delta^{n-1}\mu_{k+1}.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

с частичными суммами s_n суммируем методом Хаусдорфа к сумме S, если

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S.$$

Поле и регулярность метода Хаусдорфа зависят от последовательности $\{\mu_n\}$. Если $\{\mu_n\}$ — действительная последовательность, то для регулярности метода необходимо и достаточно, чтобы:

$\{\mu_n\}$ была разностью двух абсолютно монотонных последовательностей;

$$\lim_{m\to\infty}\Delta^m\mu_0=0;$$

$$\mu_0=1;$$

или, в другой терминологии, необходимо и достаточно, чтобы μ_n были регулярными моментами.

Х. м. с. содержит в качестве частных случаев ряд других известных методов суммирования. Так, при $\mu_n=1/(q+1)^n$ метод Хаусдорфа обращается в метод Эйлера (E, q), при $\mu=1/(n+1)^k$ — в метод Гёльдера (H, k), при $\mu_n=1\Big/\binom{n+k}{k}$ — в метод Чезаро (C, k).

Лит.: [1] Hausdorff F., «Math. Z.», 1921, Bd 9, S. 74—109; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

И. И. Волков.

ХАУСДОРФА ОПЕРАЦИЯ — то же, что *δs-операция*.

А. Г. Елькин.

ХАУСДОРФА РАЗМЕРНОСТЬ — числовой инвариант метрич. пространства, введенный Ф. Хаусдорфом [1]. Пусть X — нек-рое метрич. пространство. Для действительных $p>0$ и $\varepsilon>0$ пусть $m_p^\varepsilon=\inf\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^p$, где нижняя грань берется по всем таким счетным покрытиям $\{A_i\}$ пространства X, что $\operatorname{diam} A_i<\varepsilon$. Х. р. пространства X определяется как $\sup\{p\mid m_p(X)>0\}$, где $m_p(X)=\sup\limits_{\varepsilon>0} m_p^\varepsilon(X)$. Так определенное число зависит от метрики на X (см. по этому также *Метрическая размерность*) и, вообще говоря, не является целым (напр., Х. р. *канторова множества* равна $\log_3 2$). Топологич. инвариантом является, напр., нижняя грань Х. р. по всем метрикам на данном топологич. пространстве X, и для компактного X этот инвариант совпадает с *Лебега размерностью* для X.

Лит.: [1] Hausdorff F., «Math. Ann.», 1918, Bd 79, S. 157—79; [2] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948.

И. Г. Кошевникова.

ХАУСДОРФА — ЮНГА НЕРАВЕНСТВА — оценки коэффициентов Фурье функций из L_p; установлены У. Юнгом [1] и Ф. Хаусдорфом [2]. Пусть $\varphi_n(t)$ — ортонормированная система функций на $[a, b]$, $|\varphi_n(t)|\leqslant M$ для всех $t\in[a, b]$ и всех $n=1, 2, \ldots$ и $1\leqslant p\leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Если $f\in L_p$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^{p'}\right)^{1/p'}\leqslant M^{\frac{2-p}{p}}\left(\int_a^b|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p},\quad(1)$$

где $c_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции f. Если $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p$, то существует такая функция, что g

$$\left(\int_a^b|g(t)|^{p'}\,dt\right)^{1/p'}\leqslant M^{\frac{2-p}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p}.\quad(2)$$

В качестве $g(t)$ можно взять $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)$, причем этот ряд сходится в $L_{p'}$.

Х.— Ю. н. (1) и (2) эквивалентны. Для $p>2$ они не имеют места. Более того, если $b_n\geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<\infty$, то существует такая непрерывная функция f, что ее коэффициенты Фурье по тригонометрич. системе $c_n(f)$ удовлетворяют условию $|c_n(f)|>b_n$. Качественная формулировка Х.— Ю. н. (если $f\in L_p$, $1\leqslant p\leqslant 2$, то $\{c_n(f)\}\in l_{p'}$) для неограниченных ортонормированных систем функций, вообще говоря, не имеет места. Аналог Х.— Ю. н. справедлив для широкого класса функциональных пространств.

Лит.: [1] Young W., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1913, v. 12, p. 71—88; [2] Hausdorff F., «Math. Z.», 1923, Bd 16, S. 163—69; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965; [6] Leeuw K. [и др.], «C. r. Acad. sci.», 1977, t. 285, p. 1001—03; [7] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978.

Е. М. Семенов.

ХАУСДОРФОВА МЕТРИКА, отклонение, — метрика в пространстве подмножеств компакта K, определяемая следующим образом. Пусть X, $Y\subset K$ и $D_{X,Y}$ — множество чисел $\rho(x, Y)$ и $\rho(y, x)$, где $x\in X$, $y\in Y$, ρ — метрика в K. Тогда метрикой Хаусдорфа $\operatorname{dist}(X, Y)$ наз. верхняя грань чисел из $D_{X,Y}$. Введена Ф. Хаусдорфом в 1914 (см. [1]), и одним из важнейших его результатов является следующий: пространство замкнутых подмножеств компакта также компактно. (Независимо к такой же теореме пришел в 1921—22 П. С. Урысон, см. [2].)

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [2] Урысон П. С., Труды по топологии..., т. 2, М.— Л., 1951.

М. И. Войцеховский.

ХАУСДОРФОВО ПРОСТРАНСТВО, T_2-пространство, — топологич. пространство, каждые две (различные) точки к-рого отделимы непересекающимися окрестностями (см. *Хаусдорфа аксиома* отделимости). Х. п. могут не быть регулярными и тем более вполне регулярными, даже если они состоят лишь из счетного множества точек или имеют счетную базу. Впервые рассмотрены Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff, 1914, см. [1]).

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ХЕГОРА ДИАГРАММА — один из наиболее употребительных способов задания замкнутых ориентируемых *трехмерных многообразий*. Х. д. рода n состоит из двух систем простых замкнутых кривых в замкнутой ориентируемой поверхности F рода n. Кривые каждой системы удовлетворяют следующим условиям: 1) число кривых в системе равно n; 2) кривые системы не должны иметь общих точек; 3) после разрезания поверхности F по этим кривым должна получаться связная поверхность (сфера с $2n$ удаленными открытыми дисками). Х. д. тесно связаны с *Хегора разбиениями*: кривые одной системы представляют собой полную систему меридианов (секущих окружностей ручек) одного кренделя разбиения, кривые второй системы — полную систему меридианов другого кренделя. Х. д. наз. эквивалентными, если эквивалентны отвечающие им разбиения Хегора. Известно, напр., что любые две Х. д. трехмерной сферы эквивалентны, если их род одинаков. Род Х. д. всегда можно увеличить, взяв вместо поверхности F ее связную сумму с двумерным тором и добавив к кривым диаграммы меридиан и параллель этого тора. Такая операция наз. операцией стабилизации. Любые две Х. д. одного и того же многообразия стабильно эквивалентны, т. е. становятся эквивалентными после применения к каждой из них нескольких операций стабилизации.

Лит. см. при статье *Хегора разбиение*.

С. В. Матвеев.

ХЕГОРА РАЗБИЕНИЕ — представление замкнутого *трехмерного многообразия* в виде объединения двух трехмерных подмногообразий с общим краем, каждое из к-рых является полным кренделем (т. е. трехмерным шаром с несколькими ручками индекса 1). Определено в 1898 П. Хегором [1]. Х. р. служат одним из наиболее употребительных приемов в изучении трехмерных многообразий, хотя имеются и более эффективные способы разбиения трехмерных многообразий на простые куски (связные суммы, иерархии). Любое замкнутое трехмерное многообразие имеет Х. р. В качестве кренделей разбиения можно взять, напр., регулярную окрестность одномерного остова нек-рой триангуляции многообразия и замыкания ее дополнения. Род (число ручек) одного кренделя всегда совпадает с родом другого кренделя и наз. родом Х. р. Два Х. р. одного и того же многообразия M^3 эквивалентны, если разбивающую поверхность (общий край кренделей) одного из них можно перевести в разбивающую поверхность другого с помощью нек-рого гомеоморфизма многообразия M^3.

Лит.: [1] Heegaard P., «Bull. Soc. math. France», 1916, t. 44, p. 161—242.

С. В. Матвеев.

ХЕЛЛИ ТЕОРЕМА — 1) Х. т. о пересечении выпуклых множеств с общей точкой: пусть K — семейство из не менее чем $n+1$ выпуклых множеств в n-мерном аффинном пространстве A^n, причем K — конечно или каждое множество из K — компактно; тогда, если каждые $n+1$ из множеств семейства имеют общую точку, то существует точка, общая всем множествам семейства K.

Х. т. посвящены многие исследования, относящиеся к ее приложениям, доказательству различных аналогов и предложений типа Х. т., ее обобщений, напр. в вопросах *чебышевского приближения*, в решениях *освещения задач*, в теории *выпуклых тел*. Часто Х. т. фигурирует в доказательствах комбинаторных утверждений следующего типа: если в нек-ром семействе каждое подсемейство из k членов обладает определенным свойством, то этим свойством обладает и все семейство. Напр., если a и b — две точки множества $K \subset A^n$, то выражение «a видно из b в K» обозначает, что отрезок $[a, b]$ принадлежит K. Пусть компакт $K \subset A^n$ обладает свойством, что для каждых $n+1$ точек из K существует точка в K, из к-рой видны эти точки, тогда в K существует точка, из к-рой видны все точки K, т. е. K — звездное множество.

Большинство аналогов Х. т. и ее обобщений связаны с различными вариантами понятия «выпуклость». Напр., пусть S^n — евклидова сфера; множество наз. выпуклым по Робинсону, если вместе с каждой парой диаметрально непротивоположных точек оно содержит соединяющую эти точки меньшую дугу определяемой ими большой окружности. Если семейство выпуклых по Робинсону замкнутых множеств пространства S^n таково, что каждые $2(n+1)$ его элементов обладают непустым пересечением, то и все элементы этого семейства обладают непустым пересечением.

Х. т. установлена Э. Хелли (E. Helly, 1913).

Лит.: [1] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли, пер. с англ., М., 1968. *П. С. Солтан.*

2) Х. т. в теории функций: если последовательность функций g_n, $n=1, 2, \ldots$, с ограниченной на отрезке $[a, b]$ вариацией сходится в каждой точке этого отрезка к нек-рой функции g, причем вариации $\bigvee_a^b g_n$ всех функций g_n ограничены в совокупности:

$$\bigvee_a^b g_n \leqslant c, \quad n=1, 2, \ldots,$$

то предельная функция g также имеет ограниченную на отрезке $[a, b]$ вариацию и для любой непрерывной на $[a, b]$ функции f справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Л. Д. Кудрявцев.

ХЕЛЛИНГЕРА ИНТЕГРАЛ — интеграл типа Римана от функции множества $f(E)$. Если (X, μ) — пространство с конечной неотрицательной несингулярной мерой, $f(E)$, $E \subset X$, — вполне аддитивная функция, причем $f(E)=0$, если $\mu E=0$; $\delta=\{E_n\}_1^N$ — разбиение X, то

$$S_\delta = \sum_{n=1}^N \frac{f^2(E_n)}{\mu E_n}$$

и интегралом Хеллингера функции $f(E)$ по X наз.

$$\int_X \frac{f^2(dE)}{d\mu} = \sup_\delta S_\delta,$$

если он конечен. Х. и. можно рассматривать и как предел по направленному множеству разбиений: $\delta_1 < \delta_2$, если δ_2 есть подразбиение δ_1.

Если существует суммируемая функция $\varphi(x)$: $X \to R$ такая, что $f(E)$ есть интеграл Лебега $\int_E \varphi\, d\mu$, то Х. и. выражается через интеграл Лебега

$$\int_X \frac{f^2(dE)}{d\mu} = \int_X \varphi^2\, d\mu.$$

Э. Хеллингер [1] дал определение интеграла для $X=[a, b]$ в терминах функций точки.

Лит.: [1] Hellinger E., «J. reine und angew. Math.», 1909, Bd 136, S. 210—71; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959. *И. А. Виноградова.*

ХЕЛЛИНГЕРА РАССТОЯНИЕ — расстояние между вероятностными мерами, выраженное в терминах *Хеллингера интеграла*. Пусть на измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ задано семейство вероятностных мер $\{P_\theta\}$, $\theta \in \Theta$, абсолютно непрерывных относительно нек-рой σ-конечной меры μ на $\mathcal{B}$.

Х. р. между мерами P_{θ_1} и P_{θ_2} ($\theta_1, \theta_2 \in \Theta$) определяется по формуле

$$r(\theta_1, \theta_2) = \{2[1 - H(\theta_1, \theta_2)]\}^{1/2} = \left\{\int_{\mathfrak{X}} \left[\sqrt{\frac{dP_{\theta_1}}{d\mu}} - \sqrt{\frac{dP_{\theta_2}}{d\mu}}\right]^2 d\mu\right\}^{1/2},$$

где

$$H(\theta_1, \theta_2) = \int_{\mathfrak{X}} \sqrt{\frac{dP_{\theta_1}}{d\mu}}\, \sqrt{\frac{dP_{\theta_2}}{d\mu}}\, d\mu$$

— интеграл Хеллингера. Х. р. не зависит от выбора меры μ и обладает следующими свойствами:

1) $0 \leqslant r(\theta_1, \theta_2) \leqslant \sqrt{2}$;

2) $r(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{2}$ тогда и только тогда, когда меры P_{θ_1} и P_{θ_2} сингулярны;

3) $r(\theta_1, \theta_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$.

Пусть

$$\|P_{\theta_1} - P_{\theta_2}\| = \sup_{B \in \mathcal{B}} |P_{\theta_1}(B) - P_{\theta_2}(B)| = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} \left|\frac{dP_{\theta_1}}{d\mu} - \frac{dP_{\theta_2}}{d\mu}\right| d\mu$$

— расстояние по вариации между мерами P_{θ_1} и P_{θ_2}. Тогда

$$\frac{1}{2} r^2(\theta_1, \theta_2) \leqslant \|P_{\theta_1} - P_{\theta_2}\| \leqslant r(\theta_1, \theta_2).$$

Лит.: [1] Го Х.-С., Гауссовские меры в банаховых пространствах, пер. с англ., М., 1979; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] Золотарев В. М., «Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР», 1979, т. 87, с. 18—35. *М. С. Никулин.*

ХЕФЛИГЕРА СТРУКТУРА коразмерности q и класса C^r на топологич. пространстве X — структура, определяемая с помощью хефлигеровского атласа (наз. также хефлигеровским коциклом) $\{U_\alpha, \Psi_{\alpha\beta}\}$, где U_α — открытые подмножества, покрывающие X, а

$$\Psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \Gamma_r^q, \quad u \to \Psi_{\alpha\beta, u}$$

— непрерывные отображения $U_\alpha \cap U_\beta$ в пучок Γ_r^q *ростков* локальных C^r-диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^q$, причем

$$\Psi_{\gamma\alpha, u} = \Psi_{\gamma\beta, u} \circ \Psi_{\beta\alpha, u} \quad \text{при} \quad u \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Два хефлигеровских атласа определяют одну и ту же Х. с., если они являются частями нек-рого большего хефлигеровского атласа. (Таким образом, Х. с. можно определить как максимальный хефлигеровский атлас.) Если на X задана Х. с. $\mathcal{H}$ посредством атласа $\{U_\alpha, \Psi_{\alpha\beta}\}$ и $f: Y \to X$ — непрерывное отображение, то атлас $\{f^{-1}U_\alpha, \Psi'_{\alpha\beta}\}$, где $\Psi'_{\alpha\beta, u} = \Psi_{\alpha\beta, f(u)}$, определяет индуцированную Х. с. $f^*\mathcal{H}$ (она не зависит от конкретного выбора атласа, задающего $\mathcal{H}$).

Пусть X — многообразие, и на нем задано *слоение* $\mathcal{F}$ посредством субмерсий $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, согласованных в том смысле, что если $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, то существует локальный C^r-диффеоморфизм $\Phi_{\beta\alpha,\, u}$, с помощью к-рого можно перейти от $\varphi_\alpha(v)$ к $\varphi_\beta(v)$:

$$\varphi_\beta(v) = \Phi_{\beta\alpha,\, u}(\varphi_\alpha(v)) \qquad (*)$$

при всех v, достаточно близких к u. Если положить $\Psi_{\beta\alpha,\, u}$ = росток $\Phi_{\beta\alpha,\, u}$ в u, то $\Psi_{\beta\alpha}: u \longrightarrow \Psi_{\beta\alpha,\, u}$ есть отображение $U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \Gamma_q^r$, и $\{U_\alpha, \Psi_{\beta\alpha}\}$ — хефлигеровский атлас. При этом φ_α однозначно восстанавливается по хефлигеровскому атласу: $\varphi_\alpha(u)$ — та точка, ростком в к-рой является $\Psi_{\alpha\alpha,\, u}$. Полученное соответствие между слоениями и нек-рыми Х. с. не зависит от случайностей построения (выбор системы $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$); различным слоениям соответствуют различные Х. с., но существуют Х. с., не соответствующие никакому слоению. Поэтому Х. с. является обобщением понятия слоения.

В общем случае для Х. с. можно так же, как и выше, определить отображения $\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Если $\Phi_{\beta\alpha,\, u}$ — представитель ростка $\Psi_{\beta\alpha,\, u}$, то $\varphi_\alpha(v)$ и $\varphi_\beta(v)$ в нек-рой окрестности точки u по-прежнему связаны соотношением (*). Но так как φ_α и φ_β уже не обязательно субмерсии, то из (*), вообще говоря, уже нельзя однозначно определить $\Psi_{\beta\alpha,\, u}$. Поэтому в общем случае приходится формулировать определение Х. с. не в терминах $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, а включая $\Psi_{\beta\alpha}$ в определение.

Если $f: N \longrightarrow M$ есть C^r-отображение многообразий, трансверсальное к слоям заданного на M слоения $\mathcal{F}$ коразмерности q и класса C^r, то разбиение N на связные компоненты прообразов слоев $\mathcal{F}$ является слоением, к рое естественно наз. индуцированным слоением; оно обозначается $f^*\mathcal{F}$. Если согласованная система субмерсий $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ задает $\mathcal{F}$, то $f^*\mathcal{F}$ определяется согласованной системой субмерсий $\{(f^{-1}U_\alpha, \varphi_\alpha \circ f)\}$; в этом случае индуцированная Х. с. — по существу то же самое, что и индуцированное слоение. Если же f не трансверсально к слоям $\mathcal{F}$, индуцированного слоения нет, а есть только индуцированная Х. с. Поэтому в гомотопич. теории слоений неизбежно обращение к Х. с., хотя бы на нек-рых промежуточных этапах рассуждений.

Обнаружено (см. [1], [2]), что для Х. с. сохраняется известная для *расслоений* связь между их классификацией и непрерывными отображениями в *классифицирующее пространство*. Таковое для Х. с. коразмерности q и класса C^r обозначается $B\Gamma_q^r$. На нем самом имеется нек-рая «универсальная» Х. с. $\mathcal{H}$ (в этом отношении $B\Gamma_q^r$ напоминает скорее универсальное расслоение). Для любого «хорошего» топологич. пространства X (напр., клеточного полиэдра) любая Х. с. на X индуцируется из $\mathcal{H}$ при нек-ром непрерывном отображении $f: X \longrightarrow B\Gamma_q^r$. Отображения $f_0, f_1: X \longrightarrow B\Gamma_q^r$ гомотопны тогда и только тогда, когда Х. с. $f_0^*\mathcal{H}$ и $f_1^*\mathcal{H}$ конкордантны, т. е. получаются при «ограничении» нек-рой Х. с. на «цилиндре» $X \times [0, 1]$ на его «дно» и «крышку».

Все сказанное относится также к топологическим, аналитическим и кусочно линейным Х. с., причем первые два случая формально охватываются предыдущим текстом, если принять $r=0$ или $r=\omega$, а последний случай требует нек-рой перефразировки.

Лит.: [1] Haefliger A., «Topology», 1970, v. 9, № 2, p. 183—94; [2] его же, в кн.: Manifolds, Amst., 1970, p. 133—63; [3] Lawson H., The quantitative theory of foliations, Providence, 1977; [4] Фукс Д. Б., «Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. матем.», 1978, т. 10, с. 179—285; [5] его же, «Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия», 1981, т. 18, с. 151—213.

Д. В. Аносов.

«ХИ-КВАДРАТ» КРИТЕРИЙ — критерий для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой случайный вектор частот $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ имеет заданное полиномиальное распределение, характеризующееся вектором положительных вероятностей $p = (p_1, \ldots, p_k)$, $p_1 + \ldots + p_k = 1$. «Х.-к.» к. основан на статистике Пирсона

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{1}{n}\sum \frac{\nu_i^2}{p_i} - n, \quad n = \nu_1 + \ldots + \nu_k,$$

к-рая имеет в пределе при $n \to \infty$ *«хи-квадрат» распределение* с $k-1$ степенями свободы, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{X^2 \leqslant x \mid H_0\} = \mathsf{P}\{\chi^2_{k-1} \leqslant x\}.$$

Согласно «Х.-к.» к. с уровнем значимости $\approx \alpha$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $X^2 \geqslant \chi^2_{k-1}(\alpha)$, где $\chi^2_{k-1}(\alpha)$ — верхняя α-квантиль «хи-квадрат» распределения с $k-1$ степенями свободы, т. е.

$$\mathsf{P}\{\chi^2_{k-1} \geqslant \chi^2_{k-1}(\alpha)\} = \alpha.$$

Статистику X^2 используют также для проверки гипотезы H_0 о принадлежности функции распределения независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_k$ семейству непрерывных функций $F(x, \theta)$, $x \in R^1$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, Θ — открытое множество. Разбивая действительную прямую точками $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$, $x_0 = -\infty$, $x_k = +\infty$, на k, $k > m$, интервалов $(x_0, x_1], \ldots, (x_{k-1}, x_k)$ таких, что при всех $\theta \in \Theta$

$$p_i(\theta) = \mathsf{P}\{X_1 \in (x_{i-1}, x_i]\} > 0,$$

$i = 1, \ldots, k$; $p_1(\theta) + \ldots + p_k(\theta) = 1$, образуют вектор частот $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r)$, получающихся в результате группировки значений случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ по этим интервалам. Пусть

$$X^2(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{[\nu_i - np_i(\theta)]^2}{np_i(\theta)}$$

— случайная величина, зависящая от неизвестного параметра θ. Для проверки гипотезы H_0 пользуются статистикой $X^2(\tilde\theta_n)$, где $\tilde\theta_n$ — оценка параметра θ, вычисленная по методу минимума «хи-квадрат», т. е.

$$X^2(\tilde\theta_n) = \min_{\theta\in\Theta} X^2(\theta).$$

Если интервалы группировки выбраны таким образом, что все $p_i(\theta) > 0$, а функции $\partial^2 p_i(\theta)/\partial\theta_j\,\partial\theta_2$ непрерывны для всех $\theta \in \Theta$, $i = 1, \ldots, r$; j, $r = 1, \ldots, m$, и матрица $\| \partial p_i(\theta)/\partial\theta_j \|$ имеет ранг m, то при справедливости гипотезы H_0 и $n \to \infty$ статистика $X^2(\tilde\theta_n)$ имеет в пределе «хи-квадрат» распределение с $k-m-1$ степенями свободы, чем и пользуются для проверки гипотезы H_0 по «Х.-к.» к. Если в $X^2(\theta)$ подставить оценку максимального правдоподобия $\hat\theta_n$, вычисленную по негруппированным данным $X_1, \ldots, X_n$, то при справедливости гипотезы H_0 и $n \to \infty$ статистика $X^2(\hat\theta_n)$ распределена в пределе как

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_{k-m-1}^2 + \mu_1\xi_{k-m}^2 + \ldots + \mu_m\xi_{k-1}^2,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ — независимые стандартные нормально распределенные случайные величины, а числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$ лежат между нулем и единицей и, вообще говоря, зависят от неизвестного параметра θ. Из этого следует, что использование оценок максимального правдоподобия при применении «Х.-к.» к. для проверки гипотезы H_0 приводит к затруднениям, связанным с вычислениями нестандартного предельного распределения.

Лит.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее применения», 1971, т. 16, № 1, с. 3—20; [3] Никулин М. С., там же, 1973, т. 18, № 3, с. 675—76.

М. С. Никулин.

«ХИ-КВАДРАТ» РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, χ^2-распределение, — непрерывное, сосредоточенное на положительной полуоси $(0, \infty)$ распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, а положительный целочисленный параметр n наз. числом степеней свободы. «Х.-к.» р. представляет собой частный случай *гамма-распределения* и обладает всеми свойствами последнего. Функция распределения «Х.-к.» р. есть неполная гамма-функция, характеристич. функция выражается формулой

$$\varphi(t)=(1-2it)^{-n/2},$$

математич. ожидание и дисперсия равны, соответственно, n и $2n$. Семейство «Х.-к.» р. замкнуто относительно операции свертки.

«Х.-к.» р. с n степенями свободы может быть выведено как распределение суммы $\chi_n^2=X_1^2+\ldots+X_n^2$ квадратов независимых случайных величин $X_1,\ldots,X_n$, имеющих одинаковое нормальное распределение с нулевым математич. ожиданием и единичной дисперсией. Эта связь с нормальным распределением определяет ту роль, к-рую «Х.-к.» р. играет в теории вероятностей и математич. статистике.

Многие распределения определяются посредством «Х.-к.» р. Таковы, напр., распределение случайной величины $\sqrt{\chi_n^2}$ — длины случайного вектора $(X_1,\ldots,X_n)$ с независимыми, нормально распределенными компонентами (иногда наз. «хи»распределением, см. также частные случаи — *Максвелла распределение*, *Рэлея распределение*); *Стьюдента распределение*, *Фишера F-распределение*. В математич. статистике эти распределения вместе с «Х.-к.» р. описывают выборочные распределения различных статистик от нормально распределенных результатов наблюдений и используются для построения интервальных статистич. оценок и статистических критериев. Особую известность в связи с «Х.-к.» р. получил *«хи-квадрат» критерий*, основанный на т. н. «хи-квадрат» статистике Пирсона.

Имеются подробные удобные для статистич. расчетов таблицы «Х.-к.» р. При больших n используют аппроксимации посредством нормального распределения: напр., согласно центральной предельной теореме распределение нормированной величины $\frac{\chi_n^2-n}{\sqrt{2n}}$ сходится к стандартному нормальному распределению. Более точна аппроксимация

$$\mathrm{P}\{\chi_n^2<x\}\longrightarrow\Phi(\sqrt{2x})-\Phi(\sqrt{2n-1})$$

при $n\longrightarrow\infty$,

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

См. также *Нецентральное «хи-квадрат» распределение*.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Lancaster H. O., The chi-squared distribution, N. Y.— [a. o], 1969; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

А. В. Прохоров.

ХИЛЛА УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$w''(z)+p(z)\,w(z)=0$$

с периодич. функцией $p(z)$; все величины могут быть комплексными. Уравнение названо по имени Дж. Хилла [1], к-рый, изучая движение Луны, получил уравнение

$$w''(z)+\left(\theta_0+2\sum_{r=1}^{\infty}\theta_{2r}\cos 2rz\right)w(z)=0$$

с действительными числами θ_0, θ_2, θ_4, ..., причем ряд $\sum_{r=1}^{\infty}|\theta_{2r}|$ сходится.

Дж. Хилл дал метод решения Х. у. с использованием определителей бесконечного порядка. Это явилось толчком для создания теории таких определителей и, далее, для создания Э. Фредгольмом (E. Fredholm) теории интегральных уравнений. Для Х. у. ставятся прежде всего задачи устойчивости решений, существования или отсутствия периодич. решений. Если в действительном случае в Х. у. ввести параметр:

$$x''+\lambda p(t)\,x=0,$$

то, как установил А. М. Ляпунов [2], существует такая бесконечная последовательность

$$\ldots<\lambda_{-1}\leqslant\lambda_0=0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\ldots<\lambda_{2n-1}\leqslant$$
$$\leqslant\lambda_{2n}<\lambda_{2n+1}\leqslant\ldots,$$

что при $\lambda\in(\lambda_{2n},\ \lambda_{2n+1})$ Х. у. устойчиво, а при $\lambda\in[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$ Х.у. неустойчиво. При этом λ_{4n} и λ_{4n+3} являются собственными значениями периодич. краевой задачи, а λ_{4n+1} и λ_{4n+2} — собственными значениями полупериодич. краевой задачи. Хорошо изучена теория Х.у. (см. [3]).

Лит.: [1] Hill G., «Acta math.», 1886, v. 8, p. 1; [2] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956, с. 407—09; [3] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

Ю. В. Комленко.

ХИНЧИНА ИНТЕГРАЛ — обобщение узкого *Данжуа интеграла*, введенное А. Я. Хинчиным [1].

Функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Хинчина на $[a, b]$, если она интегрируема широким интегралом Данжуа и ее неопределенный интеграл почти всюду дифференцируем. Иногда интеграл Хинчина наз. интегралом Данжуа — Хинчина.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «С. r. Acad. sci.», 1916, t. 162, p. 287—91; [2] Хинчин А. Я., «Матем. сб.», 1918, т. 30, с. 543—57; [3] Песин И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966, с. 171—73; [4] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949, с. 370.

Т. П. Лукашенко.

ХИНЧИНА НЕРАВЕНСТВО для независимых функций — оценка в L_p суммы независимых функций. Пусть f_k — система независимых функций и для нек-рого $p>2$

$$\sup_k\|f_k\|_{L_p}<\infty,\quad\int_0^1 f_k(t)\,dt=0.$$

Тогда

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}c_kf_k\right\|_{L_p}\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2}.$$

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<\infty,\ \text{а}\ r_k=\operatorname{sign}\sin 2^k\pi t$$

— функции Радемахера и

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kr_k(t),$$

то для любого $p>0$

$$A_p\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_0^1|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant B_p\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2},$$

где $B_p=O(\sqrt{p})$ при $p\longrightarrow\infty$. Это неравенство было установлено А. Я. Хинчиным [1]. Точное значение A_1 равно $1/2$.

Аналог Х.н. справедлив в банаховых пространствах [4]. Существует такая константа $C(p, q)$, $0 < p, q < \infty$, что для любых элементов x_k из банахова пространства E

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_E \right\|_{L_p} \leqslant C(p, q) \left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_E \right\|_{L_q}.$$

Одно из многочисленных приложений Х. н.: если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < \infty,$$

то для почти всех наборов ± 1 функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

принадлежит всем L_p, $p < \infty$ (см. [5]).

Лит.: [1] Хинчин А., «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 109—116; [2] Karlin S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 66, p. 44—64; [3] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6, с. 3—82; [4] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965.

Е. М. Семенов.

ХИНЧИНА ТЕОРЕМА — 1) Х. т. о факторизации распределений: любое распределение вероятностей P допускает (в сверточной полугруппе распределений вероятностей) факторизацию

$$P = P_1 * P_2, \qquad (*)$$

где P_1 — распределение класса I_0 (см. *Безгранично делимых распределений разложение*), а P_2 — распределение, к-рое либо является вырожденным, либо представимо в виде свертки конечного или счетного множества *неразложимых распределений*. Факторизация (*), вообще говоря, не единственна.

Х. т. была доказана А. Я. Хинчиным [1] для распределений на прямой, позднее выяснилось [2], что она справедлива для распределений на значительно более общих группах. Известен (см. [3], [4] широкий класс топологич. полугрупп, включающий сверточную полугруппу распределений на прямой, в к-рых справедливы факторизационные теоремы, аналогичные Х. т.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «Бюлл. МГУ. Секц. А», 1937, т. 1, в. 1, с. 6—17; [2] Партасаратхи К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р., «Математика», 1965, т. 9, в. 2, с. 113—46; [3] Kendall D. G., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.», 1968, Bd 9, H. 3, S. 163—95; [4] Davidson R., там же, 1968, Bd 10, H. 2, S. 120—72.

И. В. Островский.

2) Х. т. о диофантовых приближениях — см. *Диофантовых приближений метрическая теория*.

ХОДЖА ГИПОТЕЗА — предположение о том, что для любого гладкого проективного многообразия X над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и для любого целого $p \geqslant 0$ $\mathbb{Q}$-пространство $H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}$, где $H^{p,p}$ — компонента типа (p, p) в разложении Ходжа

$$H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \oplus_{r=0}^{2p} H^{r, 2p-r},$$

порождается классами когомологий алгебраич. циклов коразмерности p на X. Эта гипотеза была выдвинута У. Ходжем [1].

В случае $p = 1$ Х.г. равносильна *Лефшеца теореме* о когомологиях типа $(1,1)$. Х.г. доказана также для следующих классов многообразий: 1) X — гладкое 4-мерное унилинейчатое многообразие, т. е. такое, что существует рациональное отображение конечной степени $P^1 \times Y \longrightarrow X$, где Y — гладкое многообразие (см. [2]). Унилинейчатыми многообразиями являются, напр., унирациональные многообразия и 4-мерные полные пересечения с обильным антиканонич. классом (см. [3]). 2) X — гладкая гиперповерхность Ферма простой степени (см. [4], [5]). 3) X — простое 5-мерное абелево многообразие (см. [6]). 4) X — простое d-мерное абелево многообразие, причем $\mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^l$, $\frac{d}{l}$ — нечетное число, или $\mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = [M_2(\mathbb{R})]^l$, $\frac{d}{2l}$ — нечетное число.

Лит.: [1] Hodge W. V. D., «Proc. Intern. Congr. Math.» (Camb., 1950), 1952, v. 1, p. 182—92; [2] Conte A., Murre J. P., «Math. Ann.», 1978, Bd 238, S. 79—88; [3] их же, «J. de géometrie algébrique d'Angers» (Juillet, 1979), 1980, p. 129—41; [4] Ran Z., «Comp. math.», 1980/81, v. 42, № 1, p. 121—42; [5] Shioda T., «Proc. Japan Acad.», 1979, Ser. A, v. 55, № 3, p. 111—14; [6] Танкеев С. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 4, с. 793—823.

С. Г. Танкеев.

ХОДЖА МНОГООБРАЗИЕ — комплексное многообразие, на к-ром можно задать метрику Ходжа, т. е. *Кэлера метрику*, фундаментальная форма к-рой определяет целочисленный класс когомологий. Компактное комплексное многообразие является Х. м. тогда и только тогда, когда оно изоморфно гладкому алгебраич. подмногообразию комплексного проективного пространства нек-рой размерности (теорема Кодаиры о проективном вложении).

См. также *Кэлерово многообразие*.

Лит.: [1] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1982.

А. Л. Онищик.

ХОДЖА СТРУКТУРА веса n (чистая) — объект, состоящий из решетки $H_{\mathbb{Z}}$ в действительном векторном пространстве $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ и разложения $H_{\mathbb{C}} = \oplus_{p+q=n} H^{p,q}$ комплексного векторного пространства $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ (разложения Ходжа). При этом должно выполняться условие $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$, где черта означает комплексное сопряжение в $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Другое описание разложения Ходжа состоит в задании убывающей фильтрации (фильтрации Ходжа) $F^r = \oplus_{p \geqslant r} H^{p,q}$ в $H_{\mathbb{C}}$ такой, что $\overline{F^s} \cap F^r = 0$ при $r + s \neq n$. Тогда подпространства $H^{p,q}$ восстанавливаются по формуле $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$.

Примером является Х.с. в пространстве n-мерных когомологий $H^n(X, \mathbb{C})$ компактного кэлерова многообразия X, впервые изученная У. Ходжем (см. [1]). В этом случае подпространства $H^{p,q}$ описываются как пространства *гармонических форм* типа (p, q) или как когомологии $H^q(X, \Omega^p)$ пучков Ω^p голоморфных дифференциальных форм [2]. Фильтрация Ходжа в $H^n(X, \mathbb{C})$ возникает из фильтрации комплекса пучков $\Omega = \sum_{p \geqslant 0} \Omega^p$, n-мерные гиперкогомологии к-рого изоморфны $H^n(X, \mathbb{C})$, подкомплексами $\sum_{r \geqslant p} \Omega^r$.

Более общим понятием является смешанная Х.с. Это — объект, состоящий из решетки $H_{\mathbb{Z}}$ в $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$, возрастающей фильтрации (фильтрации весов) W_n в $H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ и убывающей фильтрации (фильтрации Ходжа) F^p в $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ таких, что на пространстве $(W_n / W_{n+1}) \otimes \mathbb{C}$ фильтрации F^p и $\overline{F}^p$ определяют чистую Х.с. веса n. Рассмотрена [3] смешанная Х.с. в когомологиях комплексного алгебраич. многообразия (не обязательно компактного или гладкого), как аналог структуры модуля Галуа в этальных когомологиях. Х.с. имеют важные приложения в алгебраич. геометрии (см. *Отображение периодов*) и в теории особенностей гладких отображений (см. [4]).

Лит.: [1] Hodge W. V. D., The theorie and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [2] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1982; [3] Deligne P., «Proc. Intern. Congr. Math.» (Vancouver, 1974), 1975, v. 1, p. 79—85; [4] Варченко А. Н., в сб.: Современные проблемы математики, т. 22, М., 1983, с. 130—66 (Итоги науки и техники). См. также *лит.* к статье *Отображение периодов*.

А. И. Овсеевич.

ХОДЖА ТЕОРЕМА — 1) Х. т. об индексе: индекс (*сигнатура*) $\sigma(M)$ компактного кэлерова многообразия M комплексной размерности $2n$ вычисляется по формуле

$$\sigma(M)=\sum_{p,q}(-1)^p h^{p,q}, \quad (p+q \text{ четно}),$$

где $h^{p,q}=\dim H^{p,q}(M)$ — размерность пространства *гармонических форм* типа (p, q) на M. Доказана У. Ходжем [1].

2) Х. т. о разложении пространства гладких сечений эллиптич. комплекса на компактном многообразии в ортогональную прямую сумму подпространств гармонических, точных и коточных сечений (см. *Лапласа оператор*). Была доказана У. Ходжем [2] для комплекса де Рама

$$E^*(M)=\sum_{p\geqslant 0}E^p(M)$$

на ориентируемом компактном римановом многообразии M. В этом случае Х.т. утверждает, что для любого $p\geqslant 0$ пространство $H^p(M)$ гармонич. форм на M конечномерно и существует единственный оператор G: $E^p(M)\longrightarrow E^p(M)$ (оператор Грина—де Рама), удовлетворяющий условиям:

$$G(H^p(M))=0,\ Gd=dG,\ G\delta=\delta G,$$
$$E^p(M)=H^p(M)\oplus d\delta GE^p(M)\oplus \delta dGE^p(M)$$

(разложение Ходжа). В частности, пространство $H^p(M)$ изоморфно пространству $H^p(M, \mathbb{R})$ вещественных когомологий многообразия M. Другой важный частный случай — Х.т. для комплекса Дольбо на компактном комплексном многообразии M (см. *Дифференциальная форма*) [3]. Эти результаты приводят к классич. *Ходжа структуре* в пространствах когомологий компактного кэлерова многообразия.

Лит.: [1] Hodge W. V. D., «Proc. Intern. Congr. Math.» (Camb., 1950), 1952, v. 1, p. 182—92; [2] его же, The theory and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, т. 1, пер. с англ., М., 1982; [4] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956.

А. Л. Онищик.

ХОЛЛОВА ПОДГРУППА — подгруппа конечной группы, порядок к-рой взаимно прост с ее индексом. Название связано с именем Ф. Холла (Ph. Hall), к-рый в 20-х гг. 20 в. начал изучать такие подгруппы в конечных разрешимых группах.

В конечном π-*отделимой группе* существует холлова π-подгруппа (Х. п., порядок к-рой делится только на простые числа из π, а индекс взаимно прост с любым числом из π) и все холловы π-подгруппы сопряжены. Конечная разрешимая группа для любого множества π простых чисел обладает холловой π-подгруппой. Любая π-подгруппа конечной разрешимой группы содержится в холловой π-подгруппе и все холловы π-подгруппы сопряжены. Любая холлова π-подгруппа является силовской π-подгруппой. Для нормальной Х. п. H конечной группы G в G всегда существует дополнение, то есть такая подгруппа D, что $G=H\cdot D$ и $H\cap D$ — единичная подгруппа; все дополнения для H в G сопряжены. Если в группе есть нильпотентная холлова π-подгруппа, то все холловы π-подгруппы сопряжены и любая π-подгруппа содержится в нек-рой холловой π-подгруппе. В общем случае Х. п. не обладает такими свойствами. Напр., знакопеременная группа A_5 порядка 60 не имеет холловой $\{2, 5\}$-подгруппы. В A_5 есть холлова $\{2, 3\}$-подгруппа порядка 12, но подгруппа порядка 6 не лежит ни в какой холловой. Наконец, в простой группе порядка 168 холловы $\{2, 3\}$-подгруппы не сопряжены.

Лит.: [1] Чунихин С. А., Подгруппы конечных групп, Минск, 1964; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 7—46; [3] Huppert B., Endliche Gruppen, v. 1, B., 1979; [4] Reviews on finite groups, Providence, 1974.

В. Д. Мазуров.

ХОПФА АЛГЕБРА, биалгебра, гипералгебра — градуированный модуль A над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, снабженный одновременно структурой ассоциативной градуированной алгебры $\mu\colon A\otimes A\longrightarrow A$ с единицей $\iota\colon K\longrightarrow A$ и структурой ассоциативной градуированной *коалгебры* $\delta\colon A\longrightarrow A\otimes A$ с коединицей $\varepsilon\colon A\longrightarrow K$, причем выполнены условия:

1) ι — гомоморфизм градуированных коалгебр;
2) ε — гомоморфизм градуированных алгебр;
3) δ — гомоморфизм градуированных алгебр.

Условие 3) эквивалентно условию:

3′) μ — гомоморфизм градуированных коалгебр.

Иногда требование ассоциативности коумножения отбрасывается; такие алгебры наз. квазихопфовыми.

Для любых двух Х.а. A и B над K их тензорное произведение $A\otimes B$ снабжается естественной структурой Х.а. Пусть $A=\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_n$ — Х.а., причем все A_n — конечно порожденные проективные K-модули. Тогда $A^*=\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_n^*$, где A_n^* — модуль, сопряженный к A_n, снабженный гомоморфизмами градуированных модулей $\delta^*\colon A^*\otimes A^*\longrightarrow A^*$, $\varepsilon^*\colon K\longrightarrow A^*$, $\mu^*\colon A^*\longrightarrow A^*\otimes A^*$, $\iota^*\colon A^*\longrightarrow K$, является Х.а.; она наз. двойственной к A.

Элемент x Х. а. A наз. примитивным, если

$$\delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x.$$

Примитивные элементы составляют градуированную подалгебру P_A в A относительно операции

$$[x, y]=xy-(-1)^{pq}yx,\ x\in A_p,\ y\in A_q.$$

Если A связна (т. е. $A_n=0$ для $n<0$, $A_0=K$) и K — поле характеристики 0, то подпространство P_A порождает алгебру A (относительно умножения) тогда и только тогда, когда коумножение градуированно коммутативно [2].

Примеры. 1) Для любой градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (т. е. градуированной алгебры, являющейся *супералгеброй* Ли относительно естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировки) универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ становится Х.а., если положить

$$\varepsilon(x)=0,\ \delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x,\ x\in\mathfrak{g}.$$

При этом $P_{U(\mathfrak{g})}=\mathfrak{g}$. Если K — поле характеристики 0, то связная Х.а. A, порожденная примитивными элементами, естественно изоморфна $U(P_A)$ (см. [2]).

2) Аналогично определяется структура Х.а. (с тривиальной градуировкой) в групповой алгебре $K[G]$ произвольной группы G.

3) Алгебра регулярных функций на аффинной алгебраич. группе G становится Х.а. (с тривиальной градуировкой), если определить гомоморфизмы δ и ε с помощью умножения $G\times G\longrightarrow G$ и вложения $\{e\}\longrightarrow G$, где e — единица группы G (см. [3]).

4) Пусть G — линейно связное H-*пространство* с умножением m и единицей e и пусть $\Delta\colon G\longrightarrow G\times G$, $\iota\colon \{e\}\longrightarrow G$, $p\colon G\longrightarrow\{e\}$ определяются формулами $\Delta(a)=(a, a)$, $\iota(e)=e$, $p(a)=e$, $a\in G$. Если все модули когомологий $H^n(G, K)$ проективны и конечно порождены, то отображения $\mu=\Delta^*$, $\iota=p^*$, $\delta=m^*$, $\varepsilon=\iota^*$, индуцированные в когомологиях, превращают $H^*(G, K)$ в градуированно коммутативную квазихопфову алгебру. Если умножение m гомотопно ассоциативно, то $H^*(G, K)$ — Х.а., а двойственная ей Х.а. есть алгебра гомологий $H_*(G, K)$, снабженная отображениями m_*, ι_*, Δ_*, p_* (алгебра Понтрягина). Если K — поле характеристики 0, то алгебра Понтрягина порождается примитивными элементами и изоморфна

$U(\pi(G, K))$, где $\pi(G, K)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i(G)\otimes K$ рассматривается как градуированная алгебра Ли относительно произведения Самельсона (см. [2]).

Алгебра $H^*(G, K)$ из примера 4) была впервые рассмотрена Х. Хопфом [1], показавшим, что она является внешней алгеброй с образующими нечетных степеней, если K — поле характеристики 0 и $H^*(G, K)$ конечномерна. Строение произвольной связной градуированно коммутативной квазихопфовой алгебры A с условием $\dim A_n<\infty$, $n\in\mathbb{Z}$, над совершенным полем K характеристики p описывается следующей теоремой (см. [4]). Алгебра A разлагается в тензорное произведение алгебр с одной образующей x и соотношением $x=0$, где при $p=2$ s — степень двойки или ∞, а при $p\neq 2$ s — степень p или ∞ (∞ при $p=0$), если x имеет четную степень и $s=2$, если x имеет нечетную степень. В частности, при $p=0$ A есть тензорное произведение внешней алгебры с образующими нечетных степеней и алгебры многочленов с образующими четных степеней. С другой стороны, всякая связная Х.а. A над полем K, в к-рой $x^2=0$ для любого элемента x нечетной степени и все элементы четной степени разложимы, есть внешняя алгебра $A=\Lambda P_A$ (см. [2]). В частности, таковы алгебра когомологий и алгебра Понтрягина связной компактной группы Ли над полем $\mathbb{R}$.

Лит.: [1] Hopf H., «Ann. Math.», 1941, v. 42, p. 22—52; [2] Milnor J. W., Moore J. C., там же, 1965, v. 81, № 2, p. 211—64; [3] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [4] его же, в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с англ. и франц., М., 1958, с. 162—246; [5] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

А. Л. Онищик.

ХОПФА ИНВАРИАНТ — инвариант гомотопич. класса отображений топологич. пространств. Впервые был определен Х. Хопфом ([1], [2]) для отображений сфер $f\colon S^{2n-1}\to S^n$.

Пусть $f\colon S^{2n-1}\to S^n$ — непрерывное отображение. Переходя, если нужно, к гомотопному отображению, можно считать это отображение симплициальным относительно нек-рых триангуляций сфер S^n и S^{2n-1}. Тогда инвариант Хопфа определяется как *зацепления коэффициент* $(n-1)$-мерных непересекающихся подмногообразий $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ в S^{2n-1} для любых различных $a, b\in S^n$.

Отображение $f\colon S^{2n-1}\to S^n$ определяет элемент $[f]\in\pi_{2n-1}(S^n)$ и образ элемента $[f]$ при гомоморфизме

$$\pi_{2n-1}(S^n)=\pi_{2n-2}(\Omega S^n)\xrightarrow{h}H_{2n-2}(\Omega S^n)=\mathbb{Z}$$

совпадает с Х.и. $H(f)$ (здесь h — гомоморфизм Гуревича) [3].

Пусть теперь $f\colon S^{2n-1}\to S^n$ — отображение класса C^2, и форма $\Omega\in\Lambda^n S^n$ представляет образующую группы целочисленных когомологий $H^n(S^n, \mathbb{Z})$. В качестве такой формы можно взять, напр., форму $\Omega=\frac{dV}{\mathrm{vol}(S^n)}$, где dV — элемент объема на S^n в нек-рой метрике (напр., в метрике, заданной вложением $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$), а $\mathrm{vol}(S^n)$ — объем сферы S^n. Тогда форма $f^*(\Omega)\in\Lambda^n S^{2n-1}$ замкнута и, ввиду тривиальности группы $H^n(S^{2n-1}, \mathbb{Z})$, является точной. Таким образом, $f^*(\Omega)=d\theta$ для нек-рой формы $\theta\in\Lambda^{n-1}S^{2n-1}$. Имеет место формула для вычисления Х.и. (см. [4]):

$$H(f)=\int_{S^{2n-1}}\theta\wedge d\theta.$$

Определение Х.и. обобщено (см. [5], [6]) на случай отображений $f\colon S^m\to S^n$ при $m\leqslant 4n-4$. В этом случае имеется разложение

$$\pi_m(S^n\vee S^n)=\pi_m(S^n)\oplus\pi_m(S^n)\oplus\pi_m(S^{2n-1})\oplus\ker k_*, \quad (*)$$

где

$$k_*\colon \pi_{m+1}(S^n\times S^n, S^n\vee S^n)\to\pi_{m+1}(S^{2n})$$

— гомоморфизм, индуцированный проекцией $k\colon (S^n\times S^n, S^n\vee S^n)\to(S^n, pt)$. Пусть дано отображение $g\colon S^n\to S^n\vee S^n$, заданное стягиванием экватора сферы S^n в точку. Тогда Х.и. наз. гомоморфизм

$$H\colon \pi_m(S^n)\to\pi_m(S^{2n-1}),$$

при к-ром $[f]\in\pi_m(S^n)$ преобразуется в проекцию элемента $[g\circ f]\in\pi_m(S^n\vee S^n)$ на прямое слагаемое $\pi_m(S^{2n-1})$ в разложении $(*)$. При $m=2n-1$, ввиду равенства $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})=\mathbb{Z}$, получается обычный Х.и. Обобщенным инвариантом Хопфа наз. композиция H^* гомоморфизмов

$$\pi_m(S^n)\xrightarrow{g_*}\pi_m(S^n\vee S^n)\xrightarrow{p}$$
$$\xrightarrow{p}\pi_{m+1}(S^n\times S^n, S^n\vee S^n)\xrightarrow{k_*}\pi_{m+1}(S^{2n}),$$

где p — проекция группы $\pi_m(S^n\vee S^n)$ на прямое слагаемое $\pi_{m+1}(S^n\times S^n, S^n\vee S^n)$, а гомоморфизмы g_* и k_* описаны выше. При $m\leqslant 4n-4$ инварианты Хопфа—Уайтхеда H и Хопфа—Хилтона H^* связаны соотношением $H^*=S\circ H$, где $S\colon \pi_m(S^{2n-1})\to\pi_{m+1}(S^{2n})$ — гомоморфизм *надстройки* (см. [6]).

Пусть дано отображение $f\colon S^{2n-1}\to S^n$ и C_f — его цилиндр. Тогда когомологии $H^*(C_f, S^{2n-1})$ имеют однородным $\mathbb{Z}$-базисом пару $\{a, b\}$ с $\dim a=n$ и $\dim b=2n$. Имеет место соотношение $a^2=H(f)b$ (см. [7]). Если n нечетно, то (в силу косокоммутативности умножения в когомологиях) $H(f)=0$.

Имеется (см. [8]) обобщение инварианта Хопфа — Стинрода через *обобщенные теории когомологий*. Пусть k — полуточный гомотопич. функтор в смысле Дольда (см. [9]), заданный на категории конечных CW-комплексов и принимающий значения в нек-рой абелевой категории A. Тогда отображение комплексов $f\colon X\to Y$ определяет элемент $f^*=d(f)\in\mathrm{Hom}(k(Y), k(X))$, где Hom — множество морфизмов в A. Инвариант Хопфа—Адамса $e(f)$ определен, когда $f^*=0$ и $d(Sf)=0$, где $Sf\colon SX\to SY$ — соответствующее отображение надстроек. В этом случае последовательности корасслоений

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{i}Y\cup_f CX\xrightarrow{j}SX\xrightarrow{-Sf}SY$$

соответствует точная последовательность в A:

$$0\leftarrow k(X)\xleftarrow{i_*}k(Y\cup_f CX)\xleftarrow{j_*}k(SX)\leftarrow 0,$$

к-рая и определяет инвариант Хопфа—Адамса—Стинрода $e(f)=\mathrm{Ext}^1(k(Y), k(X))$.

В случае функтора $k=H^*(-; \mathbb{Z}_2)$, принимающего значения в категории модулей над *Стинрода алгеброй* по модулю 2, получается инвариант Хопфа—Стинрода $H_2(f)\in\mathbb{Z}$ отображения $f\colon S^m\to S^n$ при $m>n$ (см. [7]). Когомологии $H^*(C_f, S^m; \mathbb{Z}_2)$ имеют $\mathbb{Z}_2$-базисом пару $\{a, b\}$ с $\dim a=n$ и $\dim b=m+1$, и тогда

$$Sq^{m-n+1}a=H_2(f)\,b.$$

Инвариантом Хопфа H_p по модулю p (p — простое) наз. композиция отображений

$$\pi_{2pn}(S^{2n+1})_{(p)}\xrightarrow{\approx}\pi_{2pn-2}(\Omega^2S^{2n+1})\,p\longrightarrow$$
$$\to\pi_{2pn-2}(\Omega^2S^{2n+1}, S^{2n-1})_{(p)}\to$$
$$\to H_{2pn-2}(\Omega^2S^{2n+1}, S^{2n-1})_{(p)}=\mathbb{Z}/p,$$

где $(X, Y)_p$ — локализация по p пары пространств (см. [10]). Пусть

$$S\colon \pi_{4n-1}(S^{2n})\to\pi_{4n}(S^{2n+1})$$

— гомоморфизм надстройки. Тогда $H_2(Sf)=H_2(f)$ (см. [10]). Х. и. $H(f)$ можно определить и в терминах *Штифеля чисел* (см. [11]): если M^{n-1} — замкнутое

оснащенное многообразие и $M^{n-1}=\partial V$, то характеристич. число Штифеля—Уитни $w_n(\nu)[V, M]$ нормального расслоения ν совпадает с Х.и. $H_2(f)$ отображения f: $S^{n+r-1}\longrightarrow S^r$, представляющего класс оснащенных кобордизмов многообразия M^{n-1}.

Спектральная последовательность Адамса—Новикова позволяет построить высшие инварианты Хопфа. Именно, индуктивно определены инварианты q_i: $\ker q_{i-1}\longrightarrow E_\infty^{i,*}$ и q_0: $\pi^S\longrightarrow E_\infty^{0,*}$ (см. [12]). Из вида дифференциалов этой спектральной последовательности следует, что

$$\mathrm{Ext}_{A^U}^{i,*}(\Omega_U,\ \Omega_U)\supset E_\infty^{i,*},$$
$$i=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

(Ω_U — кольцо комплексных кобордизмов точки), потому при $i=0,\ 1,\ 2,\ 3$ инварианты q_i лежат в $\mathrm{Ext}_{A^U}^{i,*}(\Omega_U,\ \Omega_U)$ и наз. инвариантами Хопфа—Новикова. При $i=1$ получается инвариант Адамса.

Значения, к-рые может принимать Х.и., не являются произвольным. Напр., для отображения f: $S^{4n+1}\longrightarrow S^{2n+1}$ Х.и. всегда равен нулю. Х.и. по модулю p $H_{(p)}$: $\pi_{2mp}(S^{2m+1})\longrightarrow\mathbb{Z}_2$ тривиален, за исключением случаев: $p=2$, $m=1,\ 2,\ 4$ и $p>2$, $m=1$. С другой стороны, для любого четного числа k существует отображение f: $S^{4n-1}\longrightarrow S^{2n}$ с Х.и., равным k (n — любое). При $n=1,\ 2,\ 4$ существуют отображения f: $S^{4n-1}\longrightarrow S^{2n}$ с Х.и., равным 1.

Лит.: [1] Hopf H., «Math. Ann.», 1930/1931, Bd 104; [2] его же, «Fund. math.», 1935, v. 25, p. 427—40; [3] Серр Ж.-П., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 124—62; [4] Whitehead J. H. C., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1947, v. 33, p. 117—23; [5] его же, «Ann. Math.», 1950, v. 51, p. 192—237; [6] Hilton P., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1951, v. 1, № 3, p. 462—93; [7] Steenrod N., «Ann. Math.», 1949, v. 50, p. 954—88; [8] Адамс Дж., «Математика», 1968, т. 12, в. 3, с. 37—97; [9] Дольд А., там же, 1970, т. 14, в. 1, с. 3—103; [10] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [11] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [12] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [13] Адамс Дж., «Математика», 1961, т. 5, в. 4, с. 3—86. *А. В. Шокуров.*

ХОПФА РАССЛОЕНИЕ — локально тривиальное расслоение f: $S^{2n-1}\longrightarrow S^n$ при $n=2,\ 4,\ 8$. Это — один из самых ранних примеров локально тривиальных расслоений, введенный Х. Хопфом [1]. Эти отображения индуцируют тривиальные отображения в гомологиях и когомологиях, однако они не гомотопны нулевому отображению, что вытекает из нетривиальности *Хопфа инварианта* этих отображений. Для их построения потребуется т. н. конструкция Хопфа.

Пусть $X*Y$ — джойн пространств X и Y, он обладает естественными координатами $\langle x,\ t,\ y\rangle$, где $x\in X$, $t\in[0,\ 1]$, $y\in Y$. При этом $X*_{pt}=SX$, где SX — *надстройка* над X. Конструкция Хопфа $\mathfrak{H}$ сопоставляет отображению f: $X\times Y\longrightarrow Z$ отображение $\mathfrak{H}(f)$: $X*Y\longrightarrow SZ$, заданное соотношением $\mathfrak{H}(f)\langle x,\ t,\ y\rangle=\langle f(x,\ y),\ t,\ pt\rangle$.

Пусть отображения μ_n: $S^{n-1}\times S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$ определены при $n=2,\ 4,\ 8$ при помощи умножений: в комплексных числах при $n=2$, в кватернионах при $n=4$ и в числах Кэли при $n=8$. Тогда $S^{n-1}*S^{n-1}=S^{2n-1}$, и отображением Хопфа наз. отображение

$$\mathfrak{H}_n=\mathfrak{H}(\mu_n)\colon S^{2n-1}\to S^n.$$

Отображение Хопфа $\mathfrak{H}_n$, $n=2,\ 4,\ 8$ является локально тривиальным расслоением со слоем S^{n-1}. Если f: $S^{n-1}\times S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$ — отображение бистепени (d_1, d_2), то инвариант Хопфа отображения $\mathfrak{H}(f)$ равен d_1d_2. В частности, инвариант Хопфа Х.р. равен 1.

Иногда Х.р. наз. отображение f: $S^{2n+1}\longrightarrow\mathbb{C}P^n$, заданное формулой $(z_0,\ \ldots,\ z_n)\longrightarrow[z_0:z_1:\ldots:z_n]$, $z_i\in\mathbb{C}$. Это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем S^1. При $n=1$ получается классич. Х.р. f: $S^3\longrightarrow S^2$.

Лит.: [1] Hopf H., «Fund. math.», 1935, v. 25, p. 427—40; [2] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970. *А. В. Шокуров.*

ХОПФА — РИНОВА ТЕОРЕМА: если M — связное риманово пространство с функцией расстояния ρ и *Леви-Чивита связностью*, то следующие утверждения равносильны:

1) M полно;

2) для каждой точки $p\in M$ *экспоненциальное отображение* $\exp_p$ определено на всем касательном пространстве M_p;

3) каждое ограниченное по отношению к ρ замкнутое множество $A\subset M$ компактно.

Следствие: любые две точки $p,\ q\in M$ можно соединить на M геодезич. длины $\rho(p, q)$. Установлена Х. Хопфом и У. Риновым [1].

Обобщение Х.—Р. т. (см. [4]): если $p,\ q$ — две точки в M, то либо существует линия, соединяющая их кратчайшим образом, либо существует выходящая из p геодезич. L со следующими свойствами: 1) L гомеоморфна $0\leqslant t<1$; 2) если последовательность точек, лежащих на L, не имеет предельных точек на L, то она не имеет предельных точек и в M, т. е. L замкнуто в M; 3) L содержит кратчайшую связь между любыми двумя точками на L; 4) для каждой точки $x\in L$ справедливо: $\rho(p, x)+\rho(x, q)=\rho(p, q)$; 5) длина L конечна и не превосходит $\rho(p, q)$. При этом функция $\rho(p, q)$ не обязана быть симметричной, и каждую точку можно соединить кратчайшим образом с любой точкой из нек-рой окрестности U_p не обязательно однозначно. Следствие: если в M не существует ограниченных лучей, то каждое ограниченное множество в M компактно.

Лит.: [1] Hopf H., Rinow W., «Comm. math. helv.», 1931, v. 3, p. 209—25; [2] de Rham G., там же, 1952, v. 26, p. 328—44; [3] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [4] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, [пер. с нем.], М., 1959. *М. И. Войцеховский.*

ХОПФОВА ГРУППА — группа, не изоморфная никакой своей истинной факторгруппе. Название дано в честь Х. Хопфа (H. Hopf), поставившего в 1932 вопрос о существовании конечно порожденных групп, не обладающих таким свойством. Известны примеры нехопфовых групп, в том числе пример группы с одним определяющим соотношением и двумя образующими. Всякая конечно порожденная финитно-аппроксимируемая группа — хопфова.

Лит.: [1] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974. *Н. Н. Вильямс.*

ХОРД МЕТОД — то же, что *секущих метод*.

ХОРДА — прямолинейный отрезок, соединяющий две произвольные точки конич. сечения. *БСЭ-3.*

ХОТЕЛЛИНГА КРИТЕРИЙ, T^2-критерий,— критерий, предназначенный для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой истинное значение неизвестного вектора $\mu=(\mu_1,\ \ldots,\ \mu_p)$ математич. ожиданий невырожденного p-мерного нормального закона $N(\mu, B)$, ковариационная матрица к-рого B тоже неизвестна, есть вектор $\mu_0=(\mu_{10},\ \ldots,\ \mu_{p0})$. Х. к. основан на следующем результате. Пусть $X_1,\ \ldots,\ X_n$ — независимые p-мерные случайные векторы, $n-1\geqslant p$, подчиняющиеся невырожденному нормальному закону $N(\mu, B)$, и пусть

$$T^2=n(\overline{X}-\mu_0)^\top S^{-1}(\overline{X}-\mu_0),$$

где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

и

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(X_i-\overline{X})^{\top}$$

— оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров μ и B. Тогда статистика

$$F=\frac{n-p}{p(n-1)}T^2$$

имеет нецентральное *Фишера F-распределение* с p и $n-p$ степенями свободы и параметром нецентральности

$$n(\mu-\mu_0)^{\top}B^{-1}(\mu-\mu_0);$$

статистика T^2 имеет *Хотеллинга T^2-распределение*. Следовательно, для проверки гипотезы H_0: $\mu=\mu_0$ против альтернативы H_1: $\mu\neq\mu_0$ можно по реализациям независимых случайных векторов $X_1, \ldots, X_n$, подчиняющихся невырожденному p-мерному нормальному закону $N(\mu, B)$, вычислить значение статистики F, к-рая при справедливости гипотезы H_0 имеет центральное F-распределение с p и $n-p$ степенями свободы. Согласно Х.к. с уровнем значимости α гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $F\geqslant F_{\alpha}(p, n-p)$, где $F_{\alpha}(p, n-p)$ — верхняя α-квантиль F-распределения. Следует отметить связь, существующую между Х.к. и отношения правдоподобия критерием. Пусть

$$L(\mu, B)=L(X_1, \ldots, X_n; \mu, B)=$$

$$=\frac{|B^{-1}|^{n/2}}{(2\pi)^{np/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^{\top}B^{-1}(X_i-\mu)\right\}$$

— функция правдоподобия, вычисленная по выборке $X_1, \ldots, X_n$. Критерий отношения правдоподобия для проверки сложной гипотезы H_0: $\mu=\mu_0$ против сложной альтернативы H_1: $\mu\neq\mu_0$ построен на статистике

$$\lambda=\lambda(X_1, \ldots, X_n)=\frac{\sup\limits_{B}L(\mu_0, B)}{\sup\limits_{\mu, B}L(\mu, B)}.$$

Между статистикой λ и статистиками T^2 и F существуют следующие отношения:

$$\lambda^{2/n}=\frac{n-1}{T^2+n-1}=\frac{n-p}{pF+n-p}.$$

Для проверки гипотезы H_0: $\mu=\mu_0$ Х. к. является равномерно наиболее мощным среди всех критериев, инвариантных относительно преобразований подобия (см. *Наиболее мощный критерий*, *Инвариантный критерий*).

Лит.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

М. С. Никулин.

ХОТЕЛЛИНГА T^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей, сосредоточенное на положительной полуоси $(0, \infty)$ с плотностью

$$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{n^{\frac{k}{2}}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

зависящей от двух целочисленных параметров n (числа степеней свободы) и k, $n\geqslant k\geqslant 1$. При $k=1$ Х. T^2-р. сводится к *Стьюдента распределению*, а при любом $k>1$ может рассматриваться как многомерное обобщение распределения Стьюдента в следующем смысле. Если k-мерный случайный вектор Y имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ и если

$$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^{\top}Z_i,$$

где случайные векторы Z_i независимы между собой и от Y и распределены так же, как Y, то случайная величина $T^2=Y^{\top}S^{-1}Y$ имеет Х. T^2-р. с n степенями свободы (Y — вектор-столбец, а $^{\top}$ — транспонирование). Если $k=1$, то

$$T^2=\frac{Y^2}{\frac{1}{n}\chi_n^2}=t_n^2,$$

где случайная величина t_n имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы. Если при определении случайной величины T^2 допустить, что Y имеет нормальное распределение с параметрами (ν, Σ), а Z_i — нормальное распределение с параметрами $(0, \Sigma)$, то соответствующее распределение будет наз. нецентральным Х. T^2-р. с n степенями свободы и параметром нецентральности ν.

Х. T^2-р. используется в математич. статистике в той же ситуации, что и t-распределение Стьюдента, но только в многомерном случае (см. *Многомерный статистический анализ*). Если результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ представляют собой независимые нормально распределенные случайные векторы с вектором средних μ и невырожденной ковариационной матрицей Σ, то статистика

$$T^2=n(\overline{X}-\mu)^{\top}S^{-1}(\overline{X}-\mu),$$

где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

и

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(X_i-\overline{X})^{\top},$$

имеет Х. T^2-р. с $n-1$ степенями свободы. Этот факт положен в основу *Хотеллинга критерия*. Для численных расчетов используют таблицы *бета-распределения* или *Фишера F-распределения*, поскольку случайная величина $\frac{n-k+1}{nk}T^2$ имеет F-распределение с k и $n-k+1$ степенями свободы.

Х. T^2-р. было предложено Хотеллингом [1] в задаче об однородности двух нормальных выборок.

Лит.: [1] Hotelling H., «Ann. Math. Stat.», 1931, v. 2, p. 360—78; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

А. В. Прохоров.

ХЬЮИТТА РАСШИРЕНИЕ — расширение топологич. пространства, наибольшее относительно свойства продолжения действительных непрерывных функций; предложено Э. Хьюиттом [1].

Гомеоморфное вложение v: $X\longrightarrow Y$ наз. функциональным расширением, если $v(X)$ плотно в Y и для любой непрерывной функции f: $X\longrightarrow\mathbb{R}$ существует такая непрерывная функция $\tilde{f}$: $Y\longrightarrow\mathbb{R}$, что $f=\tilde{f}v$. Вполне регулярное пространство X наз. Q-пространством, или функционально замкнутым пространством, если любое его функциональное расширение является гомеоморфизмом, т. е. $v(X)=X$. Функциональное расширение v: $X\longrightarrow v(X)$ вполне регулярного пространства X наз. расширением Хьюитта, если $v(X)$ является Q-пространством. Любое вполне регулярное пространство обладает Х.р., и последнее единственно с точностью до гомеоморфизма.

Х.р. можно определить так же, как подпространство тех точек y *Стоуна — Чеха бикомпактного расширения* βX, что любая непрерывная действительная функция f: $X\longrightarrow\mathbb{R}$ продолжается на $X\cup\{y\}$.

Лит.: [1] Mewitt E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, p. 45—99; [2] Engelking R., Outline of general topology, Amst., 1968; [3] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

И. Г. Кошевникова.

Ц

ЦАССЕНХАУЗА ГРУППА — дважды транзитивная группа G подстановок конечного множества M, в к-рой лишь единичная подстановка оставляет на месте более двух символов из M, и для любой пары символов a, $b \in M$ подгруппа $H_{a,b}$ нетривиальна, где

$$H_{a,b} = \{h \mid h \in G,\ h(a) = a,\ h(b) = b\};$$

впервые такие группы рассмотрены Х. Цассенхаузом[1]. Класс Ц. г. включает два семейства конечных простых групп — проективные специальные группы $PSL(2, q)$, $q > 3$, и *Судзуки группы*.

Лит.: [1] Zassenhaus H., «Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg», 1936, Bd 11; [2] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968.

Н. Н. Вильямс.

ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, (алгебраический) многочлен, (алгебраический) полином, — функция вида

$$w = P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где n — целое неотрицательное, коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ — действительные или комплексные числа, z — действительное или комплексное переменное. Если $a_0 \neq 0$, n наз. степенью многочлена, многочлен $P(z) \equiv 0$ не имеет степени. Простейшая непостоянная Ц. р. ф.— целая линейная функция

$$w = az + b, \quad a \neq 0.$$

Ц.р.ф. аналитична во всей плоскости, т. е. является *целой функцией* комплексного переменного z, ∞ — полюс n-го порядка для $P_n(z)$ ($P_n(z) \to \infty$ при $n \geqslant 1$, когда $z \to \infty$; обратно, если $f(z)$ — целая функция, и $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, то $f(z)$ — Ц.р.ф.). Важную роль в математич. анализе играют также многочлены от нескольких действительных или комплексных переменных. Ц.р.ф., как наиболее удобные для вычисления функции, используются для приближенного представления более сложных функций.

См. также *Многочлен*.

Лит.: Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977.

Е. П. Долженко.

ЦЕЛАЯ ТОЧКА — точка в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами. В теории чисел изучается вопрос о количестве Ц. т. нек-рых областей, напр. при $n = 2$ в круге и при $n = 3$ в шаре (см. *Круга проблема)*, а также об условиях равномерного распределения Ц. т. на поверхностях, напр. при $n = 3$ на сфере и на эллипсоидах. Наиболее сильные результаты получаются с помощью метода тригонометрич. сумм и методов алгебраич. и геометрич. теории чисел.

Б. М. Бредихин.

ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ — функция, аналитическая во всей плоскости комплексного переменного (кроме, возможно, бесконечно удаленной точки). Она разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \geqslant 0,$$

сходящийся во всей плоскости $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$.

Если $f(z) \neq 0$ всюду, то $f(z) = e^{P(z)}$, где $P(z)$ — Ц.ф. Если имеется конечное число точек, в к-рых $f(z)$ обращается в нуль, и эти точки — $z_1, z_2, \ldots, z_k$ (их наз. нулями функции), то

$$f(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_k)\, e^{P(z)},$$

где $P(z)$ есть Ц. ф.

В общем случае, когда у $f(z)$ имеется бесконечно много нулей $z_1, z_2, \ldots$, имеет место представление (см. *Вейерштрасса теорема* о бесконечном произведении)

$$f(z) = z^{\lambda} e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \ldots + \frac{z^k}{kz_k^k}},$$

где $P(z)$ есть Ц. ф., а $\lambda = 0$, если $f(0) \neq 0$, и λ равно кратности нуля $z = 0$, если $f(0) = 0$.

Пусть

$$M(r) = \max_{|z| \leqslant r} |f(z)|.$$

Если при больших r величина $M(r)$ растет не быстрее r^{μ}, то $f(z)$ — многочлен степени не большей μ. Следовательно, если $f(z)$ не многочлен, то $M(r)$ растет быстрее любой степени r. При оценке роста $M(r)$ в этом случае берется в качестве функции сравнения показательная функция.

По определению, $f(z)$ есть Ц. ф. конечного порядка, если имеется конечное μ такое, что

$$M(r) < e^{r^{\mu}}, \quad r > r_0.$$

Нижняя грань ρ множества чисел μ, удовлетворяющих этому условию, наз. порядком Ц. ф. $f(z)$. Порядок вычисляется по формуле

$$\rho = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \ln k}{\ln \left| \frac{1}{a_k} \right|}.$$

Если $f(z)$ порядка ρ удовлетворяет условию

$$M(r) < e^{\alpha r^{\rho}}, \quad \alpha < \infty, \quad r > r_0, \qquad (*)$$

то говорят, что $f(z)$ — функция порядка ρ и конечного типа. Нижняя грань σ множества чисел α, удовлетворяющих указанному условию, наз. типом Ц. ф. $f(z)$. Он определяется из формулы

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} k^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[k]{|a_k|} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Среди Ц. ф. конечного типа различают Ц. ф. нормального типа ($\sigma > 0$) и минимального типа ($\sigma = 0$). Если условие ($*$) не выполняется при любом $\alpha < \infty$, то Ц. ф. наз. Ц. ф. максимального, или бесконечного, типа. Ц. ф. порядка 1 и конечного типа, а также Ц. ф. порядка ниже 1, характеризуемые условием

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} k \sqrt[k]{|a_k|} = \beta < \infty,$$

наз. Ц. ф. экспоненциального типа.

Нули $z_1, z_2, \ldots$ Ц. ф. $f(z)$ порядка ρ обладают свойством:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{\rho+\varepsilon}} < \infty, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Пусть p — наименьшее целое ($p \leqslant \rho$) такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-p-1} < \infty$. Тогда (см. *Адамара теорема* о целых функциях) имеет место представление

$$f(z) = z^{\lambda} e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \ldots + \frac{z^p}{pz_k^p}},$$

где $P(z)$ — многочлен степени не выше ρ.

Для характеристики роста Ц. ф. $f(z)$ конечного порядка ρ и конечного типа σ вдоль лучей вводится величина

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}}$$

— *роста индикатриса*. Всегда

$$|f(re^{i\varphi})| < e^{(h(\varphi)+\varepsilon) r^{\rho}}, \ r > r_0(\varepsilon), \ \forall \varepsilon > 0.$$

Если

$$|f(re^{i\varphi})| > e^{(h(\varphi)-\varepsilon) r^{\rho}}, \ r > r_0(\varepsilon), \ z \notin E_0,$$

где E_0 — в нек-ром смысле малое множество (множество нулевой относительной меры), то нули $f(z)$ расположены на плоскости в определенном смысле весьма правильно и имеется точно описываемая связь между $h(\varphi)$ и характеристикой (плотностью) нулей. Функции $f(z)$ с таким свойством наз. функциями вполне регулярного роста.

Функция многих переменных $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ есть Ц. ф., если она является аналитической при $|z_k| < \infty$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Для нее вводятся понятия порядка и типа (сопряженных порядков и типов). Простого представления в виде бесконечного произведения здесь получить не удается, потому что в отличие от случая $n = 1$ нули $f(z)$ не являются изолированными.

Лит.: [1] Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, 3 изд., М., 1979; [2] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956; [3] Ронкин Л. И., Введение в теорию целых функций многих переменных, М., 1971.

А. Ф. Леонтьев.

ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ, функция цели,— название оптимизируемой функции в задачах *математического программирования*.

ЦЕЛОЕ РАСШИРЕНИЕ кольца — расширение B коммутативного кольца A с единицей такое, что любой элемент $x \in B$ является целым над A, т. е. удовлетворяет нек-рому уравнению вида

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_i \in A$, называемому уравнением целой зависимости.

Элемент x цел над A тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух эквивалентных условий: 1) $A[x]$ является A-модулем конечного типа; 2) существует точный $A[x]$-модуль, являющийся A-модулем конечного типа. Целый элемент алгебраичен над A. Если A — поле, то верно и обратное утверждение. Элементы поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, целые над кольцом $\mathbb{Z}$, наз. целыми алгебраическими числами. Если кольцо B есть модуль конечного типа над A, то любой элемент $x \in B$ цел над A (обратное может не быть верным).

Пусть кольцо $R \supset A$ коммутативно, x и y — элементы R, целые над A. Тогда $x+y$ и xy также целы над A, и множество всех элементов из R, целых над A, образует подкольцо, наз. целым замыканием A в R. Все рассматриваемые далее кольца предполагаются коммутативными.

Если B является целым над A и A' — нек-рая A-алгебра, то $B \otimes A'$ цело над A'. Если B — целое расширение кольца A и S — нек-рое мультипликативное подмножество в A, то кольцо $S^{-1}B$ является целым над $S^{-1}A$. Область целостности A наз. целозамкнутой, если целое замыкание A в своем поле частных совпадает с A. Факториальное кольцо целозамкнуто. Кольцо A целозамкнуто тогда и только тогда, когда для любого максимального идеала $\mathfrak{p} \subset A$ целозамкнуто локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$.

Пусть B — целое расширение A и $\mathfrak{p}$ — нек-рый простой идеал кольца A. Тогда $\mathfrak{p}B \neq B$ и существует простой идеал $\mathfrak{P}$ кольца B, лежащий над $\mathfrak{p}$ (т. е. такой, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$). Идеал $\mathfrak{P}$ максимален тогда и только тогда, когда максимален $\mathfrak{p}$. Если L — конечное расширение поля частных кольца A и B — целое замыкание A в L, то существует лишь конечное число простых идеалов $\mathfrak{P}$ кольца B, лежащих над заданным простым идеалом кольца A.

Пусть $C \supset B \supset A$; расширение $C \supset A$ — Ц.р. тогда и только тогда, когда целыми являются оба расширения $C \supset B$ и $B \supset A$.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

Л. В. Кузьмин.

ЦЕЛОЕ ЧИСЛО — см. *Число*.

ЦЕЛОСТНОЕ КОЛЬЦО — то же, что *область целостности*.

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, в к-ром исследуется задача оптимизации (максимизации или минимизации) функции нескольких переменных, связанных рядом уравнений и (или) неравенств и удовлетворяющих условию целочисленности (используются также термины дискретное программирование, дискретная оптимизация). Источником задач Ц. п. является техническая, экономическая и военная проблематика.

Условие целочисленности переменных формально отражает: а) физич. неделимость объектов (напр., при размещении предприятий или выборе варианта боевых действий); б) конечность множества допустимых вариантов, на к-ром проводится оптимизация (напр., множества перестановок в задачах упорядочения); в) наличие логич. условий, выполнение или невыполнение к-рых влечет изменение вида целевой функции и ограничений задачи.

Наиболее изученной и распространенной задачей Ц. п. является т. н. задача целочисленного линейного программирования: максимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, x_j — целые для $j = 1, \ldots, p$, $p \leqslant n$, где a_{ij}, b_i, c_j — заданные целые числа, x_j — переменные.

Методы решения задач Ц. п. (релаксация, отсечения, динамическое программирование, метод «ветви и границы» и др.) основаны на сокращении перебора допустимых вариантов. «Наивный» подход к решению задач Ц. п., заключающийся в полном переборе всех вариантов (если их множество, конечно), требует объема вычислительной работы, к-рый растет как экспонента от числа переменных, и оказывается практически несостоятельным. Сложность теоретических и вычислительных проблем, возникающих при решении задач Ц. п.,

можно проиллюстрировать тем, что т. н. великая теорема Ферма допускает следующую эквивалентную формулировку: минимизировать

$$(x_1^t+x_2^t-x_3^t)^2$$

при условиях

$$x_1\geqslant 1,\ x_2\geqslant 1,\ x_3\geqslant 1,\ t\geqslant 3,$$

t, x_1, x_2, x_3— целые числа. Если какой-то метод Ц. п. в качестве ответа выдаст положительное значение для минимума целевой функции, это будет конструктивным доказательством теоремы Ферма, если же ответом будет нуль, то это опровергнет ее.

Центральный теоретич. вопрос в Ц. п.: можно ли исключить полный перебор при решении задач Ц. п.? Одна из математич. формулировок этой проблемы: совпадают ли классы P и NP? Класс P (класс NP) — это переборные задачи, разрешимые на детерминированной (недетерминированной) машине Тьюринга за полиномиальное время, т. е. за число вычислительных операций, зависящее как полином от т. н. «длины записи» задачи. Класс NP включает все задачи Ц. п., к-рые имеют экспоненциальное (относительно «длины записи» задачи) количество допустимых решений. Проблема «$P=NP$?» пока (1984) остается открытой.

Лит.: [1] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Новые направления в линейном программировании, М., 1966; [2] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., 1969; [3] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, пер. с англ., М., 1982. *Е. Г. Гольштейн, Е. В. Левнер.*

ЦЕЛЫЙ ИДЕАЛ — идеал поля Q относительно кольца A (здесь Q — поле частных кольца A), целиком лежащий в A. При этом Ц. и. является идеалом в A и обратно, всякий идеал кольца A — Ц. и. его поля частных Q. *О. А. Иванова.*

ЦЕЛЫХ ТОЧЕК РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — нек-рые асимптотические формулы аналитич. теории чисел для арифметич. функций, к-рые могут быть сформулированы как задачи о числе *целых точек* в нек-рых многообразиях, в первую очередь, в гомотетически расширяющихся областях в пространстве $\mathbb{R}^n$.

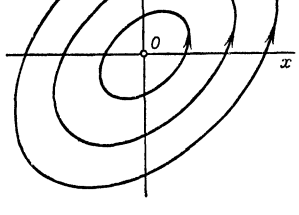
Классическими (исходными) здесь являются *круга проблема* (Гаусса) и *делителей проблема* (Дирихле), а также их многочисленные обобщения.

Лит.: [1] Fricker F., Einführung in die Gitterpunktlehre, Basel — Boston — Stuttgart, 1981; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [3] Вальфиш А. З., Целые точки в многомерных шарах, Тб., 1959. *А. В. Малышев.*

ЦЕНТР — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot{x}=f(x),\ x=(x_1,\ x_2),\ f\colon G\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f\in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0 такая, что все траектории системы, начинающиеся в $U\setminus\{x_0\}$, являются замкнутыми кривыми, окружающими x_0. Ц. наз. при этом и сама точка x_0. На рис. точка O—центр. Движение по траекториям с возрастанием t может происходить по часовой стрелке или против нее (как указано на рис. стрелками). Ц. устойчив по Ляпунову (не асимптотически). Его индекс Пуанкаре равен 1.



Точка x_0 является для системы (*) Ц., напр., когда $f(x)=A(x-x_0)$, где A — постоянная матрица с чисто мнимыми собственными значениями. В отличие от простых точек покоя других типов, встречающихся для линейных систем 2-го порядка (*седло*, *узел*, *фокус*), точка x_0 типа Ц. при возмущении линейной системы добавками к правой части, вообще говоря, не остается Ц., как бы ни были высоки порядок малости возмущений относительно $\|x-x_0\|$ и порядок их гладкости. Она может перейти при этом в фокус (устойчивый или неустойчивый) или в центрофокус (см. *Центра и фокуса проблема*). Для нелинейной системы (*) класса $C^1(f\in C^1(G))$ точка покоя x_0 может быть Ц. и в том случае, когда матрица $A=f'(x_0)$ имеет два нулевых собственных значения.

Лит.: [1] Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П., Нелинейные колебания в системах второго порядка, Минск, 1982. См. также *лит.* при статье *Особая точка* дифференциального уравнения. *А. Ф. Андреев.*

ЦЕНТР группы — множество Z всех центральных (называемых иногда также инвариантными) элементов этой группы, т. е. элементов, перестановочных со всеми элементами группы. Ц. группы G является нормальным делителем в G и даже характеристич. подгруппой в G. Более того, нормальным делителем в G будет всякая подгруппа Ц. Абелевы группы и только они совпадают со своим Ц. Группы, Ц. к-рых состоит лишь из единицы, наз. группами без центра. Факторгруппа G/Z группы G по своему Ц. не обязана быть группой без Ц.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *О. А. Иванова.*

ЦЕНТР кольца — совокупность Z всех элементов кольца, перестановочных с любым элементом, т. е.

$$Z=\{z\mid az=za \text{ для всех } a\}.$$

Ц. кольца оказывается подкольцом, содержащим вместе с каждым обратимым элементом элемент, обратный к нему. Ц. кольца, являющегося алгеброй с единицей над полем, содержит основное поле (ср. *Центральная алгебра*). *Л. А. Скорняков.*

ЦЕНТР *топологической динамической системы* $\{S_t\}$ (*потока* или *каскада* с фазовым пространством X) — наибольшее замкнутое *инвариантное множество* $A\subset X$, все точки к-рого являются *неблуждающими точками* для ограничения исходной системы на A. Ц. заведомо непуст, если пространство X компактно (более общо, если имеется полутраектория с компактным замыканием). Дж. Биркгоф, к-рый ввел понятие Ц., пользовался другим, но эквивалентным, определением с помощью нек-рого трансфинитного процесса (см. [1]—[4]). Число шагов последнего наз. глубиной Ц. (фактически имеется несколько «глубин», так как этот процесс допускает нек-рые модификации). Глубина Ц. невелика для потоков на компактных многообразиях размерности $\leqslant 2$ (см. [5], [6]) и для каскадов, получающихся итерированием гомеоморфизма окружности или непрерывного отображения (даже необратимого) отрезка (см. [7]), но уже для потоков в $\mathbb{R}^3$ и на нек-рых открытых поверхностях может быть сколь угодно большим счетным трансфинитом (см. [8]—[10]). В полном метрич. пространстве Ц. совпадает с замыканием множества точек, обладающих свойством *устойчивости по Пуассону*.

Если X — компакт, а U — окрестность Ц., то траектория любой точки $x\in X$ «проводит бо́льшую часть времени в U»: доля на отрезке $[0,\ T]$ тех t, для к-рых $S_tx\in U$, стремится к 1 при $T\to\infty$. Впрочем, наименьшее замкнутое инвариантное множество, обладающее тем же свойством (минимальный центр притяжения, см. [3], [4]), является, вообще говоря, только частью Ц.; в метризуемом случае оно совпадает с замыканием объединения всех *эргодических множеств*.

Лит.: [1] Birkhoff G. D., «Nachr. der Gesellschaft der Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl.», 1926, H. 1, S. 81—92;

[2] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.—Л., 1941; [3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [4] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970; [5] Schwartz A. J., Thomas E. S., в кн.: Global analysis. («Proc. symp. in pure math.», v. 14), Providence, 1970, p. 253—64; [6] Neumann D. A., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 61, № 1, p. 39—43; [7] Шарковський О. М., «Доповіді АН УРСР», 1964, № 7, с. 865—68; [8] Майер А. Г., «Матем. сб.», 1950, т. 26, № 2, с. 265—90; [9] Шильников Л. П., «Матем. заметки», 1969, т. 5, № 3, с. 335—39; [10] Neumann D. A., «Amer. J. Math.», 1978, v. 100, № 1, p. 1—18.

Д. В. Аносов.

ЦЕНТР частично упорядоченного множества — подмножество элементов частично упорядоченного множества P с 0 и 1 (в частности, решетки), у к-рых при нек-ром разложении P в прямое произведение одна из компонент есть 1, а остальные — 0. Ц. любого частично упорядоченного множества с 0 и 1 является булевой алгеброй. Элемент a решетки L принадлежит ее Ц. тогда и только тогда, когда он нейтрален (т. е. каждая тройка элементов $\{a, x, y\}$ порождает дистрибутивную подрешетку в L) и обладает дополнением. В дедекиндовой решетке с дополнениями Ц. совпадает с множеством всех элементов, обладающих единственным дополнением.

Т. С. Фофанова.

ЦЕНТРА И ФОКУСА ПРОБЛЕМА — проблема определения условий, при к-рых все траектории *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \qquad (*)$$

в нек-рой окрестности *равновесия положения* O, за исключением точки O, являются замкнутыми кривыми. Функции X и Y предполагаются голоморфными в нек-рой окрестности точки O. Проблема поставлена А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]). Основополагающие результаты получены А. М. Ляпуновым [2].

Обычно предполагают, что характеристич. уравнение линеаризованной в точке O системы, т. е. системы

$$\dot{\xi} = X'_x(O)\,\xi + X'_y(O)\,\eta,$$
$$\dot{\eta} = Y'_x(O)\,\xi + Y'_y(O)\,\eta,$$

имеет чисто мнимые корни. Тогда особая точка O является для системы (*) либо *центром* (окружена замкнутыми траекториями), либо *фокусом* (окружена спиралями). В этом случае необходимое и достаточное условие существования центра заключается в том, что система (*) должна иметь не зависящий от t действительный голоморфный в окрестности точки O интеграл $F(x, y) = C$(см. [2]). На основе этого результата разработаны методы составления условий наличия центра; такие условия представляют собой равенство нулю бесконечной последовательности многочленов от коэффициентов разложений в ряды правых частей системы (*). В случае полиномиальных правых частей из теоремы Гильберта о конечности базиса полиномиальных идеалов следует, что существенных условий в указанной последовательности — лишь конечное число, а остальные являются их следствиями. Задача установления числа существенных условий центра является весьма сложной и полностью решена лишь в случае, когда X и Y являются многочленами 2-й степени (три условия). В случае многочленов более высокой степени разработаны методы установления условий наличия центров определенной структуры: изохронных, устойчивых, симметричных (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950; [3] Амелькин В. В., «Дифференц. уравнения», 1977, т. 13, № 6, с. 971—80; [4] Сибирский К. С., Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц, Кишинев, 1976.

К. С. Сибирский.

ЦЕНТРАЛИЗАТОР — подмножество кольца, группы или полугруппы R, состоящее из элементов, перестановочных (коммутирующих) со всеми элементами из нек-рого множества $S \subseteq R$; централизатор S в R обозначается $C_R(S)$. Ц. неприводимого (т. е. не имеющего собственных инвариантных подгрупп) подкольца эндоморфизмов абелевой группы в кольце всех эндоморфизмов этой группы есть тело (лемма Шура).

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.

Л. А. Бокуть.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебра с единицей над полем, центр к-рой (см. *Центр* кольца) совпадает с основным полем. Напр., тело кватернионов является Ц. а. над полем действительных чисел, а поле комплексных чисел не является. Алгебра матриц над полем — Ц. а. Тензорное произведение простой алгебры и простой Ц. а. оказывается простой Ц. а. Всякий автоморфизм конечномерной простой Ц. а. является внутренним, а ее размерность — квадратом целого числа.

Лит.: [1] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Конечномерные алгебры, К., 1980; [2] Скорняков Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983.

Л. А. Скорняков.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА — общее название ряда предельных теорем теории вероятностей, указывающих условия, при выполнении к-рых суммы или другие функции от большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин имеют распределения вероятностей, близкие к *нормальному распределению*.

В классич. варианте Ц. п. т. речь идет о последовательности

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \qquad (1)$$

независимых случайных величин, имеющих конечные математич. ожидания $\mathsf{E}X_k = a_k$ и конечные дисперсии $\mathsf{D}X_k = b_k$, и о суммах

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n. \qquad (2)$$

Пусть $A_n = \mathsf{E}S_n = a_1 + \ldots + a_n$, $B_n = \mathsf{D}S_n = b_1 + \ldots + b_n$. Функции распределения

$$F_n(x) = \mathsf{P}\{Z_n < x\}$$

т. н. «нормированных» сумм

$$Z_n = \frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}}, \qquad (3)$$

имеющих математич. ожидание, равное нулю, и дисперсию, равную единице, сравнивают со «стандартной» нормальной функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz,$$

соответствующей нормальному распределению с нулевым математич. ожиданием и единичной дисперсией. Утверждение Ц. п. т. в этом случае состоит в том, что при определенных условиях при $n \to \infty$ и при любом x

$$F_n(x) \to \Phi(x)$$

или, что то же самое, для любого интервала (α, β) имеет место сходимость

$$\mathsf{P}\{\alpha < Z_n < \beta\} = \mathsf{P}\{A_n + \alpha\sqrt{B_n} < S_n < A_n + \beta\sqrt{B_n}\} \to$$
$$\to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

(см. *Лапласа теорема*, *Ляпунова теорема*).

Понять наиболее отчетливо условия возникновения нормального распределения в качестве предельного для распределений сумм независимых случайных величин можно лишь переходя от схемы последовательности к *серий схеме* (см. [4]). В данном случае при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$ получают серию величин

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n},$$

полагая

$$X_{n,k} = \frac{X_k - a_k}{\sqrt{B_n}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда случайные величины внутри каждой серии независимы и

$$Z_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,n}.$$

Обычные условия приложимости Ц. п. т. (такие, как условие Ляпунова или условие *Линдеберга — Феллера теоремы*) влекут асимптотическую пренебрегаемость величин $X_{n,k}$. Напр., из условия Ляпунова с третьими моментами, т. е. из условия: при $n \to \infty$

$$L_n = \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{n=1}^{n} \mathsf{E} \mid X_k - a_k \mid^3 \to 0, \qquad (4)$$

при любом $\varepsilon > 0$ вытекает неравенство

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{P}\{ \mid X_{n,k} \mid > \varepsilon \} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{P}\{ \mid X_k - a_k \mid > \varepsilon \sqrt{B_n} \} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\varepsilon^3 B_n^{3/2}} \mathsf{E} \mid X_k - a_k \mid^3 \leqslant L_n \to 0$$

при $n \to \infty$, а стремление к нулю величины в крайней левой части этой цепочки неравенств и означает асимптотич. пренебрегаемость образующих серии случайных величин.

Пусть теперь дана произвольная схема серий

$$X_{n,1}, \; X_{n,2}, \; \ldots, \; X_{n,k_n}, \qquad (5)$$

$n = 1, 2, \ldots$, асимптотически пренебрегаемых и независимых внутри каждой серии случайных величин. Тогда, если предельное распределение для сумм $Z_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,k_n}$ существует и не является вырожденным, то оно будет нормальным тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$ и любом $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{ \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mid X_{n,k} \mid > \varepsilon \} \to 0, \qquad (6)$$

т. е. когда максимальное слагаемое в Z_n становится исчезающе малым по сравнению со всей этой суммой (без условия (6) можно лишь утверждать, что предельный закон для Z_n принадлежит классу *безгранично делимых распределений*). Два дополнительных условия, к-рые вместе с (6) являются необходимыми и достаточными для сходимости распределений сумм Z_n к предельному, указаны в ст. *Серий схема*.

При отказе от условия асимптотич. пренебрегаемости величин в рассмотренной выше схеме серий положение усложняется. Известная теорема Крамера о том, что сумма нескольких независимых случайных величин может быть нормально распределенной тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых нормально распределено, позволяет предположить (как это сделал П. Леви (см. [15], теорема 38, гл. V), что сумма независимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному, если «большие» слагаемые почти нормальны, а совокупность «малых» слагаемых подчиняется условиям «нормальности» распределений сумм асимптотически пренебрегаемых слагаемых. Впервые точную форму подобного рода соображения получили для схемы серий (5) с $\mathsf{E}X_{n,k} = 0$, $\sum_{n=1}^{k_n} \mathsf{D}X_{n,k} = 1$ (см. [7]). Здесь для сходимости функций распределений $F_n(x) = \mathsf{P}\{Z_n < x\}$ к нормальной функции распределения $\Phi(x)$ необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий:

1) при $n \to \infty$

$$\alpha_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} L(F_{n,k}, \; \Phi_{n,k}) \to 0,$$

где $L(F_{n,k}, \; \Phi_{n,k})$ — расстояние Леви (см. *Леви метрика*) между функцией распределения $F_{n,k}(x)$ случайной величины $X_{n,k}$ и нормальной функцией распределения $\Phi_{n,k}(x)$ с такими же математич. ожиданием и дисперсией как у $F_{n,k}(x)$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\Delta_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\mid x \mid > \varepsilon} x^2 \, dF_{n,k}(x) \to 0,$$

где сумма распространена на те k, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, для к-рых $\mathsf{D}X_{n,k} < \sqrt{\alpha_n}$.

Эта формулировка всего ближе по звучанию к первоначальному предположению Леви. Возможны и иные, в известном смысле более напоминающие теорему Линдеберга — Феллера, формулировки (см. напр., [8]).

В настоящее время эта форма Ц. п. т. может быть получена как частный случай более общей теории суммирования в схеме серий без условия асимптотич. пренебрегаемости.

В практич. отношении важно иметь представление о скорости сходимости распределений сумм к нормальному распределению. Этой цели служат неравенства и асимптотич. разложения (а также теория *больших отклонений вероятностей*, см. также *Крамера теорема*, *Предельные теоремы*). В последующем для простоты изложения рассматривается схема последовательности, причем величины, образующие последовательность (1), предполагаются одинаково распределенными. Пусть $F(x) = \mathsf{P}\{X_k < x\}$. Типичным примером неравенств для отклонений функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы (2) от $\Phi(x)$ служит неравенство Бэрри — Эссеена: при всех x

$$\mid F_n(x) - \Phi(x) \mid \leqslant C \frac{\mathsf{E} \mid X_1 - a_1 \mid^3}{\sigma_1^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (7)$$

где C — абсолютная постоянная (наилучшее возможное значение константы C в настоящее время (1984) неизвестно, однако можно утверждать, что оно не превосходит 0,7655). Неравенства типа (7) становятся мало информативными, если слагаемые X_k сами «почти-нормальны». Так, если они в точности нормальны, то левая часть (7) равна нулю, а правая $C \cdot \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$. Поэтому с нач. 60-х гг. предлагались аналоги неравенства (7), у к-рых в правую часть вместо моментов случайных величин X_k входят другие характеристики, подобные моментам, но определяемые по разности

$$F(x) - \Phi\left(\frac{x - a_1}{\sigma_1}\right),$$

так, что они становятся тем меньше, чем меньше эта разность. В правой части неравенства (7) и его обобщений можно поставить неограниченно убывающие при $|x| \to \infty$ функции от x (так наз. неравномерные оценки). Рассматривают (см. [6]) и другие способы измерения «близости» $F_n(x)$ к $\Phi(x)$, напр., в смысле пространства L^p (в так наз. глобальных вариантах Ц. п. т.) или способы, основанные на сравнении локальных характеристик распределений (см. *Локальные предельные теоремы*).

Асимптотич. разложения для разности $F_n(x) - \Phi(x)$ имеют вид (см. [4], [3]) для $\sigma = 1$:

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Q_1(x)}{n^{1/2}} + \frac{Q_2(x)}{n} + \frac{Q_3(x)}{n^{3/2}} + \ldots \right).$$

Здесь $Q_k(x)$ — многочлен степени $3k-1$ относительно x с коэффициентами, зависящими только от первых $(k-2)$ моментов слагаемых. Для биномиального распределения первый член асимптотич. распределения был указан П. Лапласом (P. Laplace, 1812), а полностью, но без точного обоснования, оно было описано П. Л. Чебышевым (1887). Первая оценка остаточного члена в предположении, что конечен s-й момент $\beta_s = \mathsf{E} \mid X_k \mid^s$, $s \geqslant 3$, и выполнено условие

$$\overline{\lim_{\mid t \mid \to \infty}} \left| \mathsf{E} e^{itX_k} \right| < 1,$$

— так наз. условие Крамера, была дана Г. Крамером (H. Cramèr, 1928). Этот результат в несколько усиленной формулировке утверждает, что

$$F_n(x)-\Phi(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{Q_{s-2}(x)}{n^{(s-2)/2}}+o\left(\frac{1}{n^{(s-2)/2}}\right)\right)$$

равномерно относительно x. Это асимптотич. разложение служит основой для построения широкого класса *случайных величин преобразований*.

Ц. п. т. может быть распространена на случай, когда последовательность (1) (или обобщающая ее схема серий) образована векторами из m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть, напр., случайные векторы (1) независимы, одинаково распределены, не лежат с вероятностью 1 в какой-либо гиперплоскости и $\mathsf{E}X_k=0$ и $\mathsf{E}\|X_k\|^2<\infty$, где норма — обычная евклидова норма в $\mathbb{R}^m$. В этих условиях при $n\to\infty$ распределения вероятностей нормированных сумм

$$Z'_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$$

слабо сходятся (см. *Распределений сходимость*) к нормальному распределению Φ_Λ в $\mathbb{R}^m$ с математич. ожиданием, равным нулевому вектору, и матрицей ковариаций Λ, совпадающей с матрицей ковариаций X_k. Более того, эта сходимость равномерна на широких классах подмножеств $\mathbb{R}^m$ (см. [10]). Напр., она равномерна на классе $\mathfrak{S}$ всех борелевских выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^m$: при $n\to\infty$

$$\sup_{A\in\mathfrak{S}}|P_n(A)-\Phi_\Lambda(A)|\to 0. \qquad (8)$$

При дополнительных предположениях может быть оценена скорость сходимости в (8).

Ц. п. т. может быть распространена и на последовательности (и на серии) независимых случайных векторов со значениями в бесконечномерных пространствах. При этом Ц. п. т. в «привычной» форме может и не иметь места (здесь сказывается влияние «геометрии» пространства, см. *Случайный элемент*). Особый интерес представляет случай, когда члены последовательности (1) принимают значения из сепарабельного гильбертова пространства H. Приведенное выше утверждение о слабой сходимости в $\mathbb{R}^m$ распределений нормированных сумм Z'_n к нормальному остается верным в H в точно той же формулировке. При этом сходимость равномерна на сравнительно узких классах (напр., на классе всех шаров с центром в нуле, или шаров, центры к-рых лежат в каком-либо фиксированном шаре; сходимость на классе всех шаров может не быть равномерной). Пусть S_r — шар в H радиуса r и с центром в нуле. Аналогом неравенства (7) здесь служат неравенства следующего типа. Пусть

$$\mathsf{E}X_k=0,\ \mathsf{E}\|X_k\|^2<\infty$$

и распределение X_k не сосредоточено ни в каком конечномерном подпространстве пространства H; тогда в специальных случаях (подобных разбираемому в указанном ниже примере)

$$\Delta_n=\sup_r|\mathsf{P}\{Z'_n\in S_r\}-\Phi_\Lambda(S_r)|=O\left(\frac{1}{n}\right);$$

при условии же $\mathsf{E}\|X_k\|^{3+\alpha}<\infty$, где α фиксировано и не слишком мало, можно утверждать, что при любом $\varepsilon>0$

$$\Delta_n=O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$$

(напр., это верно при $\alpha=1$).

К Ц. п. т. в бесконечномерных пространствах, и в частности в H, могут приводить и весьма конкретные задачи, напр. математич. статистики.

Пример. Пусть $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0,1]$. Пусть $X_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, случайные элементы из пространства $L^2[0,1]$ (пространство функций с интегрируемым по отношению к мере Лебега на $[0,1]$ квадратом) заданы следующим образом:

$$X_k(t)=-t \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\theta_k$$
$$X_k(t)=1-t \text{ при } \theta_k<t\leqslant 1.$$

Тогда $\mathsf{E}X_k(t)=0$, $0\leqslant t\leqslant 1$ и

$$Z'_n(t)=\frac{X_1(t)+\ldots+X_n(t)}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\,(G_n(t)-t),$$

где $G_n(t)$ — эмпирич. функция распределения, построенная по выборке $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$ объема n из равномерного на $[0,1]$ распределения. При этом квадрат нормы

$$\|Z'_n\|^2=\int_0^1(Z'_n(t))^2\,dt=n\int_0^1(H_n(t)-t)^2\,dt$$

совпадает со статистикой ω_n^2 критерия Крамера — Мизеса — Смирнова (см. *Крамера — Мизеса критерий*). В соответствии с Ц. п. т. существует предельное при $n\to\infty$ распределение для ω_n^2. Оно совпадает с распределением квадрата нормы нек-рого нормально распределенного вектора в H и носит название «*омега-квадрат*» *распределения*. Таким образом, Ц. п. т. дает обоснование замены при больших n распределения ω_n^2 распределением ω^2, что и лежит в основе применения упомянутых выше статистич. критериев.

Известны многочисленные варианты обобщения Ц.п.т. на суммы зависимых величин (в случае однородных конечных цепей Маркова, простейшей неоднородной цепи с двумя состояниями и нек-рых др. схем; это было сделано самим А. А. Марковым, 1907—1911, дальнейшие обобщения связаны, в первую очередь, с именем С. Н. Бернштейна [12]). Основная черта, свойственная всем такого рода обобщениям Ц.п.т., состоит в том (если говорить о схеме последовательности), что зависимость между событиями, определяемыми по $X_1,X_2,\ldots,X_k$, и событиями, определяемыми по $X_{k+p},X_{k+p+1},\ldots$, становится исчезающе малой при неограниченном росте p.

Что касается методов доказательства Ц. п. т., то в случае независимых слагаемых наиболее мощным является, как правило, метод характеристич. функций; его дополняет, а порой и заменяет так наз. «метод композиций» (см. [11]) (а также метод, получивший условное название «метода метрических расстояний»). В случае зависимых величин наиболее эффективным, в целом, является метод семиинвариантов (см. напр., [14]). Этот же метод пригоден для изучения функций от случайных величин, более общих чем суммы или линейные функции (напр., для квадратичных и других форм).

Относительно Ц. п. т. в теории чисел см. *Чисел теория вероятностная*. Ц. п. т. применима и в нек-рых вопросах теории функций и теории динамич. систем.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [5] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [6] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [7] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, № 4, с. 666—77; [8] Ротарь В. И., «Матем. заметки», 1975, т. 18, № 1, с. 129—35; [9] Чебышев П. Л., Избр. тр., М., 1955;

[10] Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р., Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1982; [11] Sazonow V. V., Normal approximation..., B.— Hdlb.— N. Y., 1981; [12] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964; [13] Марков А. А., Избр. тр., М., 1951; [14] Статулявичус В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960,т.5,№2; [15] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954.

Ю. В. Прохоров.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ АЛГЕБРА — простая ассоциативная алгебра с единицей, являющаяся *центральной алгеброй*. Всякая конечномерная Ц.п.а. A над полем K изоморфна алгебре матриц $M_n(C)$ над конечномерной центральной алгеброй с делением C над K. В частности, если K алгебраически замкнуто, то всякая конечномерная Ц.п.а. A над K изоморфна $M_n(K)$, а если $K=\mathbb{R}$, то A изоморфна алгебре вещественных или кватернионных матриц. Тензорное произведение Ц.п.а. A на любую простую алгебру B есть простая алгебра, центральная, если B центральна. Две конечномерные Ц.п.а. A и B над K наз. эквивалентными, если

$$A \otimes_K M_m(K) \cong B \otimes_K M_n(K)$$

для нек-рых m и n, или, что равносильно, если A и B изоморфны алгебрам матриц над одной и той же центральной алгеброй с делением. Классы эквивалентных Ц. п. а. над K образуют *Брауэра группу* поля K относительно операции, индуцируемой тензорным умножением.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [2] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Конечномерные алгебры, К., 1980.

А. Л. Онищик.

ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ групп — теоретико-групповая конструкция. Группа G называется Ц. п. своих подгрупп A и B, если она порождается ими, если для любых двух элементов $a\in A$ и $b\in B$ верно равенство $ab=ba$ и если пересечение $A\cap B$ лежит в центре $Z(G)$ группы G. В частности, при $A\cap B=1\in G$ Ц. п. оказывается прямым произведением $A\times B$. Фиксируя для произвольных групп A, B и C таких, что $C\leqslant Z(A)$ — нек-рый мономорфизм θ: $C\to Z(B)$, можно определить Ц. п. групп A и B и не предполагая предварительно, что A и B являются подгруппами нек-рой группы G.

Лит.: [1] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968.

Н. Н. Вильямс.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — величины, определяемые формулами

$$\Omega(A)=\lim_{T\to+\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X((i+1)T,\ iT)\|$$

(верхний центральный показатель) и

$$\omega(A)=\lim_{T\to+\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{-1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X(iT,\ (i+1)T)\|$$

(нижний центральный показатель); иногда нижним Ц. п. называется величина

$$\lim_{T\to+\infty}\underline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{-1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X(iT,\ (i+1)T)\|.$$

Здесь $X(\theta,\tau)$ — *Коши оператор* системы

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение

$$\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n).$$

Ц. п. $\Omega(A)$ и $\omega(A)$ могут равняться $\pm\infty$; имеют место неравенства

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau)\|\,d\tau\geqslant\Omega(A)\geqslant\omega(A)\geqslant$$

$$\geqslant-\underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau)\|\,d\tau,$$

из к-рых следует, что если система (1) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau)\|\,d\tau<+\infty,$$

то ее Ц.п. суть числа. Ц.п. связаны с *Ляпунова характеристическими показателями* $\lambda_1(A)$, ..., $\lambda_n(A)$ и с *особыми показателями* $\Omega^0(A)$, $\omega^0(A)$ неравенствами

$$\Omega^0(A)\geqslant\Omega(A)\geqslant\lambda_1(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A)\geqslant\omega(A)\geqslant\omega^0(A).$$

Для системы (1) с постоянными коэффициентами ($A(t)\equiv A$) Ц. п. $\Omega(A)$ и $\omega(A)$ равны соответственно максимуму и минимуму действительных частей собственных значений оператора A. Для системы (1) с периодич. коэффициентами ($A(t+\theta)=A(t)$ при всех $t\in\mathbb{R}$ для нек-рого $\theta>0$, θ — наименьший период) Ц. п. $\Omega(A)$ и $\omega(A)$ равны соответственно максимуму и минимуму логарифмов модулей *мультипликаторов*, деленных на период θ.

Если $A(\cdot)$ — почти периодич. отображение (см. *Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*), то Ц. п. системы (1) совпадают с особыми показателями:

$$\Omega(A)=\Omega^0(A),\ \omega(A)=\omega^0(A)$$

(теорема Былова).

Для всякой фиксированной системы (1) условие $\Omega(A)<0$ достаточно для существования $\delta>0$ такого, что у всякой системы

$$\dot{x}=A(t)x+g(x,\ t),$$

удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши и условию

$$|g(x,\ t)|<\delta|x|,$$

решение $x=0$ асимптотически устойчиво (теорема Винограда). Условие $\Omega(A)<0$ в теореме Винограда не только достаточно, но и необходимо (необходимость сохранится и в том случае, если асимптотич. устойчивость заменить на устойчивость по Ляпунову).

Функция $\Omega(A)$ (соответственно $\omega(A)$) на пространстве M_n систем (1) с ограниченными непрерывными коэффициентами (т. е. $A(\cdot)$ непрерывно и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\|A(t)\|<+\infty$), наделенном метрикой

$$d(A,\ B)=\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|A(t)-B(t)\|,$$

полунепрерывна сверху (соответственно снизу), но каждая из этих функций не всюду непрерывна. Для всякой системы (1) из M_n как угодно близко к ней (в M_n) найдутся системы

$$\dot{x}=B_i(t)x,\ i=1,\ 2, \tag{2}$$

такие, что

$$\lambda_1(B_1)=\Omega(A),\ \lambda_n(B_2)=\omega(A),$$

где $\lambda_1(B_i)$ и $\lambda_n(B_i)$, $i=1,\ 2$, — соответственно наибольший (старший) и наименьший (младший) характеристич. показатели Ляпунова систем (2).

Если отображение $A(\cdot)$: $\mathbb{R}\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывно и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\|<+\infty$, то для почти всякого отображения $\tilde{A}$ (в смысле всякой нормированной инвариантной меры *сдвигов динамической системы* ($S=\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$), сосредоточенной на замыкании траектории точки A; отображения $\tilde{A}$, A рассматриваются как точки пространства динамич. системы сдвигов) верхний (нижний) Ц.п. системы $\dot{x}=\tilde{A}(t)x$ равен наибольшему (соответственно наименьшему) характеристич. показателю Ляпунова этой системы:

$$\Omega(\tilde{A})=\lambda_1(\tilde{A}),\ \omega(\tilde{A})=\lambda_n(\tilde{A}).$$

Пусть динамич. система на гладком замкнутом многообразии V^n задана гладким векторным полем. Тогда для почти всякой (в смысле всякой нормированной инвариантной меры) точки $x \in V^n$ верхний (нижний) Ц. п. системы уравнений в вариациях вдоль траектории точки x совпадает с ее наибольшим (наименьшим) характеристич. показателем Ляпунова. Рассмотрены типичные (с точки зрения категорий Бэра) свойства Ц. п. (см. [3]).

Лит.: [1] Былов В. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [2] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146; [3] Миллионщиков В. М., «Дифференц. уравнения», 1983, т. 19, № 9, с. 1503—1510; 1984, т. 20, №№ 6, 8.

В. М. Миллионщиков.

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД группы — нормальный ряд, все факторы к-рого центральны, т. е. ряд подгрупп

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

для к-рого G_{i+1}/G лежит в центре группы G/G_i для всех i (см. также *Подгрупп ряд*). Если для всех i подгруппа G_{i+1}/G_i в точности совпадает с центром группы G/G_i, то ряд наз. верхним Ц. р. группы G, а если коммутант G_{i+1} и G совпадает с G_i, то ряд наз. нижним Ц. р. группы G.

Группа, обладающая Ц. р., наз. *нильпотентной группой*. В нильпотентной группе нижний и верхний Ц. р. имеют одну и ту же длину, равную минимальной длине Ц. р. группы. Эта длина наз. классом нильпотентности, или ступенью нильпотентности группы.

О. А. Иванова.

ЦЕНТРИРОВАННОЕ СЕМЕЙСТВО МНОЖЕСТВ — семейство, пересечение любого конечного множества элементов к-рого не пусто. Напр., счетное семейство $\{A_i\colon t \in \mathbb{Z}\}$, состоящее из подмножеств натурального ряда чисел $\mathbb{Z}_+$ вида $A_i = \{n \in \mathbb{Z}_+,\ n > i\}$, центрировано. Центрированным будет любое семейство, пересечение всех элементов к-рого не пусто. Этим свойством обладает любое конечное Ц. с. м.

Впервые бесконечные Ц. с. м. были использованы в общей топологии для характеристики бикомпактных пространств. Ц. с. м., замкнутых в топологич. пространстве, используются при построении его бикомпактного расширения и его абсолюта.

Понятие Ц. с. м. допускает следующее обобщение. Пусть m — бесконечное кардинальное число. Тогда m-центрированным семейством множеств наз. такое семейство, что пересечение любого множества его элементов мощности, меньшей m, не пусто. Такие семейства применяются для характеристики m-компактных пространств и в абстрактной теории меры.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Gillman L., Jerison M., Rings of continuons functions, Princeton, 1960.

Б. А. Ефимов.

ЦЕНТРОАФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел *аффинной геометрии*, в к-ром изучаются инварианты центроаффинных преобразований; $\overline{x}^i = A^i_s x^s$. Центроаффинные преобразования оставляют неподвижной одну точку (центр). В Ц. г. имеет место полная двойственность: каждому предложению относительно точек соответствует такое же предложение относительно гиперплоскостей.

Л. А. Сидоров.

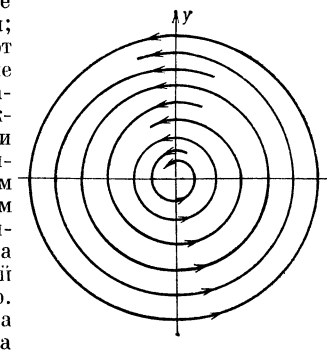
ЦЕНТРОАФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО — *аффинное пространство*, в к-ром основным инвариантом является свойство плоскости проходить или не проходить через нек-рую точку — центр пространства.

Л. А. Сидоров.

ЦЕНТРО-ФОКУС — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^2,\ f\colon G \to \mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f \in C(G)$, G — область единственности, в окрестности изолированной особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом: в любой окрестности U точки x_0 существуют замкнутые траектории системы, окружающие точку x_0, и целые незамкнутые траектории; последние заполняют стягивающиеся к точке x_0 кольцеобразные области, ограниченные замкнутыми траекториями, и представляют собою спирали, к-рые (в каждом кольце) одним концом асимптотически приближаются к внешней, а другим — к внутренней границам кольца. Ц.-ф. наз. при этом и сама точка x_0. На рис. точка (0,0) есть Ц.-ф.; стрелки указывают направление движения по траекториям системы с возрастанием t (оно может быть и противоположным).



Ц.-ф. устойчив, по Ляпунову (не асимптотически). Его индекс Пуанкаре равен 1.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [2] Дюлак Г., О предельных циклах, пер. с франц., М., 1980; [3] Елизаров П. М., Ильяшенко Ю. С., «Матем. сб.», 1983, т. 121, № 1, с. 111—26.

А. Ф. Андреев.

ЦЕПНАЯ ДРОБЬ, непрерывная дробь,— выражение вида

$$a_0 + b_1/a_1 + \ldots + b_n/a_n + \ldots, \qquad (1)$$

где

$$\{a_n\}_{n=0}^{\omega} \qquad (2)$$

и

$$\{b_n\}_{n=1}^{\omega} \qquad (3)$$

— конечные или бесконечные последовательности комплексных чисел. Вместо выражения (1) употребляется также обозначение

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n + \ddots}}}.$$

Цепной дробью последовательности (2) наз. выражение вида

$$a_0 + 1/a_1 + \ldots + 1/a_n + \ldots.$$

Для каждой Ц. д. (1) рекуррентные уравнения

$$P_n = a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}$$

с начальными условиями

$$b_0 = 1,\ P_{-2} = 0,\ P_{-1} = 1,\ Q_{-2} = 1,\ Q_{-1} = 0,$$

определяют две последовательности $\{P_n\}_{n=0}^{\omega}$ и $\{Q_n\}_{n=0}^{\omega}$ комплексных чисел. Обычно предполагается, что последовательности (2) и (3) таковы, что $Q_n \neq 0$ для всех n, $0 \leqslant n < \omega + 1$. Дробь $\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}$ наз. подходящей дробью порядка n Ц. д. (1). При этом

$$\delta_0 = a_0,\ \delta_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1},\ \delta_2 = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}},\ \ldots;$$

кроме того,

$$\delta_n - \delta_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1} b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}{Q_n Q_{n-1}}.$$

Подходящую дробь порядка n Ц. д. последовательности (2) принято обозначать

$$[a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n].$$

Для таких подходящих дробей имеют место равенства:

$$[a_n;\ \ldots,\ a_1]=\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \text{ при } n\geqslant 1,$$

$$[a_n;\ \ldots,\ a_0]=\frac{P_n}{P_{n-1}} \text{ при } a_0\neq 0 \text{ и } n\geqslant 0.$$

Если $\omega=\infty$ и последовательность подходящих дробей Ц. д. (1) сходится к нек-рому пределу l, то Ц. д. (1) наз. сходящейся, а число l — значением этой Ц. д. Если же $\omega<\infty$, т. е. Ц. д. конечна, то ее значением наз. последнюю подходящую дробь последовательности ее подходящих дробей.

Если все члены последовательностей (2) и (3), кроме, быть может, a_0, положительные действительные числа, а число a_0 действительно, то последовательность $\delta_0, \delta_2, \delta_4, \ldots$ подходящих дробей четного порядка Ц. д. (1) возрастает, а последовательность $\delta_1, \delta_3, \delta_5, \ldots$ подходящих дробей нечетного порядка убывает. При этом любая подходящая дробь четного порядка меньше каждой подходящей дроби нечетного порядка (см. [5]).

Если $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — такая последовательность комплексных чисел, что

$$\alpha_0=a_0+\frac{b_1}{\alpha_1},\ \alpha_1=a_1+\frac{b_2}{\alpha_2},\ \ldots,$$

то выражение (1) наз. разложением числа в цепную дробь. Не всякая Ц. д. сходится и значение Ц. д. не всегда равно числу, разложением к-рого она является. Существует ряд признаков сходимости Ц. д. (см., напр., [3], [5]):

1) Пусть $\omega=\infty$, все члены последовательностей (2) и (3) действительные числа и $a_n>0$ для всех натуральных n, начиная с нек-рого. Если для таких n выполняется неравенство $a_n-|b_n|\geqslant 1$, то Ц. д. (1) сходится.

2) Пусть $\omega=\infty$, и все члены последовательности (2), начиная с a_1, положительны. Тогда Ц. д. последовательности (2) сходится в том и только в том случае, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ расходится (теорема Зейделя).

Ц. д. последовательности (2) наз. правильной, если все ее члены (кроме, быть может, a_0) — натуральные числа, a_0 — целое число, а $a_\omega\geqslant 2$, если $1\leqslant\omega<\infty$. Для любого действительного числа r существует единственная правильная Ц. д., значение к-рой равно r. Эта дробь конечна в том и только том случае, если число r рационально (см. [1], [2], [4]). Алгоритм разложения действительного числа r в правильную Ц. д. определяется следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &a_0=[r],\quad \alpha_1=\frac{1}{r-a_0}, \text{ если } a_0\neq r;\\ &a_1=[\alpha_1],\ \alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-a_1}, \text{ если } a_1\neq\alpha_1;\\ &a_2=[\alpha_2]\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $[x]$ означает целую часть x.

Числа a_n и α_n, определяемые из условий (4), наз. соответственно полным и неполным частным порядка n разложения числа r в Ц. д.

В 1776 И. Ламберт (J. Lambert) нашел разложение $\operatorname{tg} x$ в цепную дробь:

$$1\Big/\frac{1}{x}-1\Big/\frac{3}{x}-1\Big/\frac{5}{x}-\ldots-1\Big/\frac{2n+1}{x}-\ldots$$

А. Лежандр (A. Legendre) в предположении, что эта Ц. д. сходится, показал, что ее значение для рациональных значений x иррационально. Принято считать, что тем самым была доказана иррациональность числа π (см. [7]).

Л. Эйлер (L. Euler, 1737) нашел, что

$$\frac{1}{2}(e-1)=1/1+1/6+1/10+1/14+\ldots$$

Действительное число r является иррациональным корнем многочлена 2-й степени с целыми коэффициентами тогда и только тогда, когда неполные частные разложения числа r в Ц. д., начиная с нек-рого, периодически повторяются (теорема Эйлера — Лагранжа, см. [1], [4]). Неизвестны (1984) разложения в правильную Ц. д. алгебраич. чисел 3-й и более высоких степеней. Не доказано и предположение, что неполные частные разложения $\sqrt[3]{2}$ в Ц. д. ограничены.

Правильные Ц. д.— весьма удобный аппарат для приближения действительных чисел рациональными. Справедливы следующие утверждения:

1) Если $\delta_n=\frac{P_n}{Q_n}$ и $\delta_{n+1}=\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ — соседние подходящие дроби разложения числа r в правильную Ц. д., то

$$|r-\delta_n|<|r-\delta_{n+1}|$$

и

$$\left|r-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leqslant\frac{1}{Q_nQ_{n+1}},$$

причем в последнем случае равенство имеет место лишь, если $r=\delta_{n+1}$.

2) Из двух соседних подходящих дробей разложения числа r в правильную Ц. д. хотя бы для одной из них выполняется неравенство:

$$\left|r-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leqslant\frac{1}{2Q_n^2}.$$

3) Если a и b — целые числа, $b>0$, r — действительное число и

$$\left|r-\frac{a}{b}\right|\leqslant\frac{1}{2b^2},$$

то $\frac{a}{b}$ — подходящая дробь разложения числа r в правильную Ц. д.

4) Если $\delta_n=\frac{P_n}{Q_n}$ — подходящая дробь разложения числа r в правильную Ц. д., то для любых целых a и b, из $b>0$, $\delta_n\neq\frac{a}{b}$ и

$$\left|r-\frac{a}{b}\right|\leqslant|r-\delta_n|$$

следует $b>Q_n$ (теорема о наилучшем приближении).

Первые двадцать пять неполных частных разложения числа π в правильную Ц. д. суть числа: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1.

Первые пять подходящих дробей разложения числа π в правильную Ц. д. суть:

$$\delta_0=3,\ \delta_1=\frac{22}{7},\ \delta_2=\frac{333}{116},\ \delta_3=\frac{355}{113},\ \delta_4=\frac{103993}{33102}.$$

Поэтому

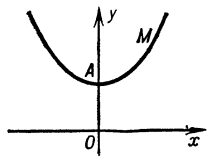
$$\left|\pi-\frac{22}{7}\right|<\frac{1}{742} \text{ и } \left|\pi-\frac{355}{113}\right|<3\cdot10^{-7}.$$

Существуют различные обобщения Ц. д. (см., напр., [9]).

Лит.: [1] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [2] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937; [3] Марков А. А., Избранные труды, М.—Л., 1948; [4] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М.—Л., 1978; [5] Хованский А. Н., Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, М., 1966; [6] История математики, т. 3, М., 1972; [7] О квадратуре круга, пер. с нем., 3 изд., М.—Л., 1936; [8] Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3 Aufl., Bd 1—2, Stuttg., 1954—57; [9] Szekeres G., «Ann. Univ. sci., Sec. math.», 1970, v. 13, p. 113—40.

В. И. Нечаев.

ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ — плоская трансцендентная кривая, форму к-рой принимает под действием силы тяжести однородная гибкая нерастяжимая тяжелая нить с закрепленными концами (см. рис.). Уравнение в декартовых прямоугольных координатах:



$$y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Длина дуги, отсчитываемая от точки $x=0$:

$$l=\frac{1}{2}\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right)=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

Радиус кривизны:

$$r=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}.$$

Площадь, ограничиваемая дугой Ц. л., двумя её ординатами и осью абсцисс:

$$S=a\sqrt{y_2^2-a^2}-a\sqrt{y_1^2-a^2}=a^2\operatorname{sh}\frac{x_2}{a}-a^2\operatorname{sh}\frac{x_1}{a}.$$

Если дугу Ц. л. вращать вокруг оси абсцисс, то образуется *катеноид*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЦЕПНАЯ РЕКУРРЕНТНОСТЬ — наиболее широкое из свойств «повторяемости движений», рассматриваемое в *топологической динамике*. В основном случае топологич. потока $\{S_t\}$ на метрич. компакте W с метрикой ρ точка $w\in W$ обладает свойством Ц. р., если для любых ε, $T>0$ имеется ε-траектория, исходящая из w и снова возвращающаяся в w через время $T_\varepsilon>T$. Под ε-траекторией понимается такая параметризованная кривая (возможно, разрывная) $w(t)$, $0\leqslant t\leqslant T_\varepsilon$, что $\rho(S_\tau w(t),\ w(t+\tau))<\varepsilon$ при $0\leqslant\tau\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant T_\varepsilon-1$ («конечный отрезок ε-траектории близок к отрезку настоящей траектории»). Имеется определение Ц. р. и для более общего случая [1]. Если W является замкнутым многообразием, то Ц. р. совпадает со свойством «слабой неблуждаемости» (см. [3]), более непосредственно отражающим влияние малых (в топологич. смысле) возмущений системы на поведение ее траекторий. Вне множества точек со свойством Ц. р. поведение системы напоминает поведение *градиентной динамической системы* (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Conley Ch., Isolated invariant sets and the Morse index, Providence, 1978; [2] Shub M., «Astérisque», 1978, t. 56; [3] Шарковский А. Н., Добрынский В. А., в кн.: Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, К., 1973, с. 165—74.

Д. В. Аносов.

ЦЕПНОЕ КОЛЬЦО левое — кольцо (обычно предполагаемое ассоциативным и с единицей), левые идеалы к-рого образуют цепь. Другими словами, R — левое Ц. к., если R — левый цепной модуль над собой. Всякое левое Ц. к. локально. Аналогично определяются правые Ц. к. Коммутативные Ц. к. часто называют кольцами нормирования. См. также *Дискретного нормирования кольцо*.

Л. А. Скорняков.

ЦЕПНОЙ МОДУЛЬ — модуль, совокупность всех подмодулей к-рого образует цепь, т. е. *линейно упорядоченное множество*; для этого достаточно, чтобы цепью была совокупность всех циклич. подмодулей.

Л. А. Скорняков.

ЦЕПЬ — 1) то же, что *линейно упорядоченное множество*.

2) Ц.— формальная линейная комбинация симплексов (триангуляции, симплициального множества и, в частности, сингулярных симплексов топологич. пространства) или клеток. В более общем смысле — элемент группы цепей произвольного цепного комплекса (как правило, свободного). Ц. с коэффициентами в группе G — элемент тензорного произведения цепного комплекса на группу G.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий, пер. с англ., М., 1966.

А. Ф. Харшиладзе.

ЦЕРМЕЛО АКСИОМА — *выбора аксиома* для произвольного (не обязательно дизъюнктного) семейства множеств. Эту аксиому Э. Цермело сформулировал в 1904 в виде следующего утверждения, названного им принципом выбора [1]: для любого семейства множества t можно выбрать из каждого его члена по единственному представителю и объединить их всех в одно множество,— и дал первое доказательство своей теоремы о вполне упорядочении. В 1906 Б. Рассел (B. Russell) сформулировал аксиому выбора в мультипликативной форме: если t есть дизъюнктное множество непустых множеств, то прямое произведение Πt не пусто. В 1908 Э. Цермело доказал эквивалентность мультипликативной формы аксиомы выбора ее обычной формулировке.

Лит.: [1] Zermelo E., «Math. Ann.», 1904, Bd 59, S. 514—16; [2] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

В. И. Малыхин.

ЦЕРМЕЛО ТЕОРЕМА: всякое множество можно вполне упорядочить (см. *Вполне упорядоченное множество*). Впервые эту теорему доказал Э. Цермело (E. Zermelo, 1904), исходя из принципа выбора — одной из эквивалентных форм аксиомы выбора (см. *Цермело аксиома*). Позднее выяснилось, что Ц. т. эквивалентна аксиоме выбора (в системе обычных аксиом теории множеств), а значит, и многим другим высказываниям теоретико-множественного характера (см. *Выбора аксиома*).

В. И. Малыхин.

ЦИКЛ — *цепь*, граница к-рой равна нулю.

А. Ф. Харшиладзе.

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа с одним образующим. Все Ц. г. абелевы. Всякая конечная группа простого порядка — Ц. г. Существует по одной, с точностью до изоморфизма, Ц. г. каждого конечного порядка n и одна бесконечная Ц. г., изоморфная аддитивной группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. Конечная Ц. г. G порядка n изоморфна аддитивной группе кольца вычетов $\mathbb{Z}(n)$ по модулю n (а также группе $\mathbb{C}(n)$ (комплексных) корней степени n из 1). В качестве образующего в этой группе может быть взят любой элемент a порядка n. Тогда

$$G=\{1=a^0=a^n,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{n-1}\}.$$

О. А. Иванова.

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — то же, что *моногенная полугруппа*.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ—обобщенные координаты нек-рой физич. системы, не входящие явно в выражение характеристич. функции этой системы. При использовании соответствующих уравнений движения можно сразу получить для каждой Ц. к. соответствующий ей интеграл движения. Напр., если *Лагранжа функция* $L(q_i,\ \dot q_i,\ t)$, где q_i — обобщенные координаты, $\dot q_i$ — обобщенные скорости, t — время, не содержит явно q_j, то q_j — Ц. к. и j-е *Лагранжа уравнение* имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\right)=0$, что сразу дает интеграл движения

$$\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}=\text{const}.$$

Д. Д. Соколов.

ЦИКЛИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ над кольцом R (левый) — фактормодуль кольца R, рассматриваемого как левый R-модуль, по нек-рому левому идеалу. В частности, циклическими являются неприводимые модули. С Ц. м. связана проблема Кёте (см. [4]): над какими кольцами каждый (или каждый конечно порожденный) модуль изоморфен прямой сумме Ц. м.? В классе коммутативных колец таковыми ока-

зываются артиновы кольца главных идеалов и только они (см. [1], [3]). Получено и полное описание коммутативных колец, над которыми в прямую сумму Ц. м. разлагается каждый конечно порожденный модуль [2].

Лит.: [1] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [2] Brandal W., Commutative rings whose finitely generated modules decompose, B.—Hdlb.—N. Y., 1979; [3] Faith C., в кн.: Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf. 1977, N. Y.—Basel, 1978, p. 9—23; [4] Köthe G., «Math. Z.», 1935, Bd 39, S. 31—44. *Л. А. Скорняков.*

ЦИКЛОИДА — плоская трансцендентная кривая; траектория точки окружности, катящейся по прямой линии (рис. 1).

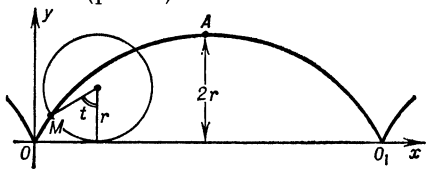


Рис. 1.

Параметрич. уравнения:

$$x = rt - r\sin t,$$
$$y = r - r\cos t,$$

где r — радиус окружности, t — угол поворота окружности. Уравнение в декартовых прямоугольных координатах:

$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Ц. — периодич. кривая: период (базис) $OO_1 = 2\pi r$. Точки O, O_k, $(2k\pi r, 0)$, $k = \pm 1, \ldots$, — точки возврата. Точки A, A_k, $[(2k+1)\pi r, 0]$ — т. н. вершины. Площадь: $S_{OA_1O_1O} = 3\pi r^2$, радиус кривизны: $r_k = 4r\sin(t/2)$.

Если кривая описывается точкой, лежащей вне (внутри) окружности, к-рая катится по прямой, то она наз. удлиненной (рис. 2) (укороченной, рис. 3) циклоидой, или, иногда, трохоидой.

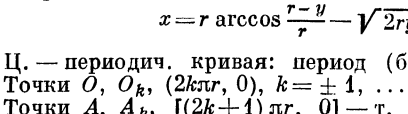


Рис. 2.

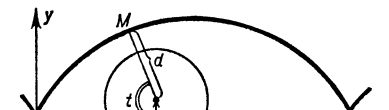


Рис. 3.

Параметрические уравнения:

$$x = rt - d\sin t,$$
$$y = r - d\cos t,$$

где d — расстояние точки M от центра катящейся окружности.

Ц. является таутохронной (или изохронной) кривой, т. е. такой, что время спуска материальной точки по этой кривой под действием силы тяжести до определенной высоты не зависит от исходного положения точки на кривой.

Д. Д. Соколов.

ЦИКЛОИДАЛЬНАЯ КРИВАЯ — плоская кривая, описываемая точкой, к-рая связана с окружностью, катящейся по другой окружности.

Если производящая точка находится на окружности, то Ц. к. наз. *эпициклоидой* или *гипоциклоидой* в зависимости от того, расположена ли катящаяся окружность вне или внутри неподвижной окружности. Если же точка расположена вне или внутри катящейся окружности, то Ц. к. наз. *трохоидой*.

Вид Ц. к. зависит от соотношения между радиусами окружностей. Так, если отношение радиусов — число рациональное, то Ц. к. есть замкнутая алгебраич. кривая, если же это отношение — число иррациональное, то Ц. к. не замкнута. Среди эпициклоид наиболее известна *кардиоида*, среди гипоциклоид — *астроида* и *Штейнера кривая*.

Параметрич. уравнения Ц. к. можно записать в комплексном виде:

$$z = l_1 e^{\omega_1 ti} + l_2 e^{\omega_2 ti}, \quad z = x + iy.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения

$$z = l_0 + l_1 e^{\omega_1 ti} + l_2 e^{\omega_2 ti} + \ldots + l_n e^{\omega_n ti},$$

описывающего циклоиды высших порядков.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЦИЛИНДР — тело, ограниченное *цилиндрической поверхностью* и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её. Части плоскостей, лежащие внутри цилиндрич. поверхности, наз. основаниями Ц. Часть цилиндрич. поверхности, заключенная между основаниями, наз. боковой поверхностью Ц. Если основания Ц. суть круги, то Ц. называется круговым. Если образующие боковой поверхности перпендикулярны плоскостям оснований, то Ц. называется прямым. Осью прямого кругового Ц. называется прямая, проходящая через центры оснований. Объем прямого кругового Ц. равен $\pi R^2 h$, где R — радиус основания, h — высота Ц.; площадь боковой поверхности равна $2\pi rh$.

А. Б. Иванов.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ — сопоставление с каждым непрерывным отображением топологич. пространств: $f\colon X \to Y$ топологич. пространства $I_f \supset Y$, к-рое получается из топологич. суммы (несвязного объединения) $X \times [0, 1] \oplus Y$ отождествлением $x \times \{1\} = f(x)$, $x \in X$. Пространство I_f наз. цилиндром отображения f. Подпространство Y является *деформационным ретрактом* пространства I_f. Вложение $i\colon X = X \times \{0\} \subset I_f$ обладает тем свойством, что композиция $\pi \circ i\colon X \to Y$ совпадает с f (здесь π — естественная ретракция I_f на Y). Отображение $\pi\colon I_f \to Y$ — гомотопич. эквивалентность, и с гомотопич. точки зрения каждое непрерывное отображение можно считать вложением и даже *корасслоением*. Аналогичное утверждение имеет место и для *Серра расслоения*. Для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ определены с точностью до гомотопич. эквивалентности слой и кослой, причем кослой f имеет гомотопич. тип *надстройки* над слоем f.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [2] Мошер Р. Э., Тангора М. К., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970.

А. Ф. Харшиладзе.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ МЕРА — 1) Ц. м. в теории меры в топологических векторных пространствах — конечно аддитивная мера μ, определенная на алгебре $\mathfrak{A}(E)$ цилиндрических множеств в топологическом векторном пространстве E, т. е. множеств вида

$$A = F^{-1}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(B), \qquad (*)$$

где $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ-алгебра подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — линейные функционалы на E, а $F\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — отображение

$$E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longrightarrow \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\} \in \mathbb{R}^n, \quad x \in E.$$

При этом предполагается, что сужение меры μ на любую σ-подалгебру $\mathfrak{B}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(E) \subset \mathfrak{A}(E)$ множеств вида (*), где набор функционалов $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ фиксирован, является σ-аддитивной мерой на $\mathfrak{B}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}$ (другое название — предмера, квазимера).

2) Ц. м. в теории функций многих действительных переменных — специальный случай *Хаусдорфа меры*, определенной на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с помощью формулы

$$\lambda(B) = \lim_{\varepsilon \to 0,\ \{A\},\ \operatorname{diam} A < \varepsilon} \inf \left\{\sum l(A)\right\},$$

где нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям множества $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ цилиндрами A с шаровыми основаниями и осями, параллельными $(n+1)$-й координатной оси в $\mathbb{R}^{n+1}$; при этом $l(A)$ равно n-мерному объему осевого сечения цилиндра A. В случае когда B является графиком непрерывной функции f от n переменных, определенной в области $G\subset\mathbb{R}^n$:

$$B=\{x_1,\ \ldots,\ x_{n+1},\ x_{n+1}\}=f(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ x,$$

$\lambda(B)$ совпадает с т. н. n-мерной вариацией функции f.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [2] Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955. *Р. А. Минлос.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, цилиндр,— поверхность, образуемая движением прямой (образующей), перемещающейся параллельно самой себе и пересекающей данную линию (направляющую).

Направляющей цилиндрич. *поверхности второго порядка* служит линия второго порядка. В зависимости от вида направляющей различают эллиптический цилиндр, канонич. уравнение к-рого

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

мнимый эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

параболический цилиндр:

$$y^2=2px.$$

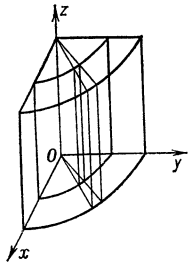
Если направляющая — распадающаяся линия второго порядка, то Ц. п. есть пара плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпадающих, действительных или мнимых — в зависимости от соответствующего свойства направляющей).

Цилиндрической поверхностью n-го порядка наз. алгебраич. поверхность, задаваемая в нек-рой аффинной системе координат x, y, z уравнением, не содержащим одну из координат (например, z):

$$f(x,\ y)=0. \qquad (*)$$

Кривая n-го порядка, определяемая уравнением (*), иногда наз. основанием Ц. п. *А. Б. Иванов.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа ρ, φ и z, связанные с прямоугольными декартовыми координатами x, y и z формулами:



$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z,$$

где $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $-\infty<z<\infty$. Координатные поверхности (см.рис.): круговые цилиндры ($\rho=\text{const}$), полуплоскости ($\varphi=\text{const}$), плоскости ($z=\text{const}$). Система Ц. к.— ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho=L_z=1,\quad L_\varphi=\rho.$$

Элемент площади поверхности:

$$ds=\sqrt{\rho^2(d\rho d\varphi)^2+(d\rho\,dz)^2+\rho^2(d\varphi\,dz)^2}.$$

Элемент объема:

$$dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_\rho f=\frac{\partial f}{\partial\rho},\ \operatorname{grad}_\varphi f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi},\ \operatorname{grad}_z f=\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}a_\rho+\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}_\rho\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z},\ \operatorname{rot}_\varphi\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}_z\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}a_\varphi+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi};$$

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Обобщенными Ц. к. наз. числа u, v и w, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x=au\cos v,\quad y=bu\sin v,\quad z=cw,$$

где $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$, $-\infty<w<\infty$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq b$. Координатные поверхности: эллиптические цилиндры (u=const), полуплоскости (v=const) и плоскости (w=const). *Д. Д. Соколов.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, бесселевы функции,— решения Z_ν дифференциального уравнения Бесселя

$$z^2\frac{d^2Z}{dz^2}+z\frac{dZ}{dz}+(z^2-\nu^2)Z=0, \qquad (1)$$

где ν — произвольное действительное или комплексное число (см. *Бесселя уравнение*).

Цилиндрические функции произвольного порядка. Если ν не является целым числом, то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$Z_\nu=c_1J_\nu(z)+c_2J_{-\nu}(z),$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а J_ν и $J_{-\nu}$—т. н. Ц. ф. 1-го рода, или *Бесселя функции*. Для них справедливо разложение

$$J_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2m}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\nu+1)},\quad(|\arg z|<\pi).$$

Ряд в правой части для $z^{-\nu}J_\nu(z)$ сходится абсолютно и равномерно при всех $|z|\leqslant R$, $|\nu|\leqslant N$, где R и N — произвольные положительные числа. Функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ — аналитические, с особыми точками $z=0$ и $z=\infty$; производные $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ удовлетворяют следующему тождеству:

$$z\left[J_\nu(z)\,J'_{-\nu}(z)-J_{-\nu}(z)\,J'_\nu(z)\right]=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}. \qquad (2)$$

Если же ν — целое, то J_ν и $J_{-\nu}$ линейно зависимы, и их линейная комбинация уже не является общим решением уравнения (1). Поэтому, наряду с Ц. ф. 1-го рода, вводят Ц. ф. 2-го рода $N_\nu(z)$ (или *Неймана функции*, функции Вебера):

$$N_\nu(z)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)\right] \qquad (3)$$

(другое обозначение $Y_\nu(z)$). При помощи этих функций общее решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$Z_\nu=c_1J_\nu(z)+c_2N_\nu(z).$$

Важны для приложений и другие решения уравнения (1) — Ц. ф. 3-го рода (или *Ганкеля функции*). Их обозначают через $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ и, по определению, полагают

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z)=\frac{1}{i\sin\nu\pi}\left[J_{-\nu}(z)-J_\nu(z)\,e^{-i\nu\pi}\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z)=\frac{1}{i\sin\nu\pi}\left[J_\nu(z)\,e^{i\nu\pi}-J_{-\nu}(z)\right].$$

Справедливы тождества

$$\left.\begin{aligned} z\,[J_\nu(z)\,N'_\nu(z)-N_\nu(z)J'_\nu(z)]&=\frac{2}{\pi},\\ z\,[H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)\prime}_\nu(z)-H^{(2)}_\nu(z)\,H^{(1)\prime}_\nu(z)]&=-\frac{4i}{\pi}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

и соотношения

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}\,[H^{(1)}_\nu(z)+H^{(2)}_\nu(z)],$$

$$H_\nu(z)=\frac{1}{2i}\,[H^{(1)}_\nu(z)-H^{(2)}_\nu(z)].$$

Для действительных $z=x$ и ν функции Ганкеля являются комплексно сопряженными решениями уравнения (1). При этом функции $J_\nu(z)$ дают действительную часть, а функции $N_\nu(x)$ — мнимую часть функций Ганкеля.

Ц. ф. 1-го, 2-го и 3-го рода Z_ν удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)&=\frac{2\nu}{z}\,Z_\nu(z),\\ Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)&=2Z'_\nu(z).\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Каждая пара функций

$$J_\nu(z),\ J_{-\nu}(z);\ J_\nu(z),\ Y_\nu(z);\ H^{(1)}_\nu(z),\ H^{(2)}_\nu(z)$$

образует (при нецелом ν) фундаментальную систему решений уравнения (1).

Модифицированными Ц. ф. наз. Ц. ф. мнимого аргумента

$$I_\nu(z)=\begin{cases} e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(e^{i\pi/2}z), & -\pi<\arg z\leqslant\pi/2,\\ e^{3i\nu\pi/2}J_\nu(e^{-3i\pi/2}z), & \pi/2<\arg z\leqslant\pi,\end{cases}$$

и *Макдональда функции*:

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\,i\pi e^{i\pi\nu/2}H^{(1)}_\nu(e^{i\pi/2}z)=$$

$$=-\frac{1}{2}\,i\pi e^{-i\pi\nu/2}H^{(2)}_\nu(e^{-i\pi/2}z)=\frac{1}{2}\,i\pi e^{-i\nu\pi/2}H^{(1)}_\nu(e^{i\pi/2}z).$$

Эти функции являются решениями дифференциального уравнения

$$z^2\frac{d^2Z}{dz^2}+z\frac{dZ}{dz}-(z^2+\nu^2)\,Z=0$$

и удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)&=\frac{2\nu}{z}\,I_\nu(z),\\ K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)&=-\frac{2\nu}{z}\,K_\nu(z),\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$K_{-\nu}(z)=K_\nu(z). \quad (7)$$

Цилиндрические функции целых и полуцелых порядков. Если $\nu=n$ — целое число, то $J_n(z)$ можно определить с помощью формулы Якоби — Ангера

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}t^nJ_n(z),$$

или

$$\exp\{\pm\,iz\sin\theta\}=J_0(z)+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\{J_{2n}(z)\cos 2n\theta\pm iJ_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta\}.$$

Справедливы равенства

$$J_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\,(m+n)!},$$

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z).$$

Функция $J_n(z)$ есть целая трансцендентная функция аргумента z; для алгебраического $z=a$, $a\neq 0$, $J_n(z)$ есть трансцендентное число и $J_m(a)\neq J_n(a)$ при $m\neq n$.

В качестве второго линейно независимого с $J_n(z)$ решения уравнения (1) обычно берут функцию

$$N_n(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{1}{\sin\nu\pi}\,[J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial z}\right]=\frac{2}{\pi}\left(c+\ln\frac{z}{2}\right)J_n(z)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{m+n}\frac{1}{l}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{n-m-1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \quad (8)$$

где $c=0{,}577215\ldots$ — постоянная Эйлера. Если в одной из конечных сумм верхний индекс суммирования меньше нижнего, то соответствующая сумма получает значение 0. Справедливо равенство

$$Y_{-n}(z)=(-1)^nY_n(z).$$

Ц. ф. тогда и только тогда превращаются в элементарные функции, когда индекс ν принимает значение $\nu=n+1/2$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ (сферические функции Бесселя, или Ц. ф. полуцелого порядка). Справедливы формулы ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$):

$$J_{n+1/2}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+1/2}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\frac{\sin z}{z},$$

в частности $J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$;

$$J_{-n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+1/2}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\frac{\cos z}{z},$$

в частности $J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$;

$$H^{(1)}_{-n-1/2}(z)=i\,(-1)^n\,H^{(1)}_{n+1/2}(z),$$

$$H^{(2)}_{-n-1/2}(z)=-\,i\,(-1)^n\,H^{(2)}_{n+1/2}(z),$$

$$N_{n+1/2}(z)=(-1)^{n+1}J_{-n-1/2}(z);$$

$$N_{-n-1/2}(z)=(-1)^nJ_{n+1/2}(z);$$

$$K_{n+1/2}(z)=K_{-n-1/2}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{e^{-z}}{z}.$$

Интегральные представления цилиндрических функций. Для $\nu=n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ имеется интегральное представление Бесселя

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi$$

и

$$N_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi-$$

$$-\frac{2}{\pi}\,e^{-in\pi/2}\int_0^{\infty}e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{cth}\,n\left(t+\frac{1}{2}\,i\pi\right)dt,\ R(z)>0.$$

Для $R\left(0+\frac{1}{2}\right)>0$ и $R(z)>0$ имеется интегральное представление Пуассона

$$J_\nu(z)=\frac{2\left(\frac{1}{2}\,z\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi\,d\varphi,$$

$$I_\nu(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}\,z\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}e^{-zt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt$$

и

$$H_\nu^{(k)}(z)=\frac{(-1)^k\,i\,2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}\,z^\nu\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{\nu-1/2}\varphi}{\sin^{2\nu+1}\varphi}\times$$
$$\times\exp\left[(-1)^{k-1}\,i\left(z-\nu\varphi+\frac12\varphi\right)-2z\operatorname{ctg}\varphi\right]d\varphi,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,$$
$$K_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\left(\frac12 z\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{cth} t}\operatorname{sh}^{2\nu}t\,dt.$$

Кроме этих представлений, существует много других интегральных представлений, в частности в виде контурных интегралов (см. [2], [4], [5]).

Асимптотическое поведение цилиндрических функций. Для $|z|\ll 1$, $\nu=n+\eta>0$, $0<\eta<1$, справедливо

$$J_\nu(z)\sim z^\nu/2^\nu\nu!,$$
$$J_{-\nu}(z)\sim(-1)^n(\nu-1)!\,\frac{\sin(\pi\eta)}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu.$$

Для действительных $z=x$ имеют место

$$N_0(x)\sim\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+C\right),\qquad N_\nu(x)\sim-\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu.$$

Для $z\gg 1$, $|z|\gg\nu$, имеют место следующие оценки

$\left[\left(\nu,\ m=\dfrac{\Gamma\left(\frac12+\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac12+\nu-m\right)}\right.\right.$ — символы Ганкеля$\left.\right]$:

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac12\nu\pi-\frac14\pi\right)\times\right.$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,\ 2m)}{(2z)^{2m}}+O\left(|z|^{-2M}\right)\right]-$$
$$-\sin\left(z-\frac12\nu\pi-\frac14\pi\right)\times$$
$$\left.\times\left[\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(\nu,\ 2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O\left(|z|^{-2M-1}\right)\right]\right\},$$
$$-\pi<\arg z<\pi;$$
$$N_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z-\frac12\nu\pi-\frac14\pi\right)\times\right.$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,\ 2m)}{(2z)^{2m}}+O\left(|z|^{-2M}\right)\right]+$$
$$+\cos\left(z-\frac12\nu\pi-\frac14\pi\right)\times$$
$$\left.\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,\ 2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O\left(|z|^{-2M-1}\right)\right]\right\},$$
$$-\pi<\arg z<\pi;$$
$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,\ m)}{(-2iz)^m}+O\left(|z|^{-M}\right)\right],\qquad(9)$$
$$-\pi<\arg z<2\pi;$$
$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,\ m)}{(2iz)^m}+O\left(|z|^{-M}\right)\right],\qquad(10)$$
$$-2\pi<\arg z<\pi;$$
$$I_\nu(z)=\frac{\cos(\nu\pi)}{\pi\sqrt{2\pi z}}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}\left[e^z-i\,(-1)^m e^{-i\pi\nu-z}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\Gamma\left(m+\frac12-\nu\right)\Gamma\left(m+\frac12+\nu\right)\frac{(2z)^{-m}}{m!}+e^z O\left(|z|^{-M}\right)\right\},$$
$$-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2};$$
$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,\ m)}{(2z)^m}+O\left(|z|^{-M}\right)\right],$$
$$-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}.$$

Для $\nu=n+1/2$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, ряды (9) и (10) обрываются. Функции Ганкеля являются единственными Ц. ф., к-рые стремятся к нулю для комплексных значений переменного z при $|z|\to\infty$ (и в этом их особое значение для приложений):

$$\lim_{|z|\to\infty}H_\nu^{(1)}(z)=0,\quad 0\leqslant\arg z\leqslant\pi,$$
$$\lim_{|z|\to\infty}H_\nu^{(2)}(z)=0,\quad -\pi\leqslant\arg z\leqslant 0.$$

Для больших значений $|z|$ и $|\nu|$ применимы асимптотич. ряды специальных типов (см. [1], [2], [3], [5]).

Нули цилиндрических функций. Нули произвольной Ц. ф. являются простыми нулями за исключением $z=0$. Если a, b, ν — действительные, то между двумя действительными нулями $J_\nu(z)$ лежит один действительный нуль $aJ_\nu(z)+bN_\nu(z)$. При действительном ν $J_\nu(z)$ имеет бесконечно много действительных нулей; для $\nu>-1$ все нули $J_\nu(z)$ действительны; если $0<j_{\nu,1}<j_{\nu,2}<\ldots$ — положительные нули $J_\nu(z)$, то

$$0<j_{\nu,1}<j_{\nu+1,1}<j_{\nu,2}<j_{\nu+1,2}<j_{\nu,3}<\ldots.$$

Для $\nu>0$ справедливо $j_{\nu,1}>0$; также для наименьшего положительного нуля функции $J'_\nu(z)$ имеет место $j'_{\nu,1}>0$. Пары функций $J_n(z)$, $J_{n+m}(z)$; $J_{n+1/2}(z)$, $J_{n+m+1/2}(z)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, $m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, не имеют, кроме $z=0$, общих нулей. Если

$$\nu=-(2n+1)-\eta,\quad 0\leqslant\eta<1,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то $J_\nu(z)$ имеет ровно $4n+2$ комплексных нулей, из к-рых два — чисто мнимые; если $\nu=-2n-\eta$, $0<\eta<1$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, то $J_\nu(z)$ имеет ровно $4n$ комплексных нулей с отличной от нуля действительной частью.

Теоремы сложения и разложения в ряды по цилиндрическим функциям. Справедливы следующие теоремы сложения:

$$Z_\nu(\lambda R)\begin{matrix}\cos\nu\psi\\ \sin\nu\psi\end{matrix}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}Z_{\nu+m}(\lambda r_2)\,J_m(\lambda r_1)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix},$$
$$\frac{Z_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)\,\frac{Z_{\nu+m}(\lambda r_2)\,J_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}\,C_m^\nu(\cos\theta),$$
$$I_\nu(\lambda R)\begin{matrix}\cos\nu\psi\\ \sin\nu\psi\end{matrix}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m I_{\nu+m}(\lambda r_2)I_m(\lambda r_1)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix},$$
$$\frac{I_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\nu+m)\times$$
$$\times\frac{I_{\nu+m}(\lambda r_2)\,I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}\,C_m^\nu(\cos\theta),$$
$$K_\nu(\lambda R)\begin{matrix}\cos\nu\psi\\ \sin\nu\psi\end{matrix}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}K_{\nu+m}(\lambda r_2)\,I_m(\lambda r_1)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix},$$
$$\frac{K_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)\times$$
$$\times\frac{K_{\nu+m}(\lambda r_2)\,I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}\,C_m^\nu(\cos\theta),$$

где

$$R=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta},\ \sin\psi=\frac{r_1}{R}\sin\theta,\quad r_2>r_1;$$
$$C_m^\nu(x)=\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^k\,2^{m-2k}\,\frac{\Gamma(\nu+m-k)}{\Gamma(\nu)\,k!\,(m-2k)!}\,x^{m-2k},$$

$C_0^\nu(x)=0$ — *ультрасферические многочлены*. При разложении Ц. ф. используются *Ломмеля многочлены*, *Неймана ряды*, *Фурье—Бесселя ряды*, *Дирихле ряды*.

С Ц. ф. связаны *Ангера функция*, *Струве функции*, *Ломмеля функции*, *Кельвина функции*, *Эйри функции*.

Ц. ф. можно определить как предельные значения сферич. функций следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{z}{n}\right)=J_0(z),$$

$$\lim_{n\to\infty} n^m P_n^{-m}\left(\cos\frac{x}{n}\right)=J_m(x),\quad 0<x<\pi;$$

$$\lim_{n\to\infty} n^m P_n^{-m}\left(\operatorname{ch}\frac{z}{n}\right)=I_m(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-m}\sin(n\pi)}{\sin(m+n)\pi}\,Q_n^m\left(\operatorname{ch}\frac{z}{n}\right)=K_m(z).$$

При этом асимптотич. представления сферич. функций связаны с Ц. ф., и наоборот, как, напр., в формуле Хильба:

$$P_n(\cos\theta)=\sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\,J_0\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta\right)+O\left(n^{-3/2}\right),$$

и в разложениях Макдональда, Ватсона, Трикоми и др. (см. [1], [2], [4]).

Вычисление значений Ц. ф. на ЭВМ. Для вычислений значений функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $N_0(x)$, $N_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ удобны аппроксимации многочленами и рациональными функциями (см. [5]). О разложениях по многочленам Чебышева см. [6]. Для вычисления функций больших целых порядков, особенно на ЭВМ, применяются рекуррентные соотношения (5)—(7) (см. [5]).

Сведения об имеющихся таблицах Ц. ф. приводятся в [7], [8], [9].

Лит.: [1] Ватсон Дж. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1974; [3] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963; [4] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М., 1971; [5] Abramowitz M., Stegun I. A. [ed.], Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables, Wash., 1964, ch. 9—11; [6] Clenshaw C. W., Chebyshev series for mathematical functions, L., 1962 (Mathematical tables, v. 5); [7] Лебедев А. В., Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956; [8] Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам. Дополнение № 1, М., 1959; [9] Fletcher A., Miller J. C. P., Rosenhead L., Comrie L. J., An index of mathematical tables, 2 ed., v. 1—2, Oxf., 1962.

Таблицы: Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них, М., 1958; Кармазина Л. Н., Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них, М., 1958; Таблицы функций Бесселя дробного индекса, пер. с англ., т. 1—2, М., 1959; Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса, пер. с англ., М., 1960; Таблицы сферических функций Бесселя, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; Таблицы функций Бесселя $J_0(z)$ и $J_1(z)$ в комплексной области, пер. с англ., М., 1963; Таблицы функций Бесселя $Y_0(z)$ и $Y_1(z)$ в комплексной области, пер. с англ., М., 1963; Таблицы нулей функций Бесселя, пер. с англ., М., 1967. *Л. Н. Кармазина, А. П. Прудников.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО — множество S в векторном пространстве L над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, задаваемое уравнением

$$S\equiv S_{\{A;\,F_1,\,\ldots,\,F_n\}}=\{x\in L:\ (F_1(x),\ \ldots,\ F_n(x))\in A\},$$

где $F\in L^*$, $i=1,\ 2,\ \ldots$ — линейные функции, определенные на L, а $A\subset\mathbb{R}^n$ — борелевское множество в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, $n=1,\ 2,\ \ldots$.

Совокупность всех Ц. м. в L образует алгебру множеств, наз. цилиндрической алгеброй. Наименьшая σ-алгебра подмножеств L, содержащая Ц. м., наз. цилиндрической σ-алгеброй.

В случае когда пространство L является топологическим векторным пространством, рассматриваются лишь такие Ц. м. $S_{\{A;\,F_1,\,\ldots,\,F_n\}}$, к-рые определяются наборами $\{F_1,\ \ldots,\ F_n\}$ непрерывных линейных функций. При этом под цилиндрич. алгеброй и σ-алгеброй подразумеваются соответствующие совокупности подмножеств L, порожденные именно такими Ц. м. В важном частном случае, когда пространство L является топологически сопряженным к нек-рому топологическому векторному пространству M: $L=M'$, Ц. м. в L определяются с помощью $*$-слабо непрерывных линейных функций на L, т. е. функций вида

$$F_\varphi(x)=x(\varphi),\qquad x\in L,$$

где φ — произвольный элемент M. *Р. А. Минлос.*

ЦИЛИНДРОИД — *развертывающаяся поверхность*, множество точек пересечения образующих к-рой с каждой из двух параллельных плоскостей π_1 и π_2 является простой замкнутой линией. Ц. наз. замкнутым, если он ограничен двумя плоскими областями, получающимися пересечением с ним плоскостей π_1 и π_2. *И. Х. Сабитов.*

ЦИРКУЛЯЦИЯ векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ вдоль замкнутой кривой L — интеграл вида

$$\oint_L \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r};$$

в координатной форме Ц. равна

$$\int_L (a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz).$$

Работа, совершаемая силами силового поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ при перемещении пробного тела (единичной массы, заряда и т. д.) вдоль кривой L, равна Ц. поля вдоль L. См. *Стокса теорема*. *БСЭ-3.*

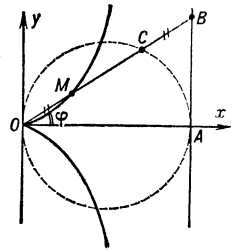
ЦИССОИДА — плоская алгебраич. кривая 3-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах:

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x};$$

параметрич. уравнения:

$$x=\frac{a}{t^2+1},\quad y=\frac{a}{t\,(t^2+1)}.$$

Ц. симметрична относительно оси абсцисс (рис.). Начало координат — точка возврата. Асимптота: $x=2a$. Площадь между кривой и асимптотой: $S=3\pi a^2$.



Ц. часто наз. циссоидой Диоклеса — по имени др.-греч. математика Диоклеса (3 в. до н. э.), к-рый рассматривал ее в связи с решением задачи об *удвоении куба*.

Ц. — множество точек M, для к-рых $OM=CB$, где B и C — точки пересечения прямой OM с окружностью и касательной AB к окружности в точке A, диаметрально противоположной точке O. Если в этом построении заменить окружность и прямую кривыми $\rho_1=f_1(\varphi)$ и $\rho_2=f_2(\varphi)$, то получающаяся кривая $\rho=\rho_1-\rho_2$ наз. циссоидальной кривой, или циссоидой кривых (заданных).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Смогоржевский А. С., Столова Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961. *Д. Д. Соколов.*

ЦИФРЫ — условные знаки для обозначения *чисел*. Наиболее ранней и вместе с тем примитивной является словесная запись чисел, в отдельных случаях сохранявшаяся довольно долго (напр., нек-рые математики Ср. Азии и Бл. Востока систематически употребляли словесную запись чисел в 10 в. и даже позже). С развитием общественно-хоз. жизни народов возникла потребность в создании более совершенных, чем словесная запись, обозначений чисел и в разработке принципов записи чисел — систем *счисления*.

Древнейшие известные нам Ц.— цифры вавилонян и египтян. Вавилонские Ц. (2-е тыс. до н. э.— нач. н. э.) представляют собой клинописные знаки для чисел 1, 10, 100 (или только для 1 и 10), все остальные натуральные числа записываются посредством их соединения. В египетской иероглифич. нумерации (возникновение ее относится к 3000—2500 до н. э.) существовали отдельные знаки для обозначения единиц десятичных разрядов (вплоть до 10^7).

Нумерациями типа египетской иероглифической являются финикийская, сирийская, греческая аттическая. Возникновение аттической нумерации относится к 6 в. до н. э.; нумерация употреблялась в Аттике до 1 в. н. э., хотя в других греч. землях она была задолго до этого вытеснена более удобной алфавитной ионийской нумерацией, в к-рой единицы, десятки и сотни обозначались буквами греч. алфавита, все остальные числа до 999 — их соединением (первые записи чисел в этой нумерации относятся к 5 в. до н. э.). Алфавитное обозначение чисел существовало также и у др. народов, напр. у арабов, сирийцев, евреев, грузин, армян. Старинная русская нумерация (возникшая ок. 10 в. и встречавшаяся до 16 в.) также была алфавитной (см. *Славянские цифры*). Наиболее долговечной из древнейших цифровых систем оказалась римская нумерация, возникшая у этрусков ок. 500 до н. э.; она употребляется иногда и в наст. время (см. *Римские цифры*).

Прообразы совр. Ц. (включая нуль) появились в Индии, вероятно, не позднее 5 в. н. э. Удобство записи чисел при помощи этих Ц. в десятичной позиционной системе счисления обусловило их распространение из Индии в др. страны. В Европу индийские Ц. были занесены в 10—13 вв. арабами (отсюда и сохранившееся поныне их др. название — «арабские» Ц.) и получили всеобщее распространение со 2-й пол. 15 в. Начертание индийских Ц. претерпело со временем ряд крупных изменений; ранняя их история плохо изучена.

Лит. см. при ст. *Счисление.* *В. И. Битюцков.*

ЦОКОЛЬ модуля — сумма всех его неприводимых подмодулей. При их отсутствии Ц. считается нулевым. В соответствии с данным определением в кольце можно рассматривать его левый и правый Ц. Каждый из них оказывается двусторонним идеалом, инвариантным относительно всех эндоморфизмов кольца. Ц. представляется в виде прямой суммы неприводимых модулей. *Вполне приводимые модули* могут быть охарактеризованы как модули, совпадающие со своим Ц. *Л. А. Скорняков.*

ЦОРНА ЛЕММА, принцип максимальности: если в *частично упорядоченном множестве* X всякое линейно упорядоченное подмножество A ограничено сверху, то X содержит максимальный элемент. Элемент x_0 наз. верхней границей подмножества $A \subset X$, если $x \leqslant x_0$ для всех $x \in A$. Если верхняя граница для A существует, то множество A наз. ограниченным сверху. Элемент $x_0 \in X$ наз. максимальным в X, если не существует элемента $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющего условию $x_0 \leqslant x$.

Ц. л. была сформулирована и доказана М. Цорном [1]. Она эквивалентна *выбора аксиоме*.

Лит.: [1] Zorn M., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1935, v. 41, p. 667—70; [2] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *Б. А. Ефимов.*

Ч

ЧАПЛЫГИНА МЕТОД — метод приближенного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, состоящий в одновременном построении двух семейств последовательных приближений к ее решению. Напр., в случае задачи Коши для одного уравнения 1-го порядка

$$y'=f(x, y), \quad (x, y)\in R, \quad y(x_0)=y_0, \qquad R=\{(x, y)\,|\,|x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant b\} \tag{1}$$

одно из указанных семейств приближает решение с недостатком, а другое — с избытком.

В основе метода лежит *Чаплыгина теорема* о дифференциальных неравенствах. Пусть $y(x)$ — решение задачи (1) и пусть кривые $y=u(x)$ и $y=v(x)$ целиком лежат в прямоугольнике R, проходят через точку (x_0, y_0) и при $x>x_0$ удовлетворяют неравенствам

$$u'(x)-f(x, u(x))<0, \quad v'(x)-f(x, v(x))>0.$$

Тогда при $x>x_0$ справедливы неравенства

$$u(x)<y(x)<v(x). \tag{2}$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы Чаплыгина, дают двустороннюю оценку для решения задачи (1).

Если найдена пара начальных приближений $u_0(x)$, $v_0(x)$, удовлетворяющих условиям (2), то Ч. м. позволяет построить пару $u_1(x)$, $v_1(x)$ более точных приближений, удовлетворяющих условиям

$$u_0(x)<u_1(x)<y(x)<v_1(x)<v_0(x). \tag{3}$$

В случае когда $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ сохраняет знак в области R, пара $u_1(x)$, $v_1(x)$ может быть получена путем решения двух линейных дифференциальных уравнений с начальным условием $y(x_0)=y_0$. Если, напр., $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ в R, то любая кривая, по к-рой плоскость $x=\text{const}$ пересекает поверхность $z=f(x, y)$, выпукла вниз, и каждая ее дуга лежит ниже хорды и выше касательной, проведенных из нек-рой ее точки. Если при нек-ром $x=\text{const}$ уравнение касательной к кривой $z=f(x, y)$ в точке $y=u_0(x)$:

$$z=k(x)\,y+p(x),$$

где

$$k(x)=f'_y(x, u_0(x)), \quad p(x)=f(x, u_0(x))-u_0(x)\,k(x),$$

а уравнение хорды, проходящей через точки $y=u_0(x)$ и $y=v_0(x)$ той же кривой

$$z=l(x)\,y+q(x),$$

где

$$l(x)=\frac{f(x, v_0(x))-f(x, u_0(x))}{v_0(x)-u_0(x)},$$

$$q(x)=f(x, u_0(x))-u_0(x)\,l(x),$$

то для этого значения x имеет место неравенство

$$k(x)\,y+p(x)<f(x, y)<l(x)\,y+q(x). \tag{4}$$

Условия (4) выполняются равномерно по x в области R; решение $y=u_1(x)$ задачи Коши $y'=k(x)y+p(x)$, $y(x_0)=y_0$ и решение $y=v_1(x)$ задачи Коши $y'=l(x)y+p(x)$, $y(x_0)=y_0$ удовлетворяют условию (2). Можно показать, что они удовлетворяют и условию (3). Зная пару $u_1(x)$, $v_1(x)$, можно тем же способом построить следующую пару $u_2(x)$, $v_2(x)$ и т. д. Процесс очень быстро сходится:

$$v_n-u_n\leqslant c/2^{2^n}, \tag{5}$$

где константа c не зависит ни от x, ни от n.

Второй способ построения уточненных приближений $u_n(x)$, $v_n(x)$ по известным $u_{n-1}(x)$, $v_{n-1}(x)$ не требует сохранения знака $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ в R. В этом способе

$$u_n(x)=u_{n-1}(x)+\int_{x_0}^{x} e^{-k(x-t)}\left[f(t, u_{n-1}(t))-u'_{n-1}(t)\right]dt,$$

$$v_n(x)=v_{n-1}(x)+\int_{x_0}^{x} e^{-k(x-t)}\left[v'_{n-1}(t)-f(t, v_{n-1}(t))\right]dt,$$

где k — *Липшица константа* функции $f(x, y)$ в R. И в этом случае пары функций $u_n(x)$, $v_n(x)$ и $u_{n-1}(x)$, $v_{n-1}(x)$ удовлетворяют условию (3) равномерно по x, но скорость сходимости меньше, чем в формуле (5).

Основная трудность в применении Ч. м. состоит в построении начальных приближений $u_0(x)$, $v_0(x)$.

Метод предложен С. А. Чаплыгиным в 1919.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950; [2] Лузин Н. Н., О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина, «Тр. ЦАГИ», 1932, в. 141, с. 1—32; [3] Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965, с. 22—26.

С. С. Гайсарян.

ЧАПЛЫГИНА ТЕОРЕМА о дифференциальном неравенстве: если в *дифференциальном неравенстве*

$$L[y]\equiv y^{(m)}+a_1(x)\,y^{(m-1)}+\ldots+a_m(x)\,y>f(x) \quad (*)$$

все a_i и f суммируемы на $[x_0, x_1]$, то существует такое $x^*\in(x_0, x_1]$, не зависящее от f, что $y(x)>z(x)$, $x_0<x\leqslant x^*$, где

$$L[z]=f(x), \quad z(x_0)=y(x_0), \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0).$$

При этом

$$x^*=\max\{x\in[x_0, x_1]\,|\,\forall\xi\in[x_0, x], \quad \forall s\in[\xi, x]\Rightarrow G(s; \xi)\geqslant 0\},$$

где $G(x; \xi)$ — соответствующая функция Коши, т. е. решение уравнения $L[G]=0$, $\xi\leqslant x\leqslant x_1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$G|_{x=\xi}=\ldots=G_x^{(m-2)}|_{x=\xi}=0, \quad G_x^{(m-1)}|_{x=\xi}=1.$$

Таким образом, при $m=1$, а также для неравенства $y''-y>f(x)$ получается $x^*=x_1$, тогда как для неравенства $y''+y>f(x)$ получают

$$x^*=\min\{x_1, x_0+\pi\}.$$

Аналогичные утверждения справедливы: для нестрогих неравенств; для сравнения $y^{(i)}(x)$ с $z^{(i)}(x)$, $i=1, \ldots, m-1$; для начальных условий вида

$$y(x_0)\geqslant z(x_0), \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)\geqslant z^{(n-1)}(x_0);$$

для решения неравенства (*) при $x<x_0$.

Теорема была получена С. А. Чаплыгиным в 1919.

Лит.: [1] Мамедов Я. Д., Аширов С., Атдаев С., Теоремы о неравенствах, Аш., 1980.

См. также лит. при статье *Дифференциальное неравенство.*

А. Д. Мышкис.

ЧАСТИЦ МЕТОД — метод численного эксперимента для моделирования движения сплошных или дискретных сред. Многие Ч. м. используют эйлерово-лагранжево или лагранжево описание движущейся среды. Для решения системы уравнений сжимаемой среды наиболее распространен *крупных частиц метод* (см. [1]), применяемый при исследовании одно- и многофазных гомо- и гетерогенных потоков газа и плазмы. К Ч. м. относится метод свободных точек (см. [1], [2]), в к-ром отсутствует фиксированный шаблон. Одним из первых несовершенных Ч. м. является метод частиц в ячейках (метод PIC, см. [3]). В нем используются две расчетные сетки: эйлерова и лагранжева. Из-за дискретности представления сплошной среды этому методу присущи значительные флуктуации решений. Для уменьшения флуктуаций используется методика частиц-слоев в пространственно-одномерном случае. Методу PIC близок метод FLIC (см. [4]) обладающий плохими диссипативными свойствами При расчете несжимаемых сред используются метод MAC (см. [5]) и метод SMAC (см. [6]), где частицы играют роль маркеров для выделения поверхностей раздела сред. Ч. м. получили распространение при описании турбулентности, в динамике разреженных газов, при решении задач электродинамики и др. (см. [1], [7]).

Лит.: [1] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Метод крупных частиц в газовой динамике, М., 1982; [2] Дьяченко В. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 4, с. 680—88; [3] Evans M. W., Harlow F. H., The particle-in-cell method for hidrodynamic calculations, Los Alamos, 1957; [4] Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. J., «J. Comp. Phys.», 1966, v. 1, № 1, p. 87—118; [5] The MAC-method, Los Alamos, 1966; [6] Amsden A. A., Harlow F. H., The SMAC-method: a numerical technique for calculating incompessible fluid flows, Los Alamos, 1970; [7] Березин Ю. А., Вшивков В. А., Метод частиц в динамике разреженной плазмы, Новосиб., 1980.

Ю. М. Давыдов.

ЧАСТИЧНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — инцидентностная структура $S=(P, L, I)$, в к-рой отношение инцидентности между точками и прямыми симметрично и удовлетворяет следующим аксиомам:

1) каждая точка инцидентна r прямым, $r\geqslant 2$, и две различные точки инцидентны не более чем одной прямой;

2) каждая прямая инцидентна k точкам, $k\geqslant 2$;

3) через каждую точку, не инцидентную прямой l, проходит ровно $t\geqslant 1$ прямых, пересекающих l.

Если Ч. г. состоит из v точек и b прямых, то

$$v=k[(k-1)(r-1)+t]/t \quad \text{и} \quad b=r[(k-1)(r-1)+t]/t,$$

а необходимыми условиями существования такой Ч. г. являются делимость $(k-1)(r-1)kr$ на $t(k+r-t-1)$, $k(k-1)(r-1)$ на t и $r(k-1)(r-1)$ на t (см. [2]).

Ч. г. можно разделить на четыре класса:

а) Ч. г. с $t=k$ или (двойственно) $t=r$. Геометрии этого типа — то же самое, что 2—(v, k, 1)-схема или 2—(v, r, 1)-схема (см. *Блок-схема*);

б) Ч. г. с $t=k-1$ или (двойственно) $t=r-1$. В этом случае Ч. г.— то же самое, что и сеть порядка k и дефекта 1 или $k-r+1$;

в) Ч. г. с $t=1$, наз. обобщенными четырехугольниками;

г) Ч. г. с $1<t<\min(k-1, r-1)$. Все известные Ч. г. этого типа строятся с помощью максимальных дуг в проективных плоскостях (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Bose R. C., «Pacific J. Math.», 1963, v. 13, № 2, p. 389—419; [2] Тас Дж. А., «Математика», 1980, т. 19, с. 82—100; [3] Thas J. A., «Geometriae dedicata», 1974, v. 3, № 1, p. 61—64.

В. В. Афанасьев.

ЧАСТИЧНАЯ ПРОБЛЕМА собственных значений — задача вычисления одного или нескольких собственных значений квадратной матрицы, обычно действительной или комплексной, а также соответствующих им собственных векторов.

Чаще всего в практике встречаются следующие варианты Ч. п. собственных значений: 1) найти группу наименьших (наибольших) по абсолютной величине собственных значений; 2) найти группу собственных значений, ближайших к заданному числу a; 3) найти точки спектра, принадлежащие заданному интервалу (α, β) (для симметричной или эрмитовой матрицы).

Большинство методов решения Ч. п. собственных значений для матриц общего вида имеет в основе идею степенной итерации или ее разновидность— обратную итерацию (см. *Итерационные методы* решения проблемы собственных значений матрицы): если матрица A обладает доминирующим по абсолютной величине собственным значением $\lambda_{\max}$ и $x_{\max}$ — соответствующий собственный вектор, то для почти любого вектора v последовательность v, Av, A^2v, ..., A^kv, ... сходится по направлению к вектору $x_{\max}$. Если требуется наименьшее по абсолютной величине собственное значение (задача 2)), то степенная итерация проводится с матрицей A^{-1} (метод обратной итерации); при вычислении собственного значения, ближайшего к a (задача 3)),— с матрицей $(A-a)^{-1}$ (метод обратной итерации со сдвигом).

Наиболее важный частный случай Ч. п. собственных значений — вычисление собственных значений и собственных векторов действительной симметричной либо комплексной эрмитовой матрицы A. Здесь имеется ряд эффективных численных методов решения Ч. п. собственных значений, основанных на весьма различных идеях (см. [1]). Среди них: методы, использующие экстремальные свойства функционала Рэлея (наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A реализуют соответственно максимум и минимум отношения Рэлея $\varphi(A, z)=(Az, z)/(z, z)$, $z\neq 0$; достигаются эти экстремумы на соответствующих собственных векторах); методы, использующие закон инерции Сильвестра (метод последовательности Штурма и, более общо, методы деления спектра); наконец, методы, базирующиеся на аппроксимационных свойствах крыловских подпространств, т. е. линейных оболочек систем вида $v, Av, \ldots, A^{k-1}v$ (метод Ланцоша и его варианты). Выбор того или иного метода определяется такими соображениями, как порядок задачи, степень разреженности матрицы, наличие ленточной структуры, доступная информация о спектре и т. д.

Методы решения Ч. п. собственных значений как в общем, так и в эрмитовом случае можно разделить на групповые и последовательные. Групповые методы характеризуются тем, что в них нужные собственные значения (и соответствующие собственные векторы) вычисляются в известной мере параллельно. Сюда относятся многочисленные методы одновременных итераций, метод Ланцоша, методы деления спектра.

В последовательных методах собственные значения определяются поочередно. При этом, начиная со второго собственного значения, возникает необходимость воспрепятствовать тому, чтобы итерации сходились к ранее найденным корням. С этой необходимостью связаны различные приемы исчерпывания (или дефляции) [2]. В одних случаях исчерпывание приводит к построению матрицы $\tilde{A}$, у к-рой вычисленным собственным значениям A соответствуют нулевые корни; в остальном спектр обеих матриц совпадает, совпадают и их собственные векторы. В других случаях результатом исчерпывания является расщепление матрицы, вследствие чего последовательные собственные значения можно определить, пользуясь матрицами убывающих порядков. В третьих — итерации метода с неизменной матрицей A сопровождаются ортогонализацией по отноше-

нию к прежде вычисленным собственным векторам. Приемы исчерпывания могут использоваться и групповыми методами.

Лит.: [1] Парлетт Б., Симметричная проблема собственных значений. Численные методы, пер. с англ., М., 1983; [2] Уилкинсон Дж., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970. *Х. Д. Икрамов.*

ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ, рекурсивная функция,— одно из эквивалентных уточнений понятия *вычислимой функции.*

В. Е. Плиско.

ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение класса всех одноместных функций в себя, определяемое следующим образом. Пусть Φ_z— нек-рый *перечисления оператор*. С этим оператором естественным образом связан другой оператор Ψ, к-рый действует на одноместных функциях. А именно, всякая функция φ имеет график — множество всех пар $\langle x, y\rangle$ таких, что $\varphi(x)=y$. При фиксированном способе кодирования пар натуральными числами этот график может рассматриваться как множество $\tau(\varphi)$ натуральных чисел. Если теперь $\Phi_z(\tau(\varphi))$ также является графиком нек-рой функции ψ, то полагают $\Psi(\varphi)=\psi$. В противном случае считают, что значение $\Psi(\varphi)$ не определено. Таким образом, каждый оператор перечисления Φ_z определяет нек-рый Ч. р. о. Ψ.

Если Ч. р. о. определен на всех функциях, он наз. рекурсивным оператором. Ч. р. о., к-рый определен на всех всюду определенных функциях и переводит всюду определенные функции во всюду определенные, наз. общерекурсивным оператором. Не всякий Ч. р. о. может быть продолжен до рекурсивного оператора. Всякий общерекурсивный оператор является рекурсивным оператором. Обратное включение не имеет места.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

В. Е. Плиско.

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — группа G, на к-рой задано отношение частичного порядка $\leqslant$ такое, что для любых a, b, x, y из G неравенство $a\leqslant b$ влечет за собой $xay\leqslant xby$.

Множество $P=\{x\in G \mid x\geqslant 1\}$ Ч. у. г., называемое положительным конусом, или целой частью, группы G, обладает свойствами: 1) $PP\subseteq P$; 2) $P\cap P^{-1}=\{1\}$; 3) $x^{-1}Px\subseteq P$ для любых $x\in G$. Всякое подмножество P группы G, удовлетворяющее условиям 1)—3), задает на G частичный порядок ($x\leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x^{-1}y\in P$), для к-рого P служит положительным конусом.

Примеры Ч. у. г.: аддитивная группа действительных чисел с обычным порядком; группа $F(X, \mathbb{R})$ функций, заданных на произвольном множестве X со значениями в $\mathbb{R}$, с операцией

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

и отношением порядка $f\leqslant g$, если $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in X$; группа $A(M)$ всех автоморфизмов линейно упорядоченного множества M на себя, относительно суперпозиции отображений и с отношением порядка: $\varphi\leqslant\psi$, если $\varphi(m)\leqslant\psi(m)$ для любого $m\in M$, $\varphi, \psi\in A(M)$.

Основными понятиями теории Ч. у. г. являются понятия порядкового гомоморфизма (см. *Упорядоченная группа*), *выпуклой подгруппы*, декартова и лексикографич. произведений.

Важнейшие классы Ч. у. г.: *линейно упорядоченные группы*, *структурно упорядоченные группы*.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965. *В. М. Копытов.*

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — непустое множество, на к-ром зафиксирован нек-рый *порядок*.

Ч. у. м. является примером *модели*.

Примеры Ч. у. м.: 1) множество натуральных чисел с обычным порядком; 2) множество натуральных чисел, где $a\leqslant b$ означает, что a делит b; 3) множество всех подмножеств нек-рого множества, где $a\leqslant b$ означает, что $a\subseteq b$; 4) множество всех действительных функций на отрезке $[0, 1]$, где $f\leqslant g$ означает, что $f(t)\leqslant g(t)$ для всех $t\in[0, 1]$; 5) множество конечных возрастающих последовательностей натуральных чисел, где

$$(a_1, \ldots, a_k)\leqslant(b_1, \ldots, b_l)$$

означает, что $k\leqslant l$ и $a_i=b_i$ при $1\leqslant i\leqslant k$ (см. *Дерево*); 6) произвольное непустое множество, где $a\leqslant b$ означает $a=b$ (такое Ч. у. м. наз. тривиальным, или дискретным).

Каждое Ч. у. м. P можно рассматривать как *малую категорию*, объектами к-рой служат элементы множества P, а множество морфизмов $H(a, b)$ одноэлементно, если $a\leqslant b$, и пусто в остальных случаях. В свою очередь, каждая малая категория, где каждое из множеств $H(a, b)$ содержит не более одного элемента, определяет Ч. у. м.

Если на Ч. у. м. P определить отношение $\trianglelefteq$, полагая $a\trianglelefteq b$, если $b\leqslant a$, то это отношение оказывается порядком. Возникающее таким образом Ч. у. м. наз. дуальным, или двойственным, к P.

Отображение φ Ч. у. м. P в Ч. у. м. P' наз. (анти)изотонным, или (анти)гомоморфизмом, если $a\leqslant b$ в P влечет

$$\varphi(a)\leqslant\varphi(b) \quad (\varphi(b)\leqslant\varphi(a))$$

в P'. Взаимно однозначный (анти)гомоморфизм наз. (анти)изоморфизмом. Тождественное отображение Ч. у. м. P на себя является антиизоморфизмом этого Ч. у. м. на дуальное ему. Изоморфизм является частным случаем *резидуального отображения*. Последовательное выполнение двух антигомоморфизмов дает гомоморфизм. Совокупность всех Ч. у. м. образует *категорию*, если морфизмами считать изотонные отображения. Всякое непустое подмножество Ч. у. м. является Ч. у. м. относительно индуцированного на нем порядка.

Если A — непустое подмножество Ч. у. м. P, то нижний конус A^{∇} (верхний конус $A^{\triangle}$) определяется как совокупность всех таких элементов $x\in P$, что $x\leqslant a$ ($a\leqslant x$) для всех $a\in A$. Если a, $b\in P$ и $a\leqslant b$, то подмножество

$$[a, b]=a^{\triangle}\cap b^{\nabla}=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

наз. интервалом (хотя с точки зрения словоупотребления, принятого в математич. анализе, здесь следовало бы говорить «отрезок»). Конусы $a^{\triangle}$ и a^{∇}, где $a\in P$, часто также наз. интервалами. Элемент u из подмножества A наз. наибольшим (наименьшим), если $a\leqslant u$ ($u\leqslant a$) для всех $a\in A$. В этом случае u является единственным элементом пересечения $A\cap A^{\triangle}$ ($A\cap A^{\nabla}$). Наибольший (наименьший) элемент Ч. у. м. P (если он существует) наз. единицей (нулем) этого Ч. у. м. Элемент m из подмножества A наз. максимальным (минимальным), если для каждого x из A, для к-рого $m\leqslant x$ ($x\leqslant m$) будет $m=x$. Другими словами,

$$m^{\triangle}\cap A=m\,(m^{\nabla}\cap A=m).$$

Наибольший (наименьший) элемент является максимальным (минимальным). Обратное верно не всегда. Наименьший (наибольший) элемент верхнего (нижнего) конуса $A^{\triangle}$ (A^{∇}) наз. точной верхней (нижней) гранью подмножества A и обозначается как $\sup A$ ($\inf A$). Расшифровывая это определение, можно сказать, что $u=\sup A$, если $u\geqslant a$ для всех $a\in A$ и $u'\geqslant u$, если $u'\geqslant a$ для всех $a\in A$. Аналогично расшиф-

ровывается определение $\inf A$. Если P — цепь, то последнее условие можно заменить таким: «... и $u' \geqslant a_0$ для нек-рого $a_0 \in A$, если $u' < u$», как это принято в математич. анализе. Элементы из $A^{\triangle}$ ($A^{\triangledown}$) часто наз. верхними (нижними) гранями подмножества A. Ясно, что $1 = \sup P$ и $0 = \inf P$. Часто полагают, что $\sup \varnothing = 0$ и $\inf \varnothing = 1$. Среди свойств рассмотренных выше понятий следует отметить следующие:

а) если $A \subseteq B$, то $B^{\triangle} \subseteq A^{\triangle}$ и $B^{\triangledown} \subseteq A^{\triangledown}$;

б) $A \subseteq A^{\triangle\triangledown} \cap A^{\triangledown\triangle}$;

в) $A = A^{\triangle\triangledown\triangle} = A^{\triangledown\triangle\triangledown}$;

г) $(A \cup B)^{\triangle} = A^{\triangle} \cap B^{\triangle}$;

д) $(A \cup B)^{\triangledown} = A^{\triangledown} \cap B^{\triangledown}$;

е) если $\sup A$ или $\inf A^{\triangle}$ существует, то $\sup A = \inf A^{\triangle}$;

ж) если $\inf A$ или $\sup A^{\triangledown}$ существует, то $\inf A = \sup A^{\triangledown}$;

з) (обобщенная ассоциативность) если $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — некоторое множество подмножеств Ч. у. м. P и если существуют $\sup (\cup_\alpha A_\alpha)$ и $\sup A_\alpha$ ($\inf (\cup_\alpha A_\alpha)$ и $\inf A_\alpha$) для всех $\alpha \in I$, то

$$\sup (\cup_\alpha A_\alpha) = \sup \{\sup A_\alpha\}$$

$$(\inf (\cup_\alpha A_\alpha) = \inf \{\inf A_\alpha\};$$

и) если φ — изотонное отображение Ч. у. м. P в Ч. у. м. P', $A \subseteq P$ и существуют как $\sup A$ в P, так и $\sup \varphi(A)$ в P' (как $\inf A$ в P, так и $\inf \varphi(A)$ в P'), то $\sup \varphi(A) \leqslant \varphi(\sup A)$ ($\varphi(\inf A) \leqslant \inf \varphi(A)$).

Нек-рые из приведенных выше определений и результатов, можно получить из других заменой символа $\leqslant$ на $\geqslant$. Это касается, напр., определения верхнего и нижнего конусов, наибольшего и наименьшего элементов. Такие понятия называют двойственными. В частности, двойственными являются утверждения г) и д), а также е) и ж). Все это является проявлением общего принципа двойственности (см. *Двойственности принцип* в частично упорядоченных множествах).

Специальными видами Ч. у. м. являются *линейно упорядоченные множества* (или цепи), *вполне упорядоченные множества*, *направленные множества*, *решетки* (или структуры), *полурешетки* (или полуструктуры), *булевы алгебры*. Особую роль играют алгебраич. образования, являющиеся в то же время Ч. у. м. (см. *Упорядоченная полугруппа*, *Частично упорядоченная группа*, *Упорядоченное кольцо*). Понятие Ч. у. м. является одним из фундаментальных общематематич. понятий и широко используется как в самой математике, так и в ее приложениях.

Определение Ч. у. м. впервые явно сформулировано Ф. Хаусдорфом [11], хотя входящие в определение порядка аксиомы рассматривались еще Г. Лейбницем (G. Leibniz) около 1690. Аккуратное определение линейно упорядоченного множества впервые дано Г. Кантором [10]. В этой же работе он определил порядковый тип линейно упорядоченного множества, т. е., в современной терминологии, класса линейно упорядоченных множеств, изоморфных данному. Еще раньше Г. Кантор рассматривал вполне упорядоченные множества [9], хотя введенное им определение не удовлетворяет современным требованиям. Оригинальный подход к аксиоматич. определению линейно упорядоченного множества предложил С. О. Шатуновский [6], [7]. В связи с определением понятия предела в математич. анализе С. О. Шатуновский [8], а также Э. Мур и Г. Смит [12] рассматривали направленные множества.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; [2] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [3] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [4] Розен В. В., Частичные операции в упорядоченных множествах, Саратов, 1973; [5] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982; [6] Шатуновский С. О., «Записки Новороссийского об-ва естествоиспытателей», 1904, в. 26, с. 21—25; [7] его же, «Тр. I Всероссийского съезда преподавателей математики», 1913, т. 1, с. 276—81; [8] его же, Введение в анализ, Од., 1923; [9] Cantor G., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 545—86; [10] его же, «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 481—512; [11] Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre, Lpz., 1914; [12] Moore E., Smith H., «Amer. J. Math.», 1922, v. 44, p. 102—21.

См. также обзоры [6]—[9] из статьи *Решетка*.

Л. А. Скорняков.

ЧАСТИЧНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ОБЛАСТЬ безграничного делимого распределения — совокупность всех функций распределения $F(x)$ таких, что для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с функцией распределения $F(x)$ при подходящем выборе постоянных A_n и $B_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и нек-рой подпоследовательности целых чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ функции распределения случайных величин

$$\left(\sum_{i=1}^{n_k} X_i - A_{n_k}\right) \Big/ B_{n_k}$$

слабо сходятся при $k \to \infty$ к невырожденной функции распределения $V(x)$, к-рая с необходимостью безгранично делима; каждое безгранично делимое распределение имеет непустую Ч. п. о. Существуют распределения, не принадлежащие ни одной Ч. п. о., а также распределения, принадлежащие Ч. п. о. любого безгранично делимого распределения.

Лит.: Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.

Б. А. Рогозин.

ЧАСТИЧНЫЙ ПОРЯДОК — см. *Порядок*.

ЧАСТИЧНЫЙ ПРЕДЕЛ данной последовательности — предел нек-рой ее подпоследовательности. У всякой числовой последовательности (а также у всякой последовательности точек конечномерного евклидова пространства) существует, по крайней мере, один Ч. п. (конечный или бесконечный).

Л. Д. Кудрявцев.

ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ первого порядка функции многих переменных — производная функция по одной из переменных при условии, что все остальные переменные фиксированы. Напр., если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в нек-рой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то Ч. п. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ функции f по переменной x_1 в рассматриваемой точке равна обычной производной $\frac{df}{dx_1}(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ в точке $x_1^{(0)}$ функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1. Иначе говоря,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\Big|_{x_1 = x_1^{(0)}} =$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1},$$

где

$$\Delta_{x_1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) =$$

$$= f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Ч. п.

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}, \quad m_1 + \ldots + m_n = m, \qquad (*)$$

порядков $m > 1$ определяются по индукции: если определена Ч. п.

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_i^{k_i} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad k_1 + \ldots + k_i + \ldots + k_n = k - 1,$$

то, по определению,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i+1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i} \dots \partial x_n^{k_n}}\right).$$

Ч. п. (*) обозначается также $D^m_{m_1, \dots, m_n} f$. Ч. п. (*), у которой, по крайней мере, два различных показателя m_i не равны нулю, наз. смешанной Ч. п., в противном случае, т. е. когда Ч. п. имеет вид $\frac{\partial^m f}{\partial x_i^m}$, — несмешанной. При достаточно широких предположениях смешанные Ч. п. не зависят от порядка дифференцирования по различным переменным. Это имеет место, напр., если все рассматриваемые Ч. п. непрерывны.

Если при определении Ч. п. положить в основу понятие не обычной, а обобщенной в том или ином смысле производной, то получают определение обобщенной Ч. п. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЧАСТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ первого порядка функции многих переменных — дифференциал функции по одной из переменных при условии, что все остальные переменные фиксированы. Напр., если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в нек-рой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, то Ч. д. $d_{x_1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ функции f по переменной x_1 в рассматриваемой точке равен обычному дифференциалу $df(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ в точке $x_1^{(0)}$ функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1, т. е.

$$d_{x_1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = df(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})\Big|_{x_1 = x_1^{(0)}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})\, dx_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{d_{x_1} f}{dx_1}.$$

Аналогично определяется и Ч. д. порядка $k > 1$: напр., Ч. д. $d^k_{x_k} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ порядка k функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной x_1 в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ наз. дифференциал порядка k функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1 в точке $x_1^{(0)}$. Отсюда следует, что

$$d^k_{x_i} f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})\, dx_i^k,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Л. Д. Кудрявцев.

ЧАСТНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — мера линейной зависимости между двумя случайными величинами из нек-рой совокупности случайных величин в том случае, когда исключено влияние остальных. Точнее, пусть случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют совместное распределение в $\mathbb{R}^n$, и пусть $X^*_{1\cdot 34\dots n}$ и $X^*_{2\cdot 34\dots n}$ — наилучшие линейные приближения величин X_1 и X_2 соответственно величинами $X_3, \dots, X_n$. Тогда Ч. к. к. между X_1 и X_2, обозначаемый $\rho_{12\cdot 34\dots n}$, определяется как обычный коэффициент корреляции между случайными величинами $Y_1 = X_1 - X^*_{1\cdot 34\dots n}$ и $Y_2 = X_2 - X^*_{2\cdot 34\dots n}$:

$$\rho_{12\cdot 34\dots n} = \frac{\mathsf{E}\{(Y_1 - \mathsf{E}Y_1)(Y_2 - \mathsf{E}Y_2)\}}{\sqrt{\mathsf{D}Y_1 \mathsf{D}Y_2}}.$$

Из определения следует, что $-1 \leqslant \rho_{12\cdot 34\dots n} \leqslant 1$. Ч. к. к. выражается через элементы *корреляционной матрицы*. Пусть $P = \|\rho_{ij}\|$, где ρ_{ij} — коэффициент корреляции между X_i и X_j, и пусть P_{ij} есть алгебраич. дополнение элемента ρ_{ij} в определителе $|P|$, тогда

$$\rho_{12\cdot 3\dots n} = -\frac{P_{12}}{\sqrt{P_{11} P_{22}}}.$$

Напр., при $n = 3$

$$\rho_{12\cdot 3} = \frac{\rho_{12}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)}}.$$

Аналогично определяется Ч. к. к. для любых величин X_i и X_j из $X_1, \dots, X_n$. В самом общем случае Ч. к. к. $\rho_{12\cdot 34\dots n}$ отличается от (полного) коэффициента корреляции ρ_{12} величин X_1 и X_2. По различию между $\rho_{12\cdot 34\dots n}$ и ρ_{12} можно судить о том, зависимы ли X_1 и X_2 между собой, или зависимость между ними есть следствие зависимости каждой из них от величин $X_3, \dots, X_n$. Если величины $X_1, \dots, X_n$ попарно некоррелированы, то все Ч. к. к. равны нулю.

Выборочным аналогом Ч. к. к. $\rho_{12\cdot 34\dots n}$ является статистика

$$r_{12\cdot 34\dots n} = -\frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}},$$

где R_{ij} — алгебраич. дополнение элемента r_{ij} в определителе матрицы $R = \|r_{ij}\|$ выборочных коэффициентов корреляции r_{ij}. Если результаты наблюдений независимы и нормально распределены, то $r_{12\cdot 34\dots n}$ распределен с плотностью вероятности

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{N-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-n}{2}\right)} (1-x^2)^{\frac{N-n-2}{2}}, \quad -1 < x < 1$$

(N — объем выборки). Для проверки гипотезы о Ч. к. к. используется тот факт, что статистика

$$t = \sqrt{N-n}\, \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \text{где} \quad r = r_{12\cdot 34\dots n},$$

при указанных условиях имеет *Стьюдента распределение* с $N-n$ степенями свободы.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973. *А. В. Прохоров.*

ЧАСТНЫХ КОЛЬЦО — кольцо, связанное с данным ассоциативным кольцом R с единицей. Кольцом частных (классическим правым) кольца R наз. кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R)$, в к-ром все регулярные элементы (т. е. не делители нуля) кольца R обратимы и любой элемент из $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ имеет вид ab^{-1}, где $a, b \in R$. Кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ существует тогда и только тогда, когда R удовлетворяет правому условию Оре (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*). Ч. к. максимальное (или полное) правое кольца R — это кольцо $Q_{\max}(R) = \mathrm{Hom}_H(\hat{R}, \hat{R})$, где $\hat{R}$ — инъективная оболочка R как правого R-модуля, $H = \mathrm{Hom}_R(\hat{R}, \hat{R})$ — кольцо эндоморфизмов правого R-модуля $\hat{R}$. Кольцо $Q_{\max}$ можно определить так же, как прямой предел

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(D, R),$$

где D — множество всех плотных правых идеалов кольца R (правый идеал D кольца R наз. плотным, если

$$\forall 0 \neq r_1 \in R, \quad r_2 \in R \exists r \in R \ (r_1 r \neq 0, \ r_2 r \in D)).$$

Лит.: [1] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [2] Елизаров В. П., «Алгебра и логика», 1969, т. 8, № 4, с. 381—424; [3] Stenström B., Rings of quotients, B.— N. Y., 1975. *Л. А. Бокуть.*

ЧАСТОТНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, формулирующая условия разрешимости уравнений Лурье

$$P^*H+HP+hh^*=G, \quad Hq-h\varkappa=q, \tag{1}$$

где P, $G=G^*$, q, g, $\varkappa$ — заданные матрицы размеров $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$, $n\times m$, $m\times m$ соответственно, $H=H^*$, h — искомые матрицы размера $n\times n$ и $n\times m$. Уравнения Лурье имеют две другие эквивалентные формы: при $\det\varkappa\neq 0$

$$HQ_0H+(P_0^*H+HP_0)+G_0=0, \tag{2}$$

где $Q_0=Q_0^*\geqslant 0$, $G_0=G_0^*$, и в общем случае

$$2\operatorname{Re}x^*H(Px+q\xi)=\mathcal{G}(x,\xi)-|h^*x-\varkappa\xi|^2 \quad (\forall x,\ \xi), \tag{3}$$

где $\mathcal{G}(x,\xi)$ — заданная эрмитова форма векторов $x\in\mathbb{C}^n$, $\xi\in\mathbb{C}^m$:

$$\mathcal{G}(x,\xi)=x^*Gx+2\operatorname{Re}(x^*g\xi)+\xi^*\Gamma\xi.$$

При этом $\Gamma=\varkappa^*\varkappa\geqslant 0$, $G_0=g\Gamma^{-1}g^*-G$, $P_0=P-g\Gamma g^*$, $Q_0=q\Gamma^{-1}q^*$.

Если пара $\{P,\ q\}$ управляема, то уравнения Лурье сводятся к случаю, когда

$$P=\operatorname{diag}[\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n], \quad \lambda_j+\lambda_h\neq 0.$$

При $m=1$ и когда все матрицы действительны, в скалярной записи уравнения Лурье приобретают вид

$$\sum_{k=1}^n q_k\frac{h_jh_k}{\lambda_j+\lambda_k}-h_j\sqrt{\Gamma}=\gamma_j, \quad j=1,\ \ldots,\ n,$$

здесь $h=[h_1,\ \ldots,\ h_n]$ — искомый вектор.

Пусть пара $\{P,\ q\}$ стабилизируема, т. е. существует r такое, что $R=P+qr^*$ — матрица Гурвица.

Частотная теорема утверждает: для разрешимости уравнений Лурье необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{G}[(i\omega I-P)^{-1}q\xi,\ \xi]\geqslant 0$$

для всех $\xi\in\mathbb{C}^m$, $\omega\in\mathbb{R}^1$, $\det\|i\omega I-P\|\neq 0$ (I — единичная матрица). Ч. т. также формулирует процедуру определения матриц H, h и утверждает, что при

$$\det\Gamma\neq 0,\ \det\|i\omega I-P\|\neq 0,\ \mathcal{G}[\|i\omega I-P\|^{-1}q\xi,\ \xi]>0 \quad (\forall\xi\neq 0,\ \forall\omega)$$

существуют такие (единственные) матрицы H, h, что кроме (3) выполнено: $P+q\varkappa^{-1}h^*$ есть матрица Гурвица (см. [3]).

Уравнение Лурье в форме (2) иногда наз. также матричным алгебраическим уравнением Риккати. Ч. т. используется при решении задач абсолютной устойчивости [2, 4, 5], управления и адаптации (см., напр., [6]).

Лит.: [1] Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М.— Л., 1951; [2] Попов В. М., Гиперустойчивость автоматических систем, пер. с рум., М., 1970; [3] Якубович В. А., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 2, с. 384—420; [4] Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А., Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, М., 1978; [5] Методы исследования нелинейных систем автоматического управления, М., 1975; [6] Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А., Адаптивное управление динамическими объектами, М., 1981.

Г. А. Леонов.

ЧЕБЫШЕВА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — интерполяционная квадратурная формула с равными коэффициентами:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx\cong C\sum_{k=1}^N f(x_k). \tag{*}$$

Весовая функция равна 1, промежуток интегрирования конечен и считается совпадающим с $[-1,\ 1]$. Число параметров, определяющих квадратурную формулу (*), равно $N+1$ (N узлов и значение коэффициента C). Параметры определяются требованием, чтобы квадратурная формула (*) была точна для всех многочленов степени не выше N или, что то же самое, для одночленов 1, x, x^2, ..., x^N. Параметр C находится из условия, что квадратурная формула точна для $f(x)=1$, и равен $2/N$. Узлы x_1, ..., x_N оказываются действительными лишь при $N=1(1)7$ и $N=9$. При $N=1(1)7$ узлы вычислил П. Л. Чебышев. При $N\geqslant 10$ среди узлов Ч. к. ф. всегда имеются комплексные (см. [1]). Алгебраич. степень точности Ч. к. ф. равна N при N нечетном и равна $N+1$ при N четном. Формула (*) предложена П. Л. Чебышевым в 1873.

Лит.: [1] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967.

И. П. Мысовских.

ЧЕБЫШЕВА МЕТОД — метод получения класса *итерационных алгоритмов* нахождения однократного действительного корня уравнения

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ — достаточно гладкая функция.

В основе метода лежит формальное представление обратной к $f(x)$ функции $x=F(y)$ по формуле Тейлора. Если α — достаточно точное приближение для корня x уравнения (1), $c_0=\beta=f(\alpha)$, $f'(\alpha)\neq 0$, то

$$x=F(y)=\alpha+\sum\nolimits_{n\geqslant 1}d_n(y-\beta)^n, \tag{2}$$

где коэффициенты d_n рекуррентно определяются из соотношения $x\equiv F(f(x))$ через коэффициенты Тейлора c_n функции $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}c_n(x-\alpha)^n$. Полагая в (2) $y=0$, получают соотношение

$$x=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}-$$
$$-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2-\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}\right)-$$
$$-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^4\left(\frac{5}{8}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3-\frac{5f''(\alpha)\,f'''(\alpha)}{12(f'(\alpha))^2}+\frac{f^{\mathrm{IV}}(\alpha)}{24f'(\alpha)}\right)-\ldots \tag{3}$$

Несколько членов справа в (3) дают формулы итерационного алгоритма; так при двух членах получается *Ньютона метод*, а при трех членах получается итерационный метод вида

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}, \quad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{4}$$

С ростом числа учитываемых в (3) членов возрастает скорость сходимости x_n к x (см. [2]). Метод может быть распространен на функциональные уравнения (см. [3]).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 5, М.— Л., 1951, с. 7—25, 173—76; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [3] Нечепуренко М. И., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 2, с. 163—70.

В. И. Лебедев.

ЧЕБЫШЕВА МНОГОЧЛЕНЫ первого рода — многочлены, ортогональные на отрезке $[-1,\ 1]$ с весовой функцией

$$h_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,\ 1).$$

Для стандартизованных Ч. м. справедливы формула

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x), \quad x\in[-1,\ 1],$$

и рекуррентное соотношение

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),$$

с помощью к-рых находят последовательно

$$T_0(x)=1, \quad T_1(x)=x, \quad T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x, \quad T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x, \ \ldots.$$

Ортонормированные Ч. м.:

$$\hat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\hat{T}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x), \quad n\geqslant 1.$$

Старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ при $n\geqslant 1$ равен 2^{n-1}. Поэтому Ч. п. с единичным старшим коэффициентом определяются формулой

$$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x),\quad n\geqslant 1.$$

Нули многочлена $T_n(x)$, определяемые равенством

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=1, 2, \ldots, n,$$

часто применяются в качестве узлов интерполяционных и квадратурных формул. Многочлен $T_n(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0.$$

Многочлен $\tilde{T}_n(x)$ наименее отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$, т. е. для всякого другого многочлена $\tilde{F}_n(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом выполняется условие

$$\max_{x\in[-1,\,1]}|\tilde{F}_n(x)|>\max_{x\in[-1,\,1]}|\tilde{T}_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

С другой стороны, для всякого многочлена $Q_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющего условию

$$\max_{x\in[-1,\,1]}|Q_n(x)|=1,$$

при любом $x_0\in(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$ имеет место неравенство

$$|Q(x_0)|\leqslant|T_n(x_0)|.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и ее модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ удовлетворяет условию Дини

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta, f)\ln\frac{1}{\delta}=0,$$

то эта функция разлагается в ряд Фурье — Чебышева

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{T}_n(x),\quad x\in[-1, 1],$$

сходящийся равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Коэффициенты этого ряда определяются по формуле

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(t)\,\hat{T}_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Если же функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на отрезке $[-1, 1]$, причем ее p-я производная $f^{(p)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, т. е. $f^{(p)}(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, то имеет место неравенство

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{T}_k(x)\right|\leqslant\frac{c_1\ln n}{n^{p+\alpha}},\quad x\in[-1, 1],$$

где постоянная c_1 не зависит от n и x.

Ч. м. второго рода определяются равенством

$$U_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)=\sin[(n+1)\arccos x]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Эти многочлены ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h_2(x)=\sqrt{1-x^2},\quad x\in[-1, 1].$$

Для всякого многочлена $\tilde{Q}_n(x)$ с единичным старшим коэффициентом справедливо неравенство

$$\frac{1}{2^{n-1}}=\int_{-1}^{1}|\tilde{U}_n(x)|\,dx\leqslant\int_{-1}^{1}|\tilde{Q}_n(x)|\,dx.$$

Ч. м. были введены в 1854 П. Л. Чебышевым (см. [1]).

Обе системы Ч. м. являются частными случаями *ультрасферических многочленов* и *Якоби многочленов*.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 23—51; [2] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

П. К. Суетин.

ЧЕБЫШЕВА НЕРАВЕНСТВО для конечных монотонных последовательностей

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n,$$
$$b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$$

— неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k\leqslant n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

Ч. н. для монотонных функций $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$ — неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ либо возрастают, либо убывают.

Неравенства установлены П. Л. Чебышевым (1882.)

В. И. Битюцков.

ЧЕБЫШЕВА НЕРАВЕНСТВО, неравенство Бьенеме — Чебышева,— неравенство теории вероятностей, дающее оценку вероятности отклонений значений случайной величины от ее математич. ожидания через ее дисперсию. Пусть $X(\omega)$ — нек-рая случайная величина с конечными математич. ожиданием $\mathsf{E}X(\omega)$ и дисперсией $\mathsf{D}X(\omega)$. Ч. н. состоит в том, что для любого $\varepsilon>0$ вероятность события

$$\{\omega:|X(\omega)-\mathsf{E}X|\geqslant\varepsilon\}$$

не превосходит $\mathsf{D}X/\varepsilon^2$ или

$$\mathsf{P}\{|X-\mathsf{E}X|\geqslant t\sqrt{\mathsf{D}X}\}\leqslant\frac{1}{t^2}.\qquad(1)$$

Это неравенство было независимым образом открыто И. Бьенеме (I. Bienaymé, 1853) и П. Л. Чебышевым (1866). В современной литературе это неравенство чаще наз. Ч. н., возможно, и потому, что с именем П. Л. Чебышева связано использование его при доказательстве обобщения *больших чисел закона* (теоремы Чебышева).

Ч. н. является представителем целого класса однотипных неравенств, простейшее из к-рых утверждает, что для неотрицательной случайной величины X с конечным математич. ожиданием $\mathsf{E}X$

$$\mathsf{P}\{X\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{E}X}{\varepsilon}\qquad(2)$$

(иногда наз. неравенством Маркова). Из этого неравенства вытекают неравенства для произвольных случайных величин, зависящие от моментов:

$$\mathsf{P}\{|X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{E}|X|^r}{\varepsilon^r},$$

$$\mathsf{P}\{|X-\mathsf{E}X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{E}|X-\mathsf{E}X|^r}{\varepsilon^r},\quad r\geqslant 1$$

(при $r=2$ и само Ч. н.), а также более общее неравенство

$$\mathsf{P}\{|X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{E}f(X)}{f(\varepsilon)}\qquad(3)$$

для неотрицательной четной неубывающей при положительных значениях x функции $f(x)$. Неравенство (3) указывает путь получения новых неравенств того же типа, напр. экспоненциального неравенства:

$$\mathsf{P}\{X\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{E}e^{cX}}{e^{c\varepsilon}},\quad c>0.$$

Сложилась традиция относить все эти неравенства к чебышевскому типу и даже наз. Ч. н. Существует общий принцип получения Ч. н. при определенных условиях на моменты, основанный на использовании системы многочленов Чебышева (см. [4]). Для произвольных случайных величин Ч. н. дают точные, неулучшаемые оценки, однако в нек-рых конкретных ситуациях эти оценки можно уточнить. Напр., если X имеет унимодальное распределение с модой μ, совпадающей с мате-

матич. ожиданием, то справедливо неравенство Гаусса:

$$\mathsf{P}\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{4}{3}\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},\quad \varepsilon\geqslant\frac{2\sigma}{\sqrt{3}},$$

где $\sigma^2=\mathsf{D}X$.

Значение Ч. н. в теории вероятностей определяется в конечном счете не его точностью, а простотой и универсальностью. Большую роль Ч. н. и его видоизменения сыграли применительно к суммам случайных величин при доказательстве различных форм закона больших чисел и закона повторного логарифма. Ч. н. для сумм независимых случайных величин было подвергнуто обобщению и уточнению в двух главных направлениях. Первое из них связано с переходом от Ч. н.

$$\mathsf{P}\{|X_1+\ldots+X_n-(\mathsf{E}X_1+\ldots+\mathsf{E}X_n)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\leqslant\frac{\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)}{\varepsilon^2}$$

к значительно более сильному неравенству

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_1+\ldots+X_k-(\mathsf{E}X_1+\ldots+\mathsf{E}X_k)|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\leqslant\frac{\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)}{\varepsilon^2},$$

к-рое было доказано А. Н. Колмогоровым и использовано им при доказательстве *больших чисел усиленного закона* (см. *Колмогорова неравенство*).

Второе направление посвящено замене степенной оценки в Ч. н. на экспоненциально убывающую и приводит к неравенствам Бернштейна — Колмогорова:

$$\mathsf{P}\{|X_1+\ldots+X_n|\geqslant\varepsilon\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{a}{3}\right)}\right\},$$

где $|X_i|\leqslant C$, $\mathsf{E}X_i=0$, $\sigma^2=\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)$, $a=\frac{C\varepsilon}{\sigma^2}$ (см. *Бернштейна неравенство*). Такие уточнения Ч. н. получаются при дополнительных условиях ограниченности слагаемых X_i.

Получены многомерные аналоги нек-рых из указанных здесь неравенств (см. [5]).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., «Матем. сб.», 1867, т. 2, с. 1—9; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [3] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [4] Карлин С., Стаден В., Чебышевские системы и их применения в анализе и статистике, пер. с англ., М., 1976; [5] Прохоров Ю. В., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей, матем. статистика, теоретич. кибернетика, т. 10, М., 1972, с. 5—24.

А. В. Прохоров.

ЧЕБЫШЕВА ПОСТОЯННАЯ — числовая характеристика $\tau=\tau(E)$ компактного множества E на комплексной плоскости, употребляемая в теории наилучшего приближения.

Пусть K_n — класс всех многочленов вида

$$p_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_n$$

степени n, и пусть

$$M(p_n)=\max\{|p_n(z)|:z\in E\},$$

$$m_n=\inf\{M(p_n):p_n\in K_n\},\quad \tau_n=\sqrt[n]{m_n}.$$

Существует многочлен $t_n(z)\in K_n$, для к-рого $M(t_n)=m_n$, он наз. многочленом Чебышева для E. Кроме того, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau,$$

к-рый и наз. постоянной Чебышева для E.

Если ограничиться классом $\tilde{K}_n$ всех многочленов

$$\tilde{p}_n(z)=z^n+\ldots+\tilde{c}_n,$$

нули к-рых расположены на E, то получают соответствующие величины $\tilde{m}_n$, $\tilde{\tau}_n$, $\tilde{\tau}$ и многочлен $\tilde{t}_n(z)$ (он также наз. многочленом Чебышева) такой, что $M(\tilde{t}_n)=\tilde{m}_n$.

Известно, что $\tau=\tilde{\tau}=C(E)=d$, где $C(E)$ — *емкость* компакта E, d — его *трансфинитный диаметр* (см., например, [1]).

Понятие Ч. п. обобщается для компактов E в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, исходя из *потенциала теории*. Пусть для точек $x\in\mathbb{R}^m$

$$H(|x|)=\begin{cases}\ln\frac{1}{|x|} & \text{при } m=2,\\ \frac{1}{|x|^{m-2}} & \text{при } m\geqslant 3\end{cases}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа, и для набора $(x_j)_{j=1}^n\subset E$ пусть

$$\sigma_n(E)=\sup\left\{\min\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H(|x-x_j|):x\in E\right\}:(x_j)_{j=1}^n\subset E\right\}.$$

Тогда при $m=2$ получают равенство

$$\tau=\tilde{\tau}=C(E)=\exp\left(-\lim_{n\to\infty}\sigma_n(E)\right),$$

а при $m\geqslant 3$ принимают (см. [2])

$$\tau=C(E)=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(E)}.$$

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств, пер. с англ., М., 1971.

Е. Д. Соломенцев.

ЧЕБЫШЕВА СИСТЕМА — система линейно независимых функций $S_n=\{\varphi_i(q)\}_{i=1}^n$ из пространства $C(Q)$, обладающая тем свойством, что любой нетривиальный полином по этой системе имеет не более $(n-1)$-го различного нуля. Примером Ч. с. в $C[0,1]$ является система $S_n^0=\{q^i\}_{i=0}^{n-1}$, $0\leqslant q\leqslant 1$, аппроксимативные свойства к-рой в равномерной метрике впервые рассматривал П. Л. Чебышев [1]. Термин «Ч. с.» введен С. Н. Бернштейном [2]. Произвольная Ч. с. наследует практически все аппроксимативные свойства системы S_n^0.

Для Ч. с. остается справедливой *Чебышева теорема*, *Валле Пуссена теорема* (об альтернансе), сохраняют силу все методы, разработанные для приближенного построения алгебраич. многочленов наилучшего равномерного приближения, справедлива теорема единственности полинома наилучшего равномерного приближения по Ч. с. (см. также *Хаара условие* и *Чебышевское множество*). Для того чтобы на компакте Q существовала Ч. с. порядка $n>1$, необходимо и достаточно, чтобы Q был гомеоморфен окружности или ее подмножеству (при этом Q не гомеоморфен окружности, если n четно). В частности, на m-мерных областях ($m\geqslant 2$), напр. на квадрате, не существует Ч. с. [3].

В качестве системы, не являющейся Ч. с., можно привести систему, состоящую из *сплайнов* степени m с n фиксированными узлами $0<x_1<\ldots<x_n<1$. В этом случае функция $[\max(0,x-x_n)]^m$ принадлежит этой системе и имеет бесконечно много нулей. Отсутствие единственности затрудняет численное построение элемента наилучшего приближения.

Важным частным случаем Ч. с. является *Маркова система функций*.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947; с. 151—238; [2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Л.— М., 1937; [3] Mairhuber J. C., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 7, № 4, p. 609—15; [4] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [5] Карлин С., Стаддеи В., Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике, пер. с англ., М., 1976.

Ю. Н. Субботин.

ЧЕБЫШЕВА ТЕОРЕМА: если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$A=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|,$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,$$

то $P_n(x)$ тогда и только тогда является многочленом наилучшего равномерного приближения для функции $f(x)$, т. е.

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|=\min_{\{c_k\}_0^n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_kx^k\right|,$$

когда существуют $n+2$ точки $\{x_i\}$, $a\leqslant x_0<x_1<\ldots$ $\ldots<x_{n+1}\leqslant b$, образующие *чебышевский альтернанс* то есть удовлетворяющие условию

$$f(x_i)-P_n(x_i)=\varepsilon(A)(-1)^i,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n+1,$$

где $\varepsilon=1$ или -1. Сформулированная теорема была доказана П. Л. Чебышевым в 1854 (см. [1]) в более общем виде, а именно для наилучшего равномерного приближения непрерывной функции рациональными дробями с фиксированными степенями числителя и знаменателя. Ч. т. сохраняет силу, если вместо алгебраических многочленов рассматривать полином

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ — *Чебышева система*. Критерий, сформулированный в Ч. т., применяется в методах приближенного построения полиномов наилучшего равномерного (чебышевского) приближения. В несколько иной формулировке Ч. т. распространяется на приближение функций комплексного переменного (см. [2]) и абстрактных функций (см. [3]).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 151—238; [2] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 216—21; [3] Зуховицкий С. И., Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, № 5, с. 773—76; [4] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

Ю. Н. Субботин.

ЧЕБЫШЕВА ТЕОРЕМА о дифференциальном биноме: неопределенный интеграл от дифференциального бинома

$$x^m(a+bx^n)^p,$$

где a и b — действительные числа, m, n, p — рациональные, не выражается через элементарные функции при любых m, n, p, кроме случаев, когда p, $(m+1)/n$, $(m+1)/n+p$ — целые. Установлена П. Л. Чебышевым (1853).

В. И. Битюцков.

ЧЕБЫШЕВА ТЕОРЕМЫ о простых числах — теоремы 1)—8) о распределении простых чисел, доказанные П. Л. Чебышевым [1] в 1848—50.

Пусть $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x, m — целое $\geqslant 0$, p — простое число, $\ln u$ — натуральный логарифм u,

$$\operatorname{li}x=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2x}+\ldots+\frac{(n-1)!\,x}{\ln^n x}+O\left(\frac{x}{\ln^{n+1}x}\right).\quad(*)$$

1) Для любого m сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\pi(n)-\pi(n-1)-\frac{1}{\ln n}\right)\frac{\ln^m n}{n^s}$$

имеет конечный предел при $s\to 1+$.

2) Как бы ни было мало $a>0$, а m велико, функция $\pi(x)$ бесконечное число раз удовлетворяет каждому из неравенств:

$$\pi(x)>\operatorname{li}x-ax\ln^{-m}x,\ \pi(x)<\operatorname{li}x+ax\ln^{-m}x.$$

3) Частное $\pi(x)\ln x/x$ при $x\to\infty$ не может иметь предела, отличного от 1.

4) Если функция $\pi(x)$ может быть выражена до количества порядка $x\ln^{-n}x$ включительно алгебраически в x, $\ln x$, e^x, то таким выражением является выражение $(*)$.

После этого П. Л. Чебышев ввел две новые функции распределения простых чисел $\theta(x)$ и $\psi(x)$ — *Чебышева функции*

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p,\ \psi(x)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p$$

и установил фактич. порядок роста этих функций. Отсюда впервые им получен фактич. порядок роста числа простых чисел $\pi(x)$ и n-го простого числа P_n. Точнее, он доказал:

5) Для $x>1$ при $A=\ln 2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}/30^{1/30}$, имеют место неравенства

$$\psi(x)>Ax-\frac{5}{2}\ln x-1,$$

$$\psi(x)<\frac{6}{5}Ax+\frac{5}{4\ln 6}\ln^2x+\frac{5}{4}\ln x+1.$$

6) Для x, начиная с нек-рого x_0, имеют место неравенства

$$0{,}9212\ldots<\frac{\pi(x)\ln x}{x}<1{,}1055\ldots$$

7) Существуют постоянные $a>0$, $A>0$ такие, что n-е простое число P_n, для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$ удовлетворяет неравенствам

$$an\ln n<P_n<An\ln n.$$

8) В интервале $(a,\ 2a-2)$ при $a>3$ лежит, по крайней мере, одно простое число (постулат Бертрана).

Главная идея метода доказательства 1)—4) состоит в изучении поведения величин

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+s}}-\frac{1}{s},\ \ln s-\sum\ln\left(1-\frac{1}{p^{1+s}}\right),$$

$$\sum_p\ln\left(1-\frac{1}{p^{1+s}}\right)+\sum_p\frac{1}{p^{1+s}}$$

и их производных при $s\to 0+$. В основе метода вывода 5)—8) лежит тождество Чебышева:

$$\ln[x]!=\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 1, Теория чисел, М.— Л., 1944.

А. Ф. Лаврик.

ЧЕБЫШЕВА УРАВНЕНИЕ — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay=0$$

или, в самосопряженной форме,

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right)+ay=0,$$

здесь a — константа. Ч. у. представляет собой частный случай *гипергеометрического уравнения*.

Точки $x=-1$ и $x=1$ являются *регулярными особыми точками* Ч. у. Замены независимой переменной

$$t=\arccos x\ \text{при}\ |x|<1,$$

$$t=\operatorname{Arch}|x|\ \text{при}\ |x|>1$$

приводят это уравнение соответственно к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dt^2}+ay=0\ \text{или}\ \frac{d^2y}{dt^2}-ay=0,$$

так что Ч. у. интегрируется в замкнутой форме. Фундаментальная система решений Ч. у. на интервале

$-1<x<1$ при $a=n^2$, где n — натуральное число, состоит из *Чебышева многочлена* (1-го рода) степени n

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),$$

и функции $U_n(x)=\sin(n\arccos x)$, связанной с многочленами Чебышева 2-го рода. Многочлен $T_n(x)$ служит действительным решением Ч. у. с $a=n^2$ и на всей действительной оси. Ч. у. изучалось также в комплексной области. *Н. Х. Розов.*

ЧЕБЫШЕВА ФУНКЦИИ — функции положительного аргумента x, определяемые следующим образом:

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p,\quad \psi(x)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p.$$

Первая сумма берется по всем простым числам $p\leqslant x$, а вторая — по всем положительным целым степеням простых чисел p, таким, что $p^m\leqslant x$. Функция $\psi(x)$ может быть выражена через *Мангольдта функцию*

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n).$$

Из определения функций $\theta(x)$ и $\psi(x)$ следует, что величина $e^{\theta(x)}$ равна произведению всех простых чисел $p\leqslant x$, а величина $e^{\psi(x)}$ равна наименьшему общему кратному всех положительных целых чисел $n\leqslant x$. Функции $\theta(x)$ и $\psi(x)$ связаны между собой соотношением

$$\psi(x)=\theta(x)+\theta(x^{1/2})+\theta(x^{1/3})+\dots .$$

Эти функции тесно связаны также с функцией

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1,$$

указывающей количество простых чисел $p\leqslant x$.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Избр. труды, М., 1955, с. 33—54. *С. А. Степанов.*

ЧЕБЫШЕВСКАЯ СЕТЬ — сеть, направляющие векторы каждого семейства линий к-рой переносятся параллельно по линиям другого семейства. Чебышевской сетью I рода наз. сеть Σ_n такая, что для каждого $i=1, 2, \dots, n$ направления распределения $\Delta_1^i(x)$ параллельны в связности ∇ вдоль любой интегральной кривой каждого из других распределений Δ_1^i, задаваемых этой сетью. Чебышевской сетью II рода наз. сеть Σ_n $(n>2)$, для каждого $i=1, 2, \dots, n$ подпространства $\Delta_{n-1}^i(x)\subset\Delta_{n-1}^i$ параллельны в связности ∇ вдоль интегральных кривых распределения Δ_1^i.

Введены П. Л. Чебышевым (1878).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 5, М., 1951, с. 165—70. *В. Т. Базылев.*

ЧЕБЫШЕВСКАЯ ТОЧКА системы линейных неравенств

$$\eta_i(x)=a_{i1}\xi_1+\dots+a_{in}\xi_n+a_i\leqslant 0,\ i=1,\dots,m,$$

— точка $x=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, для к-рой достигается минимакс

$$\min_x\max_{1\leqslant i\leqslant m}\eta_i(x).$$

Задача отыскания Ч. т. сводится к общей задаче линейного программирования [1].

Более общее понятие — чебышевская точка x^* системы гиперплоскостей $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^m$ из банахова пространства X, т. е. точка x^*, для к-рой

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant m}\inf_{z\in H_i}\|z-x^*\|=\inf_{x\in X}\sup_{1\leqslant i\leqslant m}\inf_{z\in H_i}\|z-x\|.$$

Ч. т. часто выбирается в качестве «решения» несовместной линейной системы уравнений или неравенств.

Лит.: [1] Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И., Линейное и выпуклое программирование, М., 1964; [2] Белобров П. К., «Матем. заметки», 1970, т. 8, № 4, с. 29—40; [3] Еремин И. И., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 6, с. 1280—83. *Ю. Н. Субботин.*

ЧЕБЫШЕВСКИЙ АЛЬТЕРНАНС — свойство разности между непрерывной на Q функцией $f(x)$ и полиномом $P_n(x)$ (по *Чебышева системе* $\{\varphi_k(x)\}_0^n$) на упорядоченном множестве $(n+2)$ точек

$$\{x_i\}_0^{n+1}\subset Q,\ x_0<x_1<\dots<x_{n+1},$$

заключающееся в том, что

$$f(x_i)-P_n(x_i)=(-1)^i\varepsilon\|f(x)-P_n(x)\|_{C[Q]},$$

где $\varepsilon=1$ или -1 и Q — замкнутое множество действительных чисел. Точки $\{x_i\}_0^{n+1}$ наз. точками чебышевского альтернанса (см. также *Альтернанса точки*). *Ю. Н. Субботин.*

ЧЕБЫШЕВСКИЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД — итерационный алгоритм нахождения решения линейного уравнения

$$Au=f, \tag{1}$$

учитывающий информацию о принадлежности $\mathrm{Sp}(A)$ — спектра оператора A — нек-рому множеству Ω, и использующий свойства и параметры многочленов, наименее отклоняющихся от нуля на множестве Ω и равных единице в нуле.

Наибольшее развитие Ч. и. м. получил, когда в уравнении (1) A — линейный самосопряженный оператор и $\mathrm{Sp}(A)\in[m, M]$, где $0<m<M$ — точные границы спектра; тогда Ч. и. м. использует свойства многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(x)$. Для этого случая рассматривают два типа Ч. и. м.:

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_{k+1}(Au^k-f), \tag{2}$$

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_{k+1}(Au^k-f)-\beta_{k+1}(u^k-u^{k-1}), \tag{3}$$

$$\beta_1=0,\ k=0,\ 1,\dots,$$

в к-рых по заданному u^0 образуют последовательность $u^k\to u$ при $k\to\infty$. В (2), (3) α_i, β_i — числовые параметры методов. Если $\varepsilon^k=u-u^k$, то начальная ошибка ε^0 и ошибка на N-й итерации ε^N будут связаны формулой

$$\varepsilon^N=P_N(A)\,\varepsilon^0,$$

где

$$P_N(t)=\prod_{i=1}^N(1-\gamma_i t),\ P_N(0)=1. \tag{4}$$

Многочлены $P_N(t)$ вычисляют по параметрам каждого из методов (2), (3): для метода (2)

$$\alpha_k=\gamma_{j_k},\ k=1,\ 2,\dots,N, \tag{5}$$

где $1\leqslant j_k\leqslant N$ — элементы перестановки $\varkappa_N=(j_1, i_2, \dots, j_N)$, а для метода (3) — из рекуррентных соотношений

$$P_{k+1}(t)=(1-\beta_{k+1}-\alpha_{k+1}t)\,P_k(t)+\beta_{k+1}P_{k-1}(t), \tag{6}$$

$$P_0=1,\ \beta_1=0,\ k=0,\ 1,\dots,N-1.$$

При этом

$$\|\varepsilon^N\|\leqslant\sup_{t\in[m,M]}|P_N(t)|\cdot\|\varepsilon^0\|.$$

Оптимизация методов (2), (3) на классе задач, у к-рых $\mathrm{Sp}(A)\in[m, M]$, заключается в таком выборе параметров, чтобы $P_N(t)$ вида (4) был многочленом, наименее отклоняющимся от нуля на $[m, M]$. П. Л. Чебышевым в 1881 было показано, что это будет многочлен

$$P_N(t)=T_N((M+m-2t)/(M-m))/T_N(\theta), \tag{7}$$

где $\theta=(M+m)/(M-m)$. Тогда

$$\|\varepsilon^N\|\leqslant 2\tau^N/(1+\tau^{2N})\,\|\varepsilon^0\|, \tag{8}$$

где

$$\tau=(1-\sqrt{m/M})/(1+\sqrt{m/M}).$$

Подставляя (7) при $N=k-1$, k, $k+1$ в (6), определяют параметры α_{k+1}, β_{k+1} метода (3):

$$\alpha_{k+1}=4\delta_{k+1}/(M-m),\ \beta_{k+1}=-\delta_k\delta_{k+1}, \qquad (9)$$

где

$$\delta_0=0,\ \delta_1=\theta^{-1},\ \delta_{k+1}=(2\theta-\delta_k)^{-1},\ k=1,\ \ldots,\ N-1. \qquad (10)$$

Таким образом, вычисляя α_{k+1}, β_{k+1} по формулам (9), (10), получают Ч. и. м. (3), к-рый при любом $N\geqslant 1$ оптимально уменьшает $\|\varepsilon^N\|$.

В оптимальном методе (2) для заданного N параметры α_{k+1} выбирают в соответствии с перестановкой $\varkappa_N$ по формуле (5) так, чтобы было (7), т. е.

$$\gamma_j=2\,(M+m-(M-m)\cos\pi\psi_j)^{-1}, \qquad (11)$$
$$\psi_j=(2_j-1)/(2N),\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Тогда после N итераций для $\|\varepsilon^N\|$ будет справедливо неравенство (8).

Важной проблемой при малых m/M является вопрос об устойчивости метода (2), (5), (11). Неосмотрительный выбор $\varkappa_N$ может привести к катастрофич. возрастанию $\|u^k\|$ для нек-рых $1\leqslant k\leqslant N$, к потере значащих цифр, к возрастанию ошибок округления, допущенных на промежуточных итерациях. Известны алгоритмы, перемешивающие параметры (11) и гарантирующие устойчивый счет: для $N=2^p$ см. ст. *Итерационный алгоритм*, а для $N=3^p$ один из алгоритмов построения $\varkappa_N$ следующий: пусть $\varkappa_1=(1)$, а $\varkappa_{3^{r-1}}=(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{3^r-1})$ — построена, тогда образуют по правилу

$$\varkappa_{3^r}=(j_1,\ 2\cdot 3^{r-1}+j_1,\ 2\cdot 3^{r-1}+1-j_1,\ \ldots,\ 2\cdot 3^{r-1}+1-j_{3^r-1}), \qquad (12)$$
$$r=1,\ 2\ldots,\ p.$$

Существует класс методов (2) — устойчивые бесконечно продолжаемые оптимальные Ч. и. м. — позволяющих продолжить метод (2), (5), (11) после N итераций так, чтобы он был устойчив и вновь становился оптимальным для нек-рой последовательности $N_i\to\infty$. Для случая $N_i=3^iN$ из представления

$$T_{3N}(x)=T_N(x)\,(2T_N(x)+\sqrt{3})\,(2T_N(x)-\sqrt{3}) \qquad (13)$$

видно, что треть параметров $P_{3N}(t)$ совпадает с (11). Если после N итераций продолжить итерации (2), (5), (11) далее, взяв в (11) за ψ_j $2N$ значений:

$$\tilde{\psi}_j=(2j-1)/(6N),\ 2j\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3), \qquad (14)$$

то снова получается после $3N$ итераций Ч. и. м. Для обеспечения устойчивости множество (14) разбивают на два: к i-му, $i=1,\ 2$, относят те $\tilde{\psi}_j$, для к-рых $\pi\cos\tilde{\psi}_j$ является корнем i-й скобки в (13); внутри каждого из подмножеств $\tilde{\psi}_j$ перемешивают с помощью перестановки $\varkappa_N$. При $N<k<2N$ употребляют в (5), (11) элементы первого множества, при $2N<k\leqslant 3N$ — второго, тем самым определяется перестановка $\varkappa_{3N}$. Продолжив аналогичным образом процесс образования параметров, получают бесконечную равномерно распределенную на [0, 1] последовательность $\{\omega_j\}_1^\infty$, наз. T-последовательностью, для к-рой метод [2] становится оптимальным при $N_i=3^iN$ и

$$\alpha_{k+1}=2\,(M+m-(M-m)\cos\pi\omega_{k+1})^{-1}, \qquad (15)$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots\ .$$

Теория Ч. и. м. (2), (3) может быть распространена на нек-рый класс несамосопряженных операторов, когда Sp A лежит на нескольких отрезках или внутри нескольких специальной формы областей (в частности, эллипса), или, когда известна информация о распределении начальной ошибки, на случай комбинированных с методом сопряженных градиентов Ч. и. м., на задачи частичной проблемы собственных значений.

Одним из эффективных приемов ускорения сходимости итераций (2), (3) является предварительное преобразование уравнения (1) к эквивалентному уравнению вида

$$BAu=Bf,$$

и применение уже к этому уравнению Ч. и. м. Оператор B определяют, руководствуясь двумя факторами: 1) чтобы алгоритм вычисления величин вида Bv был нетрудоемким, 2) чтобы Sp(BA) принадлежал множеству, для к-рого обеспечена быстрая сходимость Ч. и. м.

Лит.: [1] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [4] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [5] Лебедев В. И., Финогенов С. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 2, с. 425—38; 1973, т. 13, № 1, с. 18—33; 1976, т. 16, № 4, с. 895—907; [6] Лебедев В. И., там же, 1969, т. 9, № 6, с. 1247—52; его же, в кн.: Матем. анализ и смежные вопросы математики, Новосиб., 1978, с. 89—108. *В. И. Лебедев.*

ЧЕБЫШЕВСКИЙ РАДИУС ограниченного множества M из метрич. пространства $(X,\ \rho)$ — точная нижняя грань радиусов всех шаров, содержащих M (см. *Чебышевский центр*). *Ю. Н. Субботин.*

ЧЕБЫШЕВСКИЙ ЦЕНТР ограниченного множества M из метрич. пространства $X=(X,\ \rho)$ — элемент $x_0\in X$, для к-рого

$$\sup_{y\in M}\rho(x_0,\ y)=\inf_{x\in X}\sup_{y\in M}\rho(x,\ y). \qquad (*)$$

Величина (*) есть *чебышевский радиус* множества M. Если линейное нормированное пространство является сопряженным к нек-рому линейному нормированному пространству, то любое ограниченное множество $M\subset X$ имеет хотя бы один Ч. ц. Существует банахово пространство и трехточечное множество в нем, не имеющее Ч. ц. Для того чтобы каждое ограниченное множество банахова пространства X имело не более одного Ч. ц., необходимо и достаточно, чтобы X было равномерно выпуклым по каждому направлению, т. е. чтобы для любого $z\in X$ и любого $\varepsilon>0$ существовало такое число $\delta=\delta(z,\ \varepsilon)>0$, что если $\|x_1\|=\|x_2\|=1$, $x_1-x_2=\lambda z$ и $\|x_1+x_2\|\geqslant 1-\delta$, то $|\lambda|\leqslant\varepsilon$. Ч. ц. каждого ограниченного множества M из линейного нормированного пространства X размерности большей двух принадлежит выпуклой оболочке этого множества тогда и только тогда, когда X гильбертово. Ч. ц.— частный случай более общего понятия наилучшей N-сети.

Лит.: [1] Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132. *Ю. Н. Субботин.*

ЧЕБЫШЕВСКОЕ МНОЖЕСТВО — такое множество M в метрич. пространстве $(X,\ \rho)$, что для любого $x\in X$ в M существует единственный *наилучшего приближения элемент*, т. е. элемент $y\in M$, для к-рого $\rho(x,\ y)=\rho(x,\ M)$. Существование и единственность элемента наилучшего приближения являются простейшими, естественными требованиями, весьма удобными как с теоретической, так и с вычислительной точек зрения. Это и определяет роль Ч. м. в теории приближений и теории банаховых пространств. Логически понятие Ч. м. является развитием понятия *Чебышева системы*.

Конечномерное векторное подпространство $L\subset C(Q)$ с базисом $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ тогда и только тогда является Ч. м. (чебышевским подпространством), когда функции $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ образуют систему Чебышева (т. е. удовлетворяют *Хаара условию*). В евклидовом пространстве Ч. м. являются прямые, плоскости, выпуклые фигуры и тела. Нетривиальные примеры Ч. м. рассматривал впервые П. Л. Чебышев [1]. Это — подпространство алгебраич. многочленов степени $\leqslant n$ и

множество рациональных функций с фиксированными степенями числителя и знаменателя в пространстве $C[a, b]$. В евклидовых пространствах множество является Ч. м. в том и только в том случае, когда оно замкнуто и выпукло.

В геометрии Лобачевского Ч. м. не обязано быть выпуклым [7]. В двумерном нормированном пространстве, если оно негладко, легко строится невыпуклое Ч. м. Существуют негладкие трехмерные пространства, в к-рых каждое Ч. м. выпукло. Проблема выпуклости произвольного Ч. м. в гильбертовом пространстве не решена (1984). В то же время имеются доказательства выпуклости Ч. м. при дополнительных условиях на множество и на пространство, а также условия, эквивалентные выпуклости для Ч. м. (см. *Аппроксимативная компактность*).

Поскольку Ч. м. могут быть невыпуклыми, изучаются другие их характеристики. Ч. м. M наз. солнцем [2], если для любых $x\notin M$ и $z\in\overrightarrow{x'x}$ (где x' — точка в M, ближайшая для x, $\overrightarrow{x'x}$ — луч с вершиной x', проходящий через x) точка x' является ближайшей в M для z. В гладких пространствах условия «M — выпукло» и «M — солнце» эквивалентны для Ч. м. M.

Свойства Ч. м. тесно связаны с аппроксимативной компактностью и непрерывностью *метрической проекции*. Пусть в банаховом пространстве X задано Ч. м. M: если а) M — *ограниченно компактное множество* или б) X равномерно выпукло, а M локально компактно, то M является солнцем (при дополнительном условии «X гладко» — выпуклым множеством). Ч. м. с непрерывной метрич. проекцией выпукло в гладком рефлексивном пространстве, а в $C[0, 1]$ является солнцем. В равномерно выпуклом банаховом пространстве всякое Ч. м. связно (даже пересечения с шарами связны). Однако в $C[0, 1]$ семейство функций x_α, где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $x_0(t)\equiv 0$, $x_\alpha(t)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+t)^{-1}$ при $\alpha>0$, является Ч. м. с изолированной точкой, т. е. несвязно и не является солнцем [8]. Остается нерешенным (1984) вопрос о том, не будет ли каждое Ч. м., являющееся солнцем, в любом банаховом пространстве связным.

В «хороших» пространствах достаточно много Ч. м. В банаховом пространстве X каждое выпуклое замкнутое множество является Ч. м. тогда и только тогда, когда X строго выпукло (строго нормировано) и рефлексивно. В произвольном рефлексивном пространстве всегда существует Ч. м.— гиперплоскость. В n-мерном банаховом пространстве существуют чебышевские подпространства всех размерностей $\leqslant n$ (см. [9]). Существует пространство, в к-ром нет нетривиальных чебышевских подпространств. В равномерно выпуклом банаховом пространстве каждое замкнутое множество M является почти чебышевским множеством в том смысле, что множество точек $x\in X$, для к-рых ближайшая точка в M существует и единственна, является дополнением тощего множества в X. В сепарабельных пространствах существуют подпространства любой конечной размерности, являющиеся «почти Ч. м.». Существует пространство, изоморфное гильбертову, в к-ром метрич. проекция на нек-рое чебышевское подпространство разрывна.

Понятие Ч. м. допускает обобщения, напр. вместо условия единственности элемента наилучшего приближения можно требовать известную «правильность» множества элементов наилучшего приближения для каждого $x\in X$, напр. компактность, связность или выпуклость. Результаты, получаемые при таких обобщениях, во многом аналогичны соответствующим результатам для Ч. м.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 151—235; [2] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 1, с. 17—19; [3] Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132; [4] Власов Л. П., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 6, с. 3—66; [5] Singer I., Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [6] его же, The theory of bestapproximation and functional analysis, Phil., 1974; [7] Болтянский В. Г., Яглом И. М., в кн.: Энциклопедия элементарной математики, т. 5, М., 1966, с. 181—269; [8] Dunham C. B., «Canad. Math. Bull.», 1975, v. 18, № 1, p. 35—37; [9] Залгаллер В. А., «Зап. научн. семинаров Ленингр. отделения матем. ин-та АН СССР», 1972, т. 27, с. 67—72.

Л. П. Власов.

ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, равномерное приближение,— приближение функций $f(x)$, непрерывных на множестве M, функциями $S(x)$ из нек-рого заданного класса функций, когда в качестве меры приближения рассматривается уклонение в равномерной метрике

$$\rho(f, S)=\sup_{x\in M}|f(x)-S(x)|.$$

П. Л. Чебышев в 1853 (см. [1]) поставил и исследовал задачу о наилучшем Ч. п. непрерывной функции алгебраич. многочленами степени не выше n. В этой задаче, а также в более общей задаче о наилучшем Ч. п. непрерывной функции рациональными дробями он получил фундаментальные результаты и тем самым создал основы теории *наилучшего приближения*.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 23—51; [2] Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М., Элементы теории функций, М., 1963.

Ю. Н. Субботин.

ЧЕВЫ ТЕОРЕМА — теорема о соотношении отрезков нек-рых прямых, пересекающих треугольник. Пусть A_1, B_1 и C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке или были все параллельны, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Прямые AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в одной точке и проходящие через вершины треугольника, называются прямыми Чевы, или чевианами. Ч. т. метрически двойственна *Менелая теореме*. Название по имени Дж. Чевы [1].

Ч. т. допускает обобщение на случай многоугольника. Пусть в плоскости многоугольника с нечетным числом вершин $A_1A_2\ldots A_{2n-1}$ дана точка O, и пусть прямые OA_1, OA_2, ..., OA_n, OA_{n+1}, ..., OA_{2n-1} пересекают противоположные вершинам A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ..., A_{2n-1} стороны многоугольника соответственно в точках a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n-1}, a_1, ..., a_{n-1}. В таком случае

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2}\cdot\frac{A_2a_2}{a_2A_3}\cdots\frac{A_{2n-2}a_{2n-2}}{a_{2n-2}A_{2n-1}}\cdot\frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1}=1.$$

Лит.: [1] Ceva G., De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio, Mil., 1678.

П. С. Моденов.

ЧЕЗАРО КРИВАЯ — плоская кривая, радиус кривизны R к-рой в произвольной точке M пропорционален отрезку нормали, отсекаемому на этой нормали полярной точки M относительно нек-рой окружности. Натуральное уравнение Ч. к.:

$$s=\int\frac{dR}{(R/b)^m-1},$$

где b — постоянное, m — действительное число. Исследована Э. Чезаро [1].

Лит.: [1] Cesaro E., Vorlesungen über natürliche Geometrie, 2 Aufl., Lpz., 1926; [2] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЧЕЗАРО МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ — совокупность методов суммирования числовых и функциональных рядов; введены Э. Чезаро [1]; обозначаются символом (C, k).

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n \qquad (*)$$

с частичными суммами S_n суммируем методом Чезаро порядка k, (C, k)-суммируем, к сумме S, если

$$\sigma_n^k = \frac{S_n^k}{A_n^k} \to S,\ n \to \infty,$$

где S_n^k и A_n^k определяются как коэффициенты разложений

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n = (1-x)^{-k-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = (1-x)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n =$$

$$= (1-x)^{-k-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Выражения для σ_n^k и A_n^k можно представить в виде

$$\sigma_n^k = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} S_n = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^k a_n,$$

$$A_n^k = \binom{k+n}{n} = \frac{(k+1)\,(k+2)\ldots(k+n)}{n!},\ k \neq -1,\ -2,\ \ldots\ .$$

Метод (C, k) является *матричным методом суммирования* с матрицей $\|a_{n\nu}\|$:

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-\nu}^{k-1}}{A_n^k}, & \nu \leqslant n, \\ 0, & \nu > n. \end{cases}$$

При $k=0$ метод совпадает с обычной сходимостью, при $k=1$ есть метод средних арифметических. Методы (C, k) вполне регулярны при $k \geqslant 0$ и не являются регулярными при $k<0$. Сила метода возрастает с увеличением k: если ряд суммируем методом (C, k), то он суммируем к той же сумме методом (C, k') при $k'>k>-1$. При $k<-1$ это свойство не сохраняется. Из суммируемости ряда (*) методом (C, k) следует, что $a_n = o(n^k)$. Метод (C, k) равносилен и совместен с методами суммирования Гёльдера (H, k) и Рисса (R, n, k), $(k>0)$. При любом $k>-1$ метод (C, k) слабее метода Абеля.

Первоначально методы (C, k) были определены Э. Чезаро для целых положительных значений параметра k и применены им к умножению рядов. Позднее они были распространены на произвольные значения k, в том числе и на комплексные. Методы (C, k) имеют многочисленные применения: при умножении рядов, в теории рядов Фурье и др. вопросах.

Лит.: [1] Cesáro E., «Bull. sci. math.», 1890, t. 14, № 1, p. 114—20; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [4] Барон С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977. *И. И. Волков.*

ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА МЕТОД — способ получения решения *Больцмана уравнения* (кинетического) для одночастичной функции распределения $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$, являющийся своеобразным методом последовательных приближений, в к-ром локальное распределение Максвелла $f_{\text{лок}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \mid n, \boldsymbol{u}, \theta)$ определяется стандартной формулой, но с локальными значениями плотности числа частиц $n(t, \boldsymbol{r})$, гидродинамич. скорости $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$ и температуры $\theta(t, \boldsymbol{r})$, используется в качестве нулевого приближения, а условием существования решения для следующих приближений является выполнение гидродинамич. уравнений для n, $\boldsymbol{u}$, θ в предыдущем приближении. Так как свертки по скорости $\boldsymbol{v}$ интеграла столкновений Больцмана с величинами 1, $\boldsymbol{v}$ и v^2 равны нулю, то в эти уравнения движения для n, $\boldsymbol{u}$ и θ интеграл столкновений явно не входит. Решение самого уравнения Больцмана ищется в виде

$$f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = f_{\text{лок}}(1 + \varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})),\ \varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \ll 1,$$

что приводит к неоднородному интегральному уравнению с линеаризованным относительно функции φ интегралом столкновений. Неоднородная часть уравнения содержит величины $n(t, \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$, $\theta(t, \boldsymbol{r})$, подчиненные упомянутым выше уравнениям. Таким образом, совместно рассматриваются сразу шесть уравнений. Решение уравнения для φ ищется в виде разложения по многочленам Сонина (присоединенные многочлены Лагерра полуцелого индекса) в пространстве скоростей. Для всего метода характерно, что зависимость функции распределения $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ от времени входит только через ее зависимость от локальных величин $n(t, \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$, $\theta(t, \boldsymbol{r})$. Нулевое приближение $f = f_{\text{лок}}$ определяет уравнения гидродинамики идеальной жидкости (уравнения Эйлера), к-рые являются условием существования первого приближения для f, ему же соответствуют уже уравнения Навье—Стокса с явными выражениями для коэффициентов диффузии, теплопроводности и двух вязкостей, следующий шаг — уравнение Бэрнетта и т. д. Параметром разложения является, по существу, относительное изменение величин $n(t, \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$, $\theta(t, \boldsymbol{r})$ на интервале, равном средней длине свободного пробега (параметр неоднородности), поэтому для задач со скачками этих величин (ударные волны и т. п.) метод не может быть использован.

Изложенный метод решения, основанный на идее решения интегральных уравнений Д. Гильберта (D. Hilbert, 1912), был разработан Д. Энскогом (D. Enskog, 1917) и независимо С. Чепменом (S. Chapman, 1916).

То же решение можно получить методом Грэда [5], не столь громоздким, как Ч.— Э. м. При этом функция f представляется в виде ряда по производным $f_{\text{лок}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} | n, \boldsymbol{u}, \theta)$ по компонентам скорости $\boldsymbol{v}$ (что фактически эквивалентно разложению функции по многочленам Эрмита в трехмерном пространстве скоростей) с зависящими от t и $\boldsymbol{r}$ коэффициентами, являющимися моментами искомой функции распределения, к-рые и определяются с помощью уравнения Больцмана. Первое приближение для f (приводящее к уравнениям Навье—Стокса) содержит только вторые производные от $f_{\text{лок}}$.

Полученное указанными методами решение для одночастичной функции распределения можно вывести непосредственно из *Боголюбова цепочки уравнений* в соответствующем малому значению параметра неоднородности *гидродинамическом приближении* (т. е. минуя кинетич. уравнение). Однако т. к. последовательные приближения, производимые в цепочке, будут включать учет корреляций более высокого порядка, то совпадение результатов произойдет лишь до первого порядка включительно, т. к. следующее приближение для f уже учитывает тройные корреляции частиц, к-рых уравнение Больцмана не содержит, причем вклады от этих членов конкурируют с теми членами, к-рые соответствуют второму приближению для функции f, удовлетворяющей стандартному уравнению Больцмана.

Лит.: [1] Чепмен С., Каулинг Т. Д., Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ., М., 1960; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей, пер. с англ., М., 1961; [4] Грэд Г., в кн.: Некоторые вопросы кинетической теории газов, пер. с англ., М., 1965, с. 7—128; [5] Grad H., в кн.: Handbuch der Physik, Bd 12, B.— [a. o.], 1958, S. 205—94. *И. А. Квасников.*

ЧЁРЧА λ-АБСТРАКЦИЯ — способ введения функций в языках математич. логики, в особенности в *комбинаторной логике*. А именно, если в нек-ром точном языке определен терм A, выражающий объект теории и зависящий от параметров $x_1, \ldots, x_n$ (и, может быть, также от других параметров), то

$$\lambda x_1 \ldots x_n A \qquad (*)$$

служит в языке обозначением функции, перерабатывающей значения аргументов $x_1, \ldots, x_n$ в объект, выражае-

мый термом A. Выражение (*) и наз. Ч. λ-а. Эта Ч. λ-а., наз. также явным определением функций, употребляется чаще всего в случае, когда в языке теории возникает опасность смешения функции как объекта исследования со значениями функции для нек-рых значений аргумента. Введена А. Чёрчем [1].

Лит.: [1] Church A., The calculi of lambda-conversion, Princeton, 1941; [2] Карри Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969. *А. Г. Драгалин.*

ЧЁРЧА ТЕЗИС — принцип, согласно к-рому класс функций, вычислимых с помощью *алгоритмов* в широком интуитивном смысле, совпадает с классом частично рекурсивных функций. Ч. т.— это естественнонаучный факт, подтверждаемый опытом, накопленным в математике за всю ее историю. Все известные в математике примеры алгоритмов удовлетворяют ему. Ч. т. впервые был высказан А. Чёрчем (A. Church, 1936). Различным уточнениям интуитивного понятия алгоритма соответствуют свои формулировки Ч. т. Тезис Тьюринга заключается в том, что всякая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима с помощью нек-рой *Тьюринга машины*, а принцип нормализации Маркова — в том, что всякая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима с помощью нек-рого *нормального алгорифма*. Из эквивалентности известных уточнений понятия алгоритма следует эквивалентность соответствующих вариантов Ч. т. Этот факт является еще одним подтверждением Ч. т. Тезис Чёрча не может быть строго доказан, так как в его формулировке участвует неточное понятие «алгоритм в интуитивном смысле». Были попытки опровергнуть Ч. т., однако они к успеху не привели (1984). Принятие Ч. т. полезно в теории алгоритмов и ее приложениях. Во-первых, при доказательстве существования тех или иных конкретных алгоритмов — машин Тьюринга, рекурсивных функций, нормальных алгорифмов и др.— можно, опираясь на Ч. т., ограничиваться интуитивно ясными построениями и не выписывать соответствующие формальные схемы.

Кроме того, Ч. т. является основанием для вывода о неразрешимости данной *алгоритмической проблемы* после того, как строго доказано, что эта проблема не может быть решена в рамках того или иного уточнения понятия алгоритма.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *С. И. Адян.*

ЧЕТАЕВА ПРИНЦИП — вариационный дифференциальный принцип механики, представляющий собой видоизменение *Гаусса принципа*, установленное Н. Г. Четаевым [1].

Согласно Ч. п., работа на элементарном цикле, состоящем из прямого движения в поле заданных сил и движения обратного (попятного) в поле сил, к-рых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механич. система была совершенно свободной, для действительного движения имеет относительный (по меньшей мере) максимум в классе мыслимых по Гауссу движений. Ч. п. распространен на физич. системы, а также на сплошные среды (см. [2]).

Подробнее см. *Вариационные принципы классической механики.*

Лит.: [1] Четаев Н. Г., «Прикл. матем. и механ.», 1941, т. 5, в. 1, с. 11—12; [2] Румянцев В. В., «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, № 4, с. 787—90. *В. В. Румянцев.*

ЧЕТАЕВА ТЕОРЕМЫ — 1) Ч. т. о неустойчивости — общие теоремы о неустойчивости движения, установленные Н. Г. Четаевым для уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

правые части к-рых X_s — голоморфные функции относительно действительных переменных x_s с коэффициентами, являющимися непрерывными и ограниченными функциями действительной переменной — времени t, определенные в нек-рой области

$$t \geqslant t_0, \ \sum_{s=1}^{n} x_s^2 < A, \qquad (2)$$

причем $X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$.

Ч. т. даны в двух формулировках: с двумя функциями V, W и с одной функцией V. Под функциями V, W понимаются действительные функции действительных переменных x_s и t, однозначные и непрерывные в области (2) и обращающиеся в нуль при $x_s = 0$, так же как их полные производные по времени 1-го порядка $\dot{V}$, $\dot{W}$, причем, напр.,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s.$$

Теорема о неустойчивости с двумя функциями (1934, см. [1], с. 222—24): если дифференциальные уравнения таковы, что: 1) для нек-рой допускающей бесконечно малый высший предел функции V существует область, где $V\dot{V} > 0$, и 2) для нек-рых значений величин x_s, численно сколь угодно малых, в области $V\dot{V} > 0$ возможно выделить область, в к-рой нек-рая функция $W > 0$, на границе области $W = 0$ значения $\dot{W}$ суть одного какого-либо определенного знака, то невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво.

При решении вопроса о неустойчивости целесообразно рассматривать интервал изменения времени $[t_0, \infty]$ закрытым и существование области $V > 0$ понимать как ее непустоту для любого t на этом интервале (см. [1], с 225—238). Если рассматриваемая область $V\dot{V} > 0$ ограничена $V = 0$ и при этом $\dot{V} \geqslant 0$, то за функцию W возможно взять функцию V.

Условие 2) можно сформулировать многими иными способами, в частности, пусть уравнения (1) имеют первый интеграл $F(t, x) = \text{const}$, обладающий свойствами функций V, и пусть область $F > 0$ не является пустой при численно сколь угодно малых значениях x_s (см. [1], с. 232). Если для возмущенных движений при $F(t, x) = \varepsilon$, сколь бы мало ε не было, тем самым будут выполняться неравенства $\dot{V} > l' > 0$ в области (2) для допускающей малый высший предел функции V, а начальные значения x_{s_0} при удовлетворении интегралу $F(t, x) = \varepsilon = F_0$ возможно выбрать так, чтобы они удовлетворяли также и неравенству $V_0 > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если интервал времени считать открытым $[t_0, \infty)$ и не вводить условного смысла существования области $V > 0$, то справедлива теорема о неустойчивости с одной функцией (1946, см. [1], с. 5—152): если дифференциальные уравнения (1) таковы, что возможно найти функцию V, ограниченную в области $V > 0$, существующей при всяком $t \geqslant t_0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x_s, производная к-рой $\dot{V}$ была бы определенно-положительной в области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво. Под определенно положительной в области $V > 0$ функцией понимается функция $W(t, x)$, к-рая может обращаться в нуль в этой области лишь на границе $V = 0$, причем для произвольного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно не было выбрано, найдется такое число $l > 0$, что при x_s, удовлетворяющих условию $V \geqslant \varepsilon$, и для всякого $t \geqslant t_0$ имеет место неравенство $W \geqslant l$.

Было дано обращение этой теоремы, чем была обоснована ее универсальность (см. [2]).

2) Ч. т.— теорема о свойствах уравнений в вариациях Пуанкаре

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i}\xi_i+\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i}\eta_i\right),\\ \frac{d\eta_j}{dt} &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i}\xi_i+\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}\eta_i\right),\end{aligned}\right\} \quad (3)$$
$$j=1, \ldots, n,$$

составленных для невозмущенного движения $q_i=q_i(t)$, $p_i=p_i(t)$, предполагаемого таким, что коэффициенты уравнений (3) суть непрерывные ограниченные действительные функции t, $H(t, q_i, p_i)$ — функция Гамильтона, ξ_i и η_i — отклонения координат q_i и импульсов p_i. Уравнения (3) имеют существенное значение в исследованиях устойчивости движений консервативных голономных систем.

Т е о р е м а. Если невозмущенное движение голономной потенциальной системы устойчиво, то характеристич. числа всех решений уравнений в вариациях (3) равны нулю, уравнения (3) являются при этом правильными и приводимыми к системе уравнений с постоянными коэффициентами и имеют знакоопределенный квадратичный интеграл.

Ч. т. обобщает теорему Лагранжа для равновесий и теорему Пуанкаре — Ляпунова для периодич. движений. Согласно теореме, для устойчивого невозмущенного движения потенциальной системы бесконечно близкие возмущенные движения имеют колебательный, волновой характер. Отсюда Н. Г. Четаев сделал вывод, что если существует аналогия между динамикой и математич. теорией света Коши, то ее следует искать в возмущенных движениях вблизи устойчивых движений потенциальных систем. И такую аналогию Н. Г. Четаев нашел (см. [1], с. 404—06), показав, что необходимое условие устойчивости голономных консервативных систем приводит к волновому уравнению. Оптико-механическая аналогия полно исследована Н. Г. Четаевым и в свете теории групп Ли, причем в основу положена оригинальная мысль о существе аналогии между двумя явлениями как о совпадении группы преобразований одного явления (колебательного процесса распространения света) с группой преобразований другого явления (возмущенных движений консервативной системы вблизи ее устойчивого движения). Н. Г. Четаев доказал (см. [1], с.393—403), что эта последняя группа представляет собой унимодулярную группу линейных преобразований, имеющую представление в полной группе преобразований Лоренца — основной для теории света Коши и Максвелла.

Лит.: [1] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962; [2] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959.

В. В. Румянцев.

ЧЕТАЕВА УРАВНЕНИЯ — общие канонич. уравнения механики голономных систем, представимые с помощью нек-рой группы Ли бесконечно малых преобразований и эквивалентные *Пуанкаре уравнениям*.

Если вместо независимых переменных η_j, определяющих действительные перемещения, ввести величины

$$y_j=\frac{\partial L}{\partial \eta_j}, \quad j=1, \ldots, k,$$

$L(t; x_1, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_k)$ — функция Лагранжа, то уравнения Пуанкаре примут более простой вид Ч. у.

$$\frac{dy_j}{dt}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{k} c_{\alpha j\beta}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}y_\beta - X_j H, \quad \eta_j=\frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad j=1, \ldots, k, \quad (1)$$

где

$$H(t; x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_k)=\sum_{j=1}^{k}\eta_j y_j - L$$

—функция Гамильтона. Вторую группу уравнений (1) можно заменить уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt}=\left(X_0+\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}X_\alpha\right)x_i, \quad i=1, \ldots, n. \quad (2)$$

Вводя функцию действия по формуле

$$V(t; x_1, \ldots, x_n; x_1^0, \ldots, x_n^0)=\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{\alpha=1}^{k} y_\alpha\eta_\alpha - H\right)dt,$$

где интегрирование происходит по действительной траектории системы, можно получить соотношения

$$y_\alpha=X_\alpha V, \; y_\alpha^0=-X_\alpha^0 V, \; \alpha=1, \ldots, k. \quad (3)$$

Здесь X_α^0 обозначают операторы X_α, отнесенные к начальному моменту времени t_0 и начальному положению системы x_i^0; y_α^0 — начальные значения y_α. Если функция действия известна, то уравнения (3) решают задачу механики, причем вторая группа уравнений (3) определяет в неявном виде закон движения системы.

Функция действия удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными 1-го порядка

$$X_0 V+H(t, x_1, \ldots, x_n, X_1 V, \ldots, X_k V)=0. \quad (4)$$

Если известен полный интеграл $V(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ уравнения (4), то решения Ч. у. определяются соотношениями

$$\frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i, \; y_j=X_j V, \; i=1, \ldots, n, \; j=1, \ldots, k,$$

где a_i, b_i — произвольные постоянные, стесненные $n-k$ проинтегрированными уравнениями связей.

Вместо переменных x_i могут быть рассмотрены новые переменные α_i, определяющие положение системы. Пусть $A_0=\partial/\partial t$, A_s, $s=1, \ldots, k$ представляют $(k+1)$-членную группу непрерывных преобразований Ли в переменных α_i со структурными постоянными γ_{srj}, причем $\gamma_{0rj}=0$; π_s и θ_s — переменные, определяющие возможные и действительные перемещения, так что для нек-рой функции

$$f(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$
$$\delta f=\sum_{s=1}^{k}\pi_s A_s f, \; df=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\theta_s A_s f\right)dt.$$

Преобразование переменных определяется характеристич. функцией

$$V(t, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \; \left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial \alpha_j}\right\| \neq 0,$$

и формулами

$$y_s=X_s V, \; \beta_s=-A_s V, \; s=1, \ldots, k,$$

вместе с проинтегрированными уравнениями связей. Такие преобразования наз. каноническ. преобразованиями, они сохраняют канонич. вид уравнений движения, причем функция Гамильтона в новых переменных принимает вид

$$H^*(t, \alpha, \beta)=\frac{\partial V}{\partial t}+H.$$

Если характеристич. функция преобразования является полным интегралом уравнения (4) $\left(\text{при } X_0=\frac{\partial}{\partial t}\right)$, то функция $H^*=0$ и Ч. у. (1), (2) в новых переменных принимают вид

$$\frac{d\beta_s}{dt}=\sum_{r,j=1}^{k}\gamma_{rsj}\theta_r\beta_j, \; \theta_s=0, \; s=1, \ldots, k, \; \frac{d\alpha_i}{dt}=\Sigma_s\theta_s A_s\alpha_i,$$

т. е. $\alpha_i=\text{const}$, $\beta_s=\text{const}$, $i=1, \ldots, n$, $s=1, \ldots, k$.

Линейная форма $\Omega=\sum_{s=1}^{k} y_s\omega_s$ определяет основной относительный интегральный инвариант динамики.

Условие того, что $f(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \text{const}$, есть первый интеграл Ч. у., имеет вид

$$X_0 f + (H, f) = 0,$$

где

$$(f, g) = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} X_\alpha g - \frac{\partial g}{\partial y_\alpha} X_\alpha f \right) + \sum_{\alpha, \beta, s=1}^{k} c_{\alpha\beta s} y_s \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial g}{\partial y_\beta}$$

— скобка Пуассона.

Если $f=a$ и $g=b$ являются первыми интегралами, то интегралом будет и $(f, g)=c$ (обобщение *Пуассона теоремы*).

Ч. у. выведены Н. Г. Четаевым [1]—[3], разработавшим и их теорию.

Лит.: [1] Четаев Н. Г., «С. r. Acad. sci.», 1927, t. 185, p. 1577—78; [2] его же, «Докл. АН СССР. А», 1928, № 7, с. 103—04; [3] его же, «Прикл. матем. и механ.», 1941, т. 5, в. 2, с. 253—62. *В. В. Румянцев.*

ЧЕТАЕВА ФУНКЦИЯ — функция $v(x)$ в окрестности неподвижной точки $x=0$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad F(0) = 0, \qquad (*)$$

обладающая двумя свойствами: 1) существует примыкающая к точке $x=0$ область G, в к-рой $v>0$, и $v=0$ на границе области G вблизи $x=0$; 2) в области G производная в силу системы $(*)$ (см. *Дифференцирование в силу системы*) $\dot{v}>0$.

Справедлива теорема Четаева [1]: если для системы $(*)$ имеется Ч. ф. v, то неподвижная точка $x=0$ неустойчива по Ляпунову.

Ч. ф. является обобщением *Ляпунова функции* и дает удобный способ доказательства неустойчивости (см. [2]). Напр., для системы

$$\dot{x} = ax + o(|x| + |y|),$$
$$\dot{y} = -by + o(|x| + |y|),$$

где $a, b>0$, Ч. ф. будет $v=x^2-c^2y^2$ при любом $c\neq 0$. Предложены обобщения Ч. ф., в частности для неавтономных систем (см. [3]).

Лит.: [1] Четаев Н. Г., «Докл. АН СССР», 1934, т. 1, № 9, с. 529—31; [2] его же, Устойчивость движения, 3 изд., М., 1965; [3] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959. *А. Д. Брюно.*

ЧЕТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, не меняющая знак при изменении знака независимого переменного, т. е. функция, удовлетворяющая условию $f(-x)=f(x)$. График Ч. ф. симметричен относительно оси ординат.

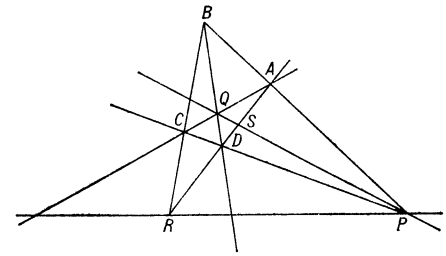
ЧЕТНОЕ ЧИСЛО — целое число, делящееся (без остатка) на 2.

ЧЕТЫРЕХ КРАСОК ЗАДАЧА: можно ли области любой плоской карты (см. *Граф плоский*) раскрасить четырьмя цветами так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета?

Гипотеза о том, что ответ на Ч. к. з. утвердительный, была сформулирована в сер. 19 в. В 1890 было доказано более слабое утверждение, а именно, что любая плоская карта раскрашивается в пять цветов. Сопоставляя любой плоской карте двойственный ей плоский граф, получают эквивалентную формулировку Ч. к. з. в терминах графов: верно ли, что хроматич. число (см. *Графа раскраска*) любого плоского графа G не превосходит 4 ($\chi(G)\leqslant 4$)? Многочисленные попытки решения Ч. к. з. оказали влияние на развитие ряда направлений *графов теории*. В 1976 анонсировано положительное решение Ч. к. з. с использованием ЭВМ (см. [3]).

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Ore O., The four-color problem, N. Y.— L., 1967; [3] Appel K., Haken W., «Ill. J. Math.», 1977, v. 21, № 3, p. 429—567. *В. Б. Алексеев.*

ЧЕТЫРЕХВЕРШИННИК полный — совокупность четырех точек A, B, C, D, лежащих в одной плоскости, из к-рых никакие три не принадлежат одной прямой, и шести прямых, соединяющих попарно эти точки (см. рис.). Точки A, B, C, D наз. вершинами,



прямые AB, CD, AC, BD, BC, AD — сторонами полного Ч. Стороны, не имеющие общей вершины, наз. противоположными; точки P, Q, R пересечения противоположных сторон наз. диагональными точками.

Если S и T — точки пересечения прямой PQ с прямыми AD и BC, то четверка точек P, Q, S, T является *гармонической четверкой* точек. Фигура, двойственная Ч., наз. четырехсторонником — совокупность четырех прямых, лежащих в одной плоскости, из к-рых никакие три не принадлежат одной точке. *П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.*

ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — топологич. пространство, каждая точка к-рого имеет окрестность, гомеоморфную четырехмерному числовому пространству $\mathbb{R}^4$ или замкнутому полупространству $\mathbb{R}^4_+$. Это определение обычно дополняют требованием того, чтобы Ч. м., как топологич. пространство, было хаусдорфовым и имело счетную базу. Топология Ч. м. занимает особое место в *топологии многообразий*. С одной стороны, размерность 4 слишком мала для беспрепятственного применения соображений *общего положения* и *трансверсальности*, столь продуктивных в многомерной топологии, и достаточно велика для того, чтобы исключить прямое использование более интуитивных методов трехмерной топологии. С другой стороны, топология Ч. м. наследует многие трудности как трехмерной, так и многомерной топологии многообразий. Это объясняется, напр., тем, что край Ч. м. может быть произвольным трехмерным многообразием, и тем, что любая конечно определенная группа является *фундаментальной группой* нек-рого замкнутого Ч. м. На последнем замечании основано доказательство невозможности алгоритмич. распознавания сферы среди Ч. м. Аномальность размерности 4 хорошо иллюстрируется следующим фактом: на многообразии $\mathbb{R}^n$ существует нестандартная кусочно линейная (и дифференцируемая) структура только при $n=4$. Существуют Ч. м., не допускающие кусочно линейной структуры. Если все же такая структура имеется, то имеется и единственная согласованная с ней дифференцируемая структура. Ч. м., снабженное комплексной структурой, наз. аналитической поверхностью.

Каждому замкнутому ориентированному Ч. м. M отвечает унимодулярная целочисленная симметрическая билинейная форма L_M, задаваемая на свободной части группы $H_2(M; \mathbb{Z})$ с помощью пересечения циклов. Сигнатура этой формы наз. сигнатурой многообразия. Форма пересечений является важнейшим инвариантом Ч. м. Два замкнутых односвязных дифференцируемых Ч. м. h-кобордантны тогда и только тогда, когда их формы изоморфны. Если квадратичная форма, отвечающая билинейной форме L_M дифференцируемого Ч. м. M, принимает только четные значения, то структурную группу SO его стабильного касательного расслоения можно заменить на группу Spin. Такие Ч. м.

наз. спинорными. Имеется топологич. классификация замкнутых односвязных Ч. м. Каждое такое Ч. м. с четной формой полностью определяется ею, причем любая четная целочисленная симметрическая унимодулярная форма реализуема как форма пересечения односвязного топологического Ч. м. В частности, справедлива четырехмерная топологич. гипотеза Пуанкаре. Классифицирующим инвариантом Ч. м. с нечетной формой служат пары вида $(L, \varkappa)$, где L — нечетная целочисленная симметрическая унимодулярная билинейная форма, а $\varkappa=0$ или 1. Каждое замкнутое односвязное Ч. м. M с нечетной формой полностью определяется парой $(L_M, \varkappa_M)$, где $\varkappa_M=0$, если стабильное касательное расслоение многообразия M допускает векторную редукцию, и 1 в противном случае. Любая такая пара реализуема. Вопрос о том, какие формы реализуются односвязными дифференцируемыми Ч. м., до конца не исследован. Известно, что можно реализовать все нечетные неопределенные формы. Из четных неопределенных форм связные суммы *Куммера поверхностей* и многообразий $S^2\times S^2$ реализуют формы вида $mE_8\oplus nU$, если m четно и $3m\leqslant 2n$. Форма указанного вида с нечетным числом m заведомо не является формой пересечения замкнутого дифференцируемого Ч. м., так как сигнатура такого спинорного многообразия обязана делиться на 16, а сигнатура форм $mE_8\oplus nU$ равна $8m$. Из определенных форм реализуемы только формы, задаваемые единичными матрицами.

Лит.: [1] Мандельбаум Р., Четырехмерная топология, пер. с англ., М., 1981; [2] Siebenmann L., La conjecture de Poincaré topologique en dimension 4, Séminaire Bourbaki, 34 année, 1981/82, n° 588, p. 1—30.

С. В. Матвеев.

ЧЕХА КОГОМОЛОГИИ, когомологии Александрова — Чеха, спектральные когомологии,— прямой предел

$$H^n(X;\ G)=\varinjlim H^n(\alpha;\ G)$$

когомологий с коэффициентами в абелевой группе G нервов всевозможных открытых покрытий α топологич. пространства X. Когомологии замкнутого подмножества $A\subset X$ могут быть определены аналогичным образом с помощью подсистем $\alpha'\subset\alpha$ всех тех множеств из α, к-рые имеют непустое пересечение с A. Предел групп пар $H^n(\alpha,\ \alpha';\ G)$ определяет когомологии $H^n(X,\ A;\ G)$ пары $(X,\ A)$. Когомологич. последовательность

$$\ldots\to H^n(X,\ A;\ G)\to H^n(X;\ G)\to H^n(A;\ G)\to$$
$$\to H^{n+1}(X,\ A;\ G)\to\ldots$$

пары $(X,\ A)$ точна как предел точных когомологич. последовательностей пар нервов $(\alpha,\ \alpha')$.

Когомологии Александрова — Чеха служат заменой сингулярных когомологий в общих категориях топологич. пространств и совпадают с ними всякий раз, когда применение последних не вызывает сомнений (а именно, в случае гомологически локально связных, в частности, локально стягиваемых пространств). Они удовлетворяют всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам* и в категории паракомпактных пространств однозначно определяются этими аксиомами вместе со следующими требованиями: а) $H^p=0$ при $p<0$; б) когомологии дискретного объединения $\bigcup_\lambda X_\lambda$ естественно изоморфны прямому произведению когомологий пространств X_λ; в) $\varinjlim H^p(U_\lambda;\ G)\tilde{=}H^p(x;\ G)$ для системы всех окрестностей U_λ произвольной точки $x\in X$. Когомологии Александрова — Чеха изоморфны когомологиям Александера — Спеньера. Они могут быть определены с коэффициентами в пучке и для паракомпактных пространств изоморфны когомологиям, определяемым в теории пучков.

Возможность аппроксимации пространств полиэдрами — нервами замкнутых покрытий установлена П. С. Александровым (см. [1]—[3]). Для частного случая им было дано определение обратного предела топологич. пространств, а на основе аппроксимации — определение чисел Бетти метризуемых компактов. Группы гомологий компактов определялись в терминах циклов Вьеториса. Л. С. Понтрягин [4] ввел прямые и обратные спектры групп, и эти понятия были применены им к изучению групп гомологий компактов. Э. Чех (E. Čech) стал рассматривать нервы конечных открытых покрытий некомпактных пространств и на этой основе положил начало гомологич. теории произвольных топологич. пространств. Позже выяснилось, что рассмотрение исключительно конечных покрытий не оправдано (так как приводит к довольно сложным гомологиям компактификации Стоуна—Чеха). Плодотворность использования произвольных открытых покрытий в теории гомологий и когомологий некомпактных пространств продемонстрировал Х. Даукер [5].

Лит.: [1] Александров П. С., «Math. Ann.», 1927, Bd 96, S. 489—511; [2] его же, «C. r. Acad. sci.», 1927, t. 184, p. 317—20; [3] его же, «Ann. Math.», 1928, v. 30, p. 101—87; [4] Понтрягин Л. С., «Math. Ann.», 1931, Bd 105, H. 2, S. 165—205; [5] Dowker C. H., «Amer. J. Math.», 1947, v. 69, p. 200—42; [6] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [7] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [8] Массси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981, гл. 1—3, 8 и доб. к гл. 6; [9] Čech E., «Fund. math.», 1932, v. 19, p. 149—83.

Е. Г. Скляренко.

ЧЖОУ КОЛЬЦО — кольцо классов *алгебраических циклов* на неособом квазипроективном алгебраич. многообразии относительно рациональной эквивалентности. Умножение в этом кольце определяется в терминах пересечения циклов (см. *Пересечений теория*).

Ч. к. $A(X)=\oplus_{i\geqslant 0}A^i(X)$ многообразия X является градуированным коммутативным кольцом, если обозначить через $A^i(X)$ группу классов циклов коразмерности i. При этом для морфизма $f\colon X\longrightarrow Y$ гомоморфизм обратного образа $f^*\colon A(Y)\longrightarrow A(X)$ является гомоморфизмом колец, а гомоморфизм прямого образа $f_*\colon A(X)\longrightarrow A(Y)$ является (для собственных f) гомоморфизмом $A(Y)$—модулей. Последнее означает, что имеет место формула проекций:

$$f_*(f^*y\cdot x)=y\cdot f_*(x),\ x\in A(X),\ y\in A(Y).$$

Ч. к. является областью значений для теории классов Чжэня алгебраич. расслоений (см. [1]), а именно, если E — локально свободный пучок ранга r на многообразии X, $P(E)$ — его проективизация, $\pi\colon P(E)\longrightarrow X$ — канонич. проекция, $\zeta\in A^1(P(E))$ — класс дивизоров, соответствующий обратимому пучку $O_{P(E)}(1)$, то π^* является вложением и Ч. к. $A(P(E))$ отождествляется с фактором кольца многочленов $A(X)[\zeta]$ по идеалу, порожденному многочленом

$$\zeta^r-c_1(E)\,\zeta^{r-1}+\ldots+(-1)^r c_r(E).$$

Коэффициент $c_k(E)\in A^k(X)$ наз. k-м классом Чжэня пучка E.

В случае многообразий над полем комплексных чисел имеется гомоморфизм $A(X)\to H(X,\ \mathbb{Z})$ в кольцо сингулярных когомологий, удваивающий степени и совместимый с гомоморфизмами прямого и обратного образов.

Если X — особое квазипроективное многообразие, то его кольцо Чжоу $A(X)$ определяется как прямой предел колец: $A(X)=\varinjlim A(Y)$ по всем морфизмам $f\colon X\longrightarrow Y$, где Y неособо. Получается контравариантный функтор в категорию градуированных колец, удовлетворяющий формуле проекций (см. [3]).

Лит.: [1] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [2] Anneaux de Chow et applications. Seminaire Chevalley, P., 1958; [3] Fulton W., «Publ. Math. IHES», 1975, № 45, p. 147—67.

Вал. С. Куликов.

ЧЖОУ МНОГООБРАЗИЕ, Чжоу схема,— алгебраическое многообразие, точки к-рого параметризуют

все алгебраич. подмногообразия X размерности r и степени d проективного пространства P^n.

В произведении $X\times(\check{P}^n)^{r+1}$, где $\check{P}^n$ — двойственное к P^n проективное пространство, параметризующее гиперплоскости $u\subset P^n$, рассматривается подмногообразие

$$\Gamma=\{x,\ u^{(0)},\ \ldots,\ u^{(r)}\mid x\in u^{(i)}\ \text{при}\ i=0,\ \ldots,\ r\}.$$

Его образ $p_2(\Gamma)\subset(\check{P}^n)^{r+1}$ при проекции на второй сомножитель есть гиперповерхность в $(\check{P}^n)^{r+1}$, к-рая задается формой F_X от $r+1$ системы и по $n+1$ переменным, однородной степени d по каждой системе переменных. Форма F_X наз. ассоциированной формой (или формой Кэли) многообразия X; она полностью определяет подмногообразие X. Эта форма была введена Б. Л. Ван дер Варденом и В. Чжоу [1]. Коэффициенты формы F_X определены с точностью до постоянного множителя и наз. координатами Чжоу многообразия X.

Координаты Чжоу многообразия X определяют точку $c(X)\in P^{\nu}$, где ν — нек-рая функция от n, r, d. Точки $c(X)\in P^{\nu}$, соответствующие всем неприводимым подмногообразиям $X\subset P^n$ размерности r и степени d, заполняют в P^{ν} квазипроективное подмногообразие $C_{n,r,d}$, называемое многообразием Чжоу. Если рассматривать не только неприводимые подмногообразия, но и положительные алгебраич. циклы (т. е. формальные линейные комбинации многообразий с целыми положительными коэффициентами) размерности r и степени d в P^n, то получается замкнутое подмногообразие $\overline{C}_{n,r,d}\subset P^{\nu}$, к-рое также наз. многообразием Чжоу. Ч. м. является базой универсального алгебраич. семейства $\mathfrak{X}\xrightarrow{\pi}\overline{C}_{n,r,d}$, где $\mathfrak{X}\subset\overline{C}_{n,r,d}\times P^n$, π индуцировано проекцией и слой $\pi^{-1}(c)$ в точке $c(X)\in\overline{C}_{n,r,d}$ совпадает с циклом X. Простейшими примерами Ч. м. являются многообразия $C_{3,1,d}$ — кривых степени d в P^3. Так, $C_{3,1,1}=\overline{C}_{3,1,1}$ — неприводимое многообразие размерности 4, изоморфное квадрике Плюккера в P^5; $\overline{C}_{3,1,2}=C^{(1)}\cup C^{(2)}$ состоит из двух компонент размерности 8, где $C^{(1)}$ соответствует плоским кривым 2-го порядка, а $C^{(2)}$ — парам прямых; $\overline{C}_{3,1,3}$ состоит из четырех компонент размерности 12, к-рые соответствуют тройкам прямых, кривым, состоящим из прямой и плоской квадрики, плоским кубикам, неплоским кривым степени 3. Во всех этих случаях многообразия $C_{3,1,d}$ рациональны. Однако из нерациональности схемы модулей кривых достаточно большого рода следует, что при достаточно больших d многообразия $C_{3,1,d}$ нерациональны (см. [2]).

Если $V\subset P^n$ — алгебраич. подмногообразие, то циклы $Z\subset P^n$ размерности r и степени d, лежащие в V, образуют алгебраич. подмногообразие $\overline{C}_{r,d}(V)\subset\overline{C}_{n,r,d}$. Этот результат позволяет ввести нек-рую алгебро-геометрич. структуру на множестве положительных r-мерных циклов $Z_r^+(V)=\bigcup_{d>0}\overline{C}_{r,d}(V)$ многообразия V (см. [1]).

О других подходах к проблеме классификации многообразий см. *Гильберта схема*, *Модулей проблема*.

Лит.: [1] Van der Waerden B. L., Chow W.-L., «Math. Ann.», 1937, Bd 113, S. 692—704; [2] Harris J., Mumford D., «Invent. Math»., 1982, v. 67, p. 23—86; [3] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1954; [4] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вал. С. Куликов.

ЧЖОУ ТЕОРЕМА: любое аналитич. подмножество комплексного проективного пространства является алгебраическим многообразием. Теорема доказана В. Чжоу [1].

Лит.: [1] Chow W.-L., «Amer. J. Math.», 1949, v. 71, p. 893—914; [2] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, т. 1, пер. с англ., М., 1982; [3] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961.

А. Л. Онищик.

ЧЖЭНЯ КЛАСС — *характеристический класс*, определенный для комплексных векторных расслоений. Ч. к. комплексного векторного расслоения ξ с базой B обозначается $c_i(\xi)\in H^{2i}(B)$ и определен для всех натуральных индексов i. Полным Ч. к. наз. неоднородный характеристич. класс $c=1+c_1+c_2+\ldots$, а полиномом Чжэня — выражение $c_t=1+c_1t+c_2t^2+\ldots$, где t — формальная переменная. Ч. к. введены в [1].

Характеристич. классы, определенные для n-мерных комплексных векторных расслоений, со значениями в целочисленных когомологиях, естественно отождествляются с элементами кольца $H^{**}(BU_n)$. В этом смысле Ч. к. c_i можно считать элементами группы $H^{2i}(BU_n)$, полный Ч. к. — неоднородным элементом кольца $H^{**}(BU_n)$, а полином Чжэня — элементом кольца формальных степенных рядов $H^{**}(BU_n)[[t]]$.

Ч. к. обладают следующими свойствами, к-рые однозначно их определяют. 1) Для векторных расслоений ξ, η с общей базой B $c(\xi\oplus\eta)=c(\xi)\,c(\eta)$, другими словами, $c_k(\xi\oplus\eta)=\sum_i c_i(\xi)\,c_{k-i}(\eta)$, $c_0=1$. 2) Для одномерного универсального расслоения $\varkappa_1$ над $\mathbb{C}P^{\infty}$ имеет место равенство $c(\varkappa_1)=1+u$, где $u\in H^2(\mathbb{C}P^{\infty})$ — ориентация расслоения $\varkappa_1$ ($\mathbb{C}P^{\infty}$ — *Тома пространство* расслоения $\varkappa_1$, к-рое, будучи комплексным, имеет однозначно определенную ориентацию u).

Следствия свойств 1—2): $c_i(\xi)=0$ при $i>\dim\xi$; $c(\xi)=c(\xi\oplus\theta)$, где θ — тривиальное расслоение. Последнее обстоятельство позволяет определить Ч. к. как элементы кольца $H^{**}(BU)$.

Если $\omega=\{i_1,\ \ldots,\ i_k\}$ — набор целых неотрицательных чисел, то через c_ω обозначается характеристич. класс $c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k}\in H^{2n}(BU)$, где $n=i_1+\ldots+i_k$.

При естественном мономорфизме $H^{**}(BU_n)\longrightarrow H^{**}(BT_n)=\mathbb{Z}[[x_1,\ \ldots,\ x_n]]$, индуцированном отображением $BT_n=\mathbb{C}P^{\infty}\times\ldots\times\mathbb{C}P^{\infty}\longrightarrow BU_n$, Ч. к. переходят в элементарные симметрич. функции, а полный Ч. к. переходит в многочлен $\prod_{i=1}^n(1+x_i)$. Образом кольца $H^{**}(BU_n)$ в $H^{**}(BT_n)=\mathbb{Z}[[x_1,\ \ldots,\ x_n]]$ является подкольцо всех симметрических формальных степенных рядов. Каждый симметрический формальный степенной ряд от образующих Ву $x_1,\ \ldots,\ x_n$ определяет характеристич. класс, к-рый может быть выражен через Ч. к. Напр., ряд $\prod_{i=1}^n\frac{x_i}{1-e^{x_i}}$ определяет характеристич. класс с рациональными коэффициентами, наз. классом Тодда и обозначается $T\in H^{**}(BU_n;\mathbb{Q})$.

Пусть $\omega=\{i_1,\ \ldots,\ i_k\}$ — набор целых неотрицательных чисел. Через $S_\omega(c_1,\ \ldots,\ c_n)$ обозначается характеристич. класс, определяемый наименьшим симметрич. многочленом от переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$, где $n\geqslant i_1+\ldots+i_k$, содержащим одночлен $x_1^{i_1}\ldots x_k^{i_k}$.

Пусть h^* — ориентированная мультипликативная теория когомологий. Ч. к. σ_i со значениями в теории h^* обладают такими же, что и обычные Ч. к., свойствами: $\sigma(\xi\oplus\eta)=\sigma(\xi)\,\sigma(\eta)$, $\sigma=1+\sigma_1+\sigma_2+\ldots$; $\sigma(\varkappa_1)=1+u\in h^*(\mathbb{C}P^{\infty})$, где $u\in h^2(\mathbb{C}P^{\infty})$ — ориентация расслоения $\varkappa_1$, к-рые их однозначно определяют. Как и для обычных Ч. к., употребляются обозначения $\sigma_\omega=\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_k}$ и $S_\omega(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n)$. Если ξ, η — комплексные векторные расслоения, то

$$S_\omega(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n)(\xi\oplus\eta)=$$
$$=\sum_{\omega'\cup\omega''=\omega}S_{\omega'}(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n)(\xi)\,S_{\omega''}(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n)(\eta),$$

где суммирование производится по наборам ω', ω'' с $\omega' \bigcup \omega'' = \omega$.

В качестве теории h^* можно взять теорию унитарных *кобордизмов* U^* или *K-теорию*. Для U^*-теории элемент $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ определяется тождественным отображением $\mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty = MU_1$, а для K-теории $u = \beta(1 - [\bar{x}]) \in \tilde{K}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, где β: $K^0 \to K^2$ — оператор периодичности Ботта. Обозначение σ_i сохраняется для Ч. к. со значениями в U^*-теории, а Ч. к. со значениями в K-теории обозначается γ_i.

Согласно общей теории, $\gamma_i(\xi) \in K^{2i}(B)$, где ξ — векторное расслоение с базой B. Однако K-теорию часто удобнее рассматривать как $\mathbb{Z}_2$-градуированную теорию, отождествляя группы $K^n(B)$ с $K^{n+2}(B)$ с помощью оператора периодичности β. Тогда $K^*(B) = K^0(B) \oplus \tilde{K}^1(B)$, и $\gamma(\xi) \in K^0(B)$ при всех i. При такой точке зрения имеет смысл вместо полного Ч. к. рассматривать полином Чжэня

$$\gamma_t(\xi) = 1 + \sum_{i>0} \gamma_i(\xi)\, t^i \in K^0(B)[t].$$

Пусть $\lambda^i(\xi) = [\xi \wedge \ldots \wedge \xi]$ — когомологич. операции в K-теории (i сомножителей). Полином

$$\lambda_t(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\xi)\, t^i \in K^0(B)[t]$$

обладает точно таким же, как и γ_t, свойством мультипликативности

$$\lambda_t(\xi \oplus \eta) = \lambda_t(\xi)\, \lambda_t(\eta).$$

Между этими полиномами имеется следующая связь:

$$\frac{\lambda t}{1-t}(\overline{\xi} - \dim \xi) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)\, \gamma_i(\xi)\, t^i = \gamma_{-t}(\xi),$$

здесь обе части равенства лежат в $K^0(B)[t]$, $\dim \xi$ — тривиальное расслоение размерности $\dim \xi$. Построенные классы γ_i отличаются от классов, построенных М. Атьей, к-рый определил их формулой $\gamma_t(\xi) = \frac{\lambda t}{1-t}(\xi)$. Р. Стонг [1] определил классы γ_i, к-рые удовлетворяют условию

$$\gamma_t(\xi) = \frac{\lambda t}{1-t}(\overline{\xi} - \dim \xi).$$

Расхождение вызвано тем, что у Стонга

$$u = \beta([\varkappa_1] - 1) \in \tilde{K}^2(\mathbb{C}P^\infty).$$

С классами σ_i связано плодотворное в теории гомотопий понятие алгебры Ландвебера — Новикова. Для произвольного набора целых неотрицательных чисел $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ рассматривается характеристич. класс $S_\omega(\sigma'_1, \ldots, \sigma_n) \in U^{2d}(BU)$, где $d = i_1 + \ldots + i_k$. Имеет место *Тома изоморфизм* $U^{2d}(BU) \to \tilde{U}^{2d}(MU) \subset U^{2d}(MU)$, здесь MU — *спектр*, соответствующий U^*-теории. Образ класса $S_\omega(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ в $U^{2d}(MU)$ определяет *когомологическую операцию* в U^*-теории. Подалгебра *Стинрода алгебры* в U^*-теории, порожденная операциями такого вида, наз. алгеброй Ландвебера — Новикова. Операция, построенная по набору $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$, обозначается через S_ω.

Для одномерных расслоений ξ, η имеет место равенство

$$c_1(\xi \oplus \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta).$$

Это важное обстоятельство, позволяющее определить *Чжэня характер*, не имеет места в обобщенных теориях когомологий. Однако существует формальный степенной ряд $g(t)$ с коэффициентами в $h^*(pt) \otimes \mathbb{Q}$, для к-рого $g(\sigma_1(\xi \oplus \eta)) = g(\sigma_1(\xi_1)) + g(\sigma_1(\eta))$, где σ_1 первый Ч. к. со значениями в h^*. Для унитарной теории кобордизмов

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathbb{C}P^\infty]}{n+1}\, t^{n+1},$$

где $[\mathbb{C}P^\infty] = \Omega_u^* = U^*(pt)$ — класс кобордизма проективного пространства $\mathbb{C}P^\infty$. Этот ряд наз. рядом Мищенко.

Лит.: [1] Chern S. S., «Ann. Math.», 1946, v. 47, № 1, p. 85—121; [2] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [3] Але Р., Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [4] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [5] Атья М. Ф., Зингер И. М., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5, с. 99—142; Атья М. Ф., Сегал Г. Б., там же, в. 6, с. 135—49; Атья М. Ф., Зингер И. М., там же, 1969, т. 24, в. 1, с. 127—82; 1972, т. 27, в. 4, с. 161—88; [6] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973; [7] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [8] Бухштабер В. М., «Матем. сб.», 1970, т. 83, с. 575—95; [9] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [10] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967.

А. Ф. Харшиладзе.

ЧЖЭНЯ ХАРАКТЕР — характеристич. класс, определяющий кольцевой гомоморфизм $\mathrm{ch}\colon K(X) \to H^{**}(X; \mathbb{Q})$. Для одномерного расслоения ξ имеет место равенство $\mathrm{ch}\,\xi = e^{c_1(\xi)}$, где $c_1(\xi)$ — рациональный *Чжэня класс*. Это равенство вместе с требованием, чтобы класс ch определял гомоморфизм $K^0(X) \to H^{ev}(X, \mathbb{Q})$, однозначно определяют класс ch. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ch}\colon \tilde{K}^0(X) & \to & \tilde{H}^{**}(X;\ \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{ch}\colon \tilde{K}^0(S^2 \wedge X) & \to & \tilde{H}^{**}(S^2 \wedge X;\ \mathbb{Q}), \end{array}$$

в к-рой вертикальные стрелки обозначают оператор периодичности и двойную *надстройку*. Пусть отображение

$$\mathrm{ch}\colon K^1(X) = \tilde{K}^0(SX^+) \to H^{odd}(X;\ \mathbb{Q})$$

совпадает с композицией

$$\mathrm{ch}\colon \tilde{K}^0(SX^+) \to \tilde{H}^{ev}(SX^+; \mathbb{Q}) \xrightarrow{S^{-1}} \tilde{H}^{odd}(X^+; \mathbb{Q}) = H^{odd}(X; \mathbb{Q})$$

(здесь через «+» обозначается функтор из категории топологич. пространств в категорию пунктированных пространств $X^+ = (X \bigcup x_0,\ x_0)$. Полученное преобразование функторов ch: $K^*(X) \to H^{**}(X; \mathbb{Q})$ индуцирует преобразование $K^*(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{**}(X; \mathbb{Q})$, к-рое является естественным изоморфизмом $\mathbb{Z}_2$-градуированных колец.

Если h^* — обобщенная теория когомологий, в к-рой определены классы Чжэня σ_i, то для одномерных расслоений ξ обобщенный характер Чжэня

$$\sigma h(\xi) \in h^{**}(X) \otimes \mathbb{Q}$$

определяется формулой:

$$\sigma h(\xi) = e^{g(\sigma_i(\xi))},$$

где $g(t)$ — логарифм соответствующей теории h^* формальной группы. С помощью леммы о расщеплении может быть определен естественный кольцевой гомоморфизм

$$\sigma h\colon K^* \to h^{**}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Для обобщенной теории когомологий h^* существует единственный естественный изоморфизм градуированных групп $\mathrm{ch}_h\colon h^*(X) \to \mathscr{H}^{**}(X;\ h^*(pt) \otimes \mathbb{Q})$, к-рый для $X = pt$ совпадает с отображением

$$h^*(pt) \to h^*(pt) \otimes \mathbb{Q},\quad x \to x \otimes 1.$$

Здесь

$$[\mathscr{H}^*(X;\ h^*(pt) \otimes \mathbb{Q})]_n = \sum_i \mathscr{H}^i(X,\ h^{n-i}(pt) \otimes \mathbb{Q}).$$

Отображение ch_k, где $K^* - \mathbb{Z}_2$-градуированная K-теория совпадает с характером Чжэня ch. Естественное преобразование функторов ch_{h^*} наз. характером Чжэня — Дольда.

Пусть h^* — унитарная теория кобордизмов U^*, а X — пространство $\mathbb{C}P^\infty$. Кольцо $U^{**}(\mathbb{C}P^\infty)$ изоморфно кольцу

формальных степенных рядов $\Omega_u^*[[u]]$, где $\Omega_u^* = U^*(pt)$, $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — ориентация расслоения $\varkappa_1$. Аналогично, кольцо $\mathcal{H}^*(\mathbb{C}P^\infty; \Omega_u^*)$ изоморфно $\Omega_u^*[[x]]$, где $x \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — ориентация расслоения $\varkappa_1$. Формальный степенной ряд $\mathrm{ch}_u(u)$ функционально обратен ряду Мищенко

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathbb{C}P^\infty]}{n+1} u^{n+1}.$$

Лит. см. при статье *Чжэня класс*. *А. Ф. Харшиладзе.*

ЧЖЭНЯ ЧИСЛО — *характеристическое число* квазикомплексных многообразий.

Пусть $x \in H^{**}(BU_n)$ — произвольный характеристич. класс. Для замкнутого квазикомплексного многообразия M^{2n} целое число $x[M^{2n}] = \langle x(\tau M), [M^{2n}]\rangle$ наз. числом Чжэня многообразия M^{2n}, соответствующим классу x, здесь $[M^{2n}] \in H_{2n}(M^{2n})$ — *фундаментальный класс* многообразия или ориентация, однозначно определенная квазикомплексной структурой, τM — касательное расслоение к M. Если в качестве x взять характеристич. класс с рациональными коэффициентами, то соответствующие ему Ч. ч. будут рациональными. Ч. ч. $x[M^{2n}]$ зависит лишь от однородной компоненты степени $2n$ класса x. Ч. ч. инвариантны относительно квазикомплексного бордизма, следовательно, характеристич. класс x индуцирует гомоморфизм $\Omega_{2n}^u \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Разбиением числа n наз. набор $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ целых неотрицательных чисел с $i_1 + \ldots + i_k = n$. Если для квазикомплексных многообразий M, N размерности $2n$ при всех разбиениях ω числа n имеет место равенство $c_\omega[M] = c_\omega[N]$ (см. *Чжэня класс*), то многообразия M и N кобордантны (в квазикомплексном смысле).

Пусть A — свободная абелева группа с базисом $\{e_\omega\} = \{e_{i_1 \ldots i_n}\}$, находящимся во взаимно однозначном соответствии со всеми разбиениями числа n. Приведенная теорема утверждает, что гомоморфизм

$$\varphi: \Omega_{2n}^u \to A,\ \varphi([M^{2n}]) = \sum_\omega c_\omega [M^{2n}] e_\omega$$

мономорфен. Ниже дано описание образа гомоморфизма φ (задача Милнора—Хирцебруха). Другими словами, какие наборы целых чисел $a_\omega = a_{i_1 \ldots i_k}$, заданных для всех разбиений ω числа n, являются Ч. ч. квазикомплексного многообразия? Ч. ч. можно определить в произвольной мультипликативной ориентированной теории когомологий h^*, только в этом случае Ч. ч. квазикомплексного многообразия будет элементом кольца $h^*(pt)$. Для теории когомологий h^* определена двойственная ей теория гомологий h_*, и так как h^* ориентирована и мультипликативна, то для каждого квазикомплексного многообразия M может быть однозначно определен фундаментальный класс $[M, \partial M]^h \in h_{2n}(M, \partial M)$, где $2n = \dim_{\mathbb{R}} M$. Далее, как и в обычной теории, имеется спаривание

$$h^n(M, \partial M) \otimes h_m(M, \partial M) \to h^{n-m}(pt).$$

Если $x \in h^*(M, \partial M)$, то применение x к $[M, \partial M]^h$ относительно этого спаривания обозначается $\{x, [M, \partial M]^h\} \in h^*(pt)$. Для характеристич. класса y со значениями в h^* и замкнутого квазикомплексного многообразия M элемент $\{y(\tau M), [M]^h\} \in h^*(pt)$ наз. числом Чжэня в теории h^*. Предыдущие соображения применимы и к *K-теории*. Пусть M — квазикомплексное многообразие (возможно, с краем), $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$, $x \in K^0(M, \partial M)$ — произвольный элемент. Тогда целое число

$$\{x, [M, \partial M]^k\} \in K^{-2n}(pt) \overset{\beta^n}{\cong} K^0(pt) = \mathbb{Z}$$

может быть вычислено по формуле:

$$\{x, [M, \partial M]^k\} = \langle \mathrm{ch}\, xT(\tau M), [M, \partial M]\rangle,$$

где T — *Тодда класс*, задаваемый рядом $\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - e^{x_i}}$.

Если многообразие M замкнуто, то при $x = 1 \in K^0(M)$, получается $\{1, [M]^k\} = T[M]$. Характеристич. число $T[M]$ наз. родом Тодда многообразия M и является целым числом для любого замкнутого квазикомплексного многообразия. Часто $T[M]$ обозначают $\mathrm{Td}(M)$.

Касательные многообразия представляют собой один из важных примеров квазикомплексных многообразий. Пусть M — замкнутое действительное многообразие размерности n. Многообразие TN всех касательных векторов к N имеет естественную структуру квазикомплексного многообразия: $\tau TN = \tau N \oplus N$, $i(x, y) = (y, -x)$. Пусть на N выбрана риманова метрика и через $BN \subset TN$ обозначено многообразие с краем, образованное всеми векторами длины, не превосходящей единицы. Если $\sigma \in \tilde{K}^0(BN, \partial BN)$, то целое число $i_t(\sigma) = \{\sigma, [BN, \partial BN]^k\}$ наз. топологическим индексом элемента σ. Если σ есть класс символа эллиптич. оператора D, заданного на многообразии N, то $\mathrm{index}\, D = i_t(\sigma)$ (теорема Атьи—Зингера), а приведенная выше формула для вычисления числа $\{x, [M, \partial M]^k\}$ приводит к когомологич. форме теоремы об индексе.

Для набора $\omega = \{i_1, \ldots, i_n\}$ целых неотрицательных чисел и замкнутого квазикомплексного многообразия M размерности $2n$ пусть $S_\omega^k[M]$ — Ч. ч. в K-теории:

$$S_\omega^k[M] = S_\omega(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)[M] = \{S_\omega(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)(\tau M), [M]^k\},$$

а $S_\omega[M]$ — обычное Ч. ч. $S_\omega(c_1, \ldots, c_n)[M]$. Число $S_\omega[M]$ может быть отлично от нуля лишь тогда, когда ω — разбиение числа n. Число $S_\omega^k[M]$ может быть отлично от нуля при наборах $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ с $i_1 + \ldots + i_k \leqslant n$. Любой гомоморфизм $\Omega_{2n}^u \longrightarrow \mathbb{Z}$ может быть представлен в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами гомоморфизмов S_ω^k: $\Omega_{2n}^u \longrightarrow \mathbb{Z}$, при $|\omega| \leqslant n$, где $|\omega| = i_1 + \ldots + i_k$ (теорема Стонга—Хаттори). Характеристич. числа $S_\omega^k[M]$ при $|\omega| \leqslant n$ могут быть представлены в виде

$$S_\omega^k[M] = \sum_{|\omega'| = n} r_{\omega'} c_{\omega'}[M],$$

где $r_{\omega'}$ — рациональные коэффициенты, а M — любое замкнутое квазикомплексное многообразие размерности $2n$. Пусть a произвольный элемент из группы A, $a = \sum_{|\omega'| = n} a_{\omega'} e_{\omega'}$ и $S_\omega^k(a) = \sum_{|\omega'| = n} r_{\omega'} a_{\omega'}$. Тогда элемент $a \in A$ принадлежит образу гомоморфизма φ: $\Omega_{2n}^u \longrightarrow A$ тогда и только тогда, когда $S_\omega^k(a)$ — целое число для всех наборов ω с $|\omega| \leqslant n$.

Лит. см. при статье *Чжэня класс*. *А. Ф. Харшиладзе.*

ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ — наука о целых числах. Целое число, наряду с простейшими геометрич. фигурами, является первым и древнейшим математич. понятием. Ч. т. возникла из задач *арифметики*, связанных с умножением и делением целых чисел.

В Древней Греции (6 в. до н. э.) изучалась делимость целых чисел, были выделены отдельные подклассы целых чисел (напр., *простые числа*, составные числа, квадратные числа), изучалась структура *совершенных чисел*, было дано решение в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, т. е. был указан алгоритм построения прямоугольных треугольников со сторонами, длины к-рых являются целыми числами. Евклид (3 в. до н. э.) в «Началах» дал систематич. построение теории делимости на основе т. н. *Евклида алгоритма* для нахождения *наибольшего общего делителя* двух целых чисел, дока-

зал первую теорему теории простых чисел — бесконечность числа простых чисел. Несколько позднее Эратосфеном был найден метод получения простых чисел, к-рый стал наз. *Эратосфена решетом*.

Систематизация проблем Ч. т. и методов их решений проведена Диофантом (3 в.) в его «Арифметике», где, в частности, дано решение в рациональных числах многих алгебраич. уравнений 1-й и 2-й степени с целыми коэффициентами от нескольких неизвестных.

В Китае, начиная со 2 в., в связи с календарными расчетами, возникла задача определения наименьшего целого числа, дающего при делении на заданные числа заданные остатки, к-рая была решена Сунь-цзы (2—6 вв.) и Цинь Цзюшао (13 в.).

В Индии Брамагупта (7 в.) и Бхаскара (12 в.) дали общие методы решения в целых числах неопределенных уравнений 1-й степени с двумя неизвестными и уравнений вида $ax^2+b=cy^2$, $xy=ax+by+c$.

Расцвет Ч. ч. начался в Европе с работ П. Ферма (P. Fermat, 17 в.). Он исследовал решения многих уравнений в целых числах, в частности высказал гипотезу, что уравнение $x^n+y^n=z^n$, $n>2$, не имеет решений в натуральных числах x, y, z (*Ферма теорема* великая), доказал, что простые числа вида $4n+1$ являются суммою двух квадратов, высказал одно из основных утверждений теории сравнений: a^p-a делится на p, если p — простое число (*Ферма малая теорема*).

Исключительно важный вклад в Ч. т. внес Л. Эйлер (L. Euler). Он доказал теорему Ферма при $n=3$, малую теорему Ферма и ее обобщение, целый ряд теорем о представлении чисел *бинарными квадратичными формами*. Л. Эйлер был первым, кто для решения задач Ч. т. привлек средства математич. анализа, что привело к созданию *аналитической теории чисел*. *Производящие функции* Эйлера явились источником *кругового метода* Харди — Литлвуда — Рамануджана и *тригонометрических сумм метода* И. М. Виноградова — основных методов современной аддитивной теории чисел, а функция $\zeta(s)$, введенная Л. Эйлером, и ее обобщения составляют основу современных аналитич. методов исследования проблем *распределения простых чисел*.

В переписке Х. Гольдбаха (Ch. Goldbach) с Л. Эйлером были поставлены три знаменитые проблемы: всякое нечетное $N\geqslant 5$ есть сумма трех простых, четное $N\geqslant 4$ есть сумма двух простых и нечетное $N=p+2n^2$, где n — целое, p — простое. Первая проблема решена И. М. Виноградовым (1937), две другие проблемы не решены (1984).

К. Гаусс (C. Gauss) создал основные методы и завершил построение теории *сравнений*, доказал *взаимности закон* квадратичных вычетов, сформулированный Л. Эйлером, заложил основы теории представления чисел квадратичными формами $ax^2+bxy+cy^2$ и формами высших степеней со многими переменными, ввел т. н. *Гаусса суммы*

$$S=\sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{an^2}{m}},$$

к-рые явились первыми тригонометрич. суммами, и показал их полезность в решении задач Ч. т. Если до К. Гаусса Ч. т. представляла собой собрание отдельных результатов и идей, то после его работ она начала развиваться в различных направлениях как стройная теория.

Большой вклад в развитие Ч. т. внесли многие ученые 19—20 вв.

Особенностью и привлекательностью Ч. т. является простота и доступность формулировок большинства проблем и трудность их решений. Напр., проблема бесконечности числа простых чисел *близнецов* была поставлена еще Евклидом и не решена (1984). Отдельные проблемы Ч. т. стали источником больших самостоятельных направлений математики. Такими являются: теория *простых чисел* и связанная с ней теория *дзета-функций* и *Дирихле рядов*, теория *диофантовых уравнений*, *аддитивная теория чисел*, *метрическая теория чисел*, теория алгебраических и трансцендентных чисел, *алгебраическая теория чисел*, теория *диофантовых приближений*, *чисел теория* вероятностная, *геометрия чисел*. Напр., источником аналитич. Ч. т. послужили проблема распределения простых чисел в натуральном ряде и проблема представления натуральных чисел суммою слагаемых определенного вида. Решение уравнений в целых числах, к-рые стали наз. диофантовыми, в частности великая теорема Ферма, послужили источником алгебраич Ч. т. Проблема построения с помощью циркуля и линейки круга единичной площади (*квадратура круга*) привела к вопросу об арифметич. природе числа π, а вместе с ним — к созданию теории алгебраических и трансцендентных чисел.

Все названные направления Ч. т. переплетаются между собой, дополняя и обогащая друг друга.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [2] его же, Метод тригонометрических сумм, 2 изд., М., 1980; [3] его же, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; [4] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, 2 изд., М., 1983; [5] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [6] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [7] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1974; [8] Хассе Г., Лекции по теории чисел., пер. с нем., М., 1953; [9] Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.— Л., 1936; [10] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [11] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.— Л., 1937.

А. А. Карацуба и материалы одноименной статьи БСЭ-г.

ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ вероятностная — в широком смысле раздел теории чисел, в к-ром используются идеи и методы теории вероятностей.

Под вероятностной Ч. т. в узком смысле понимается статистич. теория распределения значений *арифметических функций*.

Подавляющее большинство арифметич. функций, изучаемых в теории чисел, являются аддитивными или мультипликативными. Их значения обычно распределены очень сложно. Если проследить за изменением значений таких функций, когда аргумент пробегает последовательные натуральные числа, получится весьма хаотическая картина, к-рая обычно наблюдается при рассмотрении аддитивных свойств целых чисел совместно с мультипликативными. В классич. исследованиях при рассмотрении распределения значений действительных арифметич. функций $f(m)$ обычно изучалось асимптотич. поведение самой функции $f(m)$ или ее среднего значения. В первом случае ищутся простые функции $\psi_1(m)$, $\psi_2(m)$, чтобы было $\psi_1(m)\ll f(m)\ll\psi_2(m)$ для всех m или хотя бы для всех достаточно больших m. Напр., если $\omega(m)$ означает число всех различных простых делителей числа m, то $\omega(m)\geqslant 1$ для всех $m>1$, $\omega(m)\ll 2(\ln\ln m)^{-1}\ln m$ при $m\geqslant m_0$;

$$\liminf_{m\to\infty}\omega(m)=1,$$

$$\limsup_{m\to\infty}\omega(m)(\ln m)^{-1}\ln\ln m=1.$$

Во втором случае рассматривается поведение

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m). \qquad (1)$$

Для $\omega(m)$ среднее значение (1) равно $(1+o(1))\ln\ln n$. Решение как первой, так и второй задачи в общем случае дает мало информации о поведении функции $f(m)$, об ее колебаниях. Функция может значительно отклоняться от своего среднего значения. При этом оказывается, что большие отклонения встречаются вообще довольно редко. Ставится задача отыскания границ, в к-рых могут колебаться значения функции $f(m)$ для подавляющего большинства значений аргумента.

Если $f(m)$ — действительная аддитивная арифметич. функция,

$$A_n=\sum_{p\leqslant n}\frac{f(p)}{p},\quad B_n^2=\sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}, \tag{2}$$

где суммы берутся по простым числам p и по степеням простых чисел p^α, то

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(f(m)-A_n)^2\leqslant B_n^2\left(\frac{3}{2}+\frac{c}{\ln n}\right),$$

где c — абсолютная константа. Следовательно, для любого $t>0$ и всех $m\leqslant n$, за исключением $<\left(\frac{3}{2}+\frac{c}{\ln n}\right)nt^{-2}$ чисел, имеет место неравенство

$$|f(m)-A_n|<tB_n$$

(аналог теоретико-вероятностного *больших чисел закона*). Для функции $\omega(m)$ это неравенство можно записать в виде

$$|\omega(m)-\ln\ln n|<t\sqrt{\ln\ln n}.$$

Пусть через $N_n(\ldots)$ обозначено число натуральных $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям, к-рые будут указываться в скобках вместо многоточия. Желая более точно охарактеризовать распределение значений действительных арифметич. функций $f(m)$, приходят к рассмотрению асимптотич. поведения частоты

$$\frac{1}{n}N_n(f(m)\in E) \tag{3}$$

при $n\to\infty$, где E — любое борелевское множество. Среди асимптотич. законов для (3) наибольший интерес представляют законы двух типов: интегральные и локальные.

Интегральные законы. Изучается асимптотич. поведение функции распределения

$$F_n(C_n+D_nx)=\frac{1}{n}N_n(f(m)<C_n+D_nx),$$

при $n\to\infty$ и заданных C_n, D_n.

В случае арифметических аддитивных функций ищутся условия, при к-рых $F_n(C_n+D_nx)$ стремится к нек-рой функции распределения $F(x)$ во всех ее точках непрерывности. При этом, если $F(x)$ не вырождены, то D_n обязательно должно стремиться к конечному (отличному от 0) или бесконечному пределу.

В случае конечного предела достаточно ограничиться рассмотрением $F_n(C_n+x)$. Для того чтобы $F_n(C_n+x)$ с какими-либо C_n при $n\to\infty$ имела невырожденное предельное распределение, необходимо и достаточно, чтобы $f(m)$ имела вид

$$f(m)=a\ln m+g(m),$$

где a — константа, а функция $g(m)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{|g(p)|\geqslant 1}\frac{1}{p}<\infty,\quad\sum_{|g(p)|<1}\frac{g^2(p)}{p}<\infty.$$

При этом C_n должны быть равными

$$C_n=a\ln n+\sum_{\substack{p\leqslant n,\\ |g(p)|<1}}\frac{g(p)}{p}+C+o(1),$$

C — константа. Выбор C_n однозначен с точностью до слагаемых $C+o(1)$. Предельное распределение является дискретным, когда $\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}<\infty$, и непрерывным в противном случае.

В частности, $F_n(x)$ (случай $C_n\equiv 0$) тогда и только тогда имеет предельное распределение, когда сходятся ряды

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1}\frac{1}{p},\quad\sum_{|f(p)|<1}\frac{f(p)}{p},\quad\sum_{|f(p)|<1}\frac{f^2(p)}{p}$$

(аналог теоретико-вероятностной теоремы о трех рядах).

Случай $D_n\to\infty$ не исследован до конца. Ниже приведены нек-рые наиболее простые результаты, когда $C_n=A_n$ и $D_n=B_n$ определены формулами (2).

Если для всякого фиксированного $\varepsilon>0$

$$B_n^{-2}\sum_{\substack{p^\alpha=n,\\ |f(p^\alpha)|>\varepsilon B_n}}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\to 0 \tag{4}$$

при $n\to\infty$ (аналог условия Линдеберга, см. *Линдеберга — Феллера теорема*), то

$$F_n(A_n+B_nx)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du=\Phi(x) \tag{5}$$

(нормальный закон). Если выполнено (4), то B_n является медленно меняющейся функцией от $\ln n$ в смысле Карамата. Более того, если B_n является такой функцией, то для справедливости (5) условие (4) является необходимым.

Пусть B_n является медленно меняющейся функцией от $\ln n$. Для того чтобы $F_n(A_n+B_nx)$ сходилась к предельному распределению с дисперсией 1, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция $V(u)$, $-\infty<u<\infty$, $V(-\infty)=0$, $V(\infty)=1$, что при $n\to\infty$ для всех u, за исключением, быть может, $u=0$,

$$B_n^{-2}\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n,\\ f(p^\alpha)<uB_n}}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\to V(u).$$

Характеристич. функция $\varphi(t)$ предельного закона в случае его существования определяется формулой

$$\varphi(t)=\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\right)u^{-2}\,dV(u).$$

Изучается быстрота сходимости к предельному закону. Так, напр., если $f(m)$ — сильно аддитивная функция и

$$\mu_n=B_n^{-1}\max_{p\leqslant n}|f(p)|\to 0$$

при $n\to\infty$, то

$$F_n(A_n+B_nx)=\Phi(x)+O(\mu_n)$$

равномерно по x.

Для мультипликативных арифметич. функций имеют место аналогичные результаты.

Локальные законы. Изучается поведение при $n\to\infty$ частоты $\frac{1}{n}N_n(f(m)=c)$ при заданных c. В случае действительных аддитивных арифметич. функций эта частота всегда имеет предел, к-рый отличен от 0 лишь для не более чем счетного множества значений c. Пусть

$$\lambda_l(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_n(f(m)=c_l)$$

— не равные нулю пределы, причем хотя бы один такой предел существует. Тогда

$$\sum_l\lambda_l(f)=1$$

и

$$\sum_l\lambda_l(f)e^{itc_l}=\prod_p(1-1/p)\sum_{\alpha=0}^{\infty}p^{-\alpha}e^{itf(p^\alpha)}.$$

Если $f(m)$ принимает лишь целые значения,

$$\mu_k(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_n(f(m)=k),$$

то

$$\sum_k\mu_k(f)=1$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{f(p)\neq 0} 1/p < \infty.$$

Изучается скорость сходимости к $\mu_k(f)$. Существует такая абсолютная константа C, что для всех целых k и всех целозначных аддитивных арифметич. функций $f(m)$ с условием $f(p)=0$ для всех простых p

$$\left|\frac{1}{n}N_n(f(m)=k)-\mu_k(f)\right|\leqslant Cn^{-1/2}.$$

Изучается также асимптотич. поведение частоты $\frac{1}{n}N_n(f(m)=k_n)$, когда k_n может расти вместе с n.

Лит.: [1] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963; [2] Кубилюс Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962; [3] его же, в сб.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974; [4] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [5] его же, Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [6] Постников А. Г., Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений, М., 1966; [7] Elliott P. D. T. A., Probabilistic number theory, v. 1—2, N.-Y.— Hdlb.— B., 1979—80.

Й. П. Кубилюс.

ЧИСЛИТЕЛЬ арифметической дроби $\frac{a}{b}$ — целое число a, показывающее из скольких долей $\frac{1}{b}$ составлена дробь. Числителем алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ наз. выражение A (см. *Дробь*).

С. А. Степанов.

ЧИСЛО — основное понятие математики, сложившееся в ходе длительного историч. развития. Возникновение и формирование этого понятия происходило вместе с зарождением и развитием математики. Практич. деятельность человека, с одной стороны, и внутренние потребности математики — с другой определили развитие понятия числа.

Потребность счета предметов привела к возникновению понятия *натурального числа*. Все народы, обладавшие письменностью, владели понятием натурального числа и пользовались той или иной системой счисления. О ранних этапах возникновения и развития понятия Ч. можно судить лишь на основе косвенных данных, к-рые доставляют языкознание и этнография. Первобытному человеку, видимо, не требовалось умение считать, чтобы установить, полной или нет является какая-нибудь совокупность.

Впоследствии за определенным количеством предметов или явлений, с к-рыми люди часто встречались, закрепились особые наименования. Так, в языках нек-рых народностей имелись слова для обозначения таких объектов, как «три человека», «три лодки», . . ., но не было отвлеченного понятия «три». Таким путем, вероятно, возникали сравнительно короткие числовые ряды, служащие для обозначения отдельно людей, отдельно лодок, отдельно кокосовых орехов, . . . На этой стадии отвлеченных Ч. еще не было, Ч. были именованными.

Необходимость передавать сообщения о численности той или иной совокупности привела к выделению стандартной совокупности, состоящей чаще всего из частей человеческого тела. Каждая часть тела в такой системе счета имела определенный порядок и наименование. Когда же частей тела не хватало, пользовались пучком палочек. Той же цели служили камешки, раковины, зарубки на дереве или камне, черточки на земле, веревки с узелками...

Следующий этап в развитии понятия Ч. связан с переходом к счету группами: парами, десятками, дюжинами... Возникают прообразы т. н. узловых чисел и вместе с тем зачатки арифметич. операций, что отражено в названиях Ч. Оформляются определенные приемы счета, для счета применяются специальные приспособления, появляются числовые обозначения. Ч. отделяются от сосчитываемых объектов, становятся отвлеченными. Начинают складываться системы *счисления*.

Процесс образования современной системы счисления исключительно сложен. Только о завершении этого процесса можно судить с определенной достоверностью. Известно много разных систем счисления. В Древнем Египте таких систем было несколько. В одной из них имелись особые знаки для 1, 10, 100, 1000. Другие Ч. изображались путем комбинации этих знаков. Основной арифметич. операцией у древних египтян являлось сложение. За две тысячи лет до н. э. вавилоняне употребляли шестидесятиричную систему счисления с позиционным принципом записи Ч. Они пользовались только двумя знаками. Древние греки пользовались алфавитной системой счисления, ее употребляли также славяне. В Индии в начале н. э. была широко распространена словесная позиционная десятичная система нумерации с несколькими синонимами для нуля. Впоследствии там возникла и позиционная десятичная система счисления. С 8 в. н. э. эта система стала распространяться по Арабскому Востоку. Европейцы познакомились с ней в 12 в.

Расширение круга сосчитываемых предметов, что произошло в результате усложнения практич. деятельности людей и, наконец, любознательность, свойственная человеку, шаг за шагом отодвигали границу счета. Возникло представление о неограниченной продолжаемости натурального ряда. Этим представлением отчетливо владели древние греки. Одна из теорем Евклида гласит: «Простых существует больше всякого предложенного их числа». Тем не менее еще Архимеду пришлось убеждать современников, что можно указать число, большее чем «число песчинок в мире».

Для измерения величин требовались дробные Ч. Дробные Ч. были известны уже в Древнем Египте и Вавилоне. Египтяне дроби выражали обычно при помощи аликвотных дробей, т. е. дробей с числителем, равным 1. Вавилоняне пользовались шестидесятиричными дробями. Китайцы и индийцы в начале н. э. пользовались обыкновенными дробями и умели выполнять все арифметич. действия над ними. Среднеазиатские ученые не позднее 10 в. создали позиционную шестидесятиричную систему счисления. Эта система особенно широко применялась в астрономич. вычислениях и таблицах. Следы ее дошли до нас в измерении времени и углов. Десятичные дроби ввел в нач. 15 в. и стал широко применять самаркандский математик Каши (аль-Каши). В Европе десятичные дроби стали распространяться после выхода книги «Десятая» (1585), автором к-рой был С. Стевин (S. Stevin). До введения десятичных дробей в практику вычислений целую часть Ч. европейцы обычно представляли в десятичной системе счисления, а дробную — в шестидесятиричной или в виде обыкновенной дроби.

Дальнейшее расширение понятия Ч. происходило главным образом в связи с потребностями самой математики. Отрицательные Ч. впервые появились в Древнем Китае. Индийские математики пришли к отрицательным Ч., пытаясь формулировать алгоритм решения квадратных уравнений для всех случаев. Диофант (3 в.) свободно оперирует с отрицательными Ч. Они постоянно встречаются в промежуточных вычислениях во многих задачах его «Арифметики». Однако и в 16 и в 17 вв. многие европейские математики не признавали отрицательных Ч., и если такие Ч. встречались в их вычислениях, то они наз. их ложными, невозможными. Положение изменилось, когда в 17 в. было найдено геометрич. истолкование положительным и отрицательным Ч., как противоположно направленным отрезкам.

Проблема существования отношения однородных величин в рамках практики не возникает. Вавилоняне владели алгоритмом нахождения приближенного значения квадратного корня из Ч. с любой заданной точностью. В 5 в. до н. э. греч. математики открыли, что сторона и диагональ квадрата не имеют общей меры. Таким образом, оказалось, что не любые точно заданные отрезки соизмеримы. Греческие математики не стали вводить новых Ч. Указанную трудность они обошли, создав теорию отношения отрезков, не связанную с понятием Ч.

Развитие алгебры и техники приближенных вычислений, в связи с потребностями астрономии, привело арабских математиков к расширению понятия Ч. Любое отношение однородных величин, как соизмеримых, так и несоизмеримых, они стали рассматривать как Ч. Так Насирэддин (1201—74) писал: «Каждое из этих отношений может быть названо числом, к-рое определяется единицей так же, как один из членов этого отношения определяется другим из этих членов». В том же направлении развивалась европейская математика. Если Дж. Кардано (G. Cardano) в «Практической арифметике» (1539) еще говорил об иррациональных числах как о «глухих», о таких, к-рые «нельзя ни услышать, ни представить», то С. Стевин в своей «Арифметике» (1585) заявлял, что «число есть то, чем определяется любая величина», и что «нет никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, невыразимых или глухих чисел». И, наконец, И. Ньютон (I. Newton) во «Всеобщей арифметике» (1707) дал следующее определение: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое есть то, что измеряется единицей; дробное — кратное долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей». В связи с тем что величины у И. Ньютона могут быть как положительными, так и отрицательными, то и Ч. в его арифметике могут быть и положительными или же «большими, чем ничто», так и отрицательными или же «меньшими, чем ничто».

Мнимые Ч. впервые появились в труде Дж. Кардано «Великое искусство» (1545). Решая систему уравнений $x+y=10$, $xy=40$, он нашел корни $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$. Найденные решения Дж. Кардано назвал «чисто отрицательными» и даже «софистически отрицательными». Первый, кто увидел пользу от введения мнимых величин, был Р. Бомбелли (R. Bombelli). В своей «Алгебре» (1572) он показал, что действительные корни уравнения $x^3=px+q$, $p>0$, $q>0$, в случае $\left(\frac{p}{3}\right)^3>\left(\frac{q}{2}\right)^2$ выражаются через радикалы из мнимых величин. Р. Бомбелли определил арифметич. операции над такими величинами и подошел, таким образом, к созданию теории *комплексных чисел*. В 17 и 18 вв. многие математики занимались исследованием свойств мнимых величин и их приложениями. Так, Л. Эйлер (L. Euler) распространил понятие логарифма на любые комплексные Ч. (1738) и указал новый метод интегрирования с помощью комплексных переменных (1776), А. Муавр (A. Moivre) решил задачу об извлечении корня натуральной степени из любого комплексного Ч. (1736). Удачным применением теории комплексных Ч. стала основная теорема алгебры: «Всякий многочлен с действительными коэффициентами степени выше нулевой разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с такими же коэффициентами» (Л. Эйлер; Ж. Д'Аламбер, J. D'Alembert; К. Гаусс, C. Gauss). Тем не менее пока на рубеже 18—19 вв. не было дано геометрич. истолкование комплексных Ч., как точкам плоскости, мнимые Ч. у многих математиков вызывали недоверие.

В нач. 19 в. в связи с большими успехами математич. анализа многими учеными была осознана необходимость обоснования основ анализа — теории пределов. Математиков перестали удовлетворять доказательства, основанные на наглядности или геометрич. представлении. Нерешенной оставалась и проблема построения единой дедуктивной теории Ч. Натуральное Ч. нередко мыслилось как собрание единиц, дробь — как отношение величин, действительное Ч.— как длина отрезка и комплексное Ч.— как точка плоскости. Не было полной ясности в вопросе, как вводить арифметич. операции над Ч. И, наконец, естественно возникал вопрос о дальнейшем развитии понятия Ч. Можно ли, в частности, ввести новые Ч., связанные уже с точками пространства?

Во всех указанных направлениях в 19 в. велись интенсивные исследования. Формулируется принцип, в соответствии с к-рым происходит обобщение понятия Ч.— т. н. принцип перманентности формальных законов счета. В согласии с ним при построении новой более широкой, в сравнении с исходной, системой Ч. операции в ней обобщаются таким образом, что остаются в силе законы одноименных действий над Ч. (Дж. Пикок, G. Peacock, 1834; Г. Ганкель, H. Hankel, 1867). Во 2-й пол. 19 в. почти одновременно Г. Кантор (G. Cantor, 1879), Ш. Мере (Ch. Méray, 1869), Р. Дедекинд (R. Dedekind, 1872) и К. Вейерштрасс (K. Weierstrass, 1872) построили теорию *действительных чисел*. При этом Г. Кантор и Ш. Мере исходили из фундаментальных последовательностей рациональных Ч. Р. Дедекинд — из сечений в поле рациональных Ч., а К. Вейерштрасс — из бесконечных десятичных дробей.

В результате работ Дж. Пеано (G. Peano, 1891), К. Вейерштрасса (1878) и Г. Грассмана (H. Grassman, 1861) была построена аксиоматич. теория натуральных Ч., У. Гамильтон (W. Hamilton, 1837) построил теорию комплексных Ч., исходя из пар действительных Ч., К. Вейерштрасс — теорию целых Ч. как пар натуральных Ч., и Ж. Таннери (J. Tannery, 1894) — теорию рациональных Ч. как пар целых Ч.

Попытки найти обобщение понятия комплексного Ч. привели к разработке теории *гиперкомплексных чисел*. Исторически первой системой таких Ч. были *кватернионы*, открытые У. Гамильтоном. В результате проведенных исследований выяснилось (К. Вейерштрасс; Г. Фробениус, G. Frobenius; Б. Пирс, B. Peirce), что всякое расширение понятия комплексного Ч. за пределы системы комплексных Ч. возможно только при отказе от каких-либо обычных свойств Ч.

На протяжении всего 19 в. и до нач. 20 в. в математике происходят глубокие изменения. Меняются представления об объектах и установках математики. Постепенно складывается аксиоматич. метод построения математики на теоретико-множественной основе. В соответствии с ним всякая математич. теория изучает определенную алгебраич. систему. Другими словами, изучает множество с выделенными в нем отношениями, в частности алгебраич. операциями, удовлетворяющими определенным условиям — аксиомам.

С этой точки зрения любая числовая система есть нек-рая алгебраич. система. При определении конкретных числовых систем удобно пользоваться понятием «расширение алгебраической системы». Это понятие является естественным уточнением сформулированного выше принципа перманентности формальных законов счета. Алгебраич. систему A' наз. р а с ш и р е н и е м а л г е б р а и ч. с и с т е м ы A, если основное множество системы A является подмножеством основного множества системы A', если далее существует взаимно однозначное отображение множества отношений систе-

мы A' на множество отношений системы A и если для любого набора элементов системы A, для к-рого выполняется какое-нибудь отношение этой системы, выполняется соответствующее отношение системы A'.

Так, напр., под системой натуральных Ч. обычно понимают алгебраич. систему $\mathbb{N}=\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ с двумя бинарными алгебраич. операциями: сложением (+) и умножением ($\cdot$) и выделенным элементом (1) (единица), удовлетворяющим следующим аксиомам:

1) для любого элемента $a\in N$, $a+1\neq a$;

2) ассоциативность сложения: для любых элементов a, b, c из N

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

3) коммутативность сложения: для любых элементов a, b из N

$$a+b=b+a;$$

4) сократимость сложения: для любых элементов a, b, c из N из равенства $a+c=b+c$ следует равенство $a=b$;

5) 1 — нейтральный элемент умножения, т. е. для любого $a\in N$, $a\cdot 1=a$;

6) ассоциативность умножения: для любых элементов a, b, c из N

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$

7) дистрибутивность умножения: относительно сложения: для любых элементов a, b, c из N

$$(a+b)\cdot c=ac+bc;$$

8) аксиома индукции: если подмножество M множества натуральных Ч. N содержит 1 и вместе с элементом a элемент $a+1$, то $M=N$.

Из аксиом 2, 3, 4, 6 и 7 следует, что система натуральных Ч.— полукольцо относительно операций (+) и ($\cdot$). Поэтому систему натуральных Ч. можно определить как минимальное полукольцо с нейтральным элементом умножения и без нейтрального элемента сложения.

Система целых Ч. $\mathbb{Z}=\langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$ определяется как минимальное кольцо, являющееся расширением полукольца $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ натуральных Ч. Система рациональных Ч. $\mathbb{Q}=\langle Q, +, \cdot, 0, 1\rangle$ может быть определена как минимальное поле, являющееся расширением кольца $\langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$ целых Ч. Система комплексных Ч. $\mathbb{C}=\langle C, +, \cdot, 0, 1, i\rangle$ — минимальное поле, являющееся расширением поля $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ действительных Ч. с элементом i таким, что $i^2+1=0$.

Под системой $\mathbb{R}=\langle R, +, \cdot, 0, 1, >\rangle$ действительных Ч. понимают алгебраич. систему с двумя бинарными алгебраич. операциями (+) и ($\cdot$), с двумя выделенными элементами (0) и (1) и с одним бинарным отношением порядка (>). Аксиомы $\mathbb{R}$ разделяются на следующие группы:

1) аксиомы поля: система $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ — поле;

2) аксиомы порядка: система $\langle R, +, \cdot, 0, 1, >\rangle$ — линейно и строго упорядоченное поле;

3) аксиома Архимеда: для любых элементов $a>0$ и $b>0$ из R существует натуральное число n такое, что

$$n\cdot a=\underbrace{a+\ldots+a}_{n}>b;$$

4) аксиома полноты: любая фундаментальная последовательность $\{r_n\}_n$ действительных Ч. сходится, т. е. если для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_ε такой, что для любых $n>n_\varepsilon$ и $m>n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|r_n-r_m|<\varepsilon$, то последовательность $\{r_n\}_n$ сходится к нек-рому элементу поля R.

Короче, система действительных Ч.— полное линейно строго и архимедовски упорядоченное поле. Систему действительных Ч. эквивалентным образом можно определить и как непрерывное линейно упорядоченное поле. В этом случае аксиомы Архимеда и полноты заменяются аксиомой непрерывности:

если A и B — непустые подмножества R такие, что для любых элементов $a\in A$ и $b\in B$ выполняется неравенство $a<b$, то существует такой элемент $c\in R$, что $a\leqslant c\leqslant b$ для любых элементов $a\in A$ и $b\in B$.

Конструкции действительных Ч., предложенные Г. Кантором и Ш. Мере, могут служить интерпретацией первой системы аксиом для системы действительных Ч., а конструкция Р. Дедекинда — интерпретацией для второй системы. Аналогично, конструкции У. Гамильтона, К. Вейерштрасса и Ж. Таннери — интерпретацией для систем аксиом систем комплексных Ч., целых Ч., рациональных Ч.

Для системы натуральных Ч. в качестве интерпретаций могут служить порядковая теория натуральных Ч., разработанная Дж. Пеано и количественная теория натуральных Ч., принадлежащая Г. Кантору.

В 19 в. была четко поставлена задача обоснования понятия Ч. и, более широко, проблема обоснования математики. Эта проблема стала предметом математич. логики, интенсивное развитие к-рой продолжается в 20 в.

См. также *Арифметика формальная*, *Конструктивный анализ*, *р-адическое число*, *Алгебраическое число*, *Трансцендентное число*, *Кардинальное число*, *Порядковое число*, *Арифметика*.

Лит.: [1] Березкина Э. И., Математика древнего Китая, М., 1980; [2] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [3] Вайман А. А., Шумеро-вавилонская математика, М., 1961; [4] Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959; [5] Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; [6] Володарский А. И., Очерки истории средневековой индийской математики, М., 1977; [7] Выгодский М. Я., Арифметика и алгебра в древнем мире, 2 изд., М., 1967; [8] Депман И. Я., История арифметики, М., 1959; [9] Кольман Э., История математики в древности, М., 1961; [10] Кэджори Ф., История элементарной математики, пер. с англ., Од., 1910; [11] Нечаев В. И., Числовые системы, М., 1975; [12] Рыбников К. А., История математики, 2 изд., М., 1974; [13] Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 3 изд., М., 1978; [14] Ферферман С., Числовые системы, пер. с англ., М., 1971; [15] Шейтен И. Г., История математики в древности и в средние века, пер. с франц., 2 изд., М.— Л., 1938; [16] Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961; [17] История математики, т. 1—3, М., 1970—72; [18] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

В. И. Нечаев.

ЧИСЛОВОЕ ПОЛЕ — поле, элементами к-рого являются комплексные (в частности, действительные) числа. Множество комплексных чисел образует Ч. п. тогда и только тогда, когда оно содержит более одного числа и вместе с каждыми числами α и β также и $\alpha-\beta$ и $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta\neq 0$). Всякое Ч. п. содержит бесконечное множество чисел. Поле рациональных чисел содержится во всяком Ч. п.

Примерами Ч. п. являются поля рациональных, действительных, комплексных и гауссовых чисел. Ч. п. образует множество чисел вида $\frac{H(\alpha)}{F(\alpha)}$, $F(\alpha)\neq 0$, где α — любое фиксированное комплексное число, а $H(x)$ и $F(x)$ пробегают всевозможные многочлены с рациональными коэффициентами.

А. Б. Шидловский.

ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ АСИМПТОТИКА, асимптотика арифметических функций — приближенное представление арифметич. функций (определенных при всех натуральных значениях аргумента) посредством сравнительно простых выражений со сколь угодно малой относительной погрешностью. Точнее, для числовой функции $f(x)$ существует асимптотика, если имеет место асимптотич. равенство

$$f(x)=\varphi(x)+R(x),$$

где $\varphi(x)$ — приближающая функция, $R(x)$ — погрешность, относительно к-рой в общем случае известно только, что

$$\lim_{x\to\infty}(R(x)/\varphi(x))=0.$$

Краткая запись: $f(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x))$ или $f(x)\sim\varphi(x)$ (см. *Асимптотическая формула*).

Нахождение Ч. ф. а. является одной из важнейших задач аналитич. теории чисел. Это объясняется тем, что почти все числовые функции с интересными арифметич. свойствами характеризуются крайней неправильностью своего изменения при возрастании аргумента. При рассмотрении вместо числовой функции $f(x)$ ее среднего значения $\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)$ (n — натуральное) «неправильность» функции $f(x)$ сглаживается. Поэтому типичной для числовых функций является задача получения асимптотики для их средних значений. Напр., среднее значение функции, означающей число делителей n, будет равняться

$$\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\tau(n)\sim\ln n.$$

Возникающая здесь проблема наилучшей возможной оценки погрешности в асимптотич. равенстве для многих функций, в частности для функций $\tau(n)$, в 1984 еще не решена (см. *Аналитическая теория чисел*).

Не менее важную роль играет Ч. ф. а. при решении аддитивных проблем. Для многих из них неизвестны прямые доказательства существования разложения целого числа n на слагаемые заданного вида. Однако, как только удается вывести асимптотику для числа искомых разложений, отсюда уже следует существование требуемого разложения для любого достаточно большого числа n. *Б. М. Бредихин.*

ЧИСТЫЙ ПОДМОДУЛЬ в смысле Кона — такой подмодуль A правого R-модуля B, что для любого левого R-модуля C естественный гомоморфизм абелевых групп

$$A\otimes_R C\longrightarrow B\otimes_R C$$

инъективен. Это эквивалентно следующему условию: если система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\lambda_{ij}=a_j,\ \text{где}\ 1\leqslant j\leqslant m,\ \lambda_{ij}\in R,\ a_j\in A,$$

имеет решение в B, то она имеет решение и в A (ср. *Плоский модуль*). Ч. п. является любое прямое слагаемое. Любой подмодуль любого правого R-модуля чист тогда и только тогда, когда R — *регулярное кольцо*.

В случае абелевых групп (т. е. при $R=\mathbb{Z}$) эквивалентны следующие утверждения: (1) A — чистая (или сервантная) подгруппа в B; (2) $nA=A\cap nB$ для любого натурального n; (3) A/nA — прямое слагаемое в B/nA для любого натурального n; (4) если $C\subseteq A$ и A/C — конечно порожденная группа, то A/C — прямое слагаемое в B/C; (5) каждый смежный класс факторгруппы B/A содержит элемент того же порядка, что и порядок этого смежного класса; (6) если $A\subseteq C\subseteq B$ и C/A конечно порождена, то A — прямое слагаемое в C. Если выполнение свойства (2) требуется лишь для простых n, то A наз. слабо сервантной подгруппой.

Аксиоматич. подход к понятию чистоты базируется на рассмотрении класса мономорфизмов $\mathfrak{N}_\omega$, подчиненного следующим требованиям (здесь $A\subseteq_\omega B$ означает, что A — подмодуль в B и естественное вложение принадлежит $\mathfrak{N}_\omega$): (Ч0′) если A — прямое слагаемое в B, то $A\subseteq_\omega B$; (Ч1′) если $A\subseteq_\omega B$ и $B\subseteq_\omega C$, то $A\subseteq_\omega C$; (Ч2′) если $A\subseteq B\subseteq C$ и $A\subseteq_\omega C$, то $A\subseteq_\omega B$; (Ч3′) если $A\subseteq_\omega B$ и $K\subseteq A$, то $A/K\subseteq_\omega B/K$; (Ч4′) если $K\subseteq A\subseteq B$, $K\subseteq_\omega B$ и $A/K\subseteq_\omega B/K$, то $A\subseteq_\omega B$. Рассмотрение класса $\mathfrak{N}_\omega$ вместо класса всех мономорфизмов приводит к относительной гомологич. алгебре. Напр., модуль Q наз. ω-инъективным, если из $A\subseteq_\omega B$ вытекает, что всякий гомоморфизм из A в Q может быть продолжен до гомоморфизма из B в Q (ср. *Инъективный модуль*). Сервантно инъективная абелева группа наз. алгебраически компактной. Эквивалентны следующие свойства абелевой группы Q: (1) Q алгебраически компактна; (2) Q выделяется прямым слагаемым из любой группы, содержащей ее в качестве сервантной подгруппы; (3) Q является прямым слагаемым группы, допускающей компактную топологию; (4) система уравнений над Q разрешима, если разрешима каждая из ее конечных подсистем.

Лит.: [1] Мишина А. П., Скорняков Л. А., Абелевы группы и модули, М., 1969; [2] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 3, с. 85—120; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [4] Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, пер. с англ., т. 1—2, М., 1974—77.

Л. А. Скорняков.

Ш

ШАЛЯ ТЕОРЕМА — 1) Ш. т.: если A, B, C — три произвольные точки оси, то $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, где $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ — длины направленных отрезков. Ш. т. обобщается для случая площадей ориентированных треугольников и объемов ориентированных тетраэдров (см. [1]).

2) Ш. т.: движение 1-го рода (не меняющее ориентации), отличное от поворота и переноса, является произведением переноса на поворот, ось к-рого параллельна направлению переноса (т. н. винтовое движение). Теорема доказана М. Шалем (M. Chasles, 1830).

Лит.: [1] Моденов П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969.

А. Б. Иванов.

ШАПКА, k-шапка, — множество k точек конечного проективного пространства $P(n, q)$, никакие три из к-рых неколлинеарны. Две Ш. считают эквивалентными, если существует коллинеация пространства $P(n, q)$, переводящая одну из них в другую. Нахождение максимального числа $m(n, q)$ точек Ш. в $P(n, q)$, построение и классификация $m(n, q)$-Ш. составляет главный вопрос при изучении Ш., не решенный полностью (1984). Известны следующие результаты (см. [2], [3]):

$m(n, 2)=2^n$: 2^n-Ш. единственна (с точностью до эквивалентности) и является множеством точек $P(n, 2)$, не лежащих в фиксированной гиперплоскости;

$m(2, q)=q+1$, q — нечетное: $(q+1)$-Ш. в $PG(2, q)$ является коникой и единственна;

$m(2, q)=q+2$, q — четное: $(q+2)$-Ш. в $P(2, q)$, вообще говоря, не единственна; $m(3, q)=q^2+1$, q — нечетное: (q^2+1)-Ш. в $P(3, q)$ является эллиптич. квадрикой и единственна;

$m(3, q)=q^2+1$, q — четное: (q^2+1)-Ш. в $P(3, q)$, вообще говоря, не единственна;

$m(4, 3)=20$: 20-Ш. в $P(4,3)$ не единственна;

$m(5,3)=56$: 56-Ш. в $P(5, 3)$ единственна.

Ш. используются в теории кодирования (см., например, [2]).

Лит.: [1] Bose R. C., «Sankhyă», 1947, v. 8, p. 107—66; [2] Hill R., «Discrete Math.», 1978, v. 22, № 2, p. 111—37; [3] Segre B., «Atti Accad. naz. Lincei, Mem.», 1967, v. 8, p. 133—236.

В. В. Афанасьев.

ШАР — множество V^n точек x евклидова пространства E^n, удаленных от нек-рой точки x_0 (центр Ш.) на расстояние, меньшее (открытый шар $\mathring{V}^n$) или не превышающее (замкнутый шар $\bar{V}^n$) величину R (радиус Ш.), т. е.

$$\mathring{V}(\bar{V}^n)=\{x\in E^n,\ \rho(x,\ x_0)<R\ (\leqslant R)\}.$$

Ш. V^1 — это отрезок, V^2 — это круг, V^n при $n>3$ иногда наз. гипершаром. Границей (поверхностью) Ш. является *сфера*.

Объем Ш.

$$V^n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}R^n=\frac{S^{n-1}}{n}R,$$

где S^{n-1} — поверхность граничной сферы. В частности,

$$V^1=2R,\ V^2=\pi R^2,\ V^3=\frac{4}{3}\pi R^3,\ V^4=\frac{\pi^2R^4}{2}.$$

С возрастанием размерности объем Ш. «концентрируется» у его поверхности:

$$\frac{V^n(R_2)-V^n(R_1)}{V^n(R_2)}\longrightarrow 1,\ R_1<R_2,\ n\longrightarrow\infty.$$

Ш. — простейшая геометрич. фигура. Топология его тривиальна. Среди всех тел равного объема Ш. имеет минимальную поверхность, а среди всех тел одинаковой поверхности он имеет наименьший объем.

Совершенно аналогично определяется Ш. в метрич. пространстве, однако при этом, напр., Ш. может быть не строго выпуклым, его поверхность может иметь негладкие точки и т. п. — все то, что бывает у произвольных выпуклых тел.

Бесконечномерный шар — прямой предел последовательности вложенных друг в друга Ш. последовательных размерностей — в отличие от конечномерного Ш. не имеет компактного замыкания. Наоборот, компактность Ш. в топологическом векторном пространстве свидетельствует о его конечномерности.

Лит. см. при статье *Сфера*.

И. С. Шарадзе.

ШАРЛЬЕ МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены, ортогональные на системе неотрицательных целочисленных точек с интегральным весом $d\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — ступенчатая функция, скачки к-рой определяются по формуле

$$j(x)=e^{-a}\frac{a^x}{x!},\ x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ a>0.$$

Ортонормированные Ш. м. имеют представления

$$P_n(x;\ a)=\sqrt{\frac{a^n}{n!}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!\,a^{-k}\binom{x}{k}=$$

$$=a^{\frac{n}{2}}(n!)^{-\frac{1}{2}}[j(x)]^{-1}\Delta_j^n(x-n).$$

С *Лагерра многочленами* Ш. м. связаны равенством

$$P_n(x;\ a)=\sqrt{\frac{n!}{a^n}}L_n^{(x-n)}(a)=\sqrt{\frac{n!}{a^n}}L_n(a;\ x-n).$$

Введены К. Шарлье [1]. Поскольку функция $j(x)$ определяет распределение Пуассона, то многочлены $\{P_n(x; a)\}$ наз. также многочленами Пуассона — Шарлье.

Лит.: [1] Charlier C., Application de la théorie des probabilités à l'astronomie, P., 1931; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1974; [3] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

П. К. Суетин.

ШАРЛЬЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — малоупотребительное название распределения, плотность к-рого дается *Грама — Шарлье рядом*.

ШАРОВАЯ ФУНКЦИЯ, телесная гармоническая функция, — *сферическая функция* n-й степени с множителем r^n.

ШАУДЕРА МЕТОД — метод решения краевых задач для линейных равномерно эллиптических уравнений 2-го порядка, в основе к-рого лежат априорные оценки и метод продолжения по параметру.

Ш. м. решения *Дирихле задачи* для линейного равномерно эллиптического уравнения

$$Lu\equiv a^{ij}(x)\,u_{x_ix_j}+b^j(x)\,u_{x_j}+b(x)\,u=f(x),\qquad(1)$$

заданного в ограниченной области Ω евклидова пространства точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и с коэффициентом $b(x)\leqslant 0$ описывается следующим образом.

1. Вводятся пространства $C_\alpha(\Omega)$, $C_{1+\alpha}(\Omega)$, $C_{2+\alpha}(\Omega)$ как множества функций $u=u(x)$ с конечными нормами

$$\|u\|_{C_\alpha(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|+\sup_{x,\,y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},\quad 0<\alpha<1,$$

$$\|u\|_{C_{1+\alpha}(\Omega)}=\|u\|_{C_\alpha(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\|u_{x_i}\|_{C_\alpha(\Omega)},$$

$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\Omega)}=\|u\|_{C_{1+\alpha}(\Omega)}+\sum_{i,\,j=1}^n\|u_{x_i,\,x_j}\|_{C_\alpha(\Omega)}$$

2. Предполагается, что граница σ области Ω принадлежит классу $C_{2+\alpha}$, т. е. каждый элемент σ_x $(n-1)$-мерной поверхности σ может быть отображен на часть плоскости с помощью преобразования координат $y=y(x)$ с положительным якобианом, причем функция $y(x)\in C_{2+\alpha}(\sigma_x)$.

3. Доказывается, что если коэффициенты уравнения (1) принадлежат пространству $C_\alpha(\Omega)$ и функция $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$, то справедлива априорная оценка вплоть до границы

$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\Omega)}\leqslant C\left[\|Lu\|_{C_\alpha(\Omega)}+\|u\|_{C_{2+\alpha}(\Omega)}+\|u\|_{C_0(\Omega)}\right],\quad (2)$$

где постоянная C зависит только от Ω, постоянной эллиптичности $m\leqslant a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j/|\xi|^2$, $\xi\neq 0$, и норм коэффициентов оператора L, а

$$\|u\|_{C_0(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

4. Считается известным метод доказательства существования решения $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$ задачи Дирихле

$$u|_\sigma=\varphi(x)\in C_{2+\alpha}(\Omega)$$

для оператора Лапласа $\Delta=\sum_{i=1}^n\partial^2/\partial x_i^2$.

5. Не нарушая общности, полагается $\varphi(x)\equiv 0$ и затем реализуется метод продолжения по параметру, сущность к-рого состоит в том, что:

5_1. Оператор L вкладывается в однопараметрическое семейство операторов

$$L_t u=tLu+(1-t)\Delta u,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad L_0=\Delta.$$

5_2. Существенно опираясь на априорную оценку (2), устанавливается, что множество T тех значений параметра $t\in[0,\,1]$, для к-рых задача Дирихле $L_t u=f(x)$, $u|_\sigma=0$ имеет решение $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$ при любых $f\in C_\alpha(\Omega)$ является одновременно открытым и, стало быть, совпадает с единичным отрезком $[0,\,1]$.

6. Доказывается, что если D — ограниченная область, содержащаяся в Ω вместе со своим замыканием, то для любой функции $u\in C_{2+\alpha}(D)$ и каждой компактной подобласти $\omega\subset D$ справедлива внутренняя априорная оценка:

$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\omega)}\leqslant C\left[\|Lu\|_{C_\alpha(D)}+\|u\|_{C_0(D)}\right].\quad (3)$$

7. Равномерно аппроксимируя заданные функции φ и f с помощью функций из класса $C_{2+\alpha}$ и применяя оценку (3), показывается существование решения задачи Дирихле для любой непрерывной граничной функции и широкого класса областей с негладкими границами, напр. для областей, представимых как объединение последовательностей областей $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\ldots\subset\Omega_j\subset\subset\Omega_{j+1}\subset\ldots$, границы к-рых имеют такую же гладкость, что и σ.

Оценки 2 и 3 получены впервые Ю. Шаудером (см. [1], [2]) и носят его имя. Оценки Шаудера и его метод обобщены на уравнения и системы высшего порядка. Соответствующие им как внутренние, так и вплоть до границы, априорные оценки иногда наз. оценками шаудеровского типа. Дальнейшим развитием Ш. м. является метод априорных оценок.

Лит.: [1] Schauder J., «Math. Z.», 1934, Bd 38, № 2, S. 257—82; [2] его же, «Stud. math.», 1935, v. 5, p. 34—42; [3] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981; [6] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [7] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973.

А. М. Нахушев.

ШАУДЕРА ТЕОРЕМА — один из принципов *неподвижной точки:* если вполне непрерывный оператор A отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество K банахова пространства X в себя, то существует по крайней мере одна точка $x\in K$ такая, что $Ax=x$. Доказана Ю. Шаудером [1] как обобщение *Брауэра теоремы.*

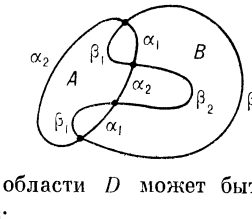
Существуют различные обобщения Ш. т.: теорема Маркова — Какутани, принцип Тихонова и др.

Лит.: [1] Schauder J., «Stud. math.», 1930, v. 2, p. 171—80; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [4] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [5] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977.

В. И. Соболев.

ШВАРЦА АЛЬТЕРНИРУЮЩИЙ МЕТОД — один из общих методов решения *Дирихле задачи*, позволяющий получить решение задачи Дирихле для дифференциального уравнения эллиптич. типа в областях D, представимых в виде объединения конечного числа областей D_i, для к-рых решение задачи Дирихле уже известно. Работы Г. Шварца (1869; см. [1]) и ряд последующих работ других авторов были посвящены Ш. а. м. решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоских областях. Сущность Ш. а. м. применительно к простейшему случаю уравнения Лапласа в объединении двух плоских областей заключается в следующем.

Пусть A и B — две области на плоскости, имеющие непустое пересечение и такие, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для каждой из них известно; напр., если A и B — круги, то решение задачи Дирихле для каждого из них дается интегралом Пуассона. Пусть, далее, D — объединение областей A и B, для к-рого требуется найти решение задачи Дирихле (см. рис.). Через α обозначена граница области A, через α_1 — части границы α, попавшие в B (они входят в D), а через α_2 — оставшиеся части, так что $\alpha=\alpha_1\cup\alpha_2$. Аналогично β — граница области B, β_1 — ее части, попавшие в A (они тоже входят в D), β_2 — оставшиеся части, то есть $\beta=\beta_1\cup\beta_2$. Тогда граница γ области D может быть представлена в виде $\gamma=\alpha_2\cup\beta_2$.



Пусть теперь на γ задана непрерывная функция f и пусть требуется найти гармонич. функцию w в D, непрерывную в замкнутой области $\bar{D}$ и принимающую на γ значения функции f. Сужение функции f на α_2 продолжается непрерывно на всю границу α и для этих граничных значений находится решение u_1 задачи Дирихле в A. Значения u_1 на β_1 вместе со значениями f на β_2 образуют теперь непрерывную функцию на β, для к-рой находится решение v_1 задачи Дирихле в B. Далее, решение u_2 задачи Дирихле в A строится по значениям функции f на α_2 и функции v_1 на α_1 и т. д. Искомая функция имеет вид

$$w=\lim_{n\to\infty}u_n\ \text{в}\ A$$

и

$$w=\lim_{n\to\infty} v_n \text{ в } B.$$

Применение ограниченных решений задачи Дирихле для кусочно непрерывных граничных данных позволяет полагать, не заботясь о непрерывном продолжении f, значения равными нулю на оставшихся частях границ.

Метод, аналогичный Ш. а. м. (см. [2]), может быть применен к отысканию решения задачи Дирихле в пересечении двух областей A и B, если ее решения для A и B известны.

Ш. а. м. используется и при решении краевых задач более общей природы для общих уравнений эллиптич. типа (в том числе и порядка выше второго), подчиненных нек-рым дополнительным условиям [3], причем также и в пространственных областях.

Важное значение имеет Ш. а. м. для построения гармонич. функций различного вида (с наперед заданными особенностями) на римановых поверхностях [4].

Лит.: [1] Schwarz H., Ges. math. Abh., Bd 2, B., 1890; [2] Neumann C., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl.», 1870, Bd 22, S. 264—321; [3] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962, гл. 7; [4] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955.

Е. Д. Соломенцев.

ШВАРЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛ — главная часть порядка n *Шварца симметрической производной*. Подробнее, если для функции действительного переменного $f(x)$

$$\Delta^n f(x,\ \Delta x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f\left(x+\frac{n-2k}{2}\Delta x\right)=$$
$$=A\cdot(\Delta x)^n+o((\Delta x)^n),$$

то выражение $A\cdot(\Delta x)^n$ наз. Ш. д. порядка n. Когда говорят о Ш. д. без указания порядка, то обычно считают $n=2$.

Т. П. Лукашенко.

ШВАРЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР, производная Шварца, шварциан, аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z — дифференциальное выражение

$$\{f,\ z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2,$$

появившееся при исследовании конформного отображения многоугольников на круг, в частности в работах Г. Шварца [1].

Важнейшее свойство Ш. д. п.— его инвариантность относительно дробно-линейного преобразования функции $f(z)$, т. е. если

$$g(z)=\frac{af(z)+b}{cf(z)+d},$$

то $\{f,\ z\}=\{g,\ z\}$. Применения Ш. д. п. связаны прежде всего с вопросами однолистности аналитич. функций. Напр., если $f(z)$ — однолистная аналитич. функция в круге $D=\{z:|z|<1\}$, причем $f(0)=0$, $f'(0)=1$, то

$$|\{f,\ z\}|\leqslant\frac{6}{(1-|z|^2)^2},\quad |z|<1.$$

Обратно, если $f(z)$ регулярна в D и

$$|\{f,\ z\}|\leqslant\frac{2}{(1-|z|^2)^2},\quad |z|<1,$$

то $f(z)$ — однолистная функция в D и константу 2 здесь нельзя увеличить.

Лит.: [1] Schwarz H., Ges. math. Abh., Bd 2, B., 1890; [2] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Е. Д. Соломенцев.

ШВАРЦА ИНТЕГРАЛ — зависящий от параметра интеграл, дающий решение задачи Шварца о выражении аналитич. функции $f(z)=u(z)+iv(z)$ в круге D по граничным значениям ее действительной (или мнимой) части u на граничной окружности C (см. [1]).

Пусть на единичной окружности $C=\{z:z=e^{i\varphi},\ 0<\varphi<2\pi\}$ дана непрерывная действительная функция $u(\varphi)$. Тогда интегральные формулы Шварца, выражающие аналитич. функцию $f(z)=u(z)+iv(z)$, граничные значения действительной части к-рой совпадают с $u(\varphi)$ (или граничные значения мнимой части совпадают с $v(\varphi)$), имеют вид

$$f(z)=Su(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C u(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+ic=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}u(\varphi)\,d\varphi+ic,\qquad (*)$$
$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C v(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+c_1=$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}v(\varphi)\,d\varphi+c_1.$$

где $z=re^{i\theta}$, $t=e^{i\varphi}$, c и c_1 — произвольные действительные постоянные. Ш. и. (*) тесно связан с *Пуассона интегралом*. Выражение

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}$$

часто наз. ядром Шварца, а интегральный оператор S, фигурирующий в первой формуле (*),— оператором Шварца. Эти понятия обобщаются и на области произвольного вида комплексной плоскости (см. [3]). Ш. и. и его обобщения играют важную роль при решении *граничных задач теории аналитических функций* (см. также [3]) и исследовании *граничных свойств аналитических функций* (см. также [4]).

При применении интегральных формул (*) возникает важный и более трудный вопрос о существовании и выражении граничных значений мнимой части $v(z)$ и всей функции $f(z)$ по данным граничным значениям действительной части $u(\varphi)$ (или граничных значений действительности части $u(z)$ и всей функции $f(z)$ по данным граничным значениям мнимой части $v(\varphi)$). Если данные функции $u(\varphi)$ или $v(\varphi)$ удовлетворяют на C *Гёльдера условию*, то соответствующие граничные значения $v(\varphi)$ или $u(\varphi)$ выражаются формулами Гильберта

$$v(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi}{2}\,d\alpha+c,$$
$$u(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi}{2}\,d\alpha+c_1,$$

причем входящие в эти формулы интегралы являются сингулярными и существуют в смысле главного значения по Коши (см. [3]).

Лит.: [1] Schwarz H., Ges. math. Abh., Bd 2, B., 1890; [2] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [3] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [4] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950.

Е. Д. Соломенцев.

ШВАРЦА ЛЕММА: если функция $f(z)$ регулярна в круге $E=\{|z|<1\}$, $f(0)=0$ и $|f(z)|\leqslant 1$ в E, то при $z\in E$ справедливы неравенства

$$|f(z)|\leqslant|z| \quad\text{и}\quad |f'(0)|\leqslant 1, \qquad (1)$$

причем знаки равенства в них (в первом из неравенств (1) при $z\neq 0$) имеют место только в случае, когда $f(z)\equiv e^{i\alpha}z$, где α — действительная постоянная (классическая форма Ш. л.). Эта лемма была доказана Г. Шварцем (см. [1]).

Известны различные формы Ш. л. Напр., инвариантная форма Ш. л.: если функция $f(z)$ регу-

лярна в круге E и $|f(z)|\leqslant 1$ в E, то для любых точек $z_1, z_2 \in E$ справедливо неравенство

$$r_E(f(z_1), f(z_2)) \leqslant r_E(z_1, z_2), \qquad (2)$$

где $r_E(a, b)$ — гиперболич. расстояние между точками a, b в круге E (см. *Гиперболическая метрика*); кроме того, при $z \in E$ справедливо неравенство

$$\frac{|df(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{|dz|}{1-|z|^2}, \qquad (3)$$

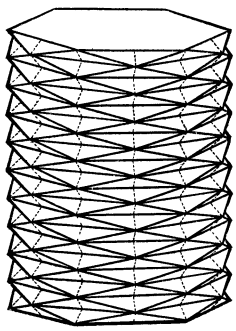
при этом знаки равенства в (2) и (3) имеют место только в случае, когда $f(z)$ — дробно-линейное отображение круга E на себя.

Неравенство (3) наз. также дифференциальной формой Ш. л. Интегрирование этого неравенства приводит к следующей формулировке Ш. л: при отображении круга E с помощью регулярной функции $f(z)$, для к-рой $|f(z)|<1$ при $z \in E$, гиперболич. длина произвольной дуги в E уменьшается, за исключением того случая, когда $f(z)$ реализует однолистное конформное отображение круга E на себя, в этом случае гиперболич. расстояния между точками E сохраняются.

Обобщением инвариантной формы Ш. л. на многосвязные области, в к-рых может быть определена гиперболич. метрика, служит *гиперболической метрики принцип*. Известны аналоги Ш. л. для голоморфных отображений в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ (см. [4]).

Лит.: [1] Schwarz H. A., Ges. math. Abh., Bd 1—2, B., 1890; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 2.
Г. В. Кузьмина.

ШВАРЦА ПОВЕРХНОСТЬ — многогранная поверхность, вписанная в конечный круговой цилиндр так, что последовательность таких поверхностей при соответствующем подборе параметров может стремиться к любому пределу (в том числе и бесконечному).



Конструкция Ш. п. такова (см. рис.), что при стремлении к нулю максимальных диаметров ее граней они оказываются вовсе не близкими по своему расположению в пространстве к касательной плоскости к поверхности цилиндра. Таким образом грань Ш. п. не может с возрастающей точностью приближать элемент поверхности цилиндра.

Поверхность приведена Г. Шварцем (H. Schwarz) в 1880.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, 5 изд., М., 1969.
А. Б. Иванов.

ШВАРЦА СИММЕТРИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ функции $f(x)$ в точке x_0 — величина

$$D^2 f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

иногда наз. производной Римана, или второй симметрической производной. Впервые введена Б. Риманом в 1854 (см. [2]), рассматривалась Г. Шварцем [1]. Более общо Ш. с. п. называют симметрич. производную порядка n

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^n f(x, h)}{h^n} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f\left(x+\frac{n-2k}{2}h\right)}{h^n}.$$

Лит.: [1] Schwarz H., Ges. math. Abh., Bd 2, B., 1890, S. 341—43; [2] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 225—61; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, с. 279—98; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 185—201; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., М., 1965, т. 1, с. 43—45, 502—18, т. 2, с. 132—39.
Т. П. Лукашенко.

ШВАРЦА ТЕОРЕМА СИММЕТРИИ: если минимальная поверхность проходит через нек-рую прямую l, то l является ее осью симметрии. Из Ш. т. с. следует, что если граница минимальной поверхности содержит отрезок прямой l, то эта поверхность может быть продолжена через этот отрезок симметрично относительно l.
И. Х. Сабитов.

ШВАРЦА УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка вида

$$\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = 2I(t); \qquad (1)$$

его левая часть наз. производной Шварца функции $z(t)$ и обозначается символом $\{z, t\}$. Это уравнение использовал в своих исследованиях Г. Шварц [1].

Если $x_1(t)$, $x_2(t)$ — фундаментальная система решений линейного уравнения 2-го порядка

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,\ p\in C^1,\ q\in C, \qquad (2)$$

то на любом интервале, где $x_2(t)\neq 0$, функция

$$z(t)=\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \qquad (3)$$

удовлетворяет Ш. у. (1), где

$$I(t)=q(t)-\frac{1}{4}p^2(t)-\frac{1}{2}p'(t)$$

— инвариант линейного уравнения (2). Обратно, любое решение Ш. у. (1) может быть представлено в виде (3), где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — нек-рые линейно независимые решения уравнения (2). Решения Ш. у. в комплексной области с рациональной правой частью тесно связаны с задачей описания функций, конформно отображающих верхнюю полуплоскость внутрь многоугольника, ограниченного конечным числом отрезков прямых и дуг окружностей.

Лит.: [1] Schwarz H., «J. reine und angew. Math.», 1873, Bd 75, S. 292—335; [2] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950.
Н. Х. Розов.

ШВАРЦА ФОРМУЛА — формула для *минимальной поверхности*, имеющая вид

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{r}(t)+i\int [\boldsymbol{n}, d\boldsymbol{r}]\right\},$$

где $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор минимальной поверхности F, $\mathrm{Re}\{\boldsymbol{r}(t)\}$ — радиус-вектор произвольной незамкнутой аналитической (относительно t) кривой L, лежащей на F, $\boldsymbol{n}(t)$ — единичная нормаль к F вдоль L (аналитически зависящая от t). После интегрирования параметр t заменяется на $t=u+iv$. Формула установлена Г. Шварцем (H. Schwarz, 1875); она дает в явном виде решение *Бьерлинга задачи*.
И. Х. Сабитов.

ШВАРЦА ФУНКЦИЯ, функция Римана — Шварца, — аналитич. функция, реализующая конформное отображение треугольника, ограниченного дугами окружностей, на верхнюю полуплоскость (или на единичный круг) и при неограниченном аналитич. продолжении остающаяся однозначной. Ш. ф. являются *автоморфными функциями*, группа к-рых зависит от вида отображаемого треугольника. Требованию однозначности можно удовлетворить лишь в том случае, если углы треугольника равны π/ν_1, π/ν_2, π/ν_3, где ν_1, ν_2, ν_3 — нек-рые специально подобранные натуральные числа.

Если $1/\nu_1+1/\nu_2+1/\nu_3=1$, то получаются прямолинейные треугольники, для к-рых возможны только случаи: $\nu_1=\nu_2=2$, $\nu_3=\infty$ (полуполоса); $\nu_1=2$, $\nu_2=3$,

$\nu_3=6$; $\nu_1=2$, $\nu_2=\nu_3=4$; $\nu_1=\nu_2=\nu_3=3$. Во всех этих случаях Ш. ф. выражаются через тригонометрич. функции или через *Вейерштрасса эллиптические функции* и являются автоморфными функциями, группа к-рых есть группа движений евклидовой плоскости.

Если $1/\nu_1+1/\nu_2+1/\nu_3>1$, то возможны следующие случаи: $\nu_1=\nu_2=2$, ν_3 — любое; $\nu_1=2$, $\nu_2=\nu_3=3$; $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=4$; $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=5$. Во всех этих случаях Ш. ф. являются рациональными автоморфными функциями, группа к-рых есть конечная группа движений сферы. Вследствие связи этой группы с правильными многогранниками такие Ш.ф. наз. также полиэдральными функциями.

Наконец, если $1/\nu_1+1/\nu_2+1/\nu_3<1$, то возможно бесконечно много различных треугольников, т. к. числа ν_1, ν_2, ν_3 можно неограниченно увеличивать. При этом Ш. ф. суть автоморфные функции с непрерывной особой линией (окружностью или прямой). В частности, случаи $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=\infty$ и $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\infty$ (круговой треугольник с нулевыми углами) приводят к *модулярным функциям* $J(z)$ и $\lambda(z)$ соответственно. Ш. ф. изучались Г. Шварцем [1].

Лит.: [1] Schwarz H., «J. reine und angew. Math.», 1873, Bd 75, S. 292—335; [2] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950, [3] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936. *Е. Д. Соломенцев.*

ШВАРЦА ЯДРО в круге $|z|<1$ — функция

$$T(z;\ \zeta)=\frac{\zeta+z}{\zeta-z},\quad \zeta=e^{i\sigma},\ 0\leqslant\pi\leqslant 2\pi.$$

Пусть D — конечная односвязная или многосвязная область с границей Γ, $G(z;\ \zeta)$ — функция Грина для оператора Лапласа в D, а действительная функция $H(z;\ \zeta)$ — сопряженная с $G(z;\ \zeta)$. Тогда функция $M(z;\ \zeta)=G(z;\ \zeta)+iH(z;\ \zeta)$ наз. комплексной функцией Грина области D. Функция $M(z;\ \zeta)$ — аналитическая, но многозначная (если D — многосвязна) функция от z и однозначная неаналитическая функция ζ. Функция

$$T(z;\ \zeta)=\frac{\partial M(z;\ \zeta)}{\partial \nu},$$

где ν — направление внутренней нормали в точке $\zeta\in\Gamma$, наз. ядром Шварца области D.

Пусть $F(z)=u(z)+iv(z)$ — аналитич. функция, не имеющая в D особых точек, u — однозначная и непрерывная в $D\cup\Gamma$. Тогда справедлива формула

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(\zeta)\,T(z;\ \zeta)\,d\sigma+iv(a),$$

где $a\in D$ — фиксированная точка, $v(a)$ — значение в a одной из ветвей функции $v(z)$.

Лит.: [1] Интегральные уравнения, М., 1968; [2] Михлин С. Г., Интегральные уравнения..., 2 изд., М.— Л., 1949. *Б. В. Хведелидзе.*

ШВАРЦШИЛЬДА МЕТРИКА — метрика четырехмерного псевдориманова пространства, к-рая может быть приведена к виду

$$ds^2=-\frac{1}{1-r/r_g}\,dr^2-r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)+$$
$$+(1-r_g/r)\,c^2\,dt^2,\ r\neq r_g,\ r\neq 0,$$

где r_g и c — константы. Ш. м. состоит из двух связных компонент: первая из них ($r>r_g$) наз. внешней Ш. м., вторая ($r<r_g$) — внутренней Ш. м. В общей теории относительности Ш. м. служит для описания сферически симметричного поля изолированного точечного тела. В этом случае координаты интерпретируются как время, измеренное по часам бесконечно удаленного наблюдателя, r — как расстояние до объекта, θ и φ — как угловые переменные, c — скорость света в вакууме, $r_g=\frac{2\mathfrak{G}M}{c^2}$ — так наз. гравитационный радиус ($\mathfrak{G}$ — постоянная тяготения, M — масса тела). Ш. м. не является геодезически полной. Неполными являются геодезические, к-рые приближаются к точкам $r=0$ или $r=r_g$. В связи с этим принято говорить, что Ш.м. имеет координатные сингулярности при $r=0$ и $r=r_g$. В первом случае сингулярность связана с тем, что вблизи точечного источника величины, характеризующие гравитационное поле, неограниченно возрастают. Координатная сингулярность при $r=0$ является истинной сингулярностью (или просто сингулярностью), т. е. не существует четырехмерного псевдориманова пространства N сигнатуры (1, 3) такого, что в него можно вложить Ш. м. так, что предельные точки последовательностей, r-координаты к-рых стремятся к нулю, были бы внутренними точками пространства N. При $r=r_g$ координатная сингулярность не является истинной. Известна так наз. метрика Крускала, являющаяся расширением Ш. м., в к-рой точки с $r=r_g$ являются регулярными. Метрика Крускала не допускает расширения без нарушения сигнатуры или регулярности; она имеет более сложное строение, нежели Ш. м. Ряд особенностей этого строения пока не имеет ясного физич. истолкования.

Важной особенностью Ш. м. является то, что при $r<r_g$ всевозможные траектории пробных частиц и лучей света идут в направлении уменьшения r. Другими словами, частица или луч света, проникшие за так наз. шварцшильдовскую сферу ($r=r_g$), уже не могут выйти обратно. С этой особенностью Ш. м. связано представление о гравитационном коллапсе массивных звезд и образовании черных дыр, т. е. самоизолировавшихся тел, к-рые влияют на остальные тела лишь посредством гравитационного поля. Для описания черных дыр используется также обобщение Ш. м.— метрика Керра. Ш. м. может служить и для описания катастрофич. взрывов — так наз. белых дыр.

Важным приложением Ш. м. является применение ее для вычисления эффектов общей теории относительности в Солнечной системе. В этом случае гравитационное поле является слабым, т. к. радиусы Солнца и Земли являются много больше их гравитационных радиусов, равных, соответственно, 3 км и 0,4 см. Для описания гравитационного поля внутри небесных тел Ш. м. непригодна.

Ш. м. предложена К. Шварцшильдом (K. Schwarzschild) в 1916 как решение уравнений Эйнштейна в случае сферически симметричного статического гравитационного поля при правой части уравнений Эйнштейна, равной нулю всюду, кроме точки начала координат.

Лит.: [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973. *Д. Д. Соколов.*

ШВАРЦШИЛЬДА ПОЛЕ — гравитационное поле изолированного точечного тела, пространственно-временные свойства к-рого определяются *Шварцшильда метрикой*. *Д. Д. Соколов.*

ШЕВАЛЛЕ ГРУППА — линейная алгебраич. группа над нек-рым полем, связанная с полупростой комплексной алгеброй Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — *Ли полупростая алгебра* над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, Σ — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, $\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k\}\subset\Sigma$ — система простых корней, $\{H_{\alpha_i}(1\leqslant i\leqslant k),\ X_\alpha(\alpha\in\Sigma)\}$ — базис Шевалле алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ — его линейная оболочка над $\mathbb{Z}$.

И пусть φ — точное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в конечномерном векторном пространстве V. Оказывается, что в V существует решетка (т. е. свободная абелева подгруппа, базис к-рой является базисом пространства V), инвариантная относительно всех операторов

$\frac{\varphi(X_\alpha)^m}{m!}$ ($\alpha\in\Sigma$, m — натуральное число). Если k — произвольное поле и $V^k = M\otimes k$, то определены гомоморфизмы x_α: $k\longrightarrow \mathrm{GL}(V^k)$, $\alpha\in\Sigma$, заданные формулами

$$x_\alpha(t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \frac{\varphi(X_\alpha)^m}{m!}.$$

Подгруппы $\mathfrak{X}_\alpha = \mathrm{Im}\, x_\alpha$, $\alpha\in\Sigma$, порождают в $\mathrm{GL}(V^k)$ нек-рую подгруппу G_k, к-рая и наз. группой Шевалле, связанной с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, представлением φ, полем k. В случае, когда $\varphi = \mathrm{ad}$ (присоединенное представление), Ш. г. были определены К. Шевалле (C. Chevalley) в 1955 (см. [1]).

Если K — алгебраически замкнутое поле, содержащее k, то Ш. г. G_K есть связная полупростая линейная алгебраич. группа над K, определенная и разложимая над простым подполем $k_0\subseteq k$. Ее алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}\otimes K$. Группа G_k является коммутантом группы $G_K(k)$ точек группы G_K, рациональных над k. Любая связная полупростая линейная алгебраич. группа над K изоморфна одной из Ш. г. Алгебраич. группы G_K (и G_k как абстрактные группы) зависят лишь от решетки $\Gamma_\varphi\subset\mathfrak{h}^*$, порожденной весами представления φ. Если Γ_φ совпадает с решеткой корней Γ_0, то G_K наз. присоединенной группой, а если $\Gamma_\varphi = \Gamma_1$ (решетка весов, см. *Ли полупростая группа*), то G_K наз. универсальной, или односвязной, группой. Если G_K универсальна, то $G_k = G_K(k)$.

Ш. г. G_K всегда совпадает со своим коммутантом. Центр группы G_k конечен. Напр., центр Z универсальной группы G_k изоморфен $\mathrm{Hom}(\Gamma_1/\Gamma_0, k^*)$, а соответствующая присоединенная группа изоморфна G_k/Z и имеет тривиальный центр.

Если алгебра $\mathfrak{g}$ проста, то присоединенная Ш. г. G_k проста, за исключением следующих случаев: $|k| = 2$, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типов A_1, B_2, G_2; $|k| = 3$, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа A_1. Другие серии простых групп можно получить, рассматривая подгруппы неподвижных точек нек-рых автоморфизмов конечного порядка Ш. г. (т. н. скрученные группы).

Если поле k конечно, то порядок универсальной группы G_k вычисляется по формуле

$$|G_k| = q^N \prod_{i=1}^{r} (q^{d_i} - 1),$$

где $q = |k|$, d_i ($i = 1, \ldots, r$) — показатели алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. степени свободных образующих алгебры многочленов на $\mathfrak{h}$, инвариантных относительно *Вейля группы*, $N = \sum_{i=1}^{r} (d_i - 1)$ — число положительных корней.

Имеется развитая теория рациональных линейных представлений Ш. г. G_k над бесконечным полем k, сводящаяся к случаю алгебраически замкнутого поля, а в последнем случае совпадающая с теорией *рациональных представлений* полупростых алгебраич. групп. Если $\mathfrak{g}$ проста, G_k — универсальная Ш. г. над бесконечным полем k и σ — нетривиальное неприводимое конечномерное представление группы G_k (как абстрактной группы) над алгебраически замкнутым полем K, то существуют такой конечный набор вложений φ_i: $k\longrightarrow K$ и такой набор рациональных представлений ρ_i групп $G_{\varphi_i(k)}$, что $\sigma = \bigotimes_i \rho_i\circ\varphi_i$. По поводу представлений Ш. г. см. также [2], [3]. [5].

Лит.: [1] Шевалле К., «Математика», 1958, т. 2, № 1, с. 3—53; [2] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [3] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973; [4] Humphreys J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, N. Y.— Hdlb.— B., 1972; [5] его же, Ordinary and modular representations of Chevalley groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1976.

А. Л. Онищик.

ШЕННОНА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая условия, при к-рых возможна или невозможна передача сообщений, вырабатываемых данным *источником сообщений*, по данному *каналу связи* и при заданных условиях точности воспроизведения сообщений (см. *Сообщений точность воспроизведения*). Имеются различные формулировки Ш. т. (см. *Информации передача* и лит. [1] — [4] при этой статье).

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ШЁНФЛИСА ГИПОТЕЗА: общая граница двух плоских областей всегда разложима. При этом пространство X наз. разложимым, если оно связно и допускает представление в виде объединения двух замкнутых связных подмножеств, отличных от X. Эта гипотеза была высказана А. Шёнфлисом (A. Schoenflies) в 1908 и опровергнута Л. Брауэром (L. Brouwer) в 1910, открывшим неразложимые континуумы, т. е. связные компакты, к-рые нельзя представить в виде объединения двух замкнутых собственных связных подмножеств. Для каждого конечного или счетного $k\geqslant 2$ построено k плоских областей, имеющих общую границу, являющуюся неразложимым континуумом.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969.

Б. А. Ефимов.

ШЕПЛИ ВЕКТОР — вектор-функция $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$, заданная на множестве характеристич. функций игр n лиц и удовлетворяющая следующим аксиомам: 1) (эффективность) если коалиция T такова, что для любой коалиции S выполняется равенство $v(S) = v(S\cap T)$, то $\sum_{i\in T}\varphi_i(v) = v(T)$; 2) (симметричность) если π — перестановка множества $J = \{1, \ldots, n\}$ и для любой коалиции S имеет место $v'(\pi S) = v(S)$, то $\varphi_{\pi i}(v') = \varphi_i(v)$; 3) (линейность) $\varphi_i(v+u) = \varphi_i(v) + \varphi_i(u)$. Эти аксиомы были введены Л. Шепли [1] для аксиоматич. определения ожидаемого выигрыша игрока в *кооперативной игре*. Было показано, что аксиомам 1) — 3) удовлетворяет единственная вектор-функция

$$\varphi_i(v) = \sum_{S\ni i} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}\,[v(S) - v(S-\{i\})].$$

Лит.: [1] Shapley L., в кн.: Contributions to the Theory of Games, v. 2, Princeton (N. J.), 1953, p. 307—17.

А. И. Соболев.

ШЕППАРДА ПОПРАВКИ для моментов — поправки на дискретизацию реализаций непрерывных случайных величин, применяемые с целью уменьшения систематич. ошибок в задаче оценивания моментов непрерывных случайных величин при заданной системе округлений.

Впервые такие поправки были предложены У. Шеппардом [1]. Пусть X — непрерывно распределенная случайная величина, плотность вероятности к-рой $p(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, имеет всюду непрерывную на $\mathbb{R}^1$ производную $p^{(s)}(x)$ порядка s такую, что

$$p^{(s)}(x) = O(|x|^{-1-\delta}) \text{ при } x\longrightarrow\infty$$

для нек-рого $\delta > 0$, и пусть существует момент $\alpha_k = \mathsf{E}X^k$. Далее, пусть задана система округлений результатов наблюдений (т. е. заданы начало отсчета x_0 и шаг h, $h > 0$), выбор к-рой приводит к тому, что вместо реализаций исходной непрерывной случайной величины X в действительности наблюдаются реализации $x_m = x_0 + mh$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ дискретной случайной величины

$$Y = x_0 + h\left[\frac{X - x_0}{h} + \frac{1}{2}\right],$$

где $[a]$ — целая часть числа a. Моменты $a_i = \mathsf{E}Y^i$, $i = 1,$

2, ..., k, случайной величины Y вычисляются по формуле

$$a_i=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m^i P\{Y=x_m\}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m^i \int_{x_m-h/2}^{x_m+h/2} p(x)\,dx.$$

Вообще говоря, $a_i\neq\alpha_i$. В связи с этим возникает вопрос: можно ли подправить моменты $a_1, a_2, \ldots, a_k$ так, чтобы они давали «хорошие» приближения для моментов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$? Ш. п. дают положительный ответ на этот вопрос.

Пусть $g(t)$ — характеристич. функция случайной величины X, $f(t)$ — характеристич. функция случайной величины Y, и пусть

$$\varphi(t)=\mathsf{E}e^{it\eta}=\frac{2}{th}\sin\frac{th}{2}$$

— характеристич. функция случайной величины η, к-рая равномерно распределена на интервале $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ и стохастически независима от X. В этих условиях при малом h

$$f(t)=g(t)\varphi(t)+O(h^{s-1}),$$

откуда следует, что моменты дискретной случайной величины Y совпадают с точностью до $O(h^{s-1})$ с моментами случайной величины $X+\eta$ и, следовательно, с точностью до $O(h^{s-1})$ имеют место следующие равенства

$$\alpha_1=a_1, \qquad \alpha_4=a_4-\frac{1}{2}a_2h^2+\frac{7}{240}h^4,$$

$$\alpha_2=a_2-\frac{1}{12}h^2, \quad \alpha_5=a_5-\frac{5}{6}a_3h^2+\frac{7}{48}a_1h^4,$$

$$\alpha_3=a_3-\frac{1}{4}a_1h^2,$$

$$\alpha_6=a_6-\frac{5}{4}a_4h^2+\frac{7}{16}a_2h^4-\frac{31}{1344}h^6, \ldots,$$

к-рые и содержат т. н. Ш. п. к моментам $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Лит.: [1] Sheppard W. F., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1898, v. 29, p. 353—80; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [4] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960. *М. С. Никулин.*

ШЕРКА ПОВЕРХНОСТЬ — минимальная поверхность (м. п.), найденная Х. Шерком (H. Scherk, 1834). Она определяется уравнением $z=\ln\frac{\cos y}{\cos x}$ и является единственной м. п., представляемой как *переноса поверхность* вида $z=f(x)+g(y)$. Ш. п. и ее модификации служат для построения вспомогательных функций, позволяющих находить примеры неразрешимости задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Лагранжа м. п. над невыпуклыми областями.

Ш. п. обладает рядом интересных свойств: она — полная поверхность бесконечного рода, содержащая счетное число прямых; универсальная накрывающая к ней дает пример полной м. п. конформно-гиперболического типа; ее сферический образ не содержит ровно четыре точки: $\zeta=\pm1$ и $\zeta=\pm i$. Последнее свойство Ш. п. усматривается из ее представления через *Вейерштрасса формулы* с $f(w)=\frac{2}{1-w^4}$, $g(w)=w$, где w изменяется в плоскости с четырьмя исключенными точками ±1 и $\pm i$. По аналогии с этим представлением строятся обобщенные Ш. п. с

$$f(w)=\left[\prod_{m=1}^{k-1}(w-w_m)\right]^{-1}, \quad k\leqslant 4, \quad g(w)=w,$$

являющиеся полными м. п., нормали к к-рым «упускают» ровно k, $1\leqslant k\leqslant 4$, любых заранее заданных направления. Существование таких м. п. интересно в связи с гипотезой об отсутствии полных м. п., у к-рых нормали «упускали бы» более четырех направлений. Эта гипотеза доказана (1984) для числа направлений, большего семи.

И. Х. Сабитов.

ШЕФФЕРА ШТРИХ — *логическая операция*, обычно обозначаемая $|$, к-рая задается следующей *истинностной таблицей*:

A	B	$A\mid B$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	И

Таким образом, высказывание $A\mid B$ означает, что A и B несовместны, т. е. не являются истинными одновременно. Через Ш. ш. выражаются все другие логич. операции. Напр., высказывание $\neg A$ (*отрицание* A) эквивалентно высказыванию $A\mid A$; *дизъюнкция* $A\vee B$ высказываний A и B выражается так:

$$(A\mid A)\mid(B\mid B).$$

Конъюнкция $A\&B$ и *импликация* $A\to B$ выражаются соответственно как $(A\mid B)\mid(A\mid B)$ и $A\mid(B\mid B)$. Ш. ш. был введен в рассмотрение Г. Шеффером [1].

Лит.: [1] Sheffer H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1913, v. 14, p. 481—88. *В. Е. Плиско.*

ШЛЕФЛИ ИНТЕГРАЛ — 1) Ш. и.— интегральное представление *Бесселя функции* для любых значений n:

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)\,d\theta-$$

$$-\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-n\theta-z\,\mathrm{sh}\,\theta}\,d\theta, \qquad (*)$$

когда $\mathrm{Re}\,z>0$. Если n — целое, то формула (*) приводится к виду

$$J_n=\frac{z^n}{2^{n+1}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt.$$

Впервые формула (*) приведена Л. Шлефли [1].

2) Ш. и.— интегральное представление *Лежандра многочлена*

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}\,dt,$$

где C — контур, обходящий вокруг точки z один раз против часовой стрелки. Впервые представление дано Л. Шлефли [2].

Лит.: [1] Schläfli L., «Math. Ann.», 1871, Bd 3, H. 1, S. 134—49; [2] его же, Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunktionen, B., 1881; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963. *А. Б. Иванов.*

ШМИДТА ГРУППА — конечная ненильпотентная группа, все собственные подгруппы к-рой нильпотентны. Ш. г. является разрешимой группой порядка $p^\alpha q^\beta$, где p и q — различные простые числа. В любой конечной ненильпотентной группе существуют подгруппы, являющиеся Ш. г. Введены О. Ю. Шмидтом (1924).

Лит.: [1] Шмидт О. Ю., Избр. труды, М., 1959, с. 221—27. *Н. Н. Вильямс.*

ШНИРЕЛЬМАНА МЕТОД — метод сложения последовательностей целых неотрицательных чисел; создан Л. Г. Шнирельманом в 1930. Пусть $\nu(x)$ — количество элементов последовательности, не превосходящих x, $\neq0$. По аналогии с понятием меры множества

$$\alpha=\inf_{n=1,2,\ldots}\frac{\nu(n)}{n}$$

есть плотность последовательности. Суммой последовательностей A и B наз. последовательность C, элементы к-рой $c=a+b$, где $a\in A$, $b\in B$.

Теорема Шнирельмана 1): если α, β — плотности слагаемых, то плотность суммы $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$. Если при сложении последовательности самой с собой конечное число раз получается весь натуральный ряд, то исходная последовательность наз. базисом. Тогда любое натуральное число представимо суммой ограниченного числа слагаемых данной последовательности. Последовательность положительной плотности есть базис.

Теорема Шнирельмана 2): последовательность $\mathcal{P}+\mathcal{P}$ имеет положительную плотность, где $\mathcal{P}$ — последовательность, состоящая из единицы и всех простых чисел; следовательно, $\mathcal{P}$ — базис натурального ряда, то есть любое натуральное число $n\geqslant 2$ представимо суммой ограниченного числа простых чисел. Для количества слагаемых s (абсолютная постоянная Шнирельмана) получено $s\leqslant 19$. В представлении достаточно большого $n\geqslant n_0$ суммой простых чисел для количества слагаемых S (постоянная Шнирельмана) Ш. м. с использованием аналитич. методов дает $S\leqslant 6$. Однако более мощным *тригонометрических сумм методом* И. М. Виноградова получена оценка $S\leqslant 4$.

Ш. м. применен для доказательства того, что последовательность, состоящая из единицы и чисел вида $p+a^m$, где p — простое, $a\geqslant 2$ натуральное, $m=1, 2, \ldots$, есть базис натурального ряда (Н. П. Романов, 1934).

Лит.: [1] Шнирельман Л. Г., «Успехи матем. наук», 1940, в. 7, с. 7—46; [2] Хинчин А. Я., Три жемчужины теории чисел, 2 изд., М.— Л., 1948; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967. *Н. И. Климов.*

ШОКЕ СИМПЛЕКС — непустое компактное выпуклое множество X в *локально выпуклом пространстве* E, обладающее следующим свойством: при вложении E в качестве гиперплоскости $E\times 1$ в пространство $E\times\mathbb{R}$ проектирующий конус

$$\tilde{X}=\{\alpha x\in E\times\mathbb{R}\mid x\in X\}\subset E\times 1,\ \alpha\geqslant 0\}$$

множества X превращает $E\times\mathbb{R}$ в частично упорядоченное пространство, для к-рого пространство разностей $\tilde{X}-\tilde{X}$ является *решеткой*. В случае конечномерного E Ш. с. есть обычный симплекс с числом вершин $\dim E+1$. Существует ряд эквивалентных определений Ш. с. (см. [1]). Одно из них сводится к требованию, чтобы пересечение $\tilde{X}$ с любым транслятом $\tilde{X}$ снова было транслятом $\tilde{X}$.

Когда дополнительно к наложенным условиям E сепарабельно, а X метризуемо, то для того, чтобы X было Ш. с., необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $x\in X$ была центром тяжести единственной меры, сосредоточенной на крайних точках множества X. Понятие Ш. с. существенно при изучении единственности интегральных представлений функций (см. [1], [2]); оно введено Г. Шоке (G. Choke).

Лит.: [1] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968; [2] Alfsen E., Compact convex sets and boundary integrals, B.— N. Y., 1971. *В. А. Залгаллер.*

ШОТТКИ ТЕОРЕМА: если функция

$$w=f(z)=c_0+c_1z+\ldots \qquad (*)$$

регулярная аналитическая в круге $D=\{z:|z|<R\}$ и не принимает в D нек-рых конечных значений a_1, a_2, то в любом круге $|z|\leqslant R_1$, $0<R_1<R$, модуль $|f(z)|$ ограничен числом $M(a_1, a_2, c_0, R_1)$, зависящим только от a_1, a_2, c_0, R_1 (см. [1]). Более законченную формулировку получают, объединяя обобщенную Ш. т. и теорему Ландау при произвольном числе $q\geqslant 2$ выпускаемых значений. Пусть функция (*) не принимает нек-рых конечных значений $a_1, \ldots, a_q$, $q\geqslant 2$. Тогда, если $c_1\neq 0$, то радиус R ограничен сверху числом, зависящим только от $a_1, \ldots, a_q$, c_0, c_1 (теорема Ландау). Кроме того, в круге $|z|\leqslant R_1$, $0<R_1<R$, модуль $|f(z)|$ ограничен числом $M(a_1, \ldots, a_q, c_0, R_1)$, зависящим только от $a_1, \ldots, a_q$, c_0, R_1 (теорема Шоттки).

Геометрически Ш. т. означает, что сферич. расстояние (т. е. расстояние на *Римана сфере*) образа круга $|z|\leqslant R_1$ до точек $a_1, \ldots, a_q$ не меньше числа $d(a_1, \ldots, a_q, c_0, R_1)$, зависящего только от $a_1, \ldots, a_q$, c_0, R_1. Ш. т.— один из классич. результатов теории функций комплексного переменного типа *искажения теорем*.

Лит.: [1] Schottky F., «Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.», 1904, 2 H.|Bd, S. 1244—62; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962.

Е. Д. Соломенцев.

ШПЕККЕРОВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — алгорифмическая, монотонная, ограниченная последовательность рациональных чисел, не являющаяся конструктивно (алгорифмически) фундаментальной. Соответственно, числовой ряд с алгорифмически заданным неотрицательным рациональным общим членом и ограниченными в совокупности частичными суммами, не являющийся конструктивно сходящимся в себе, наз. шпеккеровым рядом.

Первый пример такой последовательности (ряда) был указан Э. Шпеккером [1]. Более точно, для Ш. п. α невозможна общерекурсивная функция β такая, что при любых i, j, n таких, что $i, j\geqslant\beta(n)$, выполняется неравенство

$$|\alpha(i)-\alpha(j)|<2^{-n}.$$

Существование Ш. п. является фактом принципиального значения как для конструктивной математики, так и для традиционного математич. анализа. Поскольку Ш. п. не сходится ни к какому конструктивному (вычислимому) действительному числу и из нее нельзя выбрать подпоследовательности с этим свойством, то ее можно рассматривать в качестве контрпримера, опровергающего для наиболее естественной алгорифмич. концепции конструктивного континуума такие фундаментальные принципы, как теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, теорема Больцано — Вейерштрасса о выборе сходящейся подпоследовательности, теорема о существовании точных границ ограниченных числовых множеств. С точки зрения традиционной математики результат Э. Шпеккера показывает, что объекты, существование к-рых утверждается в упомянутых теоремах, могут иметь довольно сложную природу даже при очень простых исходных ситуациях. Теорема Шпеккера может рассматриваться как первый существенный шаг в исследовании вычислительной и дескриптивной сложности этих объектов.

См. также *Конструктивная математика*, *Конструктивный анализ*.

Лит.: [1] Specker E., «J. Symbol. Log.», 1949, v. 14, p. 145—58; [2] Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973. *Б. А. Кушнер.*

ШПЕРНЕРА ЛЕММА: если покрытие замкнутого n-мерного симплекса T^n состоит из $n+1$ замкнутых множеств A_0, A_1, ..., A_n, поставленных в соответствие вершинам a_0, a_1, ..., a_n симплекса T^n таким образом, что каждая грань $T_r=(a_{i_0}, \ldots, a_{i_r})$ этого симплекса покрыта множествами $A_{i_0}, \ldots, A_{i_r}$, соответствующими ее вершинам, то существует точка, принадлежащая всем множествам A_0, A_1, ..., A_n. Установлена Э. Шпернером (см. [1]). Из Ш. л. следует, что *Лебега размерность* пространства $\mathbb{R}^n$ есть n. Ш. л. используется также для доказательства *Брауэра теорем* о неподвижной точке и об инвариантности области.

Лит.: [1] Sperner E., «Abh. Math. Sem. Hamb.», 1928, Bd 6, S. 265—72; [2] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973.

И. Г. Кошевникова.

ШРЁДИНГЕРА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — одно из основных возможных (наряду с *Гейзенберга представлением* и *взаимодействия представлением*) эквивалентных представлений зависимости от времени t операторов A и волновых функций ψ в квантовой механике и квантовой теории поля. В Ш. п. операторы A_S, соответствующие физич. динамич. величинам, не зависят от времени t, поэтому решение *Шрёдингера уравнения*

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=H\psi(t) \qquad (1)$$

можно записать с помощью не зависящей от t *Гамильтона функции* H формально в виде

$$\psi(t)\equiv\psi_S(t)=e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(0), \qquad (2)$$

где $\psi(0)$ не зависит от времени, а волновая функция в Ш. п. зависит от t и содержит всю информацию об изменении состояния системы с течением t. Среднее значение оператора A_S в Ш. п.

$$\overline{A}\equiv\overline{A_S}=\psi_S^*(t)\,A_S\psi_S(t)=$$
$$=\psi^*(0)\,e^{+i\frac{H}{\hbar}t}\,A_S\,e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\,\psi(0) \qquad (3)$$

зависит от t вследствие зависимости от t волновых функций $\psi_S(t)$. $\overline{A}$ можно также понимать как среднее значение оператора A_H, зависящего от t, по волновым функциям ψ_H, не зависящим от t:

$$A_H(t)=e^{+i\frac{H}{\hbar}t}\,A_S\,e^{-i\frac{H}{\hbar}t};\quad \psi_H=\psi(0)=e^{i\frac{H}{\hbar}t}\,\psi_S(t), \qquad (4)$$

т. е. как среднее значение оператора в представлении Гейзенберга. Свойство инвариантности средних значений, к-рые должны быть наблюдаемыми и иметь тем самым физич. смысл, относительно унитарных преобразований типа (4) означает эквивалентность Ш. п. и представлений Гейзенберга и взаимодействия.

Ш. п. названо по имени Э. Шрёдингера (E. Schrödinger), к-рый ввел его в 1926, формулируя в квантовой механике уравнение, получившее впоследствии название уравнения Шрёдингера. *В. Д. Кукин.*

ШРЁДИНГЕРА УРАВНЕНИЕ — основное уравнение квантовой механики, определяющее вместе с соответствующими дополнительными условиями волновую функцию $\psi(t, q)$, характеризующую состояние и микроскопич. свойства квантовой системы. Для нерелятивистской системы частиц без спина сформулировано Э. Шрёдингером (E. Schrödinger, 1926). Оно имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\,q)=\hat{H}\psi(t,\,q),$$

где $H=\hat{H}(\hat{p},\,\hat{r})$ — оператор Гамильтона, образованный по общему правилу: в классич. функции Гамильтона $H(p,\,r)$ импульсы частиц p и их координаты r заменены на операторы, имеющие, в частности, в координатном $(q=\boldsymbol{r}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{r}_N)$ и импульсном $(q=\boldsymbol{p}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{p}_N)$ представлениях соответствующий вид

$$\hat{\boldsymbol{p}}_i=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_i},\quad \hat{\boldsymbol{r}}_i=\hat{\boldsymbol{r}}_i;\quad \hat{\boldsymbol{p}}_i=\boldsymbol{p}_i,\quad \hat{\boldsymbol{r}}_i=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}_i};$$
$$i=1,\,\ldots,\,N.$$

Для заряженных частиц в электромагнитном поле, характеризуемом векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(t,\,\boldsymbol{r})$, величина $\boldsymbol{p}$ заменяется на $\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(t,\,\boldsymbol{r})$. В этих представлениях Ш. у. представляет собой дифференциальное уравнение с частными производными, напр. для частицы в поле $U(\boldsymbol{r})$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\,\boldsymbol{r})=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,\,\boldsymbol{r})+U(\boldsymbol{r})\psi(t,\,\boldsymbol{r}).$$

Возможны дискретные представления, в к-рых ψ-функция многокомпонентна, а оператор $\hat{H}$ имеет вид матрицы. Если волновая функция определена в пространстве чисел заполнения, то оператор $\hat{H}$ выражается с помощью определенных комбинаций операторов рождения и уничтожения (представление вторичного квантования).

Обобщение Ш. у. на случай нерелятивистской частицы со спином (двухкомпонентная функция $\psi(t,\,r)$) наз. уравнением Паули (1927), на случай релятивистской частицы со спином $^1/_2$ (четырехкомпонентная ψ-функция) — уравнением Дирака (1928), на случай релятивистской бесспиновой частицы уравнением Клейна — Гордона (1926), со спином 1 (ψ-функция — вектор) — уравнением Прока (1936) и т. д.

Решение Ш. у. определяется в классе функций, удовлетворяющих условию нормировки $(\psi^*,\,\psi)=1$ при всех значениях t, где скобки означают интегрирование или суммирование по всем значениям переменных q. Для нахождения решения необходимо сформулировать начальные и граничные условия, соответствующие характеру рассматриваемой задачи. Наиболее характерные типы таких задач:

1) Стационарное Ш. у. и определение допустимых значений энергии системы. Полагая $\psi(t,\,q)=\varphi(q)\exp(-iEt/\hbar)$ и требуя в соответствии с условием нормировки и условием отсутствия потоков на бесконечности обращения в нуль волновой функции и ее градиентов при $|\boldsymbol{r}|\to\infty$, приходят к уравнению на собственные значения E_n и собственные функции φ_n оператора Гамильтона:

$$E_n\varphi_n(q)=\hat{H}\varphi_n(q).$$

Характерные примеры точного решения этой проблемы: собственные функции и уровни энергии для гармонич. осциллятора, атома водорода и т. д.

2) Квантовомеханич. задача рассеяния. Ш. у. решается с граничными условиями, соответствующими на большом расстоянии от центра рассеяния (описываемого потенциалом $U(\boldsymbol{r})$) падающей на него плоской и расходящейся от него сферич. волнам. С учетом такого граничного условия Ш. у. можно записать в виде интегрального уравнения, первая итерация к-рого по члену, содержащему $U(\boldsymbol{r})$, соответствует т. н. борновскому приближению. Это уравнение можно представить в виде формального решения, к-рое называют также уравнением Липпмана — Швингера.

3) Случай, когда гамильтониан системы зависит от времени, $H=H_0(p,\,r)+U(t,\,p,\,r)$, обычно рассматривается в рамках временной теории возмущений. Это — теория квантовых переходов, определение реакции системы на внешнее возмущение (динамич. восприимчивость) и характеристик релаксационных процессов.

Для решения Ш. у. обычно используют приближенные методы, регулярные (различного типа теории возмущений), вариационные и т. д.

Лит.: [1] Давыдов А. С., Квантовая механика, М., 1973; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [3] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Квантовая механика, М., 1979. *И. А. Квасников.*

ШРЕЙЕРА СИСТЕМА — непустое подмножество свободной группы F с множеством образующих S, удовлетворяющее такому условию. Пусть элемент $g\neq1$, принадлежащий Ш. с., представлен в виде редуцированного слова от образующих группы:

$$g=S_1^{n_1}\ldots S_k^{n_k},$$

и пусть

$$g' = \begin{cases} gS_k, & n_k < 0, \\ gS_k^{-1}, & n_k > 0. \end{cases}$$

Тогда требуется, чтобы элемент g также принадлежал этой системе (элемент g' можно представлять себе как редуцированное слово, полученное из g зачеркиванием его последней буквы). Элемент 1 принадлежит каждой Ш. с.

Введена О. Шрейером (O. Schreier) в 20-х гг., см. [1].

Лит.: [1] Масси У., Столлингс Дж., Алгебраическая топология. Введение, пер. с англ., М., 1977.

М. И. Войцеховский.

ШТЕЙНА МНОГООБРАЗИЕ, голоморфно полное многообразие, — паракомпактное комплексное *аналитическое многообразие* M, обладающее следующими свойствами:

1) для любого компакта $K \subset M$ множество

$$\{x \in X \mid |f(x)| \leqslant \sup_{z \in K} |f(z)| \, (f \in \mathcal{O}(M))\},$$

где $\mathcal{O}(M)$ — алгебра голоморфных функций на M, компактно (голоморфная выпуклость);

2) для любых двух различных точек x, $y \in M$ существует такая функция $f \in \mathcal{O}(M)$, что $f(x) \neq f(y)$ (голоморфная отделимость);

3) в окрестности любой точки существует голоморфная карта, координатные функции к-рой принадлежат $\mathcal{O}(M)$.

Условие голоморфной выпуклости можно заменить следующим: для любой последовательности точек $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\} \subset M$, не имеющей предельных точек, существует такая функция $f \in \mathcal{O}(M)$, что $\sup_n |f(x_n)| = \infty$.

Класс Ш. м. был введен в рассмотрение К. Штейном [1], как естественное обобщение *голоморфности областей* в $\mathbb{C}^n$. Всякое замкнутое аналитич. подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ является Ш. м.; обратно, любое n-мерное Ш. м. допускает собственное голоморфное вложение в $\mathbb{C}^{2n}$. Всякая некомпактная риманова поверхность является Ш. м. Непосредственным обобщением Ш. м. являются *Штейна пространства.*

Лит.: [1] Stein K., «Math. Ann.», 1951, Bd 123, S. 201—22. См. также лит. при статье *Штейна пространство.*

А. Л. Онищик.

ШТЕЙНА ПРОСТРАНСТВО, голоморфно полное пространство,— паракомпактное комплексное аналитич. пространство $(X, \mathcal{O})$, обладающее следующими свойствами:

1) любое компактное аналитич. подмножество в X конечно;

2) любой компакт $K \subset X$ допускает такую открытую окрестность W в X, что множество

$$\{x \in W \mid |f(x)| \leqslant \sup_{z \in K} |f(z) \quad \text{для всех } f \in \mathcal{O}(X)\}$$

компактно (слабая голоморфная выпуклость).

Комплексное многообразие M тогда и только тогда является Ш. п., когда M — *Штейна многообразие.* Комплексное пространство является Ш. п. тогда и только тогда, когда этим свойством обладает его редукция. Всякое голоморфно выпуклое открытое подпространство в Ш. п. является Ш. п. Приведенное комплексное пространство штейново тогда и только тогда, когда его нормализация есть Ш. п. Всякое замкнутое аналитич. подпространство в Ш. п., напр. в $\mathbb{C}^n$, есть Ш. п. Всякое конечномерное Ш. п. допускает собственное инъективное голоморфное отображение в нек-рое $\mathbb{C}^n$, регулярное в каждой неособой точке. Всякое неразветвленное накрытие Ш. п. есть Ш. п. Прямое произведение двух Ш. п. есть Ш. п. Тем же свойством обладает во многих случаях голоморфное расслоение, база и слой к-рого суть Ш. п. (напр., если структурной группой является комплексная группа Ли с конечным числом связных компонент). Однако существуют примеры голоморфных расслоений со слоем $\mathbb{C}^2$ и базой $\mathbb{C}$, не являющихся многообразиями Штейна [2 .

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный аналитич. пучок на Ш. п. $(X, \mathcal{O})$. Тогда справедливы *Картана теоремы*:

A) Пространство $H^0(X, \mathcal{F})$ порождает слой $\mathcal{F}_x$ пучка $\mathcal{F}$ в любой точке $x \in X$;

B) $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ для всех $q > 0$.

Обратно, если $H^1(X, \mathcal{Y}) = 0$ для любого когерентного пучка идеалов $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}$, то X — Ш. п. Область $D \subset \mathbb{C}^n$ является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда $H^1(D, \mathcal{O}) = \ldots = H^{n-1}(D, \mathcal{O}) = 0$.

Из теорем Картана следует, что на Ш. п. всегда разрешима 1-я проблема Кузена, а если $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ — то и 2-я проблема Кузена (см. *Кузена проблемы*). На любом многообразии Штейна X разрешима проблема Пуанкаре, т. е. всякая мероморфная функция представима в виде $\frac{f}{g}$, где f, $g \in \mathcal{O}(X)$, $g \neq 0$. Если при этом $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$, то f, g можно выбрать так, чтобы ростки f_x, g_x в любой точке $x \in X$ были взаимно просты. Группа классов дивизоров неприводимого приведенного Ш. п. X изоморфна $H^2(X, \mathbb{Z})$. Для любого n-мерного Ш. п. X группа гомологий $H_q(X, \mathbb{Z}) = 0$ для $q > n$, а группа $H_n(X, \mathbb{Z})$ не имеет кручения. Если X — многообразие, то X гомотопически эквивалентно n-мерному клеточному комплексу. С другой стороны, для любой счетной абелевой группы G и для любого $q \geqslant 1$ существует область голоморфности $D \subset \mathbb{C}^{2q+3}$ такая, что $H_q(D, \mathbb{Z}) \cong G$.

Важное направление в теории Ш. п. связано с изучением плюрисубгармонич. функций на них (см. *Леви проблема, Псевдовыпуклость и псевдовогнутость*). Основной результат здесь состоит в характеризации Ш. п. как пространства, на к-ром существует исчерпывающая его сильно 1-псевдовыпуклая функция.

Алгебры голоморфных функций $\mathcal{O}(X)$ на Ш. п. X (т. н. штейновы алгебры) обладают следующими свойствами. Для максимального идеала $I \subset \mathcal{O}(X)$ эквивалентны условия: I замкнут в $\mathcal{O}(X)$ относительно топологии компактной сходимости; $I = \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(x) = 0\}$ для нек-рой точки $x \in X$; I конечно порожден. Если X конечномерно, то каждый характер $\chi\colon \mathcal{O}(X) \to \mathbb{C}$ имеет вид $\chi(f) = f(x)$ для нек-рой точки $x \in X$. Если $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — два конечномерных Ш. п. с изоморфными алгебрами $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathcal{O}_Y(Y)$, то $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$, причем любой изоморфизм $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y)$ непрерывен и индуцируется нек-рым изоморфизмом $Y \to X$ комплексных пространств.

Большую роль в теории Ш. п. играет т. н. принцип Ока, согласно к-рому многие задачи разрешимы на Ш. п. в классе аналитич. функций тогда и только тогда, когда они разрешимы в классе гладких непрерывных функций. Этому принципу удовлетворяет, напр., 2-я проблема Кузена. Более общим является следующее утверждение: классификация *главных аналитических расслоений*, базой к-рых является заданное приведенное Ш. п. X, а структурной группой — заданная комплексная группа Ли G, совпадает с классификацией топологич. расслоений с той же базой и структурной группой. Совпадают также группы связных компонент в группах аналитических и непрерывных функций $X \to G$.

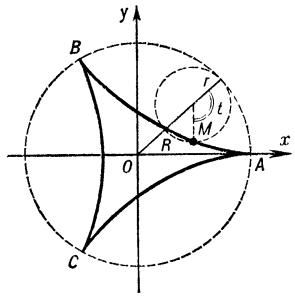
Лит.: [1] Grauert H., Remmert R., Theorie der Steinschen Räume, B.— Hdlb — N. Y., 1977; [2] Demailly J.-P., «Invent. math.», 1978, v. 48, № 3, p. 293—302; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 125—51; т. 15, М., 1977, с. 93—171.

А. Л. Онищик.

ШТЕЙНЕРА КРИВАЯ — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, к-рая описывается точкой окружности

радиуса r, катящейся по окружности радиуса $R=3r$ и имеющей с ней внутреннее касание; *гипоциклоида* с модулем $m=3$. Уравнение Ш. к. в декартовых прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2)^2+8rx(3y^2-x^2)+$$
$$+18r^2(x^2+y^2)-27r^4=0.$$



Имеются три точки возврата (см. рис.). Длина дуги от точки A:

$$l=\frac{16}{3}r\sin^2\frac{t}{4}.$$

Длина всей кривой $16r$. Радиус кривизны $r_k=8r\sin\frac{t}{2}$.

Площадь, ограниченная кривой, $S=2\pi r^2$.

Кривая исследовалась Я. Штейнером (J. Steiner).

Д. Д. Соколов.

ШТЕЙНЕРА СИСТЕМА — пара (V, B), где V — конечное множество из v элементов, а B — совокупность k-подмножеств множества V (называемых б л о к а м и) такая, что каждое t-подмножество множества V содержится точно в одном блоке множества B ($t<k$). Число v наз. п о р я д к о м Ш. с. $S(t, k, v)$. Ш. с. является частным случаем *блок-схемы*, а также *тактической конфигурации*. Ш. с. с $t=2$ является уравновешенной неполной блок-схемой (BIB-схемой), а при $v=s^2+s+1$, $k=s+1$ — конечной проективной плоскостью. Необходимым условием существования Ш. с. $S(t, k, v)$ является условие того, что число

$$\binom{v-s}{t-s}\Big/\binom{k-s}{t-s}$$

должно быть целым при всех таких s, что $0\leqslant s<t$. Доказана достаточность этого условия при $(k, t)=(3,2)$, $(4,2)$, $(5,2)$, $(4,3)$ (см. [3], [4]).

В 1844 У. Вулхаус (W. Woolhouse) поставил проблему существования Ш. с., а П. Киркман (P. Kirkman) в 1847 решил ее для $k=3$ (с и с т е м ы т р о е к Ш т е й н е р а). В 1853 Я. Штейнер (J. Steiner, [1]) рассмотрел $S(t, t+1, v)$.

Для Ш. с. обычно рассматриваются задачи: 1) определения максимального числа попарно неизоморфных Ш. с. данного порядка v; 2) существования Ш. с. с заданной группой автоморфизмов; 3) вложения частичных Ш. с. (не содержащих нек-рых t-подмножеств V) в конечную Ш. с.; 4) существования разрешимых Ш. с. (с B, представимой как объединение разбиений V); 5) максимальной упаковки (минимального покрытия) полного множества k-подмножеств V попарно не пересекающимися $S(t, k, v)$ (с помощью Ш. с.).

Большинство результатов по Ш. с. относятся к небольшим значениям k и t (см. [2] — [4]).

Лит.: [1] S t e i n e r J., «J. reine und angew. Math.», 1853, Bd 45, S. 181—82; [2] Х о л л М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] L i n d n e r C. C., R o s a A., «Discrete Math.», 1978, v. 22, p. 147—81; [4] H a n a n i H., там же, 1975, v. 11, p. 255—369.

Б. Т. Румов.

ШТЕЙНЕРА ТОЧКА — центр тяжести массы, распределенной по площади поверхности выпуклого тела с плотностью, равной гауссовой кривизне. Для негладкого тела определяется через смешанные объемы (см. *Смешанных объемов теория*). Ш. т. аддитивна относительно сложения тел. Я. Штейнером в 1840 (J. Steiner) впервые рассматривался центр тяжести массы, распределенной на плоском контуре переменной кривизны.

Лит.: [1] Г р ю н б а у м Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971; [2] S c h n e i d e r R., «Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.», 1972, Bd 37, № 1—4.

В. А. Залгаллер.

ШТЕЙНИЦА ТЕОРЕМА: всякий абстрактный многогранник, эйлерова характеристика к-рого равна 2, может быть реализован в виде нек-рого выпуклого многогранника. При этом под а б с т р а к т н ы м м н о г о г р а н н и к о м понимается конечная совокупность произвольных элементов, называемых вершинами, ребрами и гранями, для к-рых определено симметричное и транзитивное отношение инцидентности: ребро a инцидентно грани α, если a составляет часть границы α; вершина A инцидентна ребру a, если A — конец a; вершина A инцидентна грани α, если A является одной из вершин грани α. Сеть вершин, ребер и граней абстрактного многогранника должна удовлетворять следующим условиям:

1) Каждое ребро инцидентно с двумя и только с двумя вершинами. Каждое ребро инцидентно с двумя и только с двумя гранями.

2) У двух вершин может быть только одно инцидентное им обоим ребро. У двух граней может быть только одно инцидентное обоим ребро.

3) Всякая вершина инцидентна, по крайней мере, трем граням. Всякая вершина инцидентна, по крайней мере, трем вершинам.

Теорема доказана Э. Штейницем (E. Steinitz, 1917).

А. Б. Иванов.

ШТЁРМЕРА МЕТОД, м е т о д С т ё р м е р а,— конечно разностный метод решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, не содержащей первой производной от неизвестной функции:

$$y''=f(x, y),\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'.$$

При интегрировании по сетке с постоянным шагом $x_n=x_0+nh$, $n=1, 2, \ldots$, расчетные формулы имеют вид:

а) экстраполяционные:

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{\lambda=0}^{k}u_{-\lambda}f_{n-\lambda},\ f_n=f(x_n, y_n),$$
$$n=0, 1, \ldots,$$

или (в разностной форме)

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{p=0}^{k}\beta_p\nabla^p f_n,$$

где

$$\nabla^p f_n=\nabla(\nabla^{p+1}f_n)=\nabla^{p-1}f_n-\nabla^{p-1}f_{n-1},$$
$$\beta_p=\frac{1}{p!}\left(\int_0^1(1-t)\,t\,(t+1)\ldots(t+(p-1))\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_0^{-1}(-1-t)\,t\ldots(t+(p-1))\,dt\right),\ p=0, 1, \ldots, k,$$
$$u_{-\lambda}=\sum_{p=\lambda}^{k}\binom{p}{\lambda}\beta_p,\ \lambda=0, 1, \ldots, k;$$

б) интерполяционные:

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{\lambda=-1}^{k}v_{-\lambda}f_{n-\lambda}$$

или (в разностной форме)

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{p=0}^{k}\gamma_p\nabla^p f_{n+1},$$

где

$$\gamma_p=\frac{1}{p!}\left(\int_0^1(1-t)\,(t-1)\,t\ldots(t+(p-2))\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_0^{-1}(-1-t)\,(t-1)\,t\ldots(t+(p-2))\,dt\right),$$
$$v_{-\lambda}=\sum_{p=\lambda}^{k+1}\binom{p}{\lambda}\gamma_p,\ \lambda=-1, 0, 1, \ldots, k.$$

Первые значения коэффициентов β_p и γ_p:

$$\beta_0=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=\frac{1}{12},\ \beta_3=\frac{1}{12},\ \beta_4=\frac{19}{240},\ \beta_5=\frac{3}{40},\ \beta_6=\frac{863}{12096};$$

$$\gamma_0=1,\ \gamma_1=-1,\ \gamma_2=\frac{1}{12},\ \gamma_3=0,\ \gamma_4=-\frac{1}{240},\ \gamma_5=-\frac{1}{240},\ \gamma_6=-\frac{221}{60480}.$$

При одном и том же k формула б) точнее, но требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения y_{n+1}. На практике сначала находят приближенное значение решения y_{n+1} по формуле а), а затем проводят два-три уточнения по формуле

$$y_{n+1}^{(i+1)}-2y_n+y_{n-1}=$$
$$=h^2\Big(v_1f_{n+1}^{(i)}+\sum_{\lambda=0}^{k}v_{-\lambda}f_{n-\lambda}\Big),\ i=0,\ 1,\ 2,$$
$$f_{n+1}^{(i)}=f\ (x_{n+1},\ y_{n+1}^{(i)}),\ y_{n+1}=y_{n+1}^{(3)}.$$

Применение Ш. м. предполагает, что уже известны приближенные значения решения в первых k узлах сетки: $y_0, y_1, \ldots, y_k$ (опорные значения). Эти значения вычисляют по *Рунге — Кутта методу*, либо используя разложение решения по формуле Тейлора. Необходимость использования специальных формул для вычисления значений в начале счета и в случае изменения шага сетки, по к-рой ведется интегрирование, приводит к существенному усложнению расчетных программ на ЭВМ.

Формулы Ш. м. с k членами в правой части имеют погрешность порядка $O(h^{k+1})$. Оценка погрешности аналогична соответствующей оценке для *Адамса метода*. Можно показать, что для любого k существуют устойчивые формулы с погрешностью порядка $O(h^{k+1})$.

На практике обычно используются формулы с $k=4, 5, 6$. Широко используется Н у м е р о в а м е т о д, принадлежащий к семейству интерполяционных Ш. м.:

$$y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n=\frac{h^2}{12}(f_{n+2}+10f_{n+1}+f_n).$$

Метод предложен К. Штёрмером (C. Störmer, 1920).

Лит.: [1] Б а х в а л о в Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] L a m b e r t J. D., Computational methods in ordinary differential equations, N. Y.— [a. o.], 1973; [3] М и х л и н С. Г., С м о л и ц к и й Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965.

С. С. Гайсарян.

ШТИФЕЛЯ МНОГООБРАЗИЕ (вещественное) — многообразие $V_{n,k}$ ортонормированных k-реперов в n-мерном евклидовом пространстве. Аналогично определяются комплексное Ш. м. $W_{n,k}$ и кватернионное Ш. м. $X_{n,k}$. Ш. м. являются компактными вещественно-аналитич. многообразиями, а также однородными пространствами классич. компактных групп $O(n)$, $U(n)$ и $\mathrm{Sp}(n)$ соответственно. В частности, $V_{n,1}=S^{n-1}$, $W_{n,1}=S^{2n-1}$, $X_{n,1}=S^{4n-1}$ являются сферами, Ш. м. $V_{n,2}$ есть многообразие единичных касательных векторов к S^{n-1}, Ш. м. $V_{n,n}$, $W_{n,n}$, $X_{n,n}$ отождествляются с группами $O(n)$, $U(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$, а $V_{n,n-1}$ — с группой $SO(n)$. Рассматриваются также некомпактные Ш. м., состоящие из всевозможных k-реперов в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{H}^n$.

Эти многообразия были введены Э. Штифелем [1] в связи с изучением систем линейно независимых векторных полей на гладких многообразиях. Начатое в [1] изучение топологии Ш. м. привело затем к полному вычислению их когомологий (см. [2], [3]). В частности,

$$H^*(W_{n,k},\ \mathbb{Z})=\Lambda_{\mathbb{Z}}(x_{2n-1},\ x_{2n-3},\ \ldots,\ x_{2(n-k)+1}),$$
$$H^*(X_{n,k},\ \mathbb{Z})=\Lambda_{\mathbb{Z}}(x_{4n-1},\ x_{4n-5},\ \ldots,\ x_{4(n-k)+3}),$$

$H^*(V_{n,k},\ \mathbb{Z}_2)$ есть коммутативная алгебра с образующими $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}$ и соотношениями

$$x_ix_j=\begin{cases}x_{i+j}, & \text{если } i+j\leqslant n-1,\\ 0, & \text{если } i+j>n-1\end{cases}$$

(через x_l всюду обозначен элемент степени l). Вещественные, комплексные и кватернионные Ш. м. асферичны в размерностях не более $n-k-1$, $2(n-k)$ и $4(n-k)+2$ соответственно, причем

$$\pi_{n-k}(V_{n,k})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{если } k=1 \text{ или } n-k \text{ четно},\\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } k>1 \text{ или } n-k \text{ нечетно};\end{cases}$$
$$\pi_{2(n-k)+1}(W_{n,k})\cong\pi_{4(n-k)+3}(X_{n,k})\cong\mathbb{Z}.$$

По поводу вычисления других гомотопич. групп Ш. м. см. [5].

Лит.: [1] S t i e f e l E., «Comm. math. helv.», 1935—36, v. 8, № 4, p. 305—53; [2] Б о р е л ь А., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 163—246; [3] С т и н р о д Н., Э п с т е й н Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [4] Р о х л и н В. А., Ф у к с Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, М., 1971, с. 71—122.

А. Л. Онищик.

ШТИФЕЛЯ ЧИСЛО — *характеристическое число* замкнутого многообразия, принимающее значения вычетов по модулю 2. Пусть $x\in H^{**}(BO;\ \mathbb{Z}_2)$ — произвольный стабильный характеристич. класс, M — замкнутое многообразие. Вычет по модулю 2, определяемый равенством

$$x[M]=\langle x(\tau M),\ [M]\rangle,$$

наз. ч и с л о м Ш т и ф е л я (или Ш т и ф е л я — У и т н и) многообразия M, соответствующим классу x. Здесь τM — касательное расслоение многообразия M, а $[M]\in H_*(M;\ \mathbb{Z}_2)$ — фундаментальный класс. Для многообразий размерности n Ш. ч. зависят лишь от однородной компоненты степени n класса x. Группа $H^n(BO;\ \mathbb{Z}_2)$ изоморфна векторному пространству над полем $\mathbb{Z}_2$ с базисом, находящимся во взаимно однозначном соответствии с множеством всех разбиений $w=\{i_1, \ldots, i_k\}$ числа n, т. е. наборов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ целых неотрицательных чисел с $i_1+\ldots+i_k=n$. В качестве базиса группы $H^n(BO;\ \mathbb{Z}_2)$ естественно взять классы $w_\omega=w_{i_1}w_{i_2}\ldots w_{i_k}$. Поэтому с точки зрения характеризации многообразия его Ш. ч. достаточно рассматривать классы w_ω, где ω — разбиение размерности многообразия.

Бордантные многообразия имеют одинаковые Ш. ч., так что каждый характеристич. класс x определяет гомоморфизм $x[\ ]\colon \mathfrak{N}^n\longrightarrow\mathbb{Z}_2$, где $\mathfrak{N}^n$ — группа классов бордантных неориентированных многообразий размерности n. Если для двух замкнутых многообразий M, N имеет место равенство $w_\omega[M]=w_\omega[N]$ при всех разбиениях ω числа $n=\dim M=\dim N$, то многообразия M и N бордантны (т е о р е м а Т о м а).

Пусть A — векторное пространство $\mathrm{Hom}(H^n(BO;\ \mathbb{Z}_2),\ \mathbb{Z}_2)$ над полем $\mathbb{Z}_2$. Пусть $\{e_\omega\}$ — базис в пространстве A, дуальный базису $\{w_\omega\}$ пространства $H^n(BO;\ \mathbb{Z}_2)$, $e_\omega(w_{\omega'})=\delta_\omega^{\omega'}$, здесь ω, ω' — разбиения числа n; и пусть отображение $\varphi\colon \mathfrak{N}^n\longrightarrow\Lambda$ определено формулой $\varphi([M])=\sum_\omega w_\omega[M]\,e_\omega$. Отображение φ мономорфно и для полного описания группы $\mathfrak{N}^n$ в терминах Ш. ч. нужно найти его образ. Эта проблема аналогична проблеме Милнора — Хирцебруха для *Чжэня классов*. Для замкнутого многообразия M пусть $v\in H^*(M;\ \mathbb{Z}_2)$ т. н. к л а с с В у, к-рый однозначно определен равенством $\langle\alpha\cup v,\ [M]\rangle=\langle Sq\,\alpha[M]\rangle$, имеющим место при всех $\alpha\in H^*(M;\ \mathbb{Z}_2)$. Тогда $w(\tau M)=Sqv$, где τM — касательное расслоение к M (т е о р е м а В у).

Из этой теоремы видно, что класс Ву может быть определен как нек-рый характеристич. класс: пусть

$$v=Sq^{-1}w\in H^{**}(BO;\ \mathbb{Z}_2),$$

где $w \in H^{**}(BO; \mathbb{Z}_2)$ — полный Штифеля — Уитни класс, а $Sq^{-1} = 1 + Sq^1 + Sq^2 + Sq^2 Sq^1 + \ldots$ — когомологич. операция, обратная к полному *Стинрода квадрату* Sq. Пусть $\alpha \in H^{**}(BO; \mathbb{Z}_2)$ — произвольный характеристич. класс. Тогда, для любого замкнутого многообразия числа $(\alpha \cup v)[M]$ и $(Sq\alpha)[M]$ совпадают. Таким образом, для того чтобы элемент $a \in A$, $a = \sum a_\omega e_\omega$ лежал в образе отображения φ, необходимо, чтобы для всех $\alpha \in H^{**}(BO; \mathbb{Z}_2)$ имело место равенство $a(\alpha \cup v) = a(Sq\alpha)$. Для гомоморфизма a: $H^n(BO; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда существует такое многообразие M^n, что $x[M^n] = a(x)$ при всех $x \in H^n(BO; \mathbb{Z}_2)$, когда $a(\alpha \cup v) = a(Sq\alpha)$ при всех $\alpha \in H^{**}(BO; \mathbb{Z}_2)$ (теорема Дольда).

Лит. см. при статье *Штифеля — Уитни класс.*

А. Ф. Харшиладзе.

ШТИФЕЛЯ — УИТНИ КЛАСС — *характеристический класс* со значениями в $H^*(\ ; \mathbb{Z}_2)$, определенный для действительных векторных расслоений. Ш.— У. к. обозначаются через w_i, $i > 0$, и для действительного векторного расслоения ξ над топологич. пространством B класс $w_i(\xi)$ лежит в $H^i(B; \mathbb{Z}_2)$; введены Э. Штифелем [1] и Х. Уитни [2]; они обла ают следующими свойствами. 1) Для двух действительных векторных расслоений ξ, η над общей базой

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_i w_i(\xi)\, w_{k-i}(\eta), \quad w_0 = 1,$$

другими словами, $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)\, w(\eta)$, где $w = 1 + w_1 + w_2$ — полный Ш.— У. к. 2) Для одномерного универсального расслоения ζ_1 над $\mathbb{R}P^\infty$ имеет место равенство $w(\zeta_1) = 1 + y$, где y — ненулевой элемент группы $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Этими двумя свойствами Ш.— У. к. определяются однозначно. Ш.— У. к. стабильны, т. е. $w(\xi \oplus \theta) = w(\xi)$, где θ — тривиальное расслоение и $w_i(\xi) = 0$ при $i > \dim \xi$. Для ориентированного векторного расслоения ξ размерности n над базой B класс $w_n(\xi) \in H^n(B; \mathbb{Z}_2)$ совпадает с приведением по модулю 2 *эйлерова класса.*

Для векторного расслоения ξ над B пусть B^ξ — *Тома пространство* этого расслоения. Далее, пусть $\Phi: H^*(B; \mathbb{Z}_2) \to \tilde{H}^{*+n}(B^\xi; \mathbb{Z}_2)$ — *Тома изоморфизм.* Тогда полный Ш. — У. к. $w(\xi)$ совпадает с

$$\Phi^{-1} Sq \Phi(1) \in H^*(B; \mathbb{Z}_2),$$

где $Sq = 1 + Sq^1 + Sq^2 + \ldots$ — полный *Стинрода квадрат.* Это свойство Ш.— У. к. можно использовать в качестве их определения. Ш.— У. к. гомотопически инвариантны в том смысле, что они совпадают для послойно-гомотопически эквивалентных расслоений над общей базой.

Любой характеристич. класс со значениями в $H^*(\ ; \mathbb{Z}_2)$, определенный для действительных векторных расслоений, выражается через Ш.—У.к.: кольца $H^{**}(BO_n; \mathbb{Z}_2)$ и $H^{**}(BO; \mathbb{Z}_2)$ являются кольцами формальных степенных рядов от Ш.— У. к.:

$$H^{**}(BO_n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[[w_1, \ldots, w_n]],$$
$$H^{**}(BO; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[[w_1, \ldots,]].$$

Лит.: [1] Stiefel E., «Comm. math. helv.», 1935—36, v. 8, № 4, p. 305—53; [2] Whitney H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 43, p. 785—805; [3] Милнор Дж., «Математика», 1959, т. 3, в. 4, с. 3—53; 1965, т. 9, в. 4, с. 3—40; [4] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [5] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953.

А. Ф. Харшиладзе.

ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОД — метод сведения условно-экстремальных задач к задачам безусловной оптимизации. Проиллюстрировать Ш. ф. м. можно на примере задач *математического программирования.* Рассматривается задача минимизации функции $\varphi(x)$ на множестве $X = \{x: f_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ из n-мерного евклидова пространства. Штрафной функцией, или штрафом (за нарушение ограничений $f_i(x) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$), наз. функция $\psi(x, \alpha)$, зависящая от x и числового параметра α, обладающая следующими свойствами: $\psi(x, \alpha) = 0$, если $x \in X$, и $\psi(x, \alpha) > 0$, если $x \notin X$. Пусть $x(\alpha)$ является любой точкой безусловного глобального минимума функции $M(x, \alpha) = \varphi(x) + \psi(x, \alpha)$, а X^* — множеством решений исходной задачи. Функцию $\psi(x, \alpha)$ выбирают таким образом, чтобы расстояние между точками $x(\alpha)$ и множеством X^* стремилось к нулю при $\alpha \to \infty$, либо, если это не удается гарантировать, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{\alpha \to \infty} \varphi(x(\alpha)) = \inf_{x \in X} \varphi(x).$$

В качестве $\psi(x, \alpha)$ часто выбирают функцию

$$\psi(x, \alpha) = \alpha \sum_{i=1}^m |\min\{f_i(x), 0\}|^q, \quad q \geqslant 1, \text{ либо } 2.$$

Выбор конкретного вида функции $\psi(x, \alpha)$ связан как с проблемой сходимости Ш. ф. м., так и с проблемами, возникающими при решении задачи безусловной минимизации функции $M(x, \alpha)$.

В несколько более общей постановке Ш. ф. м. заключается в сведении задачи минимизации функции $\varphi(x)$ на множестве X к задаче минимизации нек-рой параметрич. функции $M(x, \alpha)$ на множестве более простой структуры, с точки зрения эффективности применения численных методов минимизации, чем исходное множество X.

Имеет место следующий весьма общий результат, иллюстрирующий универсальность Ш. ф. м. Пусть U и V — рефлексивные банаховы пространства; R — расширенная действительная прямая; φ — функция, определенная на U со значениями в R, слабо полунепрерывная снизу; f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ — функции, определенные на U со значениями в R, непрерывные в слабой топологии пространства U; h_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ — функции, определенные на U со значениями в V, непрерывные в слабых топологиях пространств U и V; множество $X = \{x: f_i(x) \geqslant 0;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ h_j(x) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ x \in U\}$ не пусто. Рассматривается задача отыскания таких $x^* \in U$, что

$$\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x) \text{ для всех } x \in X. \qquad (*)$$

Для функции

$$M(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha) = \varphi(x) + \alpha\left\{\sum_{i=1}^m |f_i(x) - y_i|^2 + \sum_{j=1}^n \|h_j(x)\|_V^2\right\}$$

при $\alpha > 0$, $x \in U$, $y_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, m$, рассматривается задача отыскания таких $x(\alpha) \in U$ и $y_i(\alpha) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, что

$$M(x(\alpha), y_1(\alpha), y_2(\alpha), \ldots, y_m(\alpha), \alpha) \leqslant M(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha)$$

для всех $x \in U$, $y_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = +\infty,$$

то каждая слабо предельная точка произвольной последовательности $\{x(\alpha_k)\}$, $\alpha_k \to \infty$, $k \to \infty$, является решением задачи (*) и, кроме того,

$$\lim \varphi(x(\alpha)) = \varphi(x^*), \quad \alpha \to \infty.$$

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М., Методы оптимизации, М., 1978. [2] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [3] Фиакко А. В., Мак-Кормик Г. П., Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации, пер с англ., М., 1972; [4] Сеа Ж., Оптимизация, пер. с франц., М., 1973.

В. Г. Карманов.

ШТУРМА КРИВЫЕ — плоские трансцендентные кривые, описываемые точкой, связанной с эллипсом, гиперболой или параболой, к-рые катятся по прямой. Примером Ш. к. является траектория фокуса параболы, к-рая катится по оси абсцисс — *цепная линия.*

Эти кривые исследованы И. Штурмом (J. Sturm).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ШТУРМА ТЕОРЕМА: если

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_s(x) \qquad (*)$$

— ряд Штурма для отрезка $[a, b]$, $a<b$ и $w(x)$ — число перемен знака в ряде (*) в точке $x\in[a, b]$ (значения, равные нулю, не учитываются), то число различных корней функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно разности $w(a)-w(b)$.

Рядом Штурма наз. последовательность действительных функций (*), непрерывных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на этом отрезке конечное число корней, и такая, что

1) $f_0(a)\,f_0(b)\neq 0$,

2) $f_s(x)\neq 0$ на $[a,\ b]$,

3) из $f_k(c)=0$ для нек-рого $k\ (0<k<s)$ и данного c из $[a,\ b]$ следует $f_{k-1}(c)\,f_{k+1}(c)<0$,

4) из $f_0(c)=0$ для данного $c\,(a<c<b)$ следует, что для достаточно малого $\varepsilon>0$

$$f_0(x)\,f_1(c)<0 \quad (c-\varepsilon<x<c);$$
$$f_0(x)\,f_1(c)>0 \quad (c<x<c+\varepsilon).$$

Теорема доказана Ш. Штурмом [1], к-рый указал также следующий метод построения ряда Штурма для многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, не имеющего кратных корней: $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=f'(x)$ и, если уже построены многочлены $f_0(x),\ \ldots,\ f_k(x)$, то за $f_{k+1}(x)$ надо брать с обратным знаком остаток при делении $f_{k-1}(x)$ на $f_k(x)$. При этом $f_s(x)$ будет константой, отличной от нуля.

Лит.: [1] Sturm J. Ch., «Bull. de Férussac», 1829, t. 11; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.

И. В. Проскуряков.

ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ЗАДАЧА — задача, порожденная на конечном или бесконечном интервале (a, b) изменения переменной x уравнением

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+l(x)\,y=\lambda r(x)\,y, \qquad (1)$$

и нек-рыми граничными условиями, где $p(x)$ и $r(x)$ положительны, $l(x)$ действительна, а λ — комплексный параметр. Начало глубокому изучению этой задачи положили Ш. Штурм (Ch. Sturm) и Ж. Лиувилль (J. Liouville). Понятия и методы, зародившиеся в процессе изучения Ш.— Л. з., сыграли большую роль в развитии многих направлений математики и физики. Она была и остается постоянным источником новых идей и задач для спектральной теории операторов и смежных вопросов анализа. Особое значение приобрела она в последнее время после открытия связи с нек-рыми нелинейными эволюционными уравнениями математич. физики.

Если $p(x)$ дифференцируема, а $p(x)r(x)$ — дифференцируема дважды, то уравнение (1) с помощью подстановки сводится к виду (см. [1])

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y. \qquad (2)$$

Принято различать регулярные и сингулярные задачи. Ш.— Л. з. для уравнения (2) наз. регулярной, если интервал (a, b) изменения переменной x конечен и если функция $q(x)$ суммируема во всем интервале (a, b). Если же интервал (a, b) бесконечен или $q(x)$ несуммируема (или и то и другое), то эта задача наз. сингулярной.

Ниже рассматриваются в отдельности следующие случаи: 1) интервал (a, b) конечен, в этом случае, не нарушая общности, можно считать, что $a=0$ и $b=\pi$; 2) $a=0$, $b=\infty$; 3) $a=-\infty$, $b=\infty$.

1. Рассматривается задача, порожденная на сегменте $[0, \pi]$ уравнением (2) и разделенными граничными условиями

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0, \qquad (3)$$

где $q(x)$ — действительная суммируемая на сегменте $[0, \pi]$ функция, h и H — произвольные конечные или бесконечные фиксированные действительные числа, λ — комплексный параметр. Если $h=\infty$ ($H=\infty$), то первое (второе) условие в (3) заменяется условием $y(0)=0$ ($y(\pi)=0$). Для определенности далее предполагается, что числа, участвующие в граничных условиях, конечны.

Число λ_0 наз. собственным значением задачи (2), (3), если при $\lambda=\lambda_0$ уравнение (2) имеет нетривиальное решение $y_0(x)\not\equiv 0$, удовлетворяющее граничным условиям (3); при этом функция $y_0(x)$ наз. собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_0.

Собственные значения граничной задачи (2), (3) действительны; каждому собственному значению соответствует единственная линейно независимая собственная функция (в силу действительности $q(x)$ и чисел h, H собственные функции задачи (2), (3) можно выбрать действительными); собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, т. е. $\int_0^\pi y_1(x)\,y_2(x)\,dx=0$.

Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ граничной задачи (2), (3); при этом собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n, имеет ровно n нулей в интервале $(0,\ \pi)$.

Пусть $W_2^m[0,\ \pi]$ — пространство Соболева, состоящее из заданных на сегменте $[0,\ \pi]$ комплекснозначных функций, к-рые имеют $m-1$ абсолютно непрерывных производных и производную порядка m, суммируемую на сегменте $[0,\ \pi]$. Если $q(x)\in W_2^m[0,\ \pi]$, то собственные значения λ_n граничной задачи (2), (3) при больших n удовлетворяют асимптотич. равенству (см. [4]):

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant m+2}\frac{c_{2j+1}}{n^{2j+1}}+$$
$$+\frac{(-1)^{m-1}}{2^{m+2}}\left(S_m(n)+\frac{\tilde S_m(n)}{n}\right)\frac{1}{n^{m+1}}+\frac{\delta_n}{n^{m+2}}+\frac{\varepsilon_n(h,\ H)}{n^{m+3}},$$

где c_{2j+1} — независимые от n числа,

$$c_1=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right),$$

$$S_m(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(m)}(t)\sin\left\{2nt-\frac{\pi}{2}(m+1)\right\}dt,$$

$$\tilde S_m(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(m)}(t)\,(2h-c_1t)\sin\left\{2nt-\frac{\pi}{2}(m+2)\right\}dt,$$

δ_n не зависит от h, H и

$$\sum_{n=0}^\infty|\delta_n|^2<\infty,\ \sum_{n=0}^\infty|\varepsilon_n(h,\ H)|^2<\infty.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $q(x)\in W_2^1[0,\ \pi]$, то

$$\lambda_n=n^2+c+\frac{\gamma_n}{n},$$

где

$$c=\frac{2}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right),\ \sum_{n=0}^\infty|\gamma_n|^2<\infty.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^\infty(\lambda_n-n^2-c)$ сходится. Его сумма наз. регуляризованным следом задачи (2), (3) (см. [13]):

$$\sum_{n=0}^\infty(\lambda-n^2-c)=\frac{q(0)+q(\pi)}{4}-\frac{(h+H)^2}{2}+hH-\frac{c}{2}.$$

Пусть $v_0(x)$, $v_1(x)$, . . .— ортонормированные собственные функции задачи (2), (3), соответствующие собственным значениям $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots$. Для каждой функции $f(x)\in$

$\in L_2[0, \pi]$ имеет место так наз. равенство Парсеваля

$$\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2,$$

где

$$a_n = \int_0^\pi f(x)\,v_n(x)\,dx,$$

и справедлива формула разложения по собственным функциям

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n v_n(x), \qquad (4)$$

где ряд сходится в метрике пространства $L_2[0, \pi]$. Теоремы полноты и разложения для регулярной Ш.—Л. з. впервые доказаны В. А. Стекловым [14].

Если функция $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную и удовлетворяет граничным условиям (3), то справедливы следующие утверждения (см. [15]):

а) ряд (4) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[0, \pi]$ к функции $f(x)$;

б) один раз продифференцированный ряд (4) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[0, \pi]$ к $f'(x)$;

в) в каждой точке, в к-рой $f''(x)$ удовлетворяет какому-либо локальному условию разложения в ряд Фурье (напр., имеет ограниченную вариацию), дважды продифференцированный ряд (4) сходится к $f''(x)$.

Для любой функции $f(x)\in L_1[0, \pi]$ ряд (4) является равномерно равносходящимся с рядом Фурье функции $f(x)$ по $\cos nx$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi} |V_{N,f}(x) - c_{N,f}(x)| = 0,$$

где

$$V_{N,f}(x) = \int_0^\pi f(t) \sum_{n=0}^N v_n(x)\,v_n(t)\,dt,$$

$$c_{N,f}(x) = \int_0^\pi f(t) \left\{\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^N \cos nx \cos nt\right\} dt.$$

Это утверждение означает, что разложение функции $f(x)$ по собственным функциям граничной задачи (2), (3) сходится при тех же условиях, что и разложение $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам (см. [1], [4]).

2. Рассматривается дифференциальное уравнение (2) на полуоси $0\leqslant x<\infty$ с граничным условием в нуле:

$$y'(0) - hy(0) = 0. \qquad (5)$$

Функция $q(x)$ предполагается действительной и суммируемой в каждом конечном подинтервале интервала $[0, \infty)$, а число h действительным.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения (2) с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=h$ (так что $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет и граничному условию (5)). Пусть $f(x)$ — любая функция из $L_2(0, \infty)$ и $\Phi_{f,b}(x) = \int_0^b f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx$, где b — произвольное конечное положительное число. Для каждой функции $q(x)$ и каждого числа h существует, по крайней мере, одна, не зависящая от $f(x)$, неубывающая функция $\rho(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, обладающая следующими свойствами:

а) существует функция $\Phi_f(\lambda)$, являющаяся пределом $\Phi_{f,b}(\lambda)$ при $b\to\infty$ в метрике $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$ (пространства ρ-измеримых функций $\psi(\lambda)$, для к-рых

$$\|\psi\| = \int_{-\infty}^\infty |\psi(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda) < \infty),$$

т. е.

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^\infty |\Phi_f(\lambda) - \Phi_{f,b}(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda) = 0;$$

б) имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty |\Phi_f(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda).$$

Функция $\rho(\lambda)$ наз. спектральной функцией (или спектральной плотностью) граничной задачи (2), (5) (см. [9]—[11]).

Для спектральной функции $\rho(\lambda)$ задачи (2), (5) справедлива асимптотич. формула (см. [16]) (в уточненном виде см. [17]):

$$\lim_{\lambda\to-\infty} e^{\sqrt{\lambda}x}(\rho(\lambda) - \rho(-\infty)) = 0,\ 0\leqslant x<\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\rho(\lambda) - \rho(-\infty) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + h\right) = 0.$$

Справедлива следующая теорема равносходимости: для произвольной функции $f(x)\in L_2(0, \infty)$ пусть

$$\Phi_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx,$$

$$C_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,dx$$

(интегралы сходятся в метриках пространств $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$ и $L_{2,\sqrt{\lambda}}(0, \infty)$ соответственно); тогда при каждом фиксированном $b<\infty$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^0 \Phi_f(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda)$$

абсолютно и равномерно относительно $x\in[0, b]$ и

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x<b} \left| \int_{-\infty}^N \Phi_f(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi}\int_0^N C_f(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sqrt{\lambda}\right| = 0.$$

Пусть задача (2), (5) имеет дискретный спектр, т. е. ее спектр состоит из счетного числа собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, <\lambda_n, <\ldots$ с единственной предельной точкой в бесконечности. При определенных условиях на функцию $q(x)$ для функции $N(\lambda) = \Sigma_{\lambda_n<\lambda} 1$, т. е. числа собственных значений, меньших λ, справедлива асимптотич. формула:

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{q(x)<\lambda} (\lambda - q(x))^{1/2}\,dx.$$

Наряду с решением $\varphi(x, \lambda)$ вводится второе решение $\theta(x, \lambda)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям $\theta(0, \lambda)=0$, $\theta'(0, \lambda)=1$, так что $\varphi(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2). При фиксированных числах λ ($\operatorname{Im}\lambda\neq 0$) и $b>0$ рассматривается дробно-линейная функция

$$w_{\lambda,b} = w_{\lambda,b}(t) = \frac{-\theta'(b, \lambda) - t\theta(b, \lambda)}{\varphi'(b, \lambda) + t\varphi(b, \lambda)}.$$

Когда независимая переменная t пробегает действительную ось, точка $w_{\lambda,b}$ описывает нек-рую окружность, ограничивающую круг $K_{\lambda,b}$. Он всегда лежит в той же полуплоскости (нижней или верхней), что и λ. С увеличением b круг $K_{\lambda,b}$ сжимается, т. е. при $b<b'$ круг $K_{\lambda,b'}$ лежит целиком внутри круга $K_{\lambda,b}$. Существует (при $b\to\infty$) предельный круг или точка $K_{\lambda,\infty}$; при этом если

$$\int_0^\infty |\varphi(x, \lambda)|^2\,dx < \infty, \qquad (6)$$

то $K_{\lambda,\infty}$ будет кругом, и точкой — в противном случае (см. [10]). Если условие (6) выполняется для одного какого-либо недействительного значения λ, то оно выполняется для всех значений λ. В случае предельного круга для всех значений λ все решения уравнения (2) принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$, а в случае предельной точки для каждого недействительного значения λ это уравнение имеет решение вида $\theta(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda)$, принадлежащее $L_2(0, \infty)$, где $m(\lambda)$ — предельная точка ($m(\lambda) = K_{\lambda,\infty}$).

Если $q(x)\geqslant -cx^2$, где c — нек-рая положительная постоянная, то имеет место случай предельной точки (см. [19]), более общие результаты см. [20], [21].

3. Рассматривается теперь уравнение (2) на всей оси $-\infty<x<\infty$ при предположении, что $q(x)$ действительная суммируемая в каждом конечном подинтервале из $(-\infty, \infty)$ функция. Пусть $\varphi_1(x, \lambda)$, $\varphi_2(x, \lambda)$ — решения уравнения (2), удовлетворяющие условиям $\varphi_1(0, \lambda)=\varphi_2(0, \lambda)=1$, $\varphi_1'(0, \lambda)=\varphi_2(0, \lambda)=0$.

Существует, по крайней мере, одна действительная симметрическая неубывающая матрица-функция

$$\mathcal{P}(\lambda)=\left\|\begin{matrix}\rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda)\\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda)\end{matrix}\right\|, \quad -\infty<\lambda<\infty,$$

обладающая следующими свойствами:

а) для любой функции $f(x)\in L_2(-\infty, \infty)$ существуют функции $\Phi_{j,f}(\lambda)$, $j=1,2$, определенные равенствами

$$\Phi_{j,f}(\lambda)=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,\varphi_j(x, \lambda)\,dx, \quad j=1, 2,$$

где предел — по метрике пространства $L_{2,\mathcal{P}}(-\infty, \infty)$;

б) имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\sum_{j,k=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{j,f}(\lambda)\,\overline{\Phi_k(\lambda)}\,d\rho_{jk}(\lambda).$$

Лит.: [1] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; [2] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.— Л., 1950; [3] его же, Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973; [4] Марченко В. А., Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, К., 1977; [5] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [6] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [7] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [8] Костюченко А. Г., Саргсян И. С., Распределение собственных значений, М., 1979; [9] Weyl H., «Gött. Nachr.», 1909, S. 37—64; [10] его же, «Math. Ann.», 1910, Bd 68, S. 220—69; [11] его же, «Gött. Nachr.», 1910, S. 442—67; [12] Крейн М. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1952, т. 16, № 4, с. 293—324; [13] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., «Докл. АН СССР», 1953, т. 88, № 4, с. 593—96; [14] Стеклов В. А., «Сообщ. Харьк. матем. об-ва», 1896, т. 5, № 1—2; [15] Левитан Б. М., Саргсян И. С., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 1, с. 3—98; [16] Марченко В. А., «Докл. АН СССР», 1950, т. 72, № 3, с. 457—60; [17] Левитан Б. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1953, т. 17, № 4, с. 331—64, 1955, т. 19, № 1, с. 33—58; [18] Wet J., Mandl F., «Proc. Roy. Soc. Ser. A», 1950, v. 200, p. 572—80; [19] Titchmarsh E., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 191—98; [20] Levinson N., «Casop. Pěst. Mat. Fys.», 1949, v. 74, p. 17—20; [21] Sears D., Titchmarsh E., «Quart. J. Math.» (Oxford ser.), 1950, v. 1, p. 165—75.

Г. Шь. Гусейнов, Б. М. Левитан.

ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА — задача, в к-рой требуется восстановить функцию (потенциал) $q(x)$ по тем или иным спектральным характеристикам оператора A, порождённого дифференциальным выражением $l[y]=-y''+q(x)y$ и нек-рыми граничными условиями в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$, где (a, b) — конечный или бесконечный интервал изменения переменной x. При этом следует восстановить также вид граничных условий, соответствующих оператору A.

При исследовании обратных задач естественно возникают следующие вопросы: 1) выяснить, какие спектральные характеристики однозначно определяют оператор A; 2) дать метод восстановления оператора A по этим спектральным характеристикам; 3) найти характеристич. свойства рассматриваемых спектральных характеристик. В зависимости от выбора спектральных характеристик возможны многие различные постановки обратных задач (часто возникавших из приложений).

Первый результат по обратным задачам (см. [10]), к-рый положил начало развитию всей теории: пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ — собственные значения задачи

$$\left.\begin{aligned}&-y''+q(x)y=\lambda y, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ &y'(0)=y'(\pi)-0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

причем $q(x)$ — действительная непрерывная на сегменте $[0, \pi]$ функция. Если $\lambda_n=n^2$, $n=0, 1, \ldots$, то $q(x)\equiv 0$.

Углубленное исследование обратных задач началось в 40-х гг. 20 в. (см. [11], [12]). Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ — собственные значения уравнения (1) при граничных условиях

$$y'(0)-hy(0)=0, \quad y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \qquad (2)$$

(h и H — действительные числа), а $\mu_0, \mu_1, \ldots$ — собственные значения уравнения (1) при граничных условиях

$$y'(0)-h_1y(0)=0, \quad y'(\pi)+Hy(\pi)=0, \quad h_1\neq h.$$

Тогда последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, $n=0, 1, \ldots$ однозначно определяют функцию $q(x)$ и числа h, h_1 и H. Причем если хотя бы одно собственное значение этих задач неопределенно, то все оставшиеся не определяют уравнения (1) однозначно. В частности, один спектр, вообще говоря, не определяет уравнение однозначно (упомянутый выше результат является исключением из общего правила).

Если уравнение (1) изучается на полуоси $(0, \infty)$ и на потенциальную функцию $q(x)$ наложено условие

$$\int_0^{\infty} x\,|q(x)|\,dx<\infty,$$

то решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи — $y''+q(x)y=\lambda^2y$, $y(0)=0$ допускает при $x\to\infty$ асимптотич. представление

$$\varphi(x, \lambda)=M(\lambda)\sin[\lambda x+\delta(\lambda)]+o(1).$$

Функция $\delta(\lambda)$ наз. фазой рассеяния. Основной результат состоит в том, что если задача (рассматриваемая в пространстве $L_2(0, \infty)$) не имеет дискретных собственных значений, то фаза рассеяния однозначно определяет потенциальную функцию $q(x)$.

При дальнейшем развитии теории обратных задач решающим оказалось то обстоятельство, что был применен аппарат так наз. операторов преобразования (см. *Штурма — Лиувилля уравнение*), к-рый естественно возник в рамках теории операторов обобщённого сдвига (см. [4]).

Применение операторов преобразования к обратным задачам (см. [13]) позволило обобщить вышеприведенные теоремы, а именно, оказалось, что наиболее общей обратной задачей является задача восстановления уравнения (1) по его спектральной функции (см. *Штурма — Лиувилля задача*). Выяснилось, что спектральная функция определяет это уравнение однозначно. При этом безразлично, рассматривается случай конечного или бесконечного интервала.

В принципе все обратные задачи могут быть сведены к обратной задаче восстановления оператора по его спектральной функции. Однако такой путь не всегда является самым простым; кроме того, на этом пути часто трудно бывает найти необходимые и достаточные условия, к-рым должны удовлетворять рассматриваемые спектральные характеристики, по к-рым восстанавливается оператор.

Значение обратных задач возросло после открытия возможности их использования для решения нек-рых нелинейных эволюционных уравнений математич. физики. В частности, была установлена связь (см. [25]) между обратными задачами для нек-рых операторов Штурма — Лиувилля с конечным числом лакун в спектре и проблемой обращения Якоби абелевых интегралов. Развитие этих идей в последнее время позволило получить явные формулы для конечнозонных потенциалов, выражающие их через θ-функции Римана (см. [1], [5]).

Ниже рассматриваются два варианта постановки и решения обратных задач.

1. По известной спектральной функции $\rho(\lambda)$ требуется найти дифференциальное выражение вида

$$l[y] = -y'' + q(x)\,y$$

с действительным локально суммируемым потенциалом $q(x)$, $0 \leqslant x < \infty$ и число h из граничного условия

$$y'(0) - hy(0) = 0. \qquad (3)$$

Для решения этой задачи полагают

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\rho(\lambda),\ 0 < x < \infty, \qquad (4)$$

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2}\{\Phi''(x+y) + \Phi''(|x-y|)\}.$$

Оказывается, что интегральное уравнение

$$f(x,\ y) + K(x,\ y) + \int_0^x K(x,\ t)\,f(t,\ y)\,dt = 0,$$

$$0 \leqslant y \leqslant x, \qquad (5)$$

при каждом фиксированном x имеет единственное решение $K(x,\ y)$. Потенциал $q(x)$ определяется по формуле

$$q(x) = 2\frac{dK(x,\ x)}{dx},$$

а число h, участвующее в (3),— по формуле $h = K(0,\ 0)$ (см. [14]). Решение $\varphi(x,\ \lambda)$ уравнения $l[y] = \lambda y$, удовлетворяющее граничным условиям $\varphi(0,\ \lambda) = 1$ и $\varphi'(0,\ \lambda) = h$, можно найти по формуле

$$\varphi(x,\ \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x K(x,\ t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt.$$

Далее, неубывающая функция $\rho(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, тогда и только тогда является спектральной функцией для нек-рой задачи вида $-y'' + q(x)y = \lambda y$, $0 \leqslant x < \infty$, $y'(0) - hy(0) = 0$ с действительной функцией $q(x)$, имеющей m локально суммируемых производных, и действительным числом h, когда функция $\Phi(x)$, построенная по $\rho(\lambda)$ формулой (4), имеет $m+3$ локально суммируемых производных и $\Phi''(+0) = -h$ (см. [14], [17], [9]). В ряде частных случаев функции $\rho(\lambda)$ можно эффективно найти $q(x)$ и h. Напр., пусть

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + \alpha\chi(\lambda - \lambda_0) & \text{для } \lambda > 0, \\ \alpha\chi(\lambda - \lambda_0) & \text{для } \lambda < 0, \end{cases}$$

где $\chi(\lambda) = 0$, если $\lambda < 0$, и $\chi(\lambda) = 1$, если $\lambda > 0$, α — положительное число. В этом случае интегральное уравнение (5) будет уравнением с вырожденным ядром $f(x,\ y) = \alpha\cos\sqrt{\lambda_0}\,x\cos\sqrt{\lambda_0}\,y$ и его решение

$$K(x,\ y) = -\frac{\alpha\cos\sqrt{\lambda_0}\,x\cos\sqrt{\lambda_0}\,y}{1 + \alpha\int_0^x \cos^2\sqrt{\lambda_0}\,t\,dt}.$$

Теперь функция $q(x)$ и число h определяются формулами

$$q(x) = 2\frac{dK(x,\ x)}{dx} = -2\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha\cos^2\sqrt{\lambda_0}\,x}{1 + \alpha\int_0^x \cos^2\sqrt{\lambda_0}\,t\,dt}\right),$$

$$h = K(0,\ 0) = -\alpha.$$

2. Пусть действительная функция $q(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty. \qquad (6)$$

Тогда граничная задача

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda^2 y,\quad 0 < x < \infty, \qquad (7)$$

$$y(0) = 0, \qquad (7')$$

имеет ограниченные решения при $\lambda^2 > 0$ и $\lambda = i\lambda_k$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, причем эти решения удовлетворяют при $x \to \infty$ асимптотич. формулам

$$y(x,\ \lambda) = e^{-i\lambda x} - S(\lambda)\,e^{i\lambda x} + o(1),\quad 0 < \lambda^2 < \infty,$$

$$y(x,\ i\lambda_k) = m_k e^{-\lambda_k x}[1 + o(1)],\quad m_k > 0,\quad k = 1, \ldots, n.$$

Набор величин $\{S(\lambda),\ -\infty < \lambda < \infty,\ \lambda_k,\ m_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ наз. данными рассеяния граничной задачи (7), (7'). Требуется восстановить потенциал $q(x)$ по данным рассеяния.

Для решения этой задачи строят функцию $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1 - S(\lambda)]\,e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

и рассматривают уравнение

$$F(x+y) + K(x,\ y) + \int_x^\infty K(x,\ t)\,F(t+y)\,dt = 0. \qquad (8)$$

Это уравнение имеет единственное решение $K(x,\ y)$ при каждом $x \geqslant 0$. Решив его, определяют потенциал $q(x)$ по формуле

$$q(x) = -2\frac{dK(x,\ x)}{dx}.$$

Для того чтобы набор величин $\{S(\lambda),\ -\infty < \lambda < \infty;\ \lambda_k,\ m_k,\ \lambda_k > 0,\ m_k > 0,\ k = 1, \ldots, n\}$ был данными рассеяния нек-рой граничной задачи вида (7), (7') с действительным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условию (6), необходимо и достаточно выполнение следующих условий (см. [1]):

а) функция $S(\lambda)$ непрерывна на всей оси, $\overline{S(\lambda)} = S(-\lambda) = [S(\lambda)]^{-1}$, $1 - S(\lambda)$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ и является преобразованием Фурье функций

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1 - S(\lambda)]\,e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$

представимой в виде суммы двух функций, из к-рых одна принадлежит $L_1(-\infty,\ \infty)$, а другая ограничена и принадлежит $L_2(-\infty,\ \infty)$. На полуоси $0 < x < \infty$ функция $F_S(x)$ имеет производную $F_S'(x)$, удовлетворяющую условию $\int_0^\infty x\,|F_S'(x)|\,dx < \infty$;

б) приращение аргумента функции $S(\lambda)$ связано с числом n отрицательных собственных значений (т. е. чисел $-\lambda_1^2, \ldots, -\lambda_n^2$) граничной задачи (7), (7') формулой

$$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}.$$

Интегральное уравнение (8) для $K(x,\ y)$ допускает явное решение в случае, когда $S(\lambda)$ — рациональная функция. Решения уравнения (7) и потенциал $q(x)$ получаются в этом случае в виде рациональных функций от тригонометрич. и гиперболич. функций. Напр., если

$$S(\lambda) = \frac{(\lambda+i)(\lambda+2i)}{(\lambda-i)(\lambda-2i)},\quad \lambda_1 = 1,\ m_1 = \sqrt{6},$$

то соответствующий потенциал имеет вид

$$q(x) = -\frac{24}{(2\operatorname{ch}2x - \operatorname{sh}2x)^2}.$$

Лит.: [1] Марченко В. А., Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, К., 1977; [2] Аграновичз. С., Марченко В. А., Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960; [3] Шадан К., Сабатье П., Обратные задачи в квантовой теории рассеяния, пер. с англ., М., 1980; [4] Левитан Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973; [5] Теория солитонов: метод обратной задачи, М., 1980; [6] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [7] Фаддеев Л. Д., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 4, с. 57—119; [8] его же, в кн.: Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики, т. 3, М., 1974, с. 93—180; [9] Левитан Б. М., Гасымов М. Г., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 2, с. 3—63; [10] Ambarzumian V., «Z. Phys.», 1929, Bd 53, S. 690—695; [11] Borg G., «Acta math.», 1946, v. 78, p. 1—96; [12] Levinson N., «Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.», 1949, v. 25, № 9, p. 29; [13] Марченко В. А.,«Докл. АН СССР»,

1950, т. 72, № 3, с. 457—60; [14] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, № 4, с. 309—60; [15] Крейн М. Г., «Докл. АН СССР», 1951, т. 76, № 1, с. 21—24; 1952, т. 82, № 5, с. 669—72; 1953, т. 88, № 3, с. 405—08; [16] Марченко В. А., там же, 1955, т. 104, № 5, с. 695—98; [17] Левин Б. Я., там же, 1956, т. 106, № 2, с. 187—90; [18] Newton R., Jost R., «Nuovo Cimento», 1955, v. 1, № 4, p. 590—622; [19] Гасымов М. Г., Левитан Б. М., «Докл. АН СССР», 1966, т. 167, № 6, с. 1219—1222; [20] Гасымов М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 41—112; [21] Рофе-Бенетов Ф. С., «Теория функций, функц. анализ и их прилож.», Харьков, 1967, в. 4, с. 189—197; [22] Левитан Б. М., в кн.: Задачи механики и математической физики (Посвящ. памяти И. Г. Петровского), М., 1976, с. 166—207; [23] Ахиезер Н. И., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, № 2, с. 263—66; [24] Гусейнов Г. Ш., там же, 1976, т. 231, № 5, с. 1045—48.

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан.

ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ОПЕРАТОР — самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l[f] = -(p(x)f')' + q(x)f, \quad x \in (a, b),$$

и подходящими граничными условиями в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$, где (a, b) — конечный или бесконечный интервал, p', p, q — непрерывные действительные функции и $p(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$ (иногда так называют любой оператор, порожденный квазидифференциальным выражением вида l). Начиная с 1830 Ш. Штурм (Ch. Sturm) и Ж. Лиувилль (J. Liouville) опубликовали ряд фундаментальных исследований по теории *Штурма — Лиувилля задачи* на конечном интервале.

Точка a наз. регулярным концом, если a конечно, $p(a) \neq 0$ и p', p, $q \in C(a, b)$. В противном случае эта точка наз. сингулярным концом. Выражение l наз. регулярным или сингулярным в зависимости от того, являются ли оба конца интервала (a, b) регулярными или нет.

Пусть D_1 — множество функций $f \in L_2(a, b)$ таких, что f' — абсолютно непрерывна и $l[f] \in L_2(a, b)$, D_0 — подмножество D_1, состоящее из финитных функций. Пусть, далее, $L_1 : f \to l[f]$, $f \in D_1$ и L_0 — замыкание оператора $L_0' : f \to l[f]$, $f \in D_0$, оператор L_0 является симметрич. оператором и $L_0 = L_1$. Ш.— Л. о. является расширением (сужением) оператора $L_0 (L_1)$.

I. Пусть l регулярен, векторы $(\alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i')$ линейно независимы и

$$p(b)(\overline{\beta}_i'\beta_j - \overline{\beta}_i\beta_j') - p(a)(\overline{\alpha}_i'\alpha_j - \overline{\alpha}_i\alpha_j') = 0, \; i, \; j = 1, 2. \quad (1)$$

Тогда множество всех функций $f \in D_1$, удовлетворяющих условиям

$$p(b)(\beta_i' f'(b) - \beta_i f(b)) - p(a)(\alpha_i' f'(a) - \alpha_i f(a)) = 0, \quad (2)$$

$i = 1, 2$, есть область определения нек-рого Ш.— Л. о. Обратно, область определения всякого Ш.— Л. о. можно найти этим способом.

Среди граничных условий важное место занимают разделенные граничные условия (или граничные условия типа Штурма):

$$f(a)\cos\varphi - f'(a)\sin\varphi = 0, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (3)$$

$$f(b)\cos\theta - f'(b)\sin\theta = 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad (4)$$

и смешанные граничные условия:

$$f(a) = \nu f(b), \quad f'(a) = \delta f'(b), \quad (5)$$

где $\nu\delta = p(b)/p(a)$. В частности, если $p(a) = p(b)$, то в случае $\nu = \delta = 1$ условия (5) наз. периодическими, а в случае $\nu = \delta = -1$ — антипериодическими (или полупериодическими).

II. Пусть l сингулярен. Случай, когда оба конца (a, b) сингулярны, приводится к случаю с одним сингулярным концом методом расщепления.

II_1. Пусть конец a регулярен, а b сингулярен и пусть число независимых решений уравнения $l[f] = if$, принадлежащих $L_2(a, b)$, равно 1. Тогда говорят, что выражение l принадлежит случаю предельной точки Вейля в точке b. Область определения Ш.— Л. о. задается граничным условием (3).

II_2. Если число линейно независимых решений уравнения $l[f] = if$, принадлежащих $L_2(a, b)$, равно 2, то говорят, что выражение l принадлежит случаю предельного круга Вейля в точке b. Оператор L_0 в этом случае имеет индексы дефекта (2,2). Область определения Ш.— Л. о. описывается аналогично I, заменяя условия (2) следующим образом: $p(b)$ следует заменить на $p(a)$, $f(b)$ и $f'(b)$ соответственно на $(Sf)_1(b)$ и $(Sf)_2(b)$, где

$$(Sf)_1(b) = \lim_{x \to b} p(x)[fu_2](x), \quad (Sf)_2(b) = \lim_{x \to b} p(x)[u_1 f](x);$$

здесь $[\varphi\psi](x)$ — вронскиан функций φ и ψ в точке x, u_i, $i = 1, 2$,— решения уравнения $l[f] = 0$ с начальными условиями $u_i^{(j-1)}(0) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Ядром резольвенты Ш.— Л. о. является *Карлемана ядро*, причем в случаях I и II_2 резольвента является *Гильберта — Шмидта интегральным оператором*, а в случае II_1 таковым может быть или не быть.

Спектральное разложение Ш.— Л. о. в случае дискретности спектра (напр., в случаях I и II_2) аналогично разложению в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля, а в остальных случаях содержит собственные функции, не принадлежащие $L_2(a, b)$.

Большой интерес представляют задачи отыскания условий на коэффициенты p и q, при к-рых спектр Ш.— Л. о. дискретен, заполняет всю ось, выражение l принадлежит случаю предельной точки или предельного круга. Достаточно общие необходимые и достаточные условия на p и q, обеспечивающие принадлежность l к случаю предельного круга или предельной точки ($b = +\infty$), неизвестны (1984).

Лит.: [1] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., т. 2, Харьков, 1978; [3] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; [4] Марченко В. А., Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, К., 1977; [5] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер с англ., М., 1958; [6] Глазман И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963; [7] Hutson V., Pym J., Applications of functional analysis and operators theory, L — N. Y., 1980; [8] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [9] Мирзоев Г. А., «Матем. заметки», 1981, т. 29, № 2, с. 225—33; [10] Молчанов А. М., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 169—99; [11] Levinson N., «Math.-fyz. časop.», 1949, v. 74, p. 17—20; [12] Исмагилов Р. С., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 6, с. 1239—42; [13] Повзнер А. Я., «Матем. сб.», 1948, т. 23, № 1, с. 3—52; [14] Everitt W., в кн.: Differential equations (Proc. Internat. Conf.), Uppsala, 1977, p. 62—81.

Б. М. Левитан, К. А. Мирзоев.

ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка вида

$$-\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + l(x)y = \lambda r(x)y,$$

рассматриваемое на конечном или бесконечном интервале (a, b) изменения переменной x, где $p(x)$, $l(x)$, $r(x)$ — заданные коэффициенты, λ — комплексный параметр, а y — искомое решение. Если $p(x)$, $r(x)$ положительны и $p(x)$ имеет первую производную, а $p(x)r(x)$ — вторую производную, то с помощью подстановки Лиувилля (см. [1]) это уравнение сводится к стандартному виду

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad a < x < b. \quad (1)$$

Предполагается, что комплексная функция $q(x)$ измерима в интервале (a, b) и суммируема в каждом его

внутреннем подинтервале. Наряду с уравнением рассматривается также неоднородное уравнение

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y+f(x),\quad a<x<b, \qquad (2)$$

где $f(x)$ — заданная функция.

Если функция $f(x)$ измерима в интервале (a, b) и суммируема в каждом его внутреннем подинтервале, то каковы бы ни были комплексные числа c_0, c_1 и какова бы ни была внутренняя точка x_0 интервала (a, b), уравнение (2) имеет в интервале (a, b) одно и только одно решение $y(x, \lambda)$, удовлетворяющее условиям $y(x_0, \lambda)=c_0$, $y'(x_0, \lambda)=c_1$. Для каждого $x\in(a, b)$ функция $y(x, \lambda)$ является целой аналитич. функцией λ. В качестве точки x_0 можно взять также и конечный конец интервала (a, b) (если этот конец регулярен).

Пусть $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — какие-нибудь два решения уравнения (1). Их вронскиан

$$W(y_1, y_2)=y_1(x, \lambda)\,y_2'(x, \lambda)-y_1'(x, \lambda)\,y_2(x, \lambda)$$

не зависит от x и равен нулю тогда и только тогда, когда эти решения линейно зависимы. Общее решение уравнения (2) представляется в виде

$$y(x, \lambda)=a_1y_1(x, \lambda)+a_2y_2(x, \lambda)+\int_{x_0}^{x} R(x, \xi, \lambda)\,f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$R(x, \xi, \lambda)=\frac{1}{W(y_1, y_2)}\{y_1(x, \lambda)\,y_2(\xi, \lambda)-y_1(\xi, \lambda)\,y_2(x, \lambda)\},$$

a_1, a_2 — произвольные постоянные, а $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (1).

Справедлива следующая фундаментальная теорема Штурма (см. [1]): пусть даны два уравнения

$$u''+q_1(x)\,u=0, \qquad (3)$$

$$v''+q_2(x)\,v=0; \qquad (4)$$

если $q_1(x)$, $q_2(x)$ действительны и $q_1(x)<q_2(x)$ во всем интервале (a, b), то между каждыми двумя нулями любого нетривиального решения первого уравнения заключен, по крайней мере, один нуль каждого решения второго уравнения.

Следующая теорема известна под названием теоремы сравнения (см. [1]): пусть левый конец интервала (a, b) конечен и $u(x)$ есть решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям $u(a)=\sin\alpha$, $u'(a)=-\cos\alpha$, а $v(x)$ — решение уравнения (4) с теми же условиями; кроме того, пусть $q_1(x)<q_2(x)$ во всем интервале (a, b); тогда если $u(x)$ в интервале (a, b) имеет m нулей, то $v(x)$ в том же интервале имеет не меньше m нулей и k-й нуль $v(x)$ меньше k-го нуля $u(x)$.

Одним из важных свойств уравнения (1) является существование для него так наз. операторов преобразования, имеющих простую структуру. Операторы преобразования возникли из общих алгебраич. соображений, связанных с теорией операторов обобщенного сдвига (преобразование базиса).

Для уравнения (1) существуют следующие типы операторов преобразования. Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$-y''+q(x)\,y=\lambda^2y,\quad -a<x<a,\quad a\leqslant\infty, \qquad (5)$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0, \lambda)=1,\quad y'(0, \lambda)=i\lambda. \qquad (6)$$

Оказывается, что это решение допускает представление

$$y(x, \lambda)=e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x} K(x, t)\,e^{i\lambda t}\,dt,$$

где $K(x, t)$ — непрерывная не зависящая от λ функция, причем

$$K(x, x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt,\quad K(x, -x)=0.$$

Интегральный оператор $I+K$, определенный формулой

$$(I+K)f=f(x)+\int_{-x}^{x} K(x, t)\,f(t)\,dt,$$

наз. оператором преобразования, сохраняющим условия в точке $x=0$. Он переводит функцию $e^{i\lambda x}$ (решение простейшего уравнения — $y''=\lambda^2y$ при условиях (6)) в решение уравнения (5) при тех же данных в точке $x=0$.

Пусть $\varphi_h(x, \lambda)$ и $\varphi_\infty(x, \lambda)$ — решения уравнения (5), удовлетворяющие условиям

$$\varphi_h(0, \lambda)=1,\ \varphi_h'(0, \lambda)=h,$$

$$\varphi_\infty(0, \lambda)=0,\ \varphi_\infty'(0, \lambda)=1.$$

Эти решения допускают представления

$$\varphi_h(x, \lambda)=\cos\lambda x+\int_0^x K_h(x, t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$\varphi_\infty(x, \lambda)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+\int_0^x K_\infty(x, t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt,$$

где $K_h(x, t)$ и $K_\infty(x, t)$ — непрерывные функции.

Введен (см. [8]) новый вид операторов преобразования, сохраняющих асимптотику решений на бесконечности, а именно, оказалось, что для всех λ из верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ уравнение (5), рассматриваемое на полуоси $0\leqslant x<\infty$, при выполнении условия $\int_0^\infty x|q(x)|dx<\infty$ имеет решение $y(x\ \lambda)$, представимое в виде

$$y(x, y)=e^{i\lambda t}+\int_x^\infty K(x, t)\,e^{i\lambda t}\,dt,$$

где функция $K(x, t)$ является непрерывной и удовлетворяет неравенству

$$|K(x, t)|\leqslant\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\},$$

в к-ром

$$\sigma(x)=\int_x^\infty|q(t)|\,dt,\ \sigma_1(x)=\int_x^\infty\sigma(t)\,dt.$$

Кроме того,

$$K(x, x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt.$$

Лит.: [1] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [3] Левитан Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973; [4] Марченко В. А., Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, К., 1977; [5] Delsarte J., «C. r. Acad. sci.», 1938, t. 206, p. 1780—82; [6] Повзнер А. Я., «Матем. сб.», 1948, т. 23, № 1, с. 3—52; [7] Левитан Б. М., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 3—112; [8] Левин Б. Я., «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, № 2, с. 187—90.

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан.

ШУБЕРТА МНОГООБРАЗИЕ — множество всех m-мерных подпространств W в n-мерном векторном пространстве V над полем k, удовлетворяющих условиям Шуберта: $\dim(W\cap V_j)\geqslant j$, $j=1, \ldots, m$, где $V_1\subset\ldots\subset V_m$ — фиксированный флаг подпространств в V. В грассмановых координатах эти условия выражаются линейными уравнениями; Ш. м. есть неприводимое (вообще говоря, особое) алгебраич. подмногообразие *Грассмана многообразия* $G_{n, m}$. Ш. м. определяют базис *Чжоу кольца* $A(G_{n, m})$, а в случае $k=\mathbb{C}$ — базис группы гомологий $H_*(G_{n, m}, \mathbb{Z})$.

Условия Шуберта рассматривались Х. Шубертом [1] в связи с задачами перечисления геометрич. объектов, обладающих заданными свойствами инцидентности. Обоснованию развитого Шубертом исчисления посвящена 15-я проблема Гильберта (см. [2]).

Лит.: [1] Schubert H., «Mitt. Math. Ges. Hamburg», 1889, Bd 1, S. 134—55; [2] Kleiman S. L., в кн.: Mathematical development arising from Hilbert problems, Providence, 1976, p. 445—82 (Proc. Symp. Pure Math., v. 28); [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1982; [4] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1954.

А. Л. Онищик.

ШУМ АДДИТИВНЫЙ — помеха, прибавляемая к сигналу при передаче его по *каналу связи*. Точнее, го-

ворят, что задан канал связи с Ш. а., если переходная функция $Q(y, \cdot)$ канала задается плотностью $q(y, \tilde{y})$, $y \in \mathcal{Y}$, $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}$ ($\mathcal{Y}$ и $\tilde{\mathcal{Y}}$ — пространства значений сигналов на входе и выходе канала соответственно), зависящей лишь от разности $\tilde{y} - y$, т. е. $q(y, \tilde{y}) = q(\tilde{y} - y)$. В этом случае сигнал на выходе канала $\tilde{\eta}$ можно представить в виде суммы сигнала на входе η и не зависящей от него случайной величины ζ, называемой Ш. а., так что $\tilde{\eta} = \eta + \zeta$.

В случае когда рассматриваются каналы с дискретным или непрерывным временем на конечных или бесконечных интервалах, понятие канала с Ш. а. вводят с помощью соотношения $\tilde{\eta}(t) = \eta(t) + \zeta(t)$, где t изменяется в рассматриваемом интервале, а $\eta(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ и $\zeta(t)$ — случайные процессы, являющиеся соответственно сигналами на входе и выходе канала с Ш. а., причем процесс $\zeta(t)$ не зависит от процесса $\eta(t)$. В частности, если $\zeta(t)$ — гауссовский случайный процесс, рассматриваемый канал является *каналом гауссовским*.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ШУРА ЛЕММА: если T, S — алгебраически неприводимые представления нек-рой группы или алгебры в векторных пространствах X и Y соответственно, то любой *сплетающий оператор* для представлений T и S либо равен нулю, либо взаимно однозначно отображает X на Y (в этом случае T и S эквивалентны). Ш. л. установлена для конечномерных неприводимых представлений И. Шуром [1]. Аналогом Ш. л. является описание семейства сплетающих операторов для двух данных представлений. В частности, Ш. л. часто называется следующее утверждение: если T, S — унитарные неприводимые представления нек-рой группы или симметричные неприводимые представления нек-рой алгебры в гильбертовых пространствах X и Y соответственно, то любой замкнутый линейный оператор из X в Y, сплетающий T и S, либо равен нулю, либо унитарен (в этом случае T и S унитарно эквивалентны). Описание семейства сплетающих операторов для представлений, допускающих разложение в прямой интеграл, наз. континуальным аналогом леммы Шура.

А. И. Штерн.

Следующие два предложения являются обобщениями Ш. л. для семейств операторов, действующих в бесконечномерных пространствах.

Пусть T_x, S_x — представления в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_T$ и $\mathcal{H}_S$ симметричного кольца R A: $\mathcal{H}_T \longrightarrow \mathcal{H}_S$ — линейный замкнутый оператор с нулевым ядром, плотными областью определения и областью значений. Если выполняются соотношения $S_x A \subset A T_x$ для всех $x \in R$, то представления T_x и S_x унитарно эквивалентны.

Пусть R — алгебра линейных непрерывных операторов в локально выпуклом пространстве E, содержащая ненулевой компактный оператор и не имеющая нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств. Тогда любой оператор, перестановочный со всеми операторами алгебры R, кратен единичному оператору.

В. И. Ломоносов.

Лит.: [1] Schur I., «Sitz.-Ber. Akad. Wiss.», 1906, S. 164—184; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [4] его же, Теория представлений групп, М., 1976; [5] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [6] Ломоносов В. И., «Функц. анализ и его прил.», 1973, т. 7, в. 3, с. 55—56.

ШУРА МУЛЬТИПЛИКАТОР группы G — группа когомологий $H^2(G, \mathbb{C}^*)$, где $\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа комплексных чисел с тривиальным действием G. Ш. м. был введен И. Шуром [1] в связи с изучением конечномерных комплексных проективных представлений групп. Если $\rho : G \to \mathrm{PGL}(n)$ — такое представление, то ρ можно интерпретировать как отображение $\pi : G \to \mathrm{GL}(n+1)$ такое, что

$$\pi(\sigma)\pi(\tau) = a_{\sigma,\tau}\pi(\sigma, \tau),$$

где $a_{\sigma,\tau}$ — нек-рый коцикл со значениями в $\mathbb{C}^*$. В частности, проективное представление ρ является проективизацией нек-рого линейного представления π тогда и только тогда, когда коцикл $a_{\sigma,\tau}$ определяет нулевой элемент группы $H^2(G, \mathbb{C}^*)$. Если $H^2(G, \mathbb{C}^*) = 0$, то группа G наз. замкнутой в смысле Шура. Если G — конечная группа, то существуют естественные изоморфизмы

$$H^2(G, \mathbb{C}^*) \cong H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^3(G, \mathbb{Z}).$$

Пусть $M(G) = H^{-3}(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Char}(H^3(G, \mathbb{Z}))$. Если задано центральное расширение

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1 \qquad (*)$$

конечной группы G, то существует естественное отображение $\varphi : M(G) \to A$, образ к-рого совпадает с $A \cap [F, F]$. Отображение φ совпадает с отображением $H^{-3}(G, \mathbb{Z}) \to H^{-1}(G, A)$, индуцированным $\cup$-произведением на 2-мерный коцикл из $H^2(G, A)$, определяющий расширение (*). Обратно, для любой подгруппы $C \subset M(G)$ существует расширение (*) такое, что $\mathrm{Ker}\,\varphi = C$. Если $G = [G, G]$, то расширение (*) однозначно определяется гомоморфизмом φ. Если φ — мономорфизм, то любое проективное представление группы G индуцируется нек-рым линейным представлением группы F.

Лит.: [1] Schur I., «J. reine und angew. Math.», 1904, Bd 127, S. 20—50; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

Л. В. Кузьмин.

ШУРА ТЕОРЕМЫ — теоремы, относящиеся к решению *коэффициентов проблемы* для ограниченных аналитич. функций и полученные И. Шуром [1]. Пусть B — класс функций $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots$, регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих в нем условию $|f(z)| \leqslant 1$. Пусть $\mathbb{R}_n$, $n \geqslant 1$, есть n-мерное комплексное евклидово пространство, точками к-рого являются системы из n комплексных чисел $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$; $B^{(n)}$ — множество точек $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}_n$ таких, что числа $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ являются первыми n коэффициентами нек-рой функции класса B. Множества $B^{(n)}$ — ограниченные, замкнутые и выпуклые в $\mathbb{R}_n$. Тогда справедливы следующие теоремы.

Первая теорема Шура: точкам $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ на границе $B^{(n)}$ соответствует в B только дроби вида

$$\frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}.$$

Вторая теорема Шура: для того чтобы $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ была внутренней точкой $B^{(n)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_0 & c_1 & \ldots & c_{k-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & c_0 & \ldots & c_{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & c_0 \\ \overline{c}_0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{c}_1 & \overline{c}_0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{c}_{k-1} & \overline{c}_{k-2} & \ldots & \overline{c}_0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Вторая Ш. т. дает в окончательной форме решение задачи коэффициентов для ограниченных функций в случае внутренних точек области коэффициентов.

Лит.: [1] Schur I., «J. reine und angew. Math.», 1917, Bd 147, S. 205—32; [2] Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd 2, B.— Lpz., 1927; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Ю. Е. Аленицын.

Э

ЭВБУЛИДА ПАРАДОКС, парадокс Евбулида — то же, что *антиномия* Эвбулида.

ЭВЕРЕТТА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — способ записи интерполяционного многочлена, получающегося из *Гаусса интерполяционной формулы* для интерполирования вперед по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, ..., x_0+nh, x_0-nh, $x_0+(n+1)h$ в точке $x=x_0+th$

$$G_{2n+1}(x)=G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+tf'_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2!}f_0^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t^2-n^2)}{(2n+1)!}f_{1/2}^{2n+1}$$

исключением конечных разностей нечетного порядка при помощи соотношения

$$f_{1/2}^{2k+1}=f_1^{2k}-f_0^{2k}.$$

После приведения подобных членов получается Э. и. ф.

$$E_{2n+1}(x_0+th)=S_0(u)+S_1(t), \qquad (1)$$

где $u=1-t$,

$$S_q(t)=f_q t+f_q^2\frac{t(t^2-1)}{3!}+\ldots+f_q^{2n}\frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-n^2)}{(2n+1)!}. \qquad (2)$$

Формула [1] примерно вдвое сокращает работу по сравнению с другими записями интерполяционного многочлена при решении задачи уплотнения таблиц, т. е. когда из данной таблицы значений функции с узлами x_0+kh требуется составить таблицу значений функции с узлами x_0+kh' при $h'=h/l$, где l — целое, поскольку в этом случае значения $f(x_0-th)$ при $0<t<1$ вычисляются по формуле

$$f(x_0-th)=S_0(u)+S_{-1}(t);$$

значение $S_0(u)$ используется при нахождении двух значений $f(x_0\pm th)$.

При ручном счете в случае $n=2$ коэффициент при f_q^4 в (2) целесообразно приблизить выражением

$$-k\frac{t(t^2-1)}{3!}$$

и вместо $S_q(t)$ вычислять

$$\overline{S}_q(t)=f_q t+\left(f_q^2-\frac{k}{20}f_q^4\right)\frac{t(t^2-1)}{3!}.$$

Параметр k можно выбирать, напр., из условия минимума главной части величины

$$\sup|E_5(x_0+th)-\overline{E}_5(x_0+th)|,$$

где

$$\overline{E}_5(x_0+th)=\overline{S}_0(u)+\overline{S}_1(t),\ u=1-t.$$

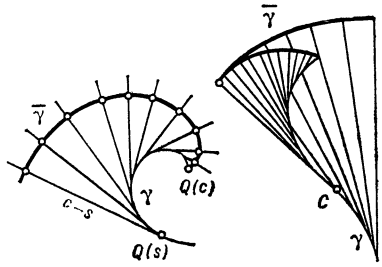
В этом случае значение $k=3{,}6785$.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *М. К. Самарин.*

ЭВОЛЬВЕНТА плоской кривой γ — такая кривая $\bar{\gamma}$, для к-рой кривая γ является *эволютой*. Если $r=r(s)$ (где s — натуральный параметр) — уравнение кривой γ, то уравнение ее Э. имеет вид:

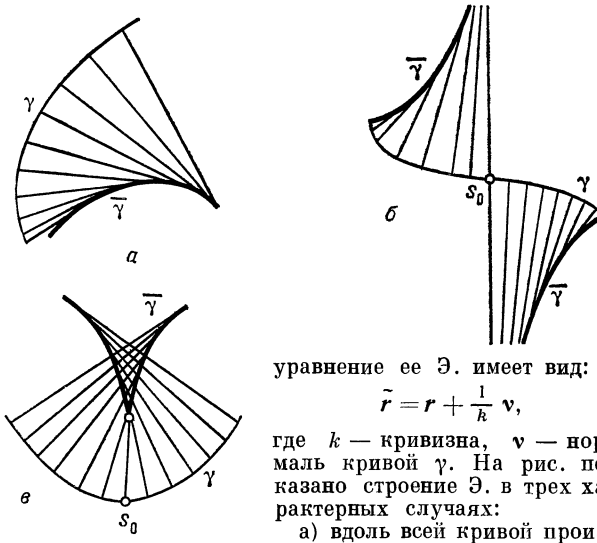
$$r=r(s)+\tau(c-s),$$

где c — произвольная постоянная, τ — касательный вектор к γ. На рис. показано строение Э. в двух характерных случаях: а) для всех $s<c$ кривизна $k(s)$ кривой $\bar{\gamma}$ не обращается в нуль (Э.— регулярная кривая); б) $k(s)$ обращается в нуль только при $s=s_1$, причем $k'(s_1)\neq 0$ (точка Э., соответствующая $s=s_1$, является точкой возврата 2-го рода).



Об Э. поверхности см. *Эволюта*. *Д. Д. Соколов.*

ЭВОЛЮТА плоской кривой γ — множество $\tilde{\gamma}$ точек центров кривизны кривой γ. Если $r=r(s)$ (где s — натуральный параметр) — уравнение кривой γ, то



уравнение ее Э. имеет вид:

$$\tilde{r}=r+\frac{1}{k}\nu,$$

где k — кривизна, ν — нормаль кривой γ. На рис. показано строение Э. в трех характерных случаях:

а) вдоль всей кривой производная k' знакоопределена, k не обращается в нуль;

б) вдоль всей кривой производная k' знакоопределена, k обращается в нуль при $s=s_0$;

в) для $s<s_0$ $k'>0$, для $s>s_0$ $k'(s)<0$, $k'(s_0)=0$, k не обращается в нуль (точка Э., соответствующая $s=s_0$, является точкой возврата). Длина отрезка Э., соответствующего отрезку $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ кривой γ, равна

$$\tilde{s}(s_1,\ s_2)=\left|\frac{1}{k(s_2)}-\frac{1}{k(s_1)}\right|.$$

Э. является огибающей нормалей кривой γ. Кривая γ по отношению к своей Э. наз. *эвольвентой*. *Д. Д. Соколов.*

ЭВОЛЮТА, эволютная поверхность,— множество ребер возврата развертывающихся поверхностей, образованных нормалями к поверхности F вдоль одного семейства линий кривизны F. Э. состоит из двух полостей F_u и F_v, каждая из к-рых является множеством

центров нормальных кривизн соответствующего семейства u, v линий кривизны. Поверхность по отношению к своей Э. наз. эвольвентой (эвольвентной поверхностью). Напр., Э. тора есть ось вращения его и окружность, описываемая центром вращающейся окружности.

Радиус-векторы R_u и R_v соответствующих полостей Э. F_u и F_v суть:

$$R_u = r + \rho_u n, \quad R_v = r + \rho_v n,$$

где ρ_u, ρ_v — радиусы нормальных кривизн линий кривизны (u, v), r — радиус-вектор поверхности F, n — нормаль к F. Ортогональные траектории ребер возврата F_v полости Э: F_v совпадают с линиями уровня функции ρ_v и являются геодезическими параллелями.

Средней эволютой (средней огибающей поверхностью Ф) для данной поверхности F наз. огибающая плоскостей, параллельных касательным плоскостям F и проходящих через середину отрезка между центрами нормальных кривизн линий кривизны; ее радиус-вектор $R_c = r + \frac{H}{K} n$, где H и K — соответственно средняя и гауссова кривизны F, так что F и Ф — параллельные поверхности. При этом, если Δ' — второй дифференциальный параметр, соответствующий III квадратичной форме F и $w = (rn)$, то $\Delta' w = -2(w + \frac{H}{K})$. Если $w = -\frac{H}{K}$, т. е. средняя Э. вырождается в плоскость, то получается поверхность Бонне, если же $w + \frac{H}{K} = cw$, то поверхность F гомотетична Ф и наз. поверхностью Гурса, в частности при $c=1$ получается минимальная поверхность.

И. Х. Сабитов.

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, допускающее истолкование как запись дифференциального закона развития (эволюции) во времени нек-рого процесса. Термин не имеет точного определения, и его применимость может зависеть не только от самого уравнения, но и от постановки задачи для него. Для Э. у. характерна возможность построения решения при заданном начальном условии, к-рое трактуется как запись начального состояния процесса. К Э. у. относятся, прежде всего, обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы общего вида

$$u' = f(t, u), \quad u'' = f(t, u, u') \qquad (*)$$

и т. п. в случае, когда $u(t)$ естественно рассматривать как решение задачи Коши; эти уравнения описывают эволюцию систем с конечным числом степеней свободы. Учет последействия приводит к интегро-дифференциальным уравнениям типа Вольтерра или к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом. Описание процессов, происходящих в сплошных средах, приводит к дифференциальным уравнениям с частными производными гиперболического, параболического и родственных типов; здесь, наряду с задачей Коши, ставится смешанная (начально-граничная) задача. Если решение $u(x, t)$ таких уравнений трактовать как зависящий от параметра t элемент какого-либо пространства функций от x, то приходят к абстрактным дифференциальным уравнениям вида (*). Все эти уравнения, а также соответствующие им разностные уравнения и относят обычно к Э. у.

Аналогии с реальными процессами приводят к постановкам естественных задач для Э. у. (напр., задача об устойчивости решений) и порой дают методы их изучения (напр., привлечение математич. аналогов законов сохранения или диссипации полной энергии). Эволюционный характер уравнения благоприятен для его численного решения, так как значения $u(t_k)$ ($t_0 < t_1 < \ldots$) при достаточно малом шаге Δt_k можно получать с помощью постепенного перестраивания, отправляясь от начального условия. Это привело к тому, что многие задачи о стационарном состоянии среды при их численном решении трактуются как предельные при $t \to +\infty$ для эволюционных задач. (Напр., решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при заданных граничных условиях служит пределом решений уравнения $\partial u/\partial t = \Delta u$ при тех же граничных условиях и любых начальных условиях; в подобных случаях говорят об установлении решений Э. у.)

А. Д. Мышкис.

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР — линейная оператор-функция $U(t, s)$ двух переменных t, s, обладающая свойствами:

$$U(s, s) = I;$$

$$U(t, \tau)\, U(\tau, s) = U(t, s);$$

$$U(t, \tau) = U^{-1}(\tau, t).$$

М. И. Войцеховский.

ЭДЖВОРТА РЯД — ряд, определяемый выражением

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_{k,\,k+2}\,\varphi^{(k+2)}(x) + \ldots + b_{k,\,3k}\,\varphi^{(3k)}(x)}{n^{k/2}}. \qquad (*)$$

Здесь $f(x)$ — плотность распределения случайной величины

$$\frac{s_n - \mathrm{E}s_n}{\sqrt{\mathrm{D}s_n}}$$

($s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимы и одинаково распределены),

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

— плотность стандартного нормального распределения,

$$\varphi^k(x) = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k}.$$

Коэффициенты $b_{k,\,k+2l}$ не зависят от n и представляют собой многочлены относительно $\lambda_3, \ldots, \lambda_{k-l+3}$, где $\lambda_j = \varkappa_j/\sigma^j$, σ^2 — дисперсия, а $\varkappa_j$ — семиинвариант порядка j случайной величины ξ_1. В частности, первые члены разложения имеют вид

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{3!} \lambda_3 \varphi^{(3)}(x) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{4!}\lambda_4 \varphi^{(4)}(x) + \frac{10}{6!}\lambda_3^2 \varphi^{(6)}(x)\right] - \frac{1}{n^{3/2}}\left[\frac{1}{5!}\lambda_5 \varphi^{(5)}(x) + \frac{35}{7!}\lambda_3\lambda_4 \varphi^{(7)}(x) + \frac{280}{9!}\lambda_3^3 \varphi^{(9)}(x)\right] + \ldots.$$

Коэффициенты $b_{k,\,k+2l}$ могут быть выражены также через центральные моменты.

Ряды (*) введены Ф. Эджвортом [1]. Их асимптотич. свойства исследованы Г. Крамером (H. Cramèr), к-рый показал, что при довольно общих условиях ряд (*) дает асимптотич. разложение $f(x)$ с остаточным членом порядка первого отброшенного члена.

Лит.: [1] Edgeworth F. Y., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1905, v. 20, p. 36—65; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

В. Г. Ушаков.

ЭЙКОНАЛА УРАВНЕНИЕ — уравнение с частными производными, имеющее вид

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^i}\right)^2 = \frac{1}{c^2(x^1, \ldots, x^m)}.$$

Здесь m — размерность пространства, c — гладкая, не равная нулю функция. В приложениях c имеет смысл скорости распространения волн, а поверхности $\tau(x^1, \ldots, x^m) = \mathrm{const}$ — волновых фронтов. Лучи (см. *Ферма принцип*) являются характеристиками Э. у.

Существует ряд обобщений и аналогов Э. у. В частности, обобщением Э. у. является уравнение

$$H\left(x^1, \ldots, x^m, \frac{\partial\tau}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\tau}{\partial x^m}\right) = 1,$$

где H — однородная 1-й степени по $\frac{\partial\tau}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\tau}{\partial x^m}$ функция, удовлетворяющая нек-рым дополнительным ограничениям. Важное значение имеет нестационарный аналог Э. у.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + c(t, x^1, \ldots, x^m)\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^i}\right)^2} = 0.$$

Последнее уравнение — частный случай встречающихся в теории волновых явлений дисперсионных уравнений, имеющих вид

$$-\frac{\partial\theta}{\partial t} = \omega(t, x^1, \ldots, x^m, \theta_{x'}, \ldots, \theta_{x^m}).$$

Здесь ω — заданная функция.

На математич. теорию геометрич. оптики можно смотреть как на теорию Э. у. Все виды Э. у.— дифференциальные уравнения с частными производными 1-го порядка. Решение Э. у. может иметь сингулярности. Их теория — часть теории *особенностей дифференцируемых отображений* (см. также *Гамильтона — Якоби теория*, *Геометрическое приближение*, *Лучевой метод*).

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Уизем Дж. Б., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977. *В. М. Бабич.*

ЭЙЛЕНБЕРГА — МАКЛЕЙНА ПРОСТРАНСТВО — пространство, обозначаемое через $K(\pi, n)$ и представляющее функтор $X \to H^n(X; \pi)$, где n — неотрицательное число и π — нек-рая группа, коммутативная при $n>1$, а $H^n(X; \pi)$ есть n-мерная группа когомологий конечного клеточного пространства X с коэффициентами в π. Существует при любых указанных n и π.

Э.— М. п. $K(\pi, n)$ можно характеризовать также следующим условием: $\pi_i(K(\pi, n))=\pi$ при $i=n$ и $i=0$ при $i\neq n$, где π_i есть i-я *гомотопическая группа*. Таким образом, пространство $K(\pi, n)$ определено однозначно с точностью до слабой гомотопич. эквивалентности. Любое топологич. пространство можно, с точностью до слабой гомотопич. эквивалентности, разложить в косое произведение Э.— М. п. (см. *Постникова система*). Когомологии пространства $K(\pi, 1)$ совпадают с когомологиями группы π. Введены С. Эйленбергом и С. Маклейном [1].

Лит.: [1] Eilenberg S., MacLane S., «Ann. Math.», 1945, v. 46, p. 480—509; 1950, v. 51, p. 514—33; [2] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1970; [3] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971. *Ю. Б. Рудяк.*

ЭЙЛЕРА КРИТЕРИЙ: при a, не делящемся на простое число $p>2$, имеет место сравнение

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p,$$

где $\left(\frac{a}{p}\right)$ — *Лежандра символ*. Таким образом, Э. к. дает необходимое и достаточное условие того, чтобы число $a\not\equiv 0 \pmod p$ являлось *квадратичным вычетом* или же невычетом по модулю p. Доказан Л. Эйлером в 1761 (см. [1]).

Л. Эйлер получил также и более общий результат: для того, чтобы число a ($a\not\equiv 0 \pmod p$) было вычетом степени n по простому модулю p, необходимо и достаточно условие

$$a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod p,$$

где $\delta=(n, p-1)$.

Оба эти утверждения легко переносятся на случай конечного поля.

Лит.: [1] Euler L., Opera Omnia. Ser. 1, v. 12, Lpz.— B., 1914, p. 493—538; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981. *С. А. Степанов.*

ЭЙЛЕРА МЕТОД — простейший конечно-разностный метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Выбирается достаточно малый шаг h по оси x, строятся точки $x_i=x_0+ih$, $i=0, 1, 2, \ldots$, и искомая интегральная кривая $y(x)$ заменяется ломаной (ломаная Эйлера), звенья к-рой прямолинейны на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, а ординаты определяются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i=0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Если правая часть $f(x, y)$ уравнения (1) непрерывна, то последовательность ломаных Эйлера при $h \to 0$ на достаточно малом отрезке $[x_0, x_0+H]$ равномерно стремится к искомой интегральной кривой $y(x)$.

Э. м. заключается в том, что интеграл дифференциального уравнения (1) на каждом последовательном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представляется двумя членами ряда Тейлора

$$y(x_i+h) = y(x_i) + hy'(x_i), \quad i=0, 1, 2, \ldots.$$

На каждом шаге Э. м. имеет погрешность порядка h^2.

Для уточнения Э. м. используются различные модификации. Напр., в усовершенствованном методе ломаных вместо формулы (2) для определения ординат используют формулу

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \quad i=0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где

$$x_{i+1/2} = x_i + h/2, \quad y_{i+1/2} = y_i + (h/2) f(x_i, y_i), \tag{4}$$

то есть учитывают направление поля интегральных кривых в средней точке (4) звена ломаной.

Другой модификацией Э. м. является усовершенствованный метод Эйлера — Коши:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})}{2}, \quad i=0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Последний метод можно еще более уточнить, применив итерационную обработку каждого значения y_{i+1}:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^{(k-1)})], \quad k=1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где нулевое приближение

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Итерационный расчет по формуле (6) продолжают до тех пор, пока два последовательных приближения $y_{i+1}^{(k)}$ и $y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут между собой в заданном числе десятичных знаков. Если после трех — четырех итераций совпадение требуемого числа десятичных знаков не достигается, то это указывает на необходимость уменьшения шага h. Э. м. с итерационной обработкой ординат дает на каждом шаге погрешность порядка h^3.

Э. м. и его модификации переносятся на более общий случай решения системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_k' = f_k(x, y_1, \ldots, y_n), \quad k=1, \ldots, n,$$

при заданных начальных условиях

$$y_k(x_0) = y_{k0}.$$

Алгоритм вычислений по Э. м. легко программируется и удобен для реализации на ЭВМ.

Метод предложен Л. Эйлером (L. Euler, 1768).

Лит.: [1] Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, М., 1960. *И. Б. Вапнярский.*

ЭЙЛЕРА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых и функциональных рядов. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

суммируем методом суммирования Эйлера ((E, q)-суммируем) к сумме S, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} S_k = S,$$

где $q>-1$, $S_k=\sum_{n=0}^{k} a_n$.

Впервые метод при $q=1$ применялся Л. Эйлером (L. Euler) для суммирования медленно сходящихся и расходящихся рядов. На произвольные значения q метод был распространен К. Кноппом [1], поэтому Э. м. с. при любом q наз. также методом суммирования Эйлера — Кноппа. Э. м. с. регулярен при $q\geqslant 0$ (см. *Регулярные методы суммирования*); если ряд (E, q)-суммируем, то он суммируем и методом (E, q') при $q'>q>-1$ к той же сумме (см. *Включение методов суммирования*). При $q=0$ суммируемость Э. м. с. ряда (*) означает сходимость этого ряда. Если ряд (E, q)-суммируем, то его члены a_n удовлетворяют условию $a_n=o\{(2q+1)^n\}$, $q\geqslant 0$. Э. м. с. применяется также для аналитич. продолжения функции, определенной степенным рядом, за круг сходимости. Так, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (E, q)-суммируем к сумме $1/(1-z)$ в круге с центром в точке $-q$ и радиусом, равным $q+1$.

Лит.: [1] Knopp K., «Math. Z.», 1922, Bd 15, S. 226—53; [2] его же, там же, 1923, Bd 18, S. 125—56; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977. *И. И. Волков.*

ЭЙЛЕРА МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены вида

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{E_k}{2^k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-k},$$

где E_k — *эйлеровы числа*. Э. м. можно последовательно вычислить по формуле

$$E_n(x)+\sum_{s=0}^{n} C_n^s E_s(x)=2x^n.$$

В частности,

$$E_0(x)=1, E_1(x)=x-\frac{1}{2}, E_2(x)=x(x-1).$$

Э. м. удовлетворяют разностному уравнению

$$E_n(x+1)+E_n(x)=2x^n$$

и принадлежат классу *Аппеля многочленов*, т. е. удовлетворяют соотношению

$$\frac{d}{dx}E_n(x)=nE_{n-1}(x).$$

Производящая функция для Э. м.:

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(x)}{n!}t^n.$$

Для Э. м. справедливо разложение в ряд Фурье

$$E_n(x)=\frac{n!}{\pi^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2k+1)\pi x+\frac{n+1}{2}\pi\right]}{(2k+1)^{n+1}}, \qquad (*)$$
$$0\leqslant x\leqslant 1, \quad n\geqslant 1.$$

Э. м. удовлетворяют соотношениям:

$$E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x),$$

$$E_n(mx)=m^n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k E_n\left(x+\frac{k}{m}\right),$$

если m нечетно,

$$E_n(mx)=-\frac{2m^n}{n+1}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k E_{n+1}\left(x+\frac{k}{m}\right),$$

если m четно.

Периодич. функции, совпадающие с правой частью (*), являются экстремальными в *Колмогорова неравенстве* и ряде других экстремальных задач теории функций. Рассматриваются также обобщенные Э. м.

Лит.: [1] Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.— Л., 1949; [2] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924. *Ю. Н. Субботин.*

ЭЙЛЕРА ПОДСТАНОВКА — замена переменной $x=x(t)$ в интеграле

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \qquad (1)$$

где $R(\cdot, \cdot)$ — рациональная функция своих аргументов, сводящая этот интеграл к интегралу от рациональной функции и имеющая один из следующих трех видов.

Первая подстановка Эйлера: если $a>0$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}\pm t.$$

Вторая подстановка Эйлера: если корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c действительные, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-x_1).$$

Третья подстановка Эйлера: если $c>0$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$$

(в правых частях равенств можно брать любые комбинации знаков). При всех Э. п. как старая переменная интегрирования x, так и радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ рационально выражаются через новую переменную t.

Две первые Э. п. позволяют всегда свести интеграл (1) к интегралу от рациональной функции на любом промежутке, на к-ром радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ принимает только действительные значения.

Геометрич. смысл Э. п. состоит в том, что кривая 2-го порядка

$$y^2=ax^2+bx+c \qquad (2)$$

имеет рациональное параметрич. представление: именно, если за параметр t взять угловые коэффициенты пучка секущих $y-y_0=t(x-x_0)$, проходящих через точку (x_0, y_0) кривой (2), то координаты этой кривой будут рационально выражаться через переменную t. В случае, когда $a>0$ и, следовательно, кривая (2) является гиперболой, для того, чтобы получить 1-ю Э. п., за точку (x_0, y_0) следует взять одну из бесконечно удаленных точек, определяемых направлениями асимптот этой гиперболы; в случае, когда корни x_1 и x_2 квадратичного трехчлена ax^2+bx+c действительны, для того, чтобы получить 2-ю Э. п., надо взять за точку (x_0, y_0) одну из точек $(x_1, 0)$ или $(x_2, 0)$; а в случае, когда $c>0$, чтобы получить 3-ю Э. п.— одну из точек пересечения кривой (2) с осью ординат, т. е. одну из точек $(0, \pm\sqrt{c})$.

Л. Д. Кудрявцев.

ЭЙЛЕРА ПОСТОЯННАЯ — число c, определяемое равенством

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\approx 0{,}57721566490\ldots,$$

рассмотрено Л. Эйлером (L. Euler, 1740). Его существо-

вание следует из монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$

Арифметич. природа Э. п. не изучена, неизвестно (1984) даже является ли она рациональным числом или нет.

Л. Д. Кудрявцев.

ЭЙЛЕРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — 1) Э. п. рядов: если дан числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \tag{1}$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} \tag{2}$$

наз. рядом, полученным из ряда (1) Э. п. рядов. Здесь

$$\Delta^n a_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_k.$$

Если ряд (1) сходится, то сходится и ряд (2) и притом к той же сумме, что и ряд (1). Если ряд (2) сходится (в этом случае ряд (1) может расходиться), то ряд (1) наз. суммируемым по Эйлеру.

Если ряд (1) сходится, $a_n>0$, для всех $k=0, 1, 2, \ldots$ последовательность

$$\Delta^k a_n=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l C_k^l a_{n+l}$$

монотонная и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant q>\frac{1}{2},$$

то сходимость ряда (2) быстрее сходимости ряда (1) (см. *Сходимость*).

Л. Д. Кудрявцев.

2) Э. п.— интегральное преобразование вида

$$w(z)=\int_C (z-t)^{\alpha}\, v(t)\, dt, \tag{1}$$

где C — контур в комплексной плоскости t. Предложено Л. Эйлером (L. Euler, 1769).

Э. п. применяется к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$Lw\equiv\sum_{j=0}^{n}(-1)^j w^{(j)}\sum_{k=0}^{n-j}C_{n+\beta-j-1}^{n-k-j}\,Q_j^{(n-k-j)}(z)=0, \tag{2}$$

где $Q_j(z)$ — многочлен степени $\leqslant n-j$ и β — константа. В таком виде можно представить любое линейное уравнение

$$P_n(z)\,w^{(n)}+P_{n-1}(z)\,w^{(n-1)}+\ldots+P_0(z)\,w=0,$$

где $P_j(z)$ — многочлены степени $\leqslant j$, степень $P_n(z)$ равна n. Уравнение

$$Mv\equiv\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,(Q_{n-j}(z)\,v)^{(j)}=0$$

наз. преобразованием Эйлера уравнения (2). Если $w(z)$ определена формулой (1), причем $\alpha=\beta+n-1$, то справедливо тождество

$$Lw=\int_C (z-t)^{\alpha}\,M(v)\,dt$$

при условии, что внеинтегральная подстановка, к-рая возникает при интегрировании по частям, обращается в нуль. Отсюда видно, что если $M(v)=0$, то $w(z)$ — решение уравнения (2).

Э. п. позволяет понизить порядок уравнения (2), если $Q_j(z)\equiv 0$ при $j>q$, $q<n$. При $q=0$, $q=1$ уравнение (2) интегрируется (см. *Похгаммера уравнение*).

Лит.: [1] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Харьков, 1939; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

М. В. Федорюк.

3) Э. п. — 1-го рода — интегральное преобразование вида

$$I^{\mu}f(x)=\mathfrak{R}_{\mu}\{f(t);\,x\}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x f(t)\,(x-t)^{\mu-1}\,dt,$$

где μ, x — комплексные переменные, причем путем интегрирования является отрезок $t=x\tau$, $0<\tau<1$.

Э. п. 1-го рода наз. также дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка μ. (Иногда под интегралом Римана — Лиувилля понимают интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^a f(t)\,(t-x)^{\mu-1}\,dt=\mathfrak{R}_{\mu}\{f(a-t);\,a-x\},$$

где a — комплексное число.)

При нек-рых условиях на функции $f(x)$, $g(x)$ имеют место следующие равенства:

$$I^0 f(x)=f(x),$$

$$I^{\mu}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha I^{\mu}f(x)+\beta I^{\mu}g(x),$$

α, β — комплексные постоянные,

$$I^{\mu}[I^{\nu}f(x)]=I^{\mu+\nu}f(x),$$

$$I^n f(x)=\int_0^x dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{n-2}}dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)\,dt_n,$$

$$I^{-n}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x),\quad n=1, 2, 3, \ldots.$$

Э. п. 2-го рода — интегральное преобразование вида

$$K^{\mu}f(x)=\mathfrak{M}_{\mu}\{f(t);\,x\}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^{\infty}f(t)\,(t-x)^{\mu-1}\,dt,$$

где μ, x — комплексные переменные, причем путем интегрирования является луч $t=x\tau$, $\tau>1$, или $t=x+\tau$, $\tau>0$. При нек-рых условиях имеют место следующие равенства

$$K^0 f(x)=f(x),$$

$$K^{\mu}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha K^{\mu}f(x)+\beta K^{\mu}g(x),$$

α, β — комплексные постоянные,

$$K^{\mu}[K^{\nu}f(x)]=K^{\mu+\nu}f(x),$$

$$K^n f(x)=\int_x^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2\ldots\int_{t_{n-2}}^{\infty}dt_{n-1}\int_{t_{n-1}}^{\infty}f(t_n)\,dt_n,$$

$$K^{-n}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x),\quad n=1, 2, 3, \ldots.$$

Э. п. 2-го рода иногда наз. дробным интегралом Вейля порядка μ.

Указанные преобразования введены также для обобщенных функций.

Лит.: Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЭЙЛЕРА ПРОИЗВЕДЕНИЕ — бесконечное произведение вида

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где s — действительное число и p пробегает все простые числа. Это произведение абсолютно сходится при всех $s>1$. Аналогичное произведение для комплексных чисел $s=\sigma+it$ абсолютно сходится при $\sigma>1$ и задает в этой области дзета-функцию Римана

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

С. А. Степанов.

ЭЙЛЕРА ПРЯМАЯ — прямая, на к-рой лежат точка H пересечения высот треугольника, точка S пересечения медиан и точка O — центр описанной окружности. Если Э. п. проходит через вершину треугольника, то треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный, либо прямоугольный равнобедренный. Для отрезков Э. п. выполняется соотношение:

$$OH:SH=1:2$$

Э. п. впервые была рассмотрена Л. Эйлером (L. Euler, 1765).

П. С. Моденов.

ЭЙЛЕРА РЯД — выражение вида

$$\sum_p \frac{1}{p},$$

где сумма берется по всем простым числам p. Л. Эйлер (L. Euler, 1748) показал, что этот ряд расходится, и тем самым дал еще одно доказательство бесконечности множества простых чисел. Для частичных сумм Э. р. имеет место асимптотика

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + C + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

где $C=0{,}261497\ \ldots$.

С. А. Степанов.

ЭЙЛЕРА ТЕОРЕМА: у всякого выпуклого многогранника число вершин B плюс число граней Г минус число ребер P равно 2:

$$\text{В}+\text{Г}-\text{Р}=2. \qquad (*)$$

Э. т. справедлива для многогранников рода Q; для многогранников рода p выполняется соотношение

$$\text{В}+\text{Г}-\text{Р}=2-2p.$$

Э. т. доказана Л. Эйлером (L. Euler, 1758), соотношение (*) было известно Р. Декарту (R. Descartes, 1620).

А. Б. Иванов.

ЭЙЛЕРА ТОЖДЕСТВО — соотношение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где $s>1$ — произвольное действительное число и произведение берется по всем простым числам p. Э. т. справедливо также для всех комплексных чисел $s=\sigma+it$ таких, что $\sigma>1$.

Обобщением Э. т. является соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1-f(p))^{-1},$$

справедливое для всякой вполне мультипликативной арифметич. функции $f(n)$ с абсолютно сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Другим обобщением Э. т. является соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p (1-a_p p^{-s}+p^{2k-1-2s})^{-1}$$

для *Дирихле рядов*

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s=\sigma+it, \quad \sigma > k+1,$$

соответствующих модулярным функциям

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

веса $2k$, являющимся собственными функциями операторов Гекке.

Лит.: [1] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1974; [2] Ленг С., Введение в теорию модулярных форм, пер. с англ., М., 1979.

С. А. Степанов.

ЭЙЛЕРА УРАВНЕНИЕ — 1) Э. у.— линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \frac{d^i y}{dx^i} = f(x), \qquad (1)$$

где a_i, $i=0, 1, \ldots, n$,— константы, $a_n \neq 0$. Это уравнение подробно исследовал Л. Эйлер (L. Euler), начиная с 1740.

Замена независимой переменной $x=e^t$ приводит уравнение (1) при $x>0$ к линейному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D(D-1)\ldots(D-i+1)\,y = f(e^t), \quad D=d/dt.$$

Характеристич. уравнение этого линейного уравнения наз. определяющим уравнением Э. у. Точка $x=0$ является *регулярной особой точкой* однородного Э. у. Фундаментальная система (действительных) решений действительного однородного уравнения (1) на полуоси $x>0$ состоит из функций вида

$$x^{\alpha}\cos(\beta \ln x)\ln^m x, \quad x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)\ln^m x. \qquad (2)$$

Если $x<0$, то в уравнении (1) нужно сделать подстановку $x=-e^t$, а в выражениях (2) заменить x на $|x|$.

Более общее, чем (1), уравнение Лагранжа

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (\alpha x+\beta)^j y^{(j)} = f(x),$$

где α, β, a_j — константы, $\alpha \neq 0$, $a_n \neq 0$, подстановкой

$$\alpha x+\beta = e^t \quad \text{или} \quad \alpha x+\beta = -e^t$$

также сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

2) Э. у.— необходимое условие экстремума в задачах вариационного исчисления, полученное Л. Эйлером (L. Euler, 1744). Впоследствии, используя другой метод, это уравнение вывел Ж. Лагранж (J. Lagrange, 1759). В связи с этим Э. у. иногда наз. уравнением Эйлера — Лагранжа. Э. у. представляет собой необходимое условие обращения в нуль 1-й вариации функционала.

Пусть поставлена задача вариационного исчисления, состоящая в определении экстремума функционала

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\,dt \qquad (1)$$

при известных условиях на концах

$$x(t_1)=x_1, \quad x(t_2)=x_2. \qquad (2)$$

И пусть непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, есть решение задачи (1), (2). Тогда $x(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) можно записать в развернутом виде

$$F_x - F_{t\dot{x}} - F_{x\dot{x}}\dot{x} - F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} = 0. \qquad (4)$$

Гладкое решение уравнения (3) или (4) наз. экстремалью. Если $F_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$ в точке (t, x), лежащей на экстремали, то в этой точке экстремаль имеет непрерывную 2-ю производную $\ddot{x}$. Экстремаль, во всех точках к-рой $F_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$, наз. неособенной. Для неособенной экстремали Э. у. можно записать в виде, разрешенном относительно 2-й производной $\ddot{x}$.

Решение вариационной задачи (1), (2) необязательно должно быть непрерывно дифференцируемым. В общем случае оптимальное решение $x(t)$ может быть кусочно дифференцируемой функцией. Тогда в угловых точках $x(t)$ должны выполняться необходимые условия Вейерштрасса—Эрдмана, обеспечивающие непрерывность при переходе через угловую точку выражений $F_{\dot{x}}$ и $F-\dot{x}F_{\dot{x}}$, а на отрезках между соседними угловыми точками функция $x(t)$ должна удовлетворять Э. у. Кусочно гладкие линии, составленные из кусков экстремалей и удовлетворяющие в угловых точках условиям Вейерштрасса — Эрдмана, наз. ломаными экстремалями.

В общем случае дифференциальное Э. у. является уравнением 2-го порядка и, следовательно, его общее решение зависит от двух произвольных постоянных c_1 и c_2:

$$x = f(t, c_1, c_2).$$

Эти произвольные постоянные можно определить из граничных условий (2):

$$\left.\begin{aligned} f(t_1, c_1, c_2) &= x_1, \\ f(t_2, c_1, c_2) &= x_2. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Если рассматривается функционал, зависящий от нескольких функций

$$J(x^1, \ldots, x^n) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)\, dt, \quad (6)$$

то вместо одного Э. у. приходят к системе n Э. у.

$$F_{\dot{x}} : -\frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (7)$$

Общее решение системы (7) зависит от $2n$ произвольных постоянных, к-рые определяются из заданных $2n$ граничных условий (для задачи с закрепленными концами).

Для вариационных задач с подвижными концами, в к-рых левый и правый концы экстремали могут смещаться по нек-рым заданным гиперповерхностям, недостающие граничные условия, позволяющие получить замкнутую систему соотношений типа (5), определяются с помощью необходимого *трансверсальности условия*.

Для функционалов, содержащих производные высших порядков (а не только 1-го, как (1), (6)) необходимое условие, аналогичное Э. у., записывается в виде дифференциального уравнения Эйлера — Пуассона (см. [1]).

Для вариационных задач, в к-рых разыскивается экстремум функционалов, зависящих от функций нескольких переменных, аналогичное Э. у. необходимое условие записывается в виде уравнения Эйлера — Остроградского, представляющего собой дифференциальное уравнение с частными производными (см. [2]).

В случае вариационных задач на условный экстремум получение системы Э. у. связано с использованием *Лагранжа множителей*. Напр., для *Больца задачи*, в к-рой требуется найти экстремум функционала, зависящего от n функций $x=(x^1, \ldots, x^n)$,

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) \quad (8)$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств

$$\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad m < n, \quad (9)$$

и граничных условий

$$\psi_\mu(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \ \mu = 1, \ldots, p, \ p \leqslant 2n+2 \quad (10)$$

с помощью множителей Лагранжа λ_0 и $\lambda_i(t)$, $i=1, \ldots, m$, из f и φ_i составляется функция

$$F(t, x, \dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t, x, \dot{x})$$

и Э. у. записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} F_{\lambda_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{\lambda}_i} &\equiv \varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ F_{x^i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} &= 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Таким образом, оптимальное решение вариационной задачи (8)—(10) должно удовлетворять системе $m+n$ дифференциальных уравнений Эйлера (11), причем первые m из этих уравнений совпадают с заданными условиями связи (9). Используя дополнительно необходимое условие трансверсальности, получают замкнутую краевую задачу для определения решения вариационной задачи (8)—(10).

Помимо Э. у. и условий трансверсальности оптимальное решение вариационной задачи должно удовлетворять остальным необходимым условиям: условию Клебша (Лежандра), условию Вейерштрасса и условию Якоби.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

3) Э. у.— дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

где

$$X(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$
$$Y(x) = a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4.$$

Л. Эйлер (L. Euler) рассматривал это уравнение в ряде работ начиная с 1753. Он показал, что общее решение этого уравнения имеет вид $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ — симметрич. многочлен 4-й степени от x и y. *БСЭ-3.*

ЭЙЛЕРА ФОРМУЛА — формула, выражающая нормальную кривизну поверхности в данном направлении l через главные кривизны k_1 и k_2:

$$k_l = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi,$$

где φ — угол, к-рый составляет направление l с главным направлением, соответствующему главной кривизне k_1.

Э. ф. получена Л. Эйлером (L. Euler, 1760). *Д. Д. Соколов.*

ЭЙЛЕРА ФОРМУЛЫ — формулы, связывающие показательную и тригонометрические функции:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

справедливые при всех значениях комплексного переменного z. В частности, при действительном $z=x$ Э. ф. имеют вид:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x,$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Эти формулы и были опубликованы Л. Эйлером [1].

Лит.: [1] Euler L., «Miscellanea Berolinensia», 1743, v. 7, p. 193—242; [2] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечно малых, пер. с лат., т. 1, М.— Л., 1936; [3] Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 4 изд., М., 1978. *Е. Д. Соломенцев.*

ЭЙЛЕРА ФУНКЦИЯ — арифметическая функция $\varphi(n)$, значение к-рой равно количеству положительных целых чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Э. ф. мультипликативна, т. е. $\varphi(1)=1$ и $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ при $(m, n)=1$. Для функции $\varphi(n)$ справедливы соотношения

$$\sum_{d/n} \varphi(d) = n,$$

$$c\frac{n}{\ln\ln n} \leqslant \varphi(n) \leqslant n,$$

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x).$$

Введена Л. Эйлером (L. Euler, 1763).

Лит.: [1] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1974. *С. А. Степанов.*

ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА УРАВНЕНИЕ для минимальной поверхности $z=z(x, y)$ — уравнение вида

$$\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

оно получено Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1760) и истолковано Ж. Мёнье (J. Meusnier) как условие равенства нулю средней кривизны поверхности $z=z(x, y)$, частные интегралы найдены Г. Монжем (G. Monge). Систематические исследования Э.—Л. у. проведены С. М. Бернштейном, который показал, что Э.—Л. у. является квазилинейным эллиптич. уравнением рода $p=2$, вследствие чего решения Э.—Л. у. обладают рядом свойств, резко отличающих их от решений линейных уравнений. К таким свойствам, напр., относятся устранимость изолированных особых точек решения без априорного предположения об ограниченности решения в окрестности особой точки, принцип максимума, имеющий место при тех же условиях, невозможность равномерной априорной оценки $z(x, y)$ в любой компактной подобласти круга через значения z в центре круга (т. е. отсутствие точного аналога неравенства Гарнака), факты, относящиеся к *Дирихле задаче*, отсутствие нелинейного решения Э.—Л. у., определенного над всей плоскостью (*Бернштейна теорема*) и т. д.

Э.—Л. у. обобщается по размерности: для минимальной гиперповерхности $z=z(x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ соответствующее уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\Big/\sqrt{1+|\nabla z|^2}\right)=0, \quad \nabla z=\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right).$$

Для этого уравнения ($n\geqslant 3$) исследована разрешимость задачи Дирихле, доказана устранимость особенностей решения, если они сосредоточены внутри области на множестве нулевой ($n-1$)-мерной меры Хаусдорфа, показана справедливость теоремы Бернштейна для $n\leqslant 7$ и построены контрпримеры для $n\geqslant 8$.

И. Х. Сабитов.

ЭЙЛЕРА — МАКЛОРЕНА ФОРМУЛА — формула суммирования, связывающая частные суммы ряда с интегралом и производными его общего члена:

$$\sum_{k=p}^{m-1}\varphi(k)=\int_p^m \varphi(t)\,dt+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{B_\nu}{\nu!}\left\{\varphi^{(\nu-1)}(m)-\varphi^{(\nu-1)}(p)\right\}+R_n,$$

где B_ν — *Бернулли числа*, R_n — остаточный член. С помощью *Бернулли многочленов* $B_n(t)$, $B_n(0)=B_n$ остаточный член записывается в виде:

$$R_n=-\frac{1}{n!}\int_0^1 [B_n(t)-B_n]\sum_{k=p}^{m-1}\varphi^{(n)}(k+1-t)\,dt.$$

Для $n=2s$ остаточный член R_{2s} может быть представлен с использованием чисел Бернулли:

$$R_{2s}=\frac{B_{2s}}{(2s)!}\sum_{k=p}^{m-1}\varphi^{(2s)}(k+\theta), \quad 0<\theta<1.$$

Если производные $\varphi^{(2s)}(t)$ и $\varphi^{(2s+1)}(t)$ имеют одинаковые знаки и не меняют знака на $[p, m]$, то

$$R_{2s}=\theta\frac{B_{2s}}{(2s)!}[\varphi^{(2s-1)}(m)-\varphi^{(2s-1)}(p)], \quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Если, кроме того,

$$\lim_{x\to\infty}\varphi^{(2s-1)}(x)=0,$$

то Э.—М. ф. может быть записана в виде:

$$\sum_{k=p}^{m-1}\varphi(k)=c+\int_p^m \varphi(t)\,dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{2s-2}\frac{B_k}{k!}\varphi^{(k-1)}(m)+\theta\frac{B_{2s}}{(2s)!}\varphi^{(2s-1)}(m), \quad 0<\theta<1.$$

В такой форме Э.—М. ф. применяется, напр., при выводе *Стирлинга формулы*. В этом случае $\varphi(x)=\ln x$ и c — *Эйлера постоянная*. Имеются обобщения Э. — М. ф. на случай кратных сумм.

Э.—М. ф. применяется для приближенного вычисления определенных интегралов, для исследования сходимости рядов, для вычисления сумм и для разложения функций в ряд Тейлора. Напр., при $m=1$, $p=0$, $n=2m+1$, $\varphi(x)=\cos\frac{xt}{2}$ Э.—М. ф. дает следующее выражение:

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu\frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}B_{2\nu}+$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}t^{2m+2}}{2\sin\frac{t}{2}}\int_0^1\frac{B_{2m+1}(t)}{(2m+1)!}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)t\,dx.$$

Э.—М. ф. играет важную роль при изучении асимптотич. разложений, в теоретико-числовых оценках, в *конечных разностей исчислении*.

Э.—М. ф. иногда применяется в виде:

$$\sum_0^n\varphi_n(x)=\int_0^n\varphi(x)\,dx+\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_n)+$$

$$+\int_0^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)\,dx.$$

Э.—М. ф. была впервые приведена Л. Эйлером [1] в виде:

$$S=\int t\,dn+\alpha t+\beta\frac{dt}{dn}+\gamma\frac{d^2t}{dn^2}+\delta\frac{d^3t}{dn^3}+\varepsilon\frac{d^4t}{dn^4}+\ldots,$$

где S — сумма первых членов ряда с общим членом $t(n)$, $S=t=0$ при $n=0$, а коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями:

$$\alpha=\frac{1}{2}, \quad \beta=\left[\alpha-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{12}, \quad \gamma=\frac{\beta}{2!}-\frac{\alpha}{3!}+\frac{1}{4!}=0,\right.$$

$$\delta=\frac{\gamma}{2!}-\frac{\beta}{3!}+\frac{\alpha}{4!}-\frac{1}{5!}=-\frac{1}{720}, \quad \varepsilon=0, \quad \gamma=0, \quad \ldots.$$

Независимо формула была открыта позднее К. Маклореном [2].

Лит.: [1] Euler L., «Comment. Acad. sci. Imp. Petrop.», 1738, t. 6, p. 68—97; [2] Mac Laurin C., A treatise of fluxions, v. 1—2, Edin., 1742; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924; [5] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967.

Ю. Н. Субботин.

ЭЙЛЕРА — ФУРЬЕ ФОРМУЛЫ — формулы для коэффициентов *Фурье ряда*.

ЭЙЛЕРОВ КЛАСС — первое *препятствие* к построению сечения расслоения со слоем сфера, ассоциированного с векторным расслоением. См. *Характеристический класс*.

А. Ф. Харшиладзе.

ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА конечного клеточного комплекса K — целое число

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha_k,$$

где α_k — число k-мерных клеток комплекса. Названа в честь Л. Эйлера (L. Euler), к-рый доказал в 1758, что число вершин В, ребер Р и граней Г. выпуклого многогранника связаны формулой В—Р+Г=2. В неявном виде эта формула была известна еще Р. Декарту (R. Descartes, 1620). Оказывается, что

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k p^k,$$

где p^k есть k-мерное *Бетти число* комплекса K (формула Эйлера — Пуанкаре). Э. х. комплекса K является его гомологическим, гомотопическим и топологическим инвариантом. В частности, Э. х. не зависит от способа разбиения пространства на клетки. Поэтому можно говорить, напр., об Э.х. произвольного компактного полиэдра, понимая под этим Э.х. какой-нибудь его триангуляции. С другой стороны, формула Эйлера—Пуанкаре позволяет распространить понятие Э. х. на более широкий класс пространств и пар пространств, для к-рых правая часть формулы имеет смысл. Для произвольного поля F справедлива обобщенная формула Эйлера — Пуанкаре, выражающая Э. х. через

размерности над полем F групп гомологий с коэффициентами в поле F:

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dim_F H_K(K; F).$$

Пусть $p: E\to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F. Тогда, при нек-рых ограничениях на пространства E, B, F, их Э. х. связаны соотношением $\chi(E)=\chi(B)\chi(F)$. В частности, Э. х. прямого произведения двух пространств равна произведению их Э. х. С помощью соотношения $\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)$, справедливого для любой вырезаемой триады $(A\cup B, A, B)$, вычисляются Э. х. всех компактных двумерных многообразий. Э. х. сферы с g ручками и k удаленными открытыми дисками равна $2-2g-k$, сферы с m листами Мёбиуса и k удаленными дисками — $2-m-k$. Э. х. произвольного компактного многообразия нечетной размерности равна половине Э. х. его края. В частности, Э. х. замкнутого многообразия нечетной размерности равна нулю, так как его край пуст.

С. В. Матвеев.

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ — интеграл

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\quad p>0,\ q>0,$$

наз. эйлеровым интегралом 1-го рода или *бета-функцией*, и интеграл

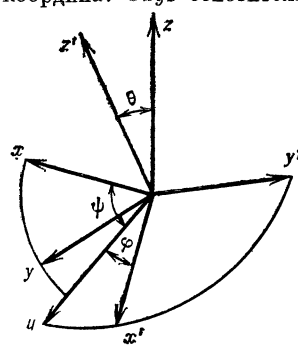
$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

— эйлеровым интегралом 2-го рода (при $s>0$ этот интеграл (2) сходится и является представлением *гамма-функции*).

Э. и. рассматривались Л. Эйлером (L. Euler, 1729—1731).

Л. Д. Кудрявцев.

ЭЙЛЕРОВЫ УГЛЫ — углы φ, ψ, θ, определяющие положение одной декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ относительно другой декартовой прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$ с тем же началом координат и с той же ориентацией. Э. у. рассматриваются как углы последовательных поворотов одной системы относительно осей другой, после к-рых обе системы совпадают (см. рис.). Пусть u — ось, совпадающая с линией пересечения плоскости Oxy с плоскостью $Ox'y'$ и направленная так, что три направления Oz, Oz' и u образуют правую тройку. Угол ψ — угол между осями Ox и u, отсчитываемый в плоскости Oxy от оси Ox в направлении кратчайшего поворота от Ox к Oy; θ — не превосходящий π угол между осями Oz и Oz'; φ — угол между осями u и Ox', отсчитываемый в плоскости $Ox'y'$ от оси u в направлении кратчайшего поворота Ox' к Oy'. Связь между координатами x, y, z и x', y', z':



$$x=(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi)\,x'+$$
$$+(-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi)\,y'+(\sin\psi\sin\theta)z',$$
$$y=(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi)\,x'+$$
$$+(-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi)\,y'+(-\cos\psi\sin\theta)\,z',$$
$$z=(\sin\theta\sin\varphi)\,x'+(\sin\theta\cos\varphi)\,y'+(\cos\theta)\,z'.$$

Э. у. введены Л. Эйлером (L. Euler, 1748). *Д. Д. Соколов.*

ЭЙЛЕРОВЫ ЧИСЛА — коэффициенты E_n в разложении

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{z^n}{n!}.$$

Рекуррентная формула для Э. ч. имеет вид (в символической записи, $E^n\equiv E_n$):

$$(E+1)^n+(E-1)^n=0,\quad E_0=1.$$

При этом $E_{2n+1}=0$, E_{4n} — положительные, E_{4n+2} — отрицательные целые числа для всех $n=0, 1, \ldots$; $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61$, $E_8=1385$, $E_{10}=-50521$. Э. ч. связаны с *Бернулли числами* B_n:

$$E_{n-1}=\frac{(4B-1)^n-(4B-3)^n}{2n},$$
$$E_{2n}=\frac{4^{2n+1}}{2n+1}\left(B-\frac{1}{4}\right)_{2n+1}.$$

Э. ч. применяются для суммирования рядов. Напр.,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}\,|E_{2n}|.$$

Иногда Э. ч. наз. числа $|E_{2n}|$.

Э. ч. введены Л. Эйлером (L. Euler, 1755).

Лит.: [1] Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.—Л., 1949; [2] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М.— Л., 1971.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЙНШТЕЙНА ПРАВИЛО — правило упрощенной (без символа $\sum$) записи конечной суммы, каждое из слагаемых к-рой содержит индекс суммирования дважды: один раз как верхний индекс, и второй раз как нижний индекс. Суммы $\sum_{i=1}^{n}x^ie_i$, $\sum_{i,\,j=1}^{n}x^iy^ja_{ij}$ записываются в виде x^ie_i, $x^ix^ja_{ij}$; при этом $1\leqslant i,\ j\leqslant n$. Требованием записи индексов на разных уровнях иногда пренебрегают.

Э. п. предложено А. Эйнштейном (A. Einstein, 1916).

Л. П. Купцов.

ЭЙНШТЕЙНА УРАВНЕНИЯ гравитационного поля — основные уравнения общей теории относительности, связывающие метрич. тензор пространства-времени, к-рый описывает поле тяготения, и физич. характеристики иных видов материи, к-рые описываются тензором энергии-импульса:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{8\pi}{c^4}GT_{ik}.$$

Здесь R_{ik} — *Риччи тензор*, к-рый выражается через метрич. тензор g_{ik}, $R=R_i^i$, T_{ik} — тензор энергии-импульса, c — скорость света в вакууме, G — гравитационная постоянная.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

Д. Д. Соколов.

ЭЙНШТЕЙНА — СМОЛУХОВСКОГО УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение для плотности вероятности функции перехода $P(t_0, x_0(t, x))$ из положения x_0 в момент времени t_0 в точку x к моменту t:

$$P(t_0, x_0\,|\,t, x)=\int P(t_0, x_0\,|\,t', x')\times$$
$$\times P(t', x'\,|\,t, x)\,dx',$$
$$t_0<t'<t,\ \int P(t_0, x_0|\,t, x)\,dx=1.$$

Функция P описывает случайный процесс без последействия (*марковский процесс*), для к-рого характерна независимость эволюции системы от t_0 к t от предшествующих моменту t_0 возможных ее состояний. Уравнение было сформулировано М. Смолуховским (M. Smoluchowski, 1906) в связи с разрабатываемым им и одновременно А. Эйнштейном (A. Einstein) представлением о броуновском движении как о случайном процессе. В литературе Э.—С. у. наз. уравнением Колмогорова — Чепмена.

Физич. анализ процесса типа броуновского движения показывает, что описание его с помощью функции P возможно на временах $\Delta t=t-t_0$, значительно превышающих время корреляции случайного процесса (даже

если формально $\Delta t\to 0$) и что рассчитанные с помощью этой функции моменты $\overline{(x-x_0)^k}=M_k$ должны удовлетворять требованию

$$\lim_{\Delta t\to\infty} M_k/\Delta t=0,\ k\geqslant 3;\quad \lim_{\Delta t\to 0} M_2/\Delta t\neq 0.$$

В этом случае Э.—С. у. сводится к линейному дифференциальному уравнению параболич. типа, называемому уравнением Фоккера—Планка (см. прямое *Колмогорова уравнение*, *Диффузионный процесс*), начальные и граничные условия к к-рому выбираются в соответствии с конкретной решаемой задачей.

Лит.: [1] Эйнштейн А., Смолуховский М., Броуновское движение, пер. с нем., М.—Л., 1936; [2] Чандрасекар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] Кац М., Несколько вероятностных задач физики и математики, пер. с польск., М., 1967.

И. А. Квасников.

ЭЙРИ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y''-xy=0.$$

Впервые оно появилось в исследованиях Дж. Эйри по оптике [1]. Общее решение Э. у. выражается через *Бесселя функции* порядка $\pm 1/3$:

$$y(x)=c_1\sqrt{x}\,J_{1/3}\left(\frac{2}{3}ix^{3/2}\right)+c_2\sqrt{x}\,J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}ix^{3/2}\right).$$

Поскольку Э. у. играет важную роль в различных задачах физики, механики, в асимптотич. анализе, его решения выделены в особый класс специальных функций (см. *Эйри функции*).

Решения Э. у. в комплексной плоскости z

$$w''-zw=0$$

имеют следующие основные свойства.

1) Всякое решение Э. у. есть целая функция z и разлагается в степенной ряд

$$w(z)=w(0)\left[1-\frac{z^3}{2\cdot 3}+\frac{z^6}{(2\cdot 3)\cdot(5\cdot 6)}+\dots\right]+$$
$$+w'(0)\left[z+\frac{z^4}{3\cdot 4}+\frac{z^7}{(3\cdot 4)\cdot(6\cdot 7)}+\dots\right],$$

сходящийся при всех z.

2) Если $w(z)\not\equiv 0$ — решение Э. у., то функции $w(\omega z)$ и $w(\omega^2 z)$, где $\omega=e^{2\pi i/3}$, суть решения Э. у. и любые два из этих решений линейно независимы. Справедливо тождество:

$$w(z)+w(\omega z)+w(\omega^2 z)\equiv 0.$$

Лит.: [1] Airy G. B., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1838, v. 6, p. 379—402; [2] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [3] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979.

М. В. Федорюк.

ЭЙРИ ФУНКЦИИ — частные решения *Эйри уравнения*.

Первая Э. ф. (или просто Э. ф.) определяется равенством

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)dt.$$

При комплексных z

$$\mathrm{Ai}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \exp\left(zt-\frac{t^3}{3}\right)dt,$$

где $\gamma=(\infty e^{-2\pi i/3},\ 0]\cup[0,\ +\infty)$ — контур в комплексной плоскости t. Вторая Э. ф. определяется равенством

$$\mathrm{Bi}(z)=i\omega^2\,\mathrm{Ai}(\omega^2 z)-i\omega\,\mathrm{Ai}(\omega z),\ \omega=e^{2\pi i/3}.$$

Функции $\mathrm{Ai}(x)$, $\mathrm{Bi}(x)$ действительны при действительных x.

Другой набор Э. ф. ввел В. А. Фок:

$$v(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Ai}(z),$$
$$w_1(z)=2e^{i\pi/6}v(\omega z),$$
$$w_2(z)=2e^{-i\pi/6}v(\omega^{-1}z),$$

$v(z)$ в этом случае наз. функцией Эйри — Фока. Справедливы тождества:

$$v(z)=\frac{w_1(z)-w_2(z)}{2i},\quad \overline{w_1(z)}=w_2(\bar z).\qquad(1)$$

Любые две из Э. ф. $v(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$ линейно независимы.

Наиболее важна из Э. ф. $v(z)$ (или $\mathrm{Ai}(z)$). Ее асимптотич. поведение на действительной оси таково:

$$v(x)=\frac{1}{2}\frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)[1+O(x^{-3/2})],$$
$$x\longrightarrow+\infty,$$
$$v(x)=\frac{|x|^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)+O(|x|^{-3/2})\right],$$
$$x\longrightarrow-\infty,$$

так что $v(x)$ быстро убывает при $x>0$, $x\gg 1$ и сильно осциллирует при $x<0$, $|x|\gg 1$. Функции $w_1(x)$, $w_2(x)$ экспоненциально растут при $x\to+\infty$. Для Э. ф. справедливы асимптотич. разложения при комплексных z, $|z|\to\infty$:

$$v(z)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^\infty(-1)^n a_n z^{-3n/2}\ \text{при}\ |\arg z|\leqslant\pi-\varepsilon,\qquad(2)$$
$$w_1(z)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^\infty a_n z^{-3n/2}\ \text{при}\ \left|\arg z-\frac{\pi}{3}\right|\leqslant\pi-\varepsilon.$$

Для функции $w_2(z)$ справедливо асимптотич. разложение (2), но в секторе

$$\left|\arg\left(z+\frac{\pi}{3}\right)\right|\leqslant\pi-\varepsilon.$$

Здесь $\varepsilon\in(0,\ \pi)$ — любое, ветви $\sqrt{z}$, $\sqrt[4]{z}$ положительны на полуоси $(0,\ \infty)$, асимптотич. разложения равномерны по $\arg z$ и их можно почленно дифференцировать любое число раз. В оставшемся секторе $|\arg(-z)|<\varepsilon$ асимптотич. разложение функции $v(z)$ выражается через асимптотич. разложения функций $w_1(z)$, $w_2(z)$ с помощью (1), так что ее асимптотич. разложение имеет разный вид в разных секторах комплексной плоскости z. Этот факт был впервые установлен Дж. Стоксом [2] и наз. явлением Стокса.

Э. ф. возникают при исследовании интегралов от быстроосциллирующих функций:

$$I(\lambda,\ \alpha)=\int_a^b\exp[i\lambda S(x,\ \alpha)]\,f(x,\ \alpha)\,dx$$

при $\lambda>0$, $\lambda\to+\infty$. Здесь f, S — гладкие функции, S действительна, α — действительный параметр. Пусть при малых $\alpha\geqslant 0$ фаза S имеет две близкие невырожденные стационарные точки $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$, к-рые совпадают при $\alpha=0$, напр.,

$$S(x,\ \alpha)=\alpha x-x^3+O(x^4)\ \text{при}\ x\longrightarrow 0.$$

Тогда при малых $\alpha\geqslant 0$ и при $\lambda\to+\infty$ вклад в асимптотику интеграла от окрестности точки $x=0$ выражается через Э. ф. v и ее производную (см. [6]). Такого рода интегралы возникают при исследовании коротковолновых полей вблизи простой каустики (см. [7], [8]); Э. ф. возникли в связи с исследованием этой задачи [1].

Пусть рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y''+\lambda^2 q(x)\,y=0,\qquad(3)$$

где $q(x)$ — гладкая на отрезке $I=[a,\ b]$ действительнозначная функция, $\lambda>0$ — большой параметр. Нули

функции $q(x)$ наз. точками поворота (или точками перехода) уравнения (3). Пусть

$$a < x_0 < b, \quad q(x_0) = 0, \quad q'(x_0) \neq 0$$

(такая точка наз. простой),

$$q(x) \neq 0 \text{ при } x \in I,\ x \neq x_0,\ q'(x_0) > 0.$$

Положим

$$\xi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\, dt\right)^{2/3}, \ \operatorname{sgn}\xi(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0),$$

$$Y_0(x) = (\xi'(x))^{-1/2} \operatorname{Ai}(-\lambda^{2/3}\xi(x)),$$

$$Y_1(x) = (\xi'(x))^{-1/2} \operatorname{Bi}(-\lambda^{2/3}\xi(x)).$$

Уравнение (3) имеет линейно независимые решения $y_0(x)$, $y_1(x)$ такие, что при $\lambda \to +\infty$ равномерно по x

$$y_j(x) = Y_j(x)\,[1 + O(\lambda^{-1})], \quad a \leqslant x \leqslant x_0, \quad j = 0, 1,$$

$$y_0(x) = Y_0(x)\,[1 + O(\lambda^{-1})] + Y_1(x)\,O(\lambda^{-1}),$$

$$y_1(x) - Y_1(x)\,[1 + O(\lambda^{-1})] + Y_0(x)\,O(\lambda^{-1}),$$

$$x_0 \leqslant x \leqslant b.$$

Этот результат обобщен в следующих направлениях: получены асимптотич. ряды для решений; исследован случай $q = q(x, \lambda)$ (напр., $q(x, \lambda)$ разлагается в асимптотич. ряд $q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} q_n(x)$ при $\lambda \to +\infty$); исследована асимптотика решений вблизи кратных точек поворота. Другие обобщения относятся к уравнению

$$w'' + \lambda^2 q(z)\, w = 0, \qquad (4)$$

где $q(z)$ — аналитическая в области D комплексной плоскости z функция. Пусть l — максимальная связная компонента линии уровня

$$\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} \sqrt{q(t)}\, dt = 0,$$

выходящая из точки поворота z_0 и не содержащая других точек поворота; тогда l наз. линией Стокса. Если $q = -z$ (т. е. (4) есть уравнение Эйри), то линии Стокса — лучи $(-\infty, 0)$, $(0, e^{\pm i\pi/3})$. Аналогично, если z_0 — простая точка поворота уравнения (4), то из неё выходят три линии Стокса l_1, l_2, l_3 и угол между соседними линиями в точке z_0 равен $2\pi/3$. Пусть S_j — окрестность точки z_0, из к-рой удалена окрестность линии Стокса l_j, $j = 1, 2, 3$. При подходящей нумерации S_j уравнение (4) имеет три решения $\tilde{w}_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, такие, что

$$\tilde{w}_j(z) \sim (\xi(z))^{-1/2}\, v(-\lambda^{2/3}\omega^j \xi(z)), \quad \omega = e^{2\pi i/3},$$

при $\lambda \to +\infty$, $z \in S_j$.

Э. ф. возникают также при исследовании асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка и систем вблизи простейших точек поворота.

Лит.: [1] Airy G. B., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1838, v. 6, p. 379—402; [2] Stokes G. G., там же, 1857, v. 10, p. 105—28; [3] Фок В. А., Таблицы функций Эйри, М., 1946; [4] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979; [5] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [6] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977; [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; [8] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [9] Дородницын А. А., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 6, с. 3—96; [10] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [11] Федорюк М. В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1983.

М. В. Федорюк.

ЭЙТКЕНА СХЕМА — метод вычисления значения интерполяционного многочлена $L_n(x)$ по узлам x_0, x_1, . . ., x_n в точке x, основанный на последовательном применении формулы

$$L_k(x) = L_{(0,\,1,\,\ldots,\,k)}(x) =$$

$$= \frac{1}{x_k - x_0}\begin{vmatrix} L_{(0,\,1,\,\ldots,\,k-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{(1,\,2,\,\ldots,\,k)}(x) & x_k - x \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (*)$$

где $L_{(i,\,i+1,\,\ldots,\,m)}(x)$ — интерполяционный многочлен с узлами интерполяции x_i, x_{i+1}, . . ., x_m, в частности $L_{(i)}(x) = f(x_i)$ (см. *Интерполяционная формула*). Процесс вычисления по формуле (*) можно закончить, когда в значениях двух интерполяционных многочленов последовательных степеней совпадает требуемое количество знаков. Э. с. удобно использовать для интерполяции значений таблично заданной функции, перенумеровав узлы интерполяции в порядке возрастания $|x - x_i|$.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

М. К. Самарин.

ЭКВИАФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел *аффинной геометрии*, изучающий инварианты *аффинной унимодулярной группы* преобразований. Важнейшим фактом является существование в Э. г. площадей параллелограммов и объемов параллелепипедов.

Л. А. Сидоров.

ЭКВИАФФИННАЯ ПЛОСКОСТЬ — аффинная плоскость, в к-рой площадь параллелограмма является инвариантом относительно *аффинной унимодулярной группы* преобразований.

Л. А. Сидоров.

ЭКВИАФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ — аффинная связность на гладком многообразии M размерности n, обладающая ковариантно постоянной относительно нее отличной от нуля n-формой Φ на M. Форму $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ можно интерпретировать как объем параллелепипеда на векторах полей $X_1, \ldots, X_n$, и это условие означает существование объема, сохраняющегося при параллельном перенесении векторов. Если аффинная связность на M задана с помощью матрицы локальных форм связности

$$\omega^i = \Gamma^i_k(k)\, dx^k, \ \det|\Gamma^i_k| \neq 0,$$

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}(k)\, \omega^k,$$

и $\Phi = \lambda\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$, то указанное условие на Φ имеет вид

$$d\lambda = \lambda\omega^i_i.$$

Равносильно аффинная связность на M является Э. с. тогда и только тогда, когда ее группа голономии является эквиаффинной. В случае связности без кручения, условие равносильно симметричности тензора Риччи $R_{kl} = R^i_{kli}$, т. е. условию $R_{kl} = R_{lk}$. При наличии Э. с. расслоение реперов в касательных к M пространствах можно привести к подрасслоению, относительно к-рого $\omega^i_i = 0$.

Лит.: Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

Ю. Г. Лумисте.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — *бинарное отношение* $R \subseteq X \times X$ на множестве X, удовлетворяющее условиям:

1) xRx (рефлексивность),

2) $xRy \Rightarrow yRx$ (симметричность),

3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (транзитивность).

Если f отображает множество X во множество Y, то отношение $R = \{(x_1x_2) | fx_1 = fx_2\}$ является Э.

Для произвольного $y \in X$ множество $U \subseteq X$, состоящее из всех x, эквивалентных y, наз. классом эквивалентности y. Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают, т. е. любая Э. определяет разбиение множества X, и обратно.

В. Н. Гришин.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КАТЕГОРИЙ — расширение понятия изоморфизма категорий, обусловленное прежде всего наличием классов изоморфных объектов. Две категории $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ наз. эквивалентными, если существуют такие одноместные ковариантные функторы $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ и $G : \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$, что произведение FG естественно эквивалентно тождественному функтору $\mathrm{Id}\mathfrak{K}$, а произведение GF — функтору $\mathrm{Id}\mathfrak{L}$; другими словами, категории $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ эквивалентны, если существуют «почти» обратные друг другу функторы F и G. Категории эквивалентны тогда и только тогда, когда их скелеты изоморфны (см. *Скелет категории*).

Теорема двойственности Понтрягина устанавливает Э. к. абелевых групп и категории, двойственной категории топологических абелевых групп; категория булевых алгебр эквивалентна категории, двойственной категории булевых пространств; категория бинарных отношений над категорией множеств эквивалентна категории Клейсли для тройки, которую определяет функтор взятия множества подмножеств.

М. Ш. Цаленко.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — представления π_1 и π_2 группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в векторных пространствах E_1 и E_2 соответственно, для к-рых существует *сплетающий оператор*, являющийся изоморфизмом векторных пространств E_1 и E_2 (иногда такие представления наз. алгебраически эквивалентными); если π_1 и π_2 — представления в топологических векторных пространствах E_1 и E_2, то π_1 и π_2 наз. топологически эквивалентными, если существует сплетающий оператор для π_1 и π_2, являющийся изоморфизмом топологических векторных пространств E_1 и E_2. Термин «Э. п.» используется также для обозначения нек-рых других отношений эквивалентности: напр., представления наз. слабо эквивалентными, если существует замкнутый оператор с плотной областью определения и плотным образом, сплетающий эти представления; представления группы Ли в банаховых пространствах наз. инфинитезимально эквивалентными, если определяемые ими представления универсальной обёртывающей алгебры в пространствах аналитич. векторов являются алгебраич. Э. п. Два представления алгебры иногда наз. эквивалентными или изоморфными, если ядра этих представлений совпадают, а представления топологич. группы наз. эквивалентными, если определяемые ими представления той или иной *групповой алгебры* этой группы изоморфны.

А. И. Штерн.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ управляющих систем — преобразования, сохраняющие отношение эквивалентности (о. э.) *управляющих систем* (у. с.). Используются в задачах оптимизации, контроля, а также как средство характеризации (напр., аксиоматизации) определенных классов у. с.; вывод в формальных системах также можно рассматривать как Э. п. управляющих систем. В качестве о. э. обычно рассматривают функциональную эквивалентность, т. е. в этом случае эквивалентными являются у. с., имеющие одинаковые функции. Иногда по тем или иным соображениям рассматривают и другие о. э.

С Э. п. управляющих систем связан широкий круг задач, конкретная постановка к-рых варьируется в зависимости от особенностей рассматриваемого класса у. с. Основные из этих задач следующие.

1. Построение конечных (или рекурсивных) полных систем правил преобразований. Система правил Э. п. наз. полной для данного класса у. с., если с помощью конечного числа применений этих правил произвольную у. с. из рассматриваемого класса можно преобразовать в любую эквивалентную ей у. с. Решение этой задачи существенно зависит как от класса у. с. и о. э. в нем, так и от допустимых средств преобразований.

Наиболее распространены такие постановки задачи, когда средства решения ограничиваются следующим образом. Определяют понятие фрагмента (или подсхемы) у. с. и рассматривают преобразования у. с., состоящие в замене одних фрагментов у. с. другими. Таким образом, пара (α, β) фрагментов определяет множество преобразований произвольной у. с. γ, каждое из к-рых состоит в замене нек-рого вхождения фрагмента α в γ фрагментом β (если γ не содержит вхождений фрагмента α, то считается, что преобразование, определяемое парой (α, β), оставляет γ без изменения). Пара фрагментов (α, β) наз. правилом для данного класса у. с., если преобразования, определяемые этой парой, сохраняют о. э., то есть переводят произвольную у. с. из данного класса в эквивалентную ей. Нек-рые правила могут быть снабжены условиями их применимости, описывающими ситуации, в к-рых их разрешается применять, и гарантирующими сохранение о. э. Если правило (α, β) применимо к любому вхождению фрагмента α во всякой у. с., то оно наз. локальным. Нелокальность правила обычно означает, что его применимость определяется строением всей у. с. Понятие полноты системы правил часто определяют в следующей форме.

Говорят, что пара фрагментов (α, β) выводима из системы правил Σ, если фрагмент α с помощью правил из Σ можно преобразовать во фрагмент β (применение правил к фрагменту определяется так же, как и для у. с.). Система правил Σ наз. полной, если из нее выводимы все пары вида (α, β), где α и β — эквивалентные у. с. Обычно наряду с правилами рассматриваются схемы правил, содержащие те или иные параметры (свободные переменные). Каждая схема правил путем придания параметрам конкретных значений порождает в общем случае бесконечное множество правил, и наиболее распространенная постановка задачи состоит в том, чтобы для данного класса у. с. найти конечную полную систему схем правил.

2. Проблема полноты систем правил преобразований (как для индивидуальных систем, так и в алгоритмич. плане): по системе правил определить, является ли она полной или нет.

3. Построение эффективных процедур, порождающих о. э. Эта задача является ослаблением первой. В качестве средств решения допускаются произвольные алгоритмы, а также недетерминированные формально описанные процедуры.

4. Построение оптимизирующих (или вообще целенаправленных) процедур преобразований. Наиболее часто речь здесь идет о минимизации сложности схем у. с. либо о преобразовании у. с. в нек-рую канонич. форму, единственную в классе эквивалентности. В последнем случае решение задачи дает и разрешающую процедуру для о. э. Целью преобразований может быть также построение самокорректирующихся или других специальных у. с. С задачей оптимизации связан целый ряд задач метрического характера, например получение оценок сложности решений, доли оптимальных у. с. и т. п.

5. Проблема разрешения для задач первого типа, т. е. вопрос о существовании конечной или рекурсивной полной системы правил преобразований для произвольного класса у. с. из нек-рого бесконечного множества классов. Таким множеством классов у. с. может быть, напр., совокупность множеств всех термов однотипных алгебр или совокупность классов *схем из функциональных элементов* в различных базисах и т. п.

Особенности конкретных классов у. с. накладывают отпечаток на постановку и методы решения указанных задач. Ниже рассмотрены нек-рые примеры.

Э. п. в алгебрах. Каждой алгебре нек-рой сигнатуры соответствует бесконечный класс у. с.— множество всех термов (формул) данной сигнатуры (вместе с определяемыми ими функциями). Естественным о. э. на множестве термов является отношение функциональной эквивалентности: термы t_1 и t_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда они определяют одну и ту же функцию с точностью до несущественных аргументов. В этом случае обычно пишут: $t_1=t_2$ (или $t_1\equiv t_2$) и такие выражения наз. тождествами или равенствами данной алгебры. В качестве фрагментов термов рассматриваются подтермы, т. е. такие части, к-рые сами являются термами. Так как любая замена подтерма эквивалентным ему термом сохраняет о. э., то любое тождество алгебры (рассматриваемое как неупорядоченная пара термов) является локальным правилом. Всякое тождество алгебры можно рассматривать и как схему правил, параметрами к-рой являются переменные. Поэтому для алгебр задача 1 приобретает следующий вид: для данной алгебры найти конечную полную систему тождеств, рассматриваемых как схемы правил, т. е. в этом случае задача 1 Э. п. совпадает с задачей алгебраич. аксиоматизации алгебр.

Существование конечной полной системы тождеств является функциональным свойством алгебр, т. е. оно полностью определяется классом функций, выразимых в данной алгебре, и не зависит от сигнатуры. Любая функционально полная (конечная) алгебра имеет конечную полную систему тождеств; любая двухэлементная алгебра имеет конечную полную систему тождеств; существуют трехэлементные группоиды, конечные полугруппы и бесконечные группы, не имеющие конечных полных систем тождеств; любая конечная группа имеет конечную полную систему тождеств; для алгебр всех рекурсивных функций, а также для алгебры *регулярных событий* задача 1 решается отрицательно.

Э. п. схем из функциональных элементов. Понятие схемы из функциональных элементов (с. из ф. э.) можно рассматривать как обобщение понятия терма. Класс с. из ф. э. в нек-ром базисе реализует то же множество функций, что и алгебра с набором сигнатурных операций, соответствующим данному базису. Поэтому результаты, относящиеся к задаче Э. п. для алгебр, переносятся с небольшими модификациями на с. из ф. э. Фрагментами с. из ф. э. являются подсхемы, отличающиеся от с. из ф. э., быть может, только наличием нескольких выходов.

Э. п. контактных схем. Как и для термов, понятие фрагмента совпадает с понятием *контактной схемы* (к. с.). Требует уточнения только определение множества полюсов во вхождении фрагмента в схему. Две к. с., между полюсами к-рых установлено взаимно однозначное соответствие, считаются эквивалентными, если функция проводимости между произвольными полюсами одной схемы совпадает с функцией проводимости между соответствующими полюсами другой. Если пары эквивалентных к. с. рассматривать как схемы правил, параметрами к-рых являются буквы, приписанные ребрам схем, и считать, что каждая такая схема порождает правила только путем переименования этих букв, то для класса всех к. с. не существует конечной полной системы схем правил. В то же время для любого n для класса всех к. с., ребрам к-рых приписано не более n различных букв, конечная полная система таких схем правил существует. Если же допустить порождение конкретных правил из схем путем согласованной замены ребер с одинаковыми буквами произвольными к. с., то и для класса всех к. с. может быть построена конечная полная система правил.

Э. п. автоматов. Для *автоматов конечных* не существует конечной полной системы локальных правил преобразований. Однако с использованием нелокальных правил или схем правил, зависящих от специальных параметров, задача 1 для них может иметь положительное решение. С конечными автоматами связана алгебра регулярных событий, элементами к-рой являются множества слов, представимые (распознаваемые) конечными автоматами, а сигнатурными операциями служат объединение $x\vee y$, конкатенация xy и итерация x^*. Для этой алгебры не существует конечной полной системы тождеств. Однако подалгебра, состоящая из всех событий, содержащих пустое слово, имеет конечную полную систему тождеств.

Э. п. алгоритмов. Для полного класса алгоритмов и функционального отношения эквивалентности проблема Э. п. имеет отрицательное решение, поскольку отношение функциональной эквивалентности в этом случае не является рекурсивно перечислимым. Поэтому для получения положительных решений либо сужают класс алгоритмов, либо прибегают к модификации постановки проблемы. Для задания подклассов алгоритмов часто используют конечные автоматы, автоматы с магазинной или стэковой памятью, дискретные преобразователи различного вида, программы с ограничениями на топологическую структуру или на объем рабочей памяти и т. п. Иногда подклассы алгоритмов выделяются по функциональному признаку путем задания класса *вычислимых функций*. В последнем случае обычно задается определенное базисное множество функций, к-рое замыкается с помощью таких операций, как суперпозиция, рекурсия, ограниченное суммирование и т. п. Однако для выделяемых таким путем классов алгоритмов отношение функциональной эквивалентности оказывается разрешимым лишь в тех случаях, когда соответствующий класс функций достаточно беден.

Поэтому развиваются другие подходы, в частности подход, основанный на изучении схем алгоритмов. Схемы алгоритмов отличаются от алгоритмов в основном способом приписывания им функций. При этом отношение эквивалентности схем алгоритмов рассматривается как определенная аппроксимация отношения функциональной эквивалентности алгоритмов, так что решение проблемы Э. п. для схем алгоритмов можно считать приближенным решением этой проблемы для алгоритмов. Однако и здесь положительные решения удается получать лишь для достаточно грубых приближений, близких к конечным автоматам. Возможность получения положительных решений для класса всех алгоритмов появляется при ослаблении понятия полноты системы правил, напр. при отказе от требования конечного числа применений правил. Точнее, система правил наз. предельно полной, если, применяя ее правила, можно любые два эквивалентных алгоритма преобразовать в пределе, т. е. за бесконечное число шагов, в один (в общем случае бесконечный) вычислительный комплекс. Конечную предельно полную систему схем локальных правил оказалось возможным построить для функционально полного класса всюду определенных программ в нек-ром простом базисе. Реальный смысл предельной полноты состоит, в частности, в том, что предельно полные системы являются полными в обычном смысле для класса программ, вычисляющих конечные функции.

В связи с задачей оптимизации у. с. важную роль играют направленные преобразования, дающие в конечном счете оптимальные или близкие к ним у. с. В частности, большой интерес представляет изучение возможностей монотонных преобразований, к-рые на каждом шаге не повышают сложность у. с. в том или ином смысле.

Лит. [1] Янов Ю. И., «Mitt. Math. Ges. DDR», 1973, Н. 2—3, [2] его же, «Проблемы кибернетики», 1962, в 8. с 75—90; [3] Мурский В Л., «Докл АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 815—18, [4] его же, «Проблемы кибернетики», 1961, в. 5, с. 61—76; [5] его же, там же, 1965, в. 15, с. 101—16, [6] Янов Ю. И., там же, 1958, в 1, с. 75—127, 1980, в. 37, с. 215—38. *Ю. И. Янов.*

ЭКВИВАРИАНТНАЯ ОЦЕНКА — точечная статистическая оценка, сохраняющая структуру задачи статистич. оценивания относительно заданной группы взаимно однозначных преобразований выборочного пространства.

Пусть по реализации случайного вектора $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^k$, надлежит оценить неизвестное истинное значение параметра θ. Далее, пусть на $\mathfrak{X}$ действует группа взаимно однозначных преобразований $G=\{g\}$ такая, что

$$g\mathfrak{X}=\mathfrak{X} \text{ и } g\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}=\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \text{ для всех } g\in G.$$

Группа G в свою очередь порождает на параметрич. пространстве Θ так наз. индуцированную группу преобразований $\overline{G}=\{\overline{g}\}$, элементы к-рой определяются по формуле

$$P_\theta(B)=P_{\overline{g}\theta}(gB) \text{ для всех } g\in G,\ B\in\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}.$$

Предполагается, что $\overline{G}$ является группой взаимно однозначных преобразований на Θ таких, что

$$\overline{g}\Theta=\Theta \text{ для всех } \overline{g}\in\overline{G}.$$

В этих условиях про точечную оценку $\hat\theta=\hat\theta(X)$ параметра θ говорят, что она является Э. о. или сохраняет структуру задачи статистич. оценивания параметра θ относительно группы G, если

$$\hat\theta(gX)=\overline{g}\hat\theta(X) \text{ для всех } g\in G.$$

Наиболее интересные результаты в теории эквивариантной оценки получены в предположении, что функция потерь является инвариантной относительно этой же группы G.

Лит.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ , М , 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд , М., 1979. *М. С. Никулин.*

ЭКВИВАРИАНТНЫЕ КОГОМОЛОГИИ — когомологии, учитывающие действие нек-рой группы. Подробнее, Э. к. в категории G-пространств (т. е. топологич. пространств, на к-рых задано непрерывное действие группы G) и их эквивариантных отображений — последовательность контравариантных факторов H^n_G (принимающих значение в категории абелевых групп) и их естественных преобразований

$$H^n_G(L)\longrightarrow H^{n+1}_G(K, L),\ L\subset K,$$

обладающих следующими свойствами: а) эквивариантно гомотопные отображения пар индуцируют одинаковые отображения групп H^n_G; б) включения вида

$$(K, K\cap L)\subset(K\cup L, L)$$

индуцируют изоморфизм

$$H^n_G(K\cup L, L)=H^n_G(K, K\cap L);$$

в) для всякой пары (K, L) точна когомологич. последовательность

$$\ldots H^n_G(K, L)\longrightarrow H^n_G(K)\longrightarrow H^n_G(L)\longrightarrow H^{n+1}_G(K, L)\longrightarrow.$$

Пусть π: $E_G\longrightarrow B_G$ — универсальное G-расслоение и K_G — пространство ассоциированного с π универсального расслоения со слоем K (т. е. факторпространство $E_G\times K$ при действии G, заданном как $g(l, k)=(lg^{-1}, gk)$. Тогда функторы $H^n_G(K)=H^n(K_G)$ дают эквивариантную теорию когомологий; здесь H^n — произвольная теория когомологий.

Для любой фиксированной группы G набор групп $H^n_G(G/F)$ вместе с индуцированными всевозможными включениями $F_1\subset F_2$ подгрупп G гомоморфизмами наз. обычно системой коэффициентов для H^*_G-теории. В нек-рых случаях функторы H^n_G однозначно определяются своей системой коэффициентов (напр., когда G конечна и $H^n_G(G/F)=0$ при $n>0$).

Лит. [1] Bredon G , Equivariant cohomology theories, B.— N. Y., 1967, [2] Уи Сян, Когомологическая теория топологических групп преобразований, пер. с англ., М., 1979. *Е. Г. Скляренко.*

ЭКВИДИСТАНТА множества M в метрическом пространстве R — граница *трубчатой окрестности* M в R, образованной шарами одинакового радиуса d. Если M — дифференцируемое подмногообразие M^k в римановом пространстве V^n, то под Э. понимают (в более узком смысле) множество концов равных отрезков, отложенных от точек M^k на геодезических, перпендикулярных к M^k в соответствующих точках. Если V^n — полное, то Э.— образ *экспоненциального отображения* векторов постоянной длины d нормального расслоения M^k в V^n. Если V^n— неполное, то Э. существует лишь при достаточно малых d.

Примеры Э. 1) Э. на плоскости Лобачевского (гиперцикл) — ортогональная траектория пучка прямых, перпендикулярных к нек-рой прямой (к базисной прямой, или базе). Э. состоит из двух ветвей, расположенных по разные стороны от базисной прямой и вогнутых в сторону базы. Кривизна Э. постоянна. 2) Э. плоскости в пространстве Лобачевского является поверхность постоянной положительной внешней кривизны. *Д. Д. Соколов.*

ЭКОНОМЕТРИЯ, эконометрика, — направление в применении математич. методов в экономич. исследованиях, имеющее целью количественное описание закономерностей и взаимосвязей экономич. объектов и процессов на основе теоретич. представлений об их важнейших, определяющих факторах с помощью математич. моделей и статистич. методов обработки данных. Для Э. характерно предположение о проявлении изучаемых закономерностей в измеряемых и используемых в экономич. статистике и прогнозировании показателях в неявном виде, на фоне действия второстепенных, случайных факторов и побочных явлений и, как следствие, установка на выявление теоретически предсказываемых зависимостей с одновременным выбором конкретной формы их выражения.

Отдельные попытки количественного описания взаимосвязей между экономич. показателями предпринимались уже в 19 в. Развиваясь в рамках буржуазной экономич. науки, эконометрич. направление использует ее теоретич. положения, что ограничивает возможности научного анализа и предсказания социально-экономич. процессов при помощи эконометрич. моделей. В то же время практич. потребности изучения явлений на всех уровнях экономики — от народнохозяйственного до отдельных фирм — обусловили разработку и многократное применение набора типовых формулировок экономико-математич. моделей и математич. приемов, позволяющих выявлять и анализировать количественные взаимосвязи, проявляющиеся в статистич. данных, и обосновывать их, предполагая выполненными нек-рые гипотезы, относящиеся к допустимым данным и изучаемым зависимостям.

Выявление и исследование количественных закономерностей и взаимосвязей в социалистическом народном хозяйстве подчинено задачам развития экономич.

теории и потребностям планирования и управления. В СССР и социалистич. странах сложилось более общее по своим задачам и применяемым методам (по сравнению с эконометрич. направлением в буржуазной экономич. науке) научное направление, изучающее количественные закономерности и взаимосвязи в экономике на основе марксистско-ленинской политич. экономии и теории управления народным хозяйством и его звеньями, объединяемое в литературе термином «экономико-математические методы». Оно включило в себя не только методы построения количественно-определенных моделей по статистич. данным, но и всю проблематику, связанную с подготовкой и обоснованием оптимальных экономич. решений, анализом условий, необходимых для их эффективной реализации, моделированием процессов функционирования сложных социально-экономич. систем, в к-рых одновременно происходят материально-вещественные и информационные взаимодействия, вырабатываются и выполняются планы и управленческие решения различных уровней, в том числе создающие условия для активного коренного изменения достаточно устойчиво в прошлом проявлявшихся зависимостей и тенденций.

Э. использует понятия, постановки и методы решения задач из многих разделов математики, в том числе математич. статистики, теории вероятностей, математич. программирования, численные методы решения задач линейной алгебры, систем нелинейных уравнений и нахождения неподвижных точек отображений, во многих случаях имеет дело с обратными и некорректными задачами в стохастич. постановках. В то же время Э. применяет математич. методы не только для определения зависимостей, задаваемых в общепринятой для статистич. исследований форме [напр., в виде линейного по оцениваемым параметрам уравнения регрессии с неслучайными факторами аргументами], но и к более сложным математич. моделям, формализующим типовые для экономич. исследований задачи. К числу типовых экономико-математич. моделей, конструируемых и изучаемых с помощью эконометрич. методов, относятся: производственные функции, выражающие устойчивые, закономерные взаимосвязи между затратами и результатами производственной деятельности экономич. систем различных уровней; факторные модели производительности труда; системы функций спроса групп потребителей и целевые функции потребительского предпочтения; статические и динамические межотраслевые модели производства, распределения и потребления продукции; частные модели межотраслевого и межрегионального распределения и перераспределения ресурсов; модели общего экономического равновесия; модели внешнеторгового обмена для группы стран и др.

Сталкиваясь с практич. необходимостью расширить набор исходных гипотез о случайных факторах, проявляющихся в статистич. данных, Э. формулирует нетрадиционные для прикладного статистич. анализа постановки задач и вырабатывает методы их решения. Так, в ряде эконометрич. моделей независимые переменные и параметры рассматриваются не как детерминированные, а как случайные величины, включаются распределенные во времени взаимозависимости переменных, используются непосредственно не наблюдаемые, латентные переменные и учитываются априорные ограничения на оцениваемые параметры, допускается изменение изучаемых зависимостей во времени или в пространстве факторов и ищутся моменты таких изменений или множества значений факторов, на к-рых они происходят. Наряду с обобщениями постановок задач выявления зависимостей, для Э. характерно теоретич. и эмпирич. [напр., методом Монте-Карло] исследование свойств и сравнительной эффективности различных методов решения задач одного класса, а также стремление формулировать систему рекомендаций, используя к-рую можно последовательно проверять и уточнять гипотезы, относящиеся к моделям изучаемых явлений и объектов.

Развитие экономико-математич. направления, использующего богатый арсенал методов прикладной математики и возможности использования средств вычислительной техники для сбора, хранения и обработки данных, приводит к более четкому определению классов моделей, методов их разработки и анализа, объединяемых общностью принимаемых методич. положений. Так, в частности, в чрезвычайно широком по своим задачам эконометрич. подходе к разработке экономико-математич. моделей принято выделять класс собственно эконометрич. моделей, имеющих следующую обобщенную, конкретизируемую во многих направлениях формулировку.

Рассматривается совокупность переменных — экономич. показателей — X_i, $i=1, \ldots, n$, каждой из к-рых в промежутке времени t соответствует ее измеряемое значение X_i^t. Предполагается, что эти переменные удовлетворяют системе соотношений

$$F_k(X^t, X^{t-1}, \ldots, X^{t-\tau}; t; a; \varepsilon_k^t)=0, \quad k=1, \ldots, m, \quad (1)$$

в к-рой X^t — вектор состояния изучаемой системы в период t с координатами X_i^t, $i=1, \ldots, n$, F_k — функция своих аргументов, задаваемая с точностью до значений параметров, представленных вектором a, ε_k^t — реализация случайной величины ξ_k^t, $k=1, \ldots, m$, такой, что условный закон распределения вероятностей для случайных величин ξ_k^t, $k=1, \ldots, m$, при фиксированных значениях векторов $\varepsilon^{t-1}=\{\varepsilon_k^{t-1}\}$, $\varepsilon^{t-2}=\{\varepsilon_k^{t-2}\}$, $\ldots$, обозначаемый

$$\mathsf{P}(\varepsilon^t \mid \varepsilon^{t-1}, \ldots; b), \quad (2)$$

предполагается известным с точностью до значений нек-рого вектора параметров b.

Для эконометрич. модели (1)—(2) рассматриваются следующие основные задачи:

по известной совокупности данных $X^{T-Q}, \ldots, X^T$ определить значения параметров a и b так, чтобы эти данные в нек-ром, специально оговоренном смысле, хорошо удовлетворяли соотношениям (1);

построить условный прогноз значений m переменных X_j^t, $j=i_1, \ldots, i_m$, при заданных значениях других $(n-m)$ переменных X_i^t, $i=1, \ldots, n$; $i \neq i_1, \ldots, i_m$, для $t=T+1, \ldots, T+\tau$;

сравнить между собой несколько альтернативных моделей вида (1)—(2), отличающихся выбранными функциями F_k и законом $\mathsf{P}(\varepsilon^t|\varepsilon^{t-1}, \ldots; b)$, при определенных значениях их параметров и определить, имеются ли среди них модели, существенно лучше (хуже) соответствующие имеющимся данным и качественным соображениям о природе выявляемых зависимостей.

Эти качественные формулировки задач оценивания параметров эконометрич. моделей, построения с их помощью прогнозов и сравнения таких моделей между собой доопределяются в Э. так, что для некоторых классов функций F_k и законов P оказывается возможным предложить методы решения и, как правило, реализовать их в виде соответствующих программ для ЭВМ.

В практич. исследованиях эконометрич. методы применяются не только при разработке собственно эконометрич. моделей, но и в процессе создания более общих и разносторонних моделей, использующих также нормативные, оптимизационные и имитационные подходы к моделированию и преодолевающих таким образом присущую эконометрическому подходу описательность.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Математические методы организации и планирования производства, Л., 1939; [2] его же, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., 1959; [3] Тинтнер Г., Введение в эконометрию, пер. с нем., М., 1965; [4] Михалевский Б. Н., Система моделей среднесрочного народнохозяйственного планирования, М., 1972; [5] Эконометрические модели и прогнозы, Новосиб., 1975; [6] Колек Ю., Шуян И., Эконометрические модели в социалистических странах, пер. со словац., М., 1978; [7] Фишер Ф., Проблема идентификации в эконометрии, пер. с англ., М., 1978; [8] Пирогов Г. Г., Федоровский Ю. П., Проблемы структурного оценивания в эконометрии, М., 1979; [9] Джонстон Дж., Эконометрические методы, пер. с англ., М., 1980; [10] Зельднер А., Байесовские методы в эконометрии, пер. с англ., М., 1980; [11] Пуарье Д., Эконометрия структурных изменений, пер. с англ., М., 1981; [12] Винн Р., Холден К., Введение в прикладной эконометрический анализ, пер. с англ., М., 1981; [13] Драймз Ф., Распределенные лаги. Проблемы выбора и оценивания модели, пер. с англ., М., 1982; [14] Межотраслевые эконометрические модели, Новосиб., 1983. *Л. В. Канторович, Э. Б. Ершов.*

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С АВТОМАТАМИ — способ получения информации о внутренней структуре автоматов по их поведению, причем такой информации, к-рую можно получить из внешних экспериментов (т. е. таких экспериментов, когда на вход автомата подаются входные слова, обозревается соответствующая последовательность выходных слов и на основе этих наблюдений делаются выводы).

При помощи Э. с а. можно искать подходы к решению следующих задач.

1) Известно, что автомат находится в одном из состояний, наз. начальным. Требуется определить это состояние автомата.

2) Построение эксперимента, переводящего автомат из любого состояния в нек-рое наперед заданное (установочная задача).

3) Проверка автомата на исправность. Путем эксперимента требуется узнать, правильно ли функционирует заданный автомат.

4) Диагностика автомата. Требуется узнать не только то, исправен ли автомат, но также и то, какая именно неисправность имеет место.

5) Задача распознавания автомата из заданного класса (расшифровка). Известно, что «черный ящик» совпадает с одним из автоматов данного множества. Требуется узнать, с каким именно автоматом имеется совпадение.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть нек-рый класс инициальных автоматов со входным алфавитом X и выходным алфавитом Y. Пусть, далее, X^* — совокупность всех слов в алфавите X, $\alpha \in X^*$ и $A \subset \mathfrak{A}$. Под экспериментом с автоматом A понимается множество $[\alpha, A]$ всех таких пар вида (x, y), что $x \in \alpha$, а y — слово, в к-рое A перерабатывает x.

Классификация экспериментов. Обычно рассматриваются следующие типы экспериментов.

1. Простой безусловный эксперимент — множество $[\alpha, A]$, где α состоит из единственного слова. В процессе экспериментирования на вход автомата подается единственный элемент α, в результате на выходе автомата появляется нек-рое слово из Y^*.

2. Простой условный эксперимент — множество $[\alpha, A]$, где α состоит из единственного слова $X=(X(1), \ldots, X(\tau))$, причём для любого $j \in \{1, 2, \ldots, \tau\}$ значения $X(j)$ зависят от $[\alpha', A]$, где $\alpha'=(X(1), \ldots, X(j-1))$. Таким образом, в процессе Э. с а. каждая последующая буква входного слова формируется в зависимости от полученного ранее выходного слова.

3. Кратный безусловный эксперимент — обобщение простого безусловного эксперимента на случай, когда множество $[\alpha, A]$ таково, что α состоит более чем из одного слова. Обычно предполагается, что в процессе проведения данного эксперимента либо имеется более чем один экземпляр автомата A, либо автомат обладает возможностью возврата в начальное состояние.

4. Кратный условный эксперимент — обобщение простого условного эксперимента на случай, когда множество $[\alpha, A]$ таково, что α состоит более чем из одного слова:

$$\alpha = \{(X_1(1), \ldots, X_1(\tau_1)), \ldots, (X_s(1), \ldots, X_s(\tau_s))\}.$$

При этом различают две возможности: а) для любых $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, \tau_i\}$ значение $X_i(j)$ зависит только от $[\alpha', A]$, где α' состоит из единственного слова $(X_i(1), \ldots, X_i(j-1))$; б) для любых $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, \tau_i\}$ значение $X_i(j)$ зависит от $[\alpha'', A]$, где α'' — множество, состоящее из наборов $\{(X_1(1), \ldots, X_1(t_j^1)), \ldots, (X_s(1), \ldots, X_s(t_j^s))\}$, а индекс t_j^i для $i \in \{1, \ldots, s\}$ совпадает с τ_i, если $j-1 > \tau_i$, и совпадает с $j-1$, если $j-1 \leqslant \tau_i$.

Меры сложности экспериментов. Это нек-рые числовые характеристики, к-рые оценивают степень сложности эксперимента. Для кратного эксперимента обычными мерами сложности являются: высота эксперимента — количество символов наибольшего входного слова; кратность — количество входных слов; длина — общее количество символов во всех входных словах. Мерой сложности простого эксперимента считается его длина (количество символов использованного входного слова).

Некоторые результаты. Автомат Мура A с r состояниями, m входными и p выходными символами наз. (r, m, p)-автоматом. Справедлива теорема об отличимости состояний простым экспериментом: если A есть (r, m, p)-автомат и все его состояния попарно отличимы, то отличимость любых двух состояний может быть установлена простым экспериментом длины $r-1$ и граница $r-1$ не может быть понижена (см. [4]).

Задачу определения начального состояния автомата можно решать с помощью простого безусловного эксперимента длины λ, где

$$3^{\frac{r}{6}(1+\varepsilon_1)} \leqslant \lambda < 3^{\frac{r}{6}(1+\varepsilon_2)} \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \longrightarrow 0 \text{ при } r \longrightarrow \infty).$$

Установочную задачу для автомата с r состояниями, k из к-рых являются допустимыми, всегда можно решать с помощью простого безусловного эксперимента длины λ, где $\lambda \leqslant (2r-k)(k-1)/2$, и эта граница не может быть улучшена.

Указанные выше оценки, как правило, достигаются лишь для небольшой доли автоматов. Установлено (см. [4]), что задачу определения начального состояния для почти всех (r, m, p)-автоматов с двумя допустимыми состояниями решают простым безусловным экспериментом длины λ, где $\lambda \leqslant \log_m \cdot \log_p r + 4$, а установочную задачу для почти всех (r, m, p)-автоматов можно решать с помощью простого безусловного эксперимента длины λ, где $\lambda < 5 \log_p r$.

Не существует алгоритма, к-рый позволил бы расшифровать инициальные автоматы Мили, для к-рых ничего не известно о числе состояний. Однако оказывается, что большую часть таких автоматов все-таки можно расшифровать.

Э. с а. используются и в качестве средств контроля работы автоматов. Разработан единый подход к задачам контроля автоматов, позволяющий указать принципиальные способы их решения. Построен эффективный алгоритм нахождения всех тупиковых кратных экспериментов для различных автоматов (см. [2]).

Лит.: [1] Мур Э. Ф., в кн.: Автоматы, пер. с англ., М., 1956, с. 179—210; [2] Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 133, с. 263—72; [3] Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., Конечные автоматы. (Поведение и синтез), М., 1970, [4] Хиббард Т. Н., «Кибернетич. сб.», 1966, в. 2, с. 7—23. *Х. А. Мадатян.*

ЭКСПОНЕНТА — то же, что *экспоненциальная функция*.

ЭКСПОНЕНТА группы — наименьшее число n такое, что в данной группе выполняется тождество $x^n=1$. *О. А. Иванова.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ — слабейшая топология на множестве $\exp X=2^X$ всех замкнутых подмножеств топологич. пространства X, в к-рой множества $\exp A$ открыты (в $\exp X$) для открытых A и замкнуты (в $\exp X$) для замкнутых A. Если $A\subset X$, то через $\exp A$ обозначается множество всех замкнутых подмножеств множества A.

Пример. Топология метрич. пространства замкнутых ограниченных подмножеств метрич. пространства, наделенное *Хаусдорфова метрикой*. Общее определение: пусть $U_1, \ldots, U_n$ — произвольный конечный набор непустых открытых в X множеств; базу Э. т. образуют множества вида

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle=\left\{\hat{F}\in\exp X: F\subset\bigcup_1^n U_i \,\&\, F\cap U_i\neq\varnothing,\ i=1, \ldots, n\right\},$$

где $\hat{F}$ обозначает точку $\exp X$, соответствующую данному замкнутому множеству $F\subset X$. Пространство $\exp X$, наделенное Э. т., наз. **экспонентой пространства** X. Если X есть T_1-пространство, то $\exp X$ также T_1-пространство. Если X регулярно, то $\exp X$ хаусдорфово. Если X нормально, то $\exp X$ вполне регулярно. Для Э. т. нормальность эквивалентна ее бикомпактности. Если пространство X бикомпактно, то $\exp X$ также бикомпактно. Если X — диадический бикомпакт и вес X не превосходит $\aleph_1$, то $\exp X$ — также диадический бикомпакт. С другой стороны, экспонента любого бикомпакта, вес к-рого больше или равен $\aleph_2$, не является диадическим бикомпактом. Экспонента континуума Пеано является абсолютным ретрактом в классе метрич. компактов и, следовательно, непрерывным образом отрезка. Однако экспонента несчетного веса не является непрерывным образом тихоновского куба I^τ. Пусть $f: X\to Y$ — замкнутое отображение пространства X на пространство Y. Отображение $\exp f: \exp X\to\exp Y$, действующее по правилу $(\exp f)(\hat{F})=\widehat{f(F)}$, наз. **экспонентой отображения**. Если $f: X\to Y$ — непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y, то оно открыто тогда и только тогда, когда открыто отображение $\exp f$. Функтор $\exp X$, действующий из категории бикомпактов и непрерывных отображений в ту же самую категорию, является ковариантным функтором экспоненциального типа, если морфизму ставится экспонента этого морфизма $\exp f$.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1—2, М., 1966—69. *Б. А. Ефимов.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, показательная функция,— функция $y=e^x$; обозначается также $y=\exp x$. Иногда Э. ф. наз. и функцию $y=a^x$ при любом основании $a>0$. *БСЭ-3.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ФУНКЦИЯ — целая функция $f(z)$, удовлетворяющая условию:

$$|f(z)|<Ae^{a|z|},\ |z|<\infty,\ A<\infty,\ a<\infty.$$

Если $f(z)$ представить рядом

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}z^k,$$

то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}<\infty.$$

Простейшие примеры Э. т. ф.: e^{cz}, $\sin\alpha z$, $\cos\beta z$, $\sum_{k=1}^{n}A_k e^{a_k z}$.

Э. т. ф. имеет интегральное представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\gamma(t)\,e^{zt}\,dt,$$

где $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$ (см. *Бореля преобразование*), а C — замкнутый контур, охватывающий все особенности $\gamma(t)$.

Лит.: [1] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956. *А. Ф. Леонтьев.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение касательного пространства многообразия M в M, определяемое заданной на M *связностью* и являющееся далеко идущим обобщением обычной экспоненциальной функции, рассматриваемой как отображение прямой в себя.

1) Пусть M — многообразие класса C^∞ с аффинной связностью, p — нек-рая точка из M, M_p — касательное пространство к многообразию M в точке p и X — ненулевой вектор из M_p, $t\to\gamma_X(t)$ — геодезическая, проходящая через точку p в направлении вектора X. Существует такая открытая окрестность N_0 точки 0 в M_p и такая открытая окрестность N_p точки p в M, что отображение $X\to\gamma_X(1)$ является диффеоморфизмом N_0 на N_p. Это отображение называется Э. о. в точке p и обозначается Exp. Окрестность N_0 наз. **нормальной**, если: 1) отображение Exp диффеоморфно отображает N_0 на N_p, 2) если $X\in N_0$ и $0\leqslant t\leqslant 1$, то $tX\in N_0$. В этом случае N_p — нормальная окрестность точки p в многообразии M. Каждая точка $p\in M$ обладает выпуклой нормальной окрестностью N_p точки p: любые две точки такой окрестности можно соединить в точности одним геодезич. отрезком, содержащимся в N_p. Если M — полное риманово многообразие, то Exp есть сюръективное отображение M_p на M.

2) Пусть G — группа Ли с единицей e и g — соответствующая алгебра Ли, состоящая из касательных векторов к G в точке e. Для каждого вектора $X\in g$ существует единственный аналитич. гомоморфизм θ группы $\mathbb{R}$ в G такой, что касательный вектор к $\theta(\mathbb{R})$ в точке e совпадает с X. Отображение $X\to\exp X=\theta(1)$ и наз. Э. о. алгебры g в группу G. Существует такая открытая окрестность N_0 точки 0 в g и такая открытая окрестность N_e точки e в G, что $\exp$ является аналитич. диффеоморфизмом окрестности N_0 на N_e. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — нек-рый базис алгебры g. Отображение $\exp(x_1X_1+\ldots+x_nX_n)\to(x_1, \ldots, x_n)$ есть система координат на N_e, эти координаты наз. **каноническими**.

К понятию Э. о. для группы Ли G можно подойти и с другой точки зрения. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех аффинных связностей на G, инвариантных относительно группы левых сдвигов, и множеством билинейных функций $\alpha: g\times g\to g$. Оказывается, что Э. о. $\exp$ алгебры g в группу G совпадают с отображением Exp касательного пространства g к многообразию G в точке e в это многообразие относительно левоинвариантной аффинной связности, отвечающей любой кососимметричной билинейной функции α.

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964. *А. С. Феденко.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *показательное распределение*.

ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ, экстраполяция, функции — продолжение функции за пределы ее области определения, при к-ром продолженная функция (как правило, аналитическая) принадлежит заданному классу. Э. функций обычно производится с помощью формул, в к-рых использована информация о поведении функции в нек-ром конечном наборе точек (**узлах интерполяции**), принадлежащих ее области определения.

Понятие *интерполирования* функций употребляется в качестве противопоставления понятию Э. функций (в узком смысле понимания этого термина), когда конструктивно восстанавливаются (быть может, приближенно) значения функций в областях их определений.

Пример. Если заданы значения функции $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ в узлах $x_k\in[a, b]$, $k=0, 1, \ldots, n$, то интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ (см. *Лагранжа интерполяционная формула*), будучи определен на всей числовой оси $\mathbb{R}$, является, в частности, Э. функции f вне отрезка $[a, b]$ в классе многочленов степени не выше n.

Иногда при Э. функций используется не вся ее область определения, а только ее часть, т. е. фактически производится Э. значений сужения заданной функции на указанной части. В этом случае экстраполяционные формулы дают, в частности, значения (вообще говоря, приближенные) функции в соответствующих точках ее области определения. Именно таким образом часто поступают при решении практич. задач, когда вне рассматриваемой части области определения нек-рой функции отсутствует достаточная информация, необходимая для вычисления ее значений. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЭКСТРЕМАЛЕЙ ПОЛЕ — область $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, \ldots, y_n$, покрытая без пересечений n-параметрич. семейством экстремалей функционала

$$J=\int_{(A)}^{(B)} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx, \qquad (1)$$

где A и B — начальные и конечные точки, через к-рые проходят экстремали семейства.

Различают случаи собственного (или общего) и центрального Э. п. Собственное Э. п. соответствует случаю, когда экстремали семейства трансверсальны нек-рой поверхности

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)=0, \qquad (2)$$

т. е. на этой поверхности выполняются условия трансверсальности

$$\frac{F-\sum_{i=1}^n y_i' F_{y_i'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y_1'}}{\varphi_{y_1}}=\ldots=\frac{F_{y_n'}}{\varphi_{y_n}}. \qquad (3)$$

Т. о., для собственного Э. п. точка A (или B) в (1) принадлежит поверхности (2) и в ней выполняются условия (3).

Центральное Э. п. соответствует случаю, когда экстремали семейства исходят из одной точки, находящейся вне поля, напр. из общей начальной точки A.

Наклоном Э. п. наз. вектор-функцию $u(x, y)=(u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y))$, относящую каждой точке $(x, y)=(x, y_1, \ldots, y_n)$ поля вектор $y'(x)=(y_1'(x), \ldots, y_n'(x))$.

Для задач с подвижными концами, когда $y(x)$ есть экстремаль, дифференциал интеграла (1) имеет вид

$$dJ=\left[\left(F-\sum_{i=1}^n y_i' F_{y_i'}\right)dx+\sum_{i=1}^n F_{y_i'}\,dy_i\right]_{x_1}^{x_2}, \qquad (4)$$

где дифференциалы dx и dy вычисляются вдоль линий смещения подвижных концов $A(x_1, y(x_1))$ и $B(x_2, y(x_2))$, а y' — угловой коэффициент касательной к экстремали $y(x)$.

Выражение в квадратных скобках в (4) можно записать в виде

$$-H\,dx+\sum_{i=1}^n p_i\,dy_i, \qquad (5)$$

где

$$H=-F(x, y, u(x, y))+\sum_{i=1}^n u_i(x, y)\,F_{y_i'}(x, y, u(x, y)),$$
$$p_i=F_{y_i'}(x, y, u(x, y)).$$

В Э. п. выражение (5) является полным дифференциалом нек-рой функции от $x, y_1, \ldots, y_n$, поскольку имеют место равенства

$$-\frac{\partial H}{\partial y_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial y_k}=\frac{\partial p_k}{\partial y_i}, \quad i, k=1, \ldots, n.$$

Эта функция с точностью до постоянного слагаемого есть криволинейный интеграл

$$\int_C -H(x, y, p)\,dx+\sum_{i=1}^n p_i\,dy_i, \qquad (6)$$

он наз. инвариантным интегралом Гильберта. В (6) через C обозначена произвольная кривая $y(x)$, лежащая в Э. п. и соединяющая точки A и B. Термин «инвариантный» подчеркивает тот факт, что интеграл (6) не зависит от выбора кривой C, а определяется только заданными граничными точками.

Интеграл Гильберта (6) можно записать в эквивалентном виде

$$\int_C\left[F(x, y, u)-\sum_{i=1}^n u_i F_{y_i'}(x, y, u(x, y))\right]dx+$$
$$+\sum_{i=1}^n F_{y_i'}(x, y, u)\,dy_i=$$
$$=\int_C\left(F(x, y, u)+\sum_{i=1}^n\left(\frac{dy_i}{dx}-u_i\right)F_{y_i'}(x, y, u)\right)dx. \qquad (7)$$

Если в качестве кривой сравнения C взять экстремаль E, то $\frac{dy_i}{dx}=u_i$, и для интеграла Гильберта (7) получается выражение

$$\int_E F(x, y, u(x, y))\,dx, \qquad (8)$$

что совпадает с геодезич. расстоянием между точками A и B, определяемым как значение функционала (1) на экстремали, соединяющей точки A и B.

Указанное свойство Э. п. и инвариантного интеграла Гильберта лежит в основе теории достаточных условий экстремума, развитой К. Вейерштрассом (K. Weierstrass). Оно позволяет при исследовании на знак приращения функционала

$$\Delta J=J(C)-J(E) \qquad (9)$$

выразить значение функционала $J(E)$, взятого вдоль экстремали (в предположении, что она окружена Э. п.) через инвариантный интеграл Гильберта по кривой сравнения C, соединяющей те же точки. Тем самым приращение функционала (9) представляется в виде криволинейного интеграла по кривой сравнения C:

$$\Delta J=\int_C\left(F(x, y, y')-F(x, y, u)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^n (y_i'-u_i)F_{y_i'}(x, y, u)\right)dx=$$
$$=\int_C \mathcal{E}(x, y, u, y')\,dx. \qquad (10)$$

Подинтегральная функция $\mathcal{E}(x, y, u, y')$ в (10) наз. $\mathcal{E}$-функцией Вейерштрасса. Неотрицательность (неположительность) этой функции в любой точке Э. п. при произвольных конечных значениях y' достаточна для того, чтобы экстремаль E доставляла сильный минимум (максимум) функционалу (1) на множестве всех кривых сравнения, соединяющих точки A и B.

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955. *И. Б. Вапнярский.*

ЭКСТРЕМАЛЕЙ СЕМЕЙСТВО — совокупность решений *Эйлера уравнений*, зависящая от n произвольных постоянных, заполняющая без взаимных пересечений нек-рую часть $(n+1)$-мерного пространства. Здесь n —

число неизвестных функций $y_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, от к-рых зависит минимизируемый функционал

$$J(y_1, \ldots, y_n)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx,$$

а уравнение Эйлера понимается в векторном смысле, то есть представляет собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0, \quad i=1, \ldots, n.$$

Ниже приводятся два способа построения Э. с.

Пусть рассматривается пучок экстремалей, выходящих из заданной точки $M_0(x_0, y_0)$ в $(n+1)$-мерном пространстве. Если экстремали пучка взаимно не пересекаются в нек-рой окрестности точки M_0 (кроме точки M_0), то они в этой окрестности образуют семейство экстремалей (центральное Э. с.).

Другой способ построения экстремалей состоит в построении множества экстремалей, трансверсальных к поверхности S_0, заданной в $(n+1)$-мерном пространстве уравнением

$$\varphi(x, y)=0.$$

Если в каждой точке этой поверхности условия трансверсальности

$$\frac{F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y_1'}}{\varphi_{y_1}}=\ldots=\frac{F_{y_n'}}{\varphi_{y_n}},$$

представляющие совокупность n условий, определяют значения n производных y_i', $i=1, \ldots, n$, то, принимая эти значения за начальные значения производных, можно через точку поверхности S_0 провести экстремаль, к-рая пересекается с поверхностью S_0 трансверсально. Если в окрестности этой поверхности указанные экстремали взаимно не пересекаются, то они образуют Э. с. (общее, или собственное Э. с.).

Построение Э. с. является исходным пунктом при рассмотрении вопросов, связанных с построением поля *экстремалей*. Э. с. является полем экстремалей, если существует семейство поверхностей, зависящих от одного параметра и пересекающихся трансверсально с экстремалями семейства.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957. *И. Б. Вапнярский.*

ЭКСТРЕМАЛЬ — гладкое решение *Эйлера уравнения*, являющегося необходимым условием экстремума в задаче вариационного исчисления.

В случае простейшей задачи вариационного исчисления, в к-рой требуется найти экстремум функционала

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx \qquad (1)$$

среди всех кривых $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2, \qquad (2)$$

уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

т. е. представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка, к-рое в развернутом виде можно записать следующим образом

$$F_{y'y'}y''+F_{y'y}y'+F_{y'x}-F_y=0. \qquad (3)$$

Если экстремум в задаче (1), (2) достигается на гладкой кривой $y(x)$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, то $y(x)$ является Э., т. е. решением уравнения Эйлера (3) с начальным условием $y(x_1)=y_1$.

При $F_{y'y'}\neq 0$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, уравнение Эйлера имеет только гладкие решения (если $F(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируемая функция). Если же $F_{y'y'}$ может обращаться в нуль, то среди решений уравнения Эйлера могут быть и кусочно гладкие кривые. Пусть кусочно гладкая кривая $y(x)$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, доставляет экстремум в задаче (1), (2). Тогда всякий ее гладкий участок является Э., а в угловых точках $(c, y(c))$ должны выполняться необходимые условия Вейерштрасса — Эрдмана

$$F_{y'}|_{y'(c-0)}=F_{y'}|_{y'(c+0)},$$
$$(F-y'F_{y'})|_{y'(c-0)}=(F-y'F_{y'})|_{y'(c+0)}.$$

Кусочно гладкая кривая, состоящая из кусков экстремалей и удовлетворяющая в угловых точках условиям Вейерштрасса — Эрдмана, наз. ломаной Э. Если экстремум в задаче (1), (2) достигается на кусочно гладкой кривой, то эта кривая есть ломаная Э. Впрочем, часто для краткости термин «ломаная» опускают и говорят об Э. функционала (1), имея в виду ломаную Э.

В случае функционала $J(y)$, зависящего от нескольких функций, т. е. когда y в (1) есть n-мерный вектор $y=(y_1, \ldots, y_n)$, уравнение Эйлера представляет собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0, \ i=1, \ldots, n, \qquad (4)$$

и определение Э. (ломаной Э.) дается аналогичным образом.

В более общем случае задачи на условный экстремум (см. *Изопериметрическая задача*, *Больца задача*, *Лагранжа задача*, *Майера задача*) Э. определяется с помощью правила множителей.

Пусть, напр., кусочно гладкая кривая $y(x)=(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ доставляет экстремум в задаче Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} &J(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx,\\ &f\colon \mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_\beta(x, y, y')=0, \ \beta=1, \ldots, m<n,\\ &\varphi_\beta\colon \mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\psi_k(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2))=0,$$
$$k=1, \ldots, p\leqslant 2n+1. \qquad (7)$$

Тогда, согласно правилу множителей, существует такая постоянная λ_0 (вообще говоря, отличная от нуля) и такие множители $\lambda_i(x)$, $i=1, \ldots, m$, что вектор-функция $y(x)$ является обычной (безусловной) Э. для функционала

$$I(y, x)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \lambda)\,dx, \qquad (8)$$

где

$$F(x, y, y', \lambda)=\lambda_0 f+\lambda_1(x)\varphi_1+\ldots+\lambda_m\varphi_m.$$

Система уравнений Эйлера для задачи на безусловный экстремум функционала (8)

$$F_{\lambda_\beta}-\frac{d}{dx}F_{\lambda_\beta'}=\varphi_\beta(x, y, y')=0, \ \beta=1, \ldots, m, \qquad (9)$$

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0, \ i=1, \ldots, n, \qquad (10)$$

включает в себя m уравнений (9), совпадающих с условиями связи (6), а также n дополнительных уравнений (10), позволяющих совместно с (9) определить неизвестные функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ (при заданных начальных условиях).

Гладкое (кусочно гладкое) решение системы уравнений Эйлера (9)—(10), записанной для задачи на безусловный экстремум функционала (8), наз. Э. (ломаной Э.) задачи (5)—(6) на условный экстремум.

Свойство кривой быть Э. является не единственным необходимым условием для того, чтобы эта кривая действительно доставляла экстремум функционалу. Это объясняется тем, что уравнение Эйлера выводится как необходимое условие равенства нулю 1-й вариации функционала, так что остается еще проблема исследования на знак 2-й вариации функционала. Дальнейшее исследование Э. осуществляется с помощью необходимых условий Лежандра, Вейерштрасса и Якоби, а также достаточных условий, основанных на построении поля Э.

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ДЛИНА семейства кривых — понятие, являющееся, наряду с понятием модуля семейства кривых, общей формой определения конформных инвариантов и лежащее в основе *экстремальной метрики метода.*

Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R. Для Γ определена проблема модуля, если имеется непустой класс P *конформно-инвариантных метрик* $\rho(z)|dz|$, заданных на R, для к-рых $\rho(z)$ интегрируема с квадратом в плоскости z для каждого локального униформизирующего параметра $z(=x+iy)$, причем

$$A_\rho(R)=\iint_R \rho^2(z)\,dx\,dy \text{ и } L_\rho(\Gamma)=\inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma \rho(z)\,|dz|$$

не равны одновременно 0 или ∞ (каждый из указанных интегралов понимается как интеграл Лебега). В этом случае величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in P} A_\rho(R)/[L_\rho(\Gamma)]^2$$

наз. модулем семейства кривых Γ. Величина, обратная к $M(\Gamma)$, наз. экстремальной длиной семейства кривых Γ.

Проблему модуля для семейства кривых часто определяют и следующим образом. Пусть P_L — такой подкласс P, что для $\rho\in P_L$ и $\gamma\in\Gamma$

$$\int_\gamma \rho(z)\,|dz|\geqslant 1.$$

Если множество P_L не пусто, то под модулем семейства Γ понимают величину

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R).$$

Если же P не пусто, а P_L пусто, то под $M(\Gamma)$ понимают ∞. Ниже имеется в виду последнее определение модуля.

Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R, для к-рого определена проблема модуля, и $M(\Gamma)\neq\infty$. Тогда каждая метрика из P_L является допустимой метрикой проблемы модуля для семейства Γ. Если в P_L существует метрика $\rho^*(z)|dz|$, для к-рой

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R),$$

то эта метрика наз. экстремальной метрикой проблемы модуля для семейства кривых Γ.

Основным из свойств модулей является конформная инвариантность.

Теорема 1. Пусть римановы поверхности R и R' конформно эквивалентны, f — однолистное конформное отображение поверхности R на R'. Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых, заданных на R, Γ' — семейство образов кривых семейства Γ при отображении f. Пусть для Γ определена проблема модуля и пусть модуль семейства Γ равен $M(\Gamma)$. Тогда проблема модуля определена и для семейства Γ' и $M(\Gamma')=M(\Gamma)$.

Следующая теорема показывает, что если экстремальная метрика существует, то она, по существу, единственна.

Теорема 2. Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R и для Γ определена проблема модуля, и пусть $M(\Gamma)\neq\infty$. Если $\rho_1^*(z)|dz|$ и $\rho_2^*(z)|dz|$ — экстремальные метрики для этой проблемы модуля, то всюду на R, за исключением разве лишь подмножества R меры нуль, $\rho_2^*(z)=\rho_1^*(z)$.

Примеры модулей семейств кривых.

1) Пусть D — прямоугольник со сторонами a и b, и Γ (соответственно, Γ') — семейство локально спрямляемых кривых в D, соединяющих стороны длины a (соответственно, стороны длины b). Тогда

$$M(\Gamma)=a/b,\quad M(\Gamma')=b/a.$$

2) Пусть D — круговое кольцо: $r<|z|<1$. Пусть Γ — класс спрямляемых жордановых кривых в D, разделяющих граничные компоненты D, а Γ' — класс локально спрямляемых кривых в D, соединяющих граничные компоненты D. Тогда $M(\Gamma)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$, а $M(\Gamma')=2\pi/\ln 1/r$. В обоих случаях $M(\Gamma)$ и $M(\Gamma')$ — характеристические конформные инварианты области D. Поэтому $M(\Gamma)$ наз. модулем области D для класса кривых Γ, $M(\Gamma')$ — модулем области D для класса кривых Γ'.

Известна следующая связь между модулями семейств кривых при квазиконформном отображении. Пусть Γ — семейство кривых в нек-рой области D, Γ' — образ семейства Γ при K— квазиконформном отображении области D. Тогда для модулей $M(\Gamma)$ и $M(\Gamma')$ семейств Γ и Γ' справедливы неравенства:

$$K^{-1}M(\Gamma)\leqslant M(\Gamma')\leqslant KM(\Gamma).$$

Важным для приложений оказывается обобщение понятия модуля для нескольких семейств кривых. Пусть $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ — семейства локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R (как правило, $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ — соответствующие гомотопич. классы кривых). Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — неотрицательные действительные числа, не все равные нулю. Пусть $P(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ — класс конформно-инвариантных метрик $\rho(z)|dz|$ на R, для к-рых $\rho^2(z)$ интегрируема для каждого локального параметра $z=x+iy$ и

$$\int_{\gamma_j}\rho(z)\,|dz|\geqslant\alpha_j \text{ для } \gamma_j\in\Gamma_j,\ j=1,\ldots,n.$$

Если множество $P(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ не пусто, то говорят, что определена проблема модуля $\mathcal{P}(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ для семейств кривых $\{\Gamma_j\}$ и чисел $\{\alpha_j\}$. В этом случае величина

$$M(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})=\inf_{\rho\in P(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})}\iint_R\rho^2(z)\,dx\,dy$$

наз. модулем этой проблемы. Если в $P(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ существует метрика $\rho^*(z)|dz|$, для к-рой

$$\iint_R[\rho^*(z)]^2\,dx\,dy=M(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\}),$$

то она наз. экстремальной метрикой проблемы модуля $\mathcal{P}(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$.

Модуль, определенный таким образом, также представляет собой конформный инвариант. Для таких модулей справедлива теорема единственности, аналогичная теореме 2. Доказано существование экстремальной метрики проблемы модуля $\mathcal{P}(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ при достаточно общих предположениях. Приведенное выше определение распространяется на случай семейств кривых

$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, рассматриваемых на поверхности R', получаемой удалением из R конечного числа отмеченных точек $a_1, \ldots, a_N$, где семейства $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, $k \leqslant n$, состоят из замкнутых жордановых кривых, гомотопных на R' окружностям достаточно малых радиусов с центрами в соответствующих из отмеченных точек. Такая экстремально-метрическая проблема в сочетании с понятием приведенного модуля односвязной области D относительно точки $a \in D$ (см. *Модуль кольца*) связана с теорией *емкости* плоских множеств.

Известны и другие обобщения и модификации понятия модуля семейства кривых (см. [6]—[10]). Понятие модуля семейства кривых распространено на случай пространственных кривых и поверхностей. При этом установлены теоремы единственности и ряд свойств этих модулей, в частности получен аналог неравенств (1) для K-квазиконформных отображений в пространстве (см. [9], [10]).

Лит.: [1] Ahlfors L. V., Beurling A., «Acta math.», 1950, v. 83, p. 101—29; [2] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [3] Альфорс Л., Лекции по квазиконформным отображениям, пер. с англ., М., 1969; [4] Jenkins J. A., «Ann. Math.», 1957, v. 66, № 3, p. 440—53; [5] Кузьмина Г. В., Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы, Л., 1980; [6] Hersch J., «Comment. math. helv.», 1955, v. 29, fasc. 4, p. 301—37; [7] Тамразов П. М., «Докл. АН УССР», 1966, № 1, с. 51—54; [8] Fuglede B., «Acta math.», 1957, v. 98, p. 171—219; [9] Шабат Б. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 130, № 6, с. 1210—13; [10] Сычев А. В., Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосиб., 1983.

Г. В. Кузьмина.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА — задача отыскания экстремумов функций или экстремумов функционалов, заключающаяся в выборе параметров или функций (управления) из условий минимума или максимума целевой функции или функционала при разного рода (фазовых, дифференциальных, интегральных и др.), накладываемых на них. См. также *Вариационное исчисление*, *Математическое программирование*, *Оптимальное управление*.

ЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, в к-ром замыкание каждого открытого множества является открытым множеством. В регулярном Э. н. п. не существует сходящихся последовательностей без повторяющихся членов. Поэтому среди метрич. пространств только дискретные экстремально несвязны. Тем не менее Э. н. п. достаточно широко распространены: каждое тихоновское пространство можно представить как образ при *совершенном непривод имом отображении* нек-рого экстремально несвязного тихоновского пространства (см. *Абсолют* топологического пространства). Это означает, что экстремальная несвязность не сохраняется совершенными отображениями. Однако, образ Э. н. п. при непрерывном открытом отображении является Э. н. п.

Все регулярные Э. н. п. нульмерны, однако, в отличие от нульмерности, экстремальная несвязность не наследуется произвольными подпространствами, даже замкнутыми. Но всюду плотное подпространство Э. н. п. всегда само экстремально несвязно. Экстремальная несвязность плохо сочетается с топологич. однородностью. В частности, каждый экстремально несвязный топологически однородный бикомпакт конечен. Тем не менее существует недискретное Э. н. п., являющееся топологич. группой (при континуум-гипотезе — даже счетной), где каждый бикомпакт, лежащий в них, непременно конечен. Поэтому каждая экстремально несвязная топологич. группа, пространство к-рой является k-пространством, дискретна.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ МЕТРИКИ МЕТОД — один из основных методов геометрич. теории функций, тесно связанный с дифференциальной геометрией и топологией. В основе Э. м. м. лежат соотношения между длинами кривых, принадлежащих определенным гомотопич. классам, и площади заполняемой ими области. При этом указанные кривые и площади вычисляются в специальной метрике, соответствующей особенностям исследуемой экстремальной задачи (об экстремальных задачах геометрич. теории функций см. *Однолистная функция*).

Имеются различные формы Э. м. м. Первоначальной формой этого метода был метод полос Грётш а. Он представляет собой существенное усовершенствование рассуждений, связывающих длину и площадь, оперирующее с характеристич. конформными инвариантами двусвязных областей и четырехугольников (см. *Грётша принцип*). Используя свой метод полос, Х. Грётш (H. Grötzsch) получил ряд классич. результатов в теории конформных и квазиконформных отображений (см., напр., *Грётша теоремы*).

Существенными моментами в развитии Э. м. м. послужили: введение Л. Альфорсом (L. Ahlfors) и А. Бёрлингом (A. Beurling) понятия *экстремальной длины* семейства кривых, предложенное Дж. Дженкинсом (J. Jenkins) обобщение понятия модуля семейства кривых на случай нескольких семейств кривых и доказательство единственности экстремальной метрики проблемы модуля в этом случае.

В 1939—41 О. Тайхмюллер (O. Teichmüller) высказал (без доказательства) общий принцип, состоящий в утверждении, что решения экстремальных задач геометрич. теории функций определенным образом связаны с нек-рыми *квадратичными дифференциалами*. Одним из самых значительных результатов в развитии Э. м. м. явилась «общая теорема о коэффициентах» Дженкинса (см. *Дженкинса теорема* и [2]). Эта теорема содержит в качестве частных приложений почти все известные элементарные результаты об однолистных функциях и приводит к решению многих сложных экстремальных задач (см., напр., *Однолистная функция*). Результат о единственности в теореме Дженкинса был усилен и установлен аналог этой теоремы для квадратичных дифференциалов без кратных полюсов (см. [3]). Таким путем было получено решение нек-рых экстремальных задач для областей с двумя и тремя отмеченными граничными компонентами с полным анализом множества всех экстремальных отображений (см. [4], [5]). Решение экстремальных задач при помощи «общей теоремы о коэффициентах» представляет собой одну из форм Э. м. м., используемую во многих исследованиях.

Широкое распространение получила форма Э. м. м., известная под названием метода модулей. Этот метод основывается на установлении прямой связи исследуемой экстремальной задачи с нек-рой проблемой модуля для одного или нескольких семейств кривых (см. *Экстремальная длина* семейства кривых) и решении этой экстремально-метрической проблемы. Как правило, экстремальной метрикой указанной проблемы модуля оказывается метрика $|Q(z)|^{1/2}|dz|$, где $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал, полюсы к-рого определяются условиями данной задачи. Непосредственное рассмотрение проблем модуля для семейств кривых привело к окончательным результатам в ряде вопросов, связанных с задачами об экстремальном разбиении данной области на семейство односвязных и двусвязных областей, ассоциированных с определенными гомотопич. классами кривых. Постановка последних задач восходит к исследованиям М. А. Лаврентьева и Г. М. Голузина (см. [5]).

Успешным оказалось сочетание Э. м. м. с вариационными методами и *симметризации методом*. Так, одновременное использование метода модулей и *внутренних вариаций метода* позволило доказать существование экстремальной метрики проблемы модуля для семейств

кривых при весьма общих предположениях. Сочетание Э. м. м. и метода симметризации в ряде случаев дает возможность установить, что в расположении полюсов ассоциированного квадратичного дифференциала имеется соответствующая симметрия, и тем самым свести рассматриваемую задачу к более простому случаю.

Имеются и другие формы Э. м. м. Одна из них состоит в решении экстремальных задач как для однолистных, так и для неоднолистных отображений (в последнем случае принцип Тайхмюллера неприменим) при помощи непосредственного использования выражений для площадей образов при рассматриваемом отображении нек-рых подмножеств данной области, интерпретируемых как площади исходных множеств в нек-рой новой метрике, через площади самих этих множеств. Такая форма Э. м. м. оказалась особенно эффективной при решении задач о размахе многосвязной области (см. [7]). Развитием того же подхода служит «специальная теорема о коэффициентах» Дженкинса (см. *Дженкинса теорема*).

В частных случаях эта теорема сводится к утверждению *площадей принципа*.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [3] Тамразов П. М., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 1, с. 59—71; т. 73, № 1, с. 97—125; [4] его же, «Тр. Томского гос. ун-та», 1969, т. 210, в. 6, с. 111—18; [5] Кузьмина Г. В., Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы, Л., 1980; [6] Jenkins J. A., «Ann. Math.», 1957, v. 66, № 3, p. 440—53; [7] его же, «Illinois J. Math.», 1963, v. 7, № 1, p. 104—17; [8] Тамразов П. М., «Матем. сб.», 1965, т. 66, № 4, с. 502—24; [9] Сычев А. В., Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосиб., 1983; [10] Rodin B., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 80, № 4, p. 587—606. *Г. В. Кузьмина.*

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ; *численные методы решения* — методы вычислительной математики, применяемые для поиска экстремумов (максимумов или минимумов) функций и функционалов.

Для численного решения экстремальных задач, рассматриваемых в бесконечномерных функциональных пространствах (напр., задач оптимального управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями с частными производными) могут быть использованы после соответствующего обобщения многие методы математич. программирования, разработанные для задач минимизации или максимизации функций конечного числа переменных. При этом в конкретных задачах весьма важен правильный выбор подходящего функционального пространства, в к-ром следует ее рассматривать. При выборе такого пространства обычно учитываются физич. соображения, свойства допустимых управлений, свойства решений соответствующих начально-краевых задач при фиксированном управлении и т. п.

Напр., задачу оптимального управления, заключающуюся в минимизации функционала

$$J(u)=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),\ u(t),\ t)\,dt+F(x(T)) \qquad (1)$$

при условиях

$$\dot{x}=f(x,\ u(t),\ t),\ t_0\leqslant t\leqslant T;\ x(t_0)=x_0, \qquad (2)$$

$$u=u(t)\in V(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T, \qquad (3)$$

часто бывает удобно рассматривать в функциональном пространстве $L_2^r[t_0,\ T]$. Здесь $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, $u=(u^1,\ \ldots,\ u^r)$, $f=(f^1,\ \ldots,\ f^n)$, $f^i(x,u,t)$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, $F(x)$ — заданные функции; t_0, T — известные моменты времени, $t_0<T$; x_0 — заданная начальная точка; $V(t)$ при каждом $t\in[t_0,\ T]$ — заданное множество из евклидова пространства E^r; $L_2^r[t_0,\ T]$ — гильбертово пространство r-мерных вектор-функций $u=u(t)=(u^1(t),\ \ldots,\ u^r(t))$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, где $u^i(t)$ — функция, интегрируемая на $[t_0,\ T]$ по Лебегу вместе со своим квадратом ($L_2^1[t_0,\ T]=L_2[t_0,\ T]$), причем скалярное произведение двух функций $u(t)$, $v(t)$, в этом пространстве равно

$$\langle u,\ v\rangle_{L_2^r}=\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r}u^i(t)\,v^i(t)\,dt,$$

норма

$$\|u\|_{L_2^r}=\left(\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r}|u^i(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

При определенной гладкости функций $f^i(x,\ u,\ t)$, $F(x)$ приращение функционала (1) можно представить в виде

$$J(u+h)-J(u)=-\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial H(u)}{\partial u^i}h^i(t)\,dt+R=$$

$$=\left\langle-\frac{\partial H(u)}{\partial u},\ h\right\rangle_{L_2^r}+R,\ R=o\left(\|h\|_{L_2^r}\right), \qquad (4)$$

где

$$H(x,\ \psi,\ u,\ t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(x,\ u,\ t)-f^0(x,\ u,\ t), \qquad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\left(\frac{\partial H}{\partial u^1},\ \ldots,\ \frac{\partial H}{\partial u^r}\right),\ \frac{\partial H(u)}{\partial u}=\frac{\partial H}{\partial u}\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t;\,u)\\ \psi=\psi(t;\,u)}},$$

$x=x(t;\ u)$ — решение задачи (2) при $u=u(t)$, $\psi=\psi(t;\ u)$ — решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t;\,u)}},\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (6)$$

$$\psi_i(T)=-\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{x=x(T;\,u)}. \qquad (7)$$

Из формулы (4) следует, что функционал (1) дифференцируем в пространстве $L_2^r[t_0,\ T]$ и его градиентом является вектор-функция

$$J'(u)=-\frac{\partial H(u)}{\partial u}\in L_2^r[t_0,\ T]. \qquad (8)$$

Таким образом, для решения задачи (1)—(3) могут быть применены различные методы, использующие градиент функционала. При $V(t)=E^r$ здесь можно применить градиентный метод

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\alpha_k\frac{\partial H(u_k)}{\partial u},\ k=0,\ 1,\ \ldots$$

Если $V(t)=\{u=(u^1,\ \ldots,\ u^r):\alpha_i(t)\leqslant u^i\leqslant\beta_i(t),\ i=1,\ \ldots,\ r\}$, где $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ — заданные функции из $L_2[t_0,\ T]$, то возможно применение метода проекции градиента

$$u_{k+1}(t)=P\left(u_k(t)+\alpha_k\frac{\partial H(u_k)}{\partial u}\right),\ k=0,\ 1,\ \ldots,$$

где

$$P(w)=(w^1(t),\ \ldots,\ w^r(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$

$$w^i(t)=\begin{cases}\alpha_i(t)\text{ при }v^i(t)\leqslant\alpha_i(t),\\ v^i(t)\text{ при }\alpha_i(t)\leqslant v^i(t)\leqslant\beta_i(t),\\ \beta_i(t)\text{ при }v^i(t)>\beta_i(t),\ i=1,\ \ldots,\ r.\end{cases}$$

Параметр $\alpha_k>0$ может выбираться из условия $J(u_{k+1})<J(u_k)$. Аналогично могут быть расписаны для задачи (1)—(3) методы условного градиента, сопряженных градиентов и др. (см. [4]—[6], [11]). Если задача (1)—(3) рассматривается при дополнительных ограничениях

$$x(t;\ u)\in G(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T, \qquad (9)$$

где $G(t)$ — заданное множество из E^n, то для учета ограничений (9) может быть использован *штрафных функций метод*. Напр., если

$$G(t)=\{x\in E^n: g_i(x,\ t)\leqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ m,\ g_i(x,\ t)=0,\ i=m+1,\ \ldots,\ s\},$$

то в качестве штрафной функции можно взять

$$P(u)=\int_{t_0}^{T}\Big(\sum_{i=1}^{m}(\max\{g_i(x(t;u),t);\,0)^p+$$
$$+\sum_{i=m+1}^{s}|g_i(x(t;u),t)|^p\Big)\,dt,\quad p\geqslant 1,$$

и задачу (1)—(3), (9) заменить задачей минимизации функционала $\Phi_k(u)=J(u)+A_kP(u)$ при условиях (2), (3), где A_k — штрафной коэффициент, $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=+\infty$.

Другие методы решения задачи (1)—(3), (9) основаны на принципе максимума Понтрягина, на динамич. программировании (см. *Понтрягина принцип максимума*, *Динамическое программирование*, *Вариационное исчисление*; численные методы).

Для решения задачи минимизации квадратичного функционала на решениях систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений или линейных уравнений с частными производными, может быть применен метод моментов (см. [3], [8]). Ниже описан этот метод применительно к задаче минимизации функционала

$$J(u)=|x(T;u)-y|^2_{E^n},\qquad(10)$$

где $x=x(t;u)$ — решение задачи

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u(t)+f(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0,\qquad(11)$$

управления $u=u(t)\in L_2^r[t_0,\ T]$ таковы, что

$$\|u\|^2_{L_2^r}=\int_{t_0}^{T}|u(t)|^2_{E^r}\,dt\leqslant R^2;\qquad(12)$$

здесь $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ — заданные матрицы порядка $n\times n$, $n\times r$, $n\times 1$ соответственно, имеющие кусочно непрерывные элементы на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant T$; $0<R\leqslant\infty$, $x_0,\ y\in E^n$ — заданные точки; $|x|^2_{E^m}=\langle x,x\rangle_{E^m}$, $\langle x,\ y\rangle_{E^m}=\sum_{i=1}^{m}x^iy^i$ — скалярное произведение в E^m. Из правила множителей Лагранжа следует, что управление $u=u(t)$ является оптимальным в задаче (10)—(12) тогда и только тогда, когда существует число $\gamma\geqslant 0$ (*Лагранжа множитель* для ограничения (12)) такое, что

$$J'(u)+\gamma u=0,\qquad(13)$$
$$\gamma\left(\|u\|_{L_2^r}-R\right)=0,\quad\|u\|_{L_2^r}\leqslant R;\qquad(14)$$

при $R=\infty$ здесь $\gamma=0$. Из формул (5)—(8) следует, что градиент $J'(u)$ функционала (10) в $L_2^r[t_0,\ T]$ имеет вид

$$J'(u)=B^T(t)\psi(t;u),\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$

где $\psi=\psi(t;u)$ — решение задачи

$$\dot{\psi}=-A^T(t)\psi,\ t_0\leqslant t\leqslant T,\qquad(15)$$
$$\psi(T)=2(x(T;u)-y);\qquad(16)$$

A^T, B^T — матрицы, полученные транспонированием матриц A, B соответственно. Условие (13) тогда примет вид

$$B^T(t)\psi(t;u)+\gamma u(t)=0,\ t_0\leqslant t\leqslant T.\qquad(17)$$

Условие (16) равносильно соотношениям

$$\int_{t_0}^{T}\langle u(t),\ B^T(t)p_k(t)\rangle_{E^r}\,dt-\frac{1}{2}\langle\psi(T),\ p_k(T)\rangle_{E^n}=a_k,$$
$$k=1,\ \ldots,\ n,\qquad(18)$$

где

$$a_k=\langle y,\ p_k(T)\rangle_{E^n}-\langle x_0,\ p_k(t_0)\rangle_{E^n}-$$
$$-\int_{t_0}^{T}\langle f(t),\ p_k(t)\rangle_{E^r}\,dt,$$

$p_k(t)$ — решение системы (15) при условии $p_k(T)=e_k=(0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ — единичный вектор.

Таким образом, для определения оптимального управления $u=u(t)$ в задаче (10)—(12) нужно решить систему (14), (15), (17), (18) относительно функций $u(t)$, $\psi(t)$ и числа $\gamma\geqslant 0$. При $R=\infty$ здесь $\gamma=0$, $\psi(t)=0$ и условие (18) приведет к проблеме моментов (см. *Моментов проблема*): найти функцию $u=u(t)$, зная ее моменты

$$\int_{t_0}^{T}\langle u(t),\ \varphi_k(t)\rangle\,dt=a_k$$

по системе $\varphi_k(t)=B^T(t)p_k(t)$, $k=1,\ \ldots,\ n$.

Система (14), (15), (17), (18) представляет собой обобщенную проблему моментов для задачи (10)—(12) при $0<R<\infty$ (см. [3], [8]).

Любое решение $\psi(t)$ системы (15) однозначно представимо в виде

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{n}\psi_kp_k(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T.\qquad(19)$$

При любом фиксированном $\gamma\geqslant 0$ существует решение $\psi(t;\gamma)$, $u(t;\gamma)$ системы (15), (17), (18), причем среди всех решений найдется единственное такое, что $u(t;\gamma)$ имеет вид

$$u(t;\gamma)=\sum_{k=1}^{n}u_kB^T(t)p_k(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T.\qquad(20)$$

Для определения $\psi(t;\gamma)$, $u(t;\gamma)$ нужно подставить выражения (19), (20) в (17), (18). В результате получится система линейных алгебраических уравнений относительно $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n,\ u_1,\ \ldots,\ u_n$, из к-рой однозначно определяются величины $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n$, а величины $u_1,\ \ldots,\ u_n$ в случае линейной зависимости системы $\{B^T(t)p_k(t),\ k=1,\ \ldots,\ n\}$ определяются неоднозначно. При практич. решении задачи (10)—(12) целесообразно сначала положить $\gamma=0$, $\psi(t)=0$ и из (18) определить $u(t;\ 0)$ вида (20). Затем следует проверить условие $\|u(t;\ 0)\|_{L_2^r}\leqslant R$. Если это неравенство выполняется, то $u(t;\ 0)$ — оптимальное управление задачи (10)—(12), имеющее минимальную норму среди всех оптимальных управлений; множество всех оптимальных управлений в этом случае исчерпывается управлениями вида

$$u(t)=u(t;\ 0)+v(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T,$$

где $v(t)$ принадлежит ортогональному дополнению в $L_2^r[t_0,\ T]$ линейной оболочки систем функций

$$\{B^T(t)p_k(t),\quad k=1,\ \ldots,\ n\},$$
$$\|v(t)\|^2_{L_2^r}\leqslant R^2-\|u(t;\ 0)\|^2_{L_2^r}.$$

Если $\|u(t;\ 0\|_{L_2^r}>R$, то из (17), (18) при $\gamma>0$ определяют решения $\psi(t,\ \gamma)$, $u(t,\ \gamma)$ вида (19), (20) и находят γ из уравнения

$$\|u(t;\ \gamma)\|_{L_2^r}=R,\quad\gamma>0;\qquad(21)$$

функция $\|u(t;\ \gamma)\|_{L_2^r}$ переменной γ непрерывна, строго монотонно убывает при $\gamma>0$, $\lim\limits_{\gamma\to+\infty}\|u(t;0\|_{L_2^r}=0$, поэтому из (21) однозначно определяется искомое $\gamma=\gamma_*$. Управление $u(t;\gamma_*)$ будет оптимальным для задачи (10)—(12); при $\|u(t;\ 0\|_{L_2^r}>R$ эта задача других оптимальных управлений не имеет.

Метод моментов применим также для решения задачи быстродействия для систем (11) и других линейных систем (см. [3], [8]).

Упомянутые выше методы широко используются и для численного решения задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными.

Численная реализация многих методов решения задач оптимального управления предполагает использование тех или иных методов приближенного решения

встречающихся начально-краевых задач (см. *Краевая задача*; численные методы решения для уравнений с частными производными), приближенного вычисления интегралов (см. *Интегрирование численное*). В результате исходная задача оптимального управления заменяется нек-рым семейством аппроксимирующих задач, зависящим от нек-рых параметров (напр., от шагов разностной сетки). Вопросы построения аппроксимирующих задач, исследование сходимости см. в [5].

Широкие классы экстремальных задач являются некорректно поставленными (см. *Некорректные задачи*) и для их решения нужно использовать *регуляризации методы* (см. [5], [13]).

Лит.: [1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление. М., 1979; [2] Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н., Методы и алгоритмы решения задач оптимизации, К., 1983; [3] Бутковский А. Г., Методы управления системами с распределенными параметрами, М., 1975; [4] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [5] его же, Методы решения экстремальных задач, М., 1981; [6] Евтушенко Ю. Г., Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М., 1982; [7] Егоров А. И., Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами, М., 1978; [8] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [9] Лионс Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, пер. с франц., М., 1972; [10] Поляк Б. Т., Введение в оптимизацию, М., 1983; [11] Сеа Ж., Оптимизация. Теория и алгоритмы, пер. с франц., М., 1973; [12] Сиразетдинов Т. К., Оптимизация систем с распределенными параметрами, М., 1977; [13] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979; [14] Федоренко Р. П., Приближенное решение задач оптимального управления, М., 1978; [15] Экланд И., Темам Р., Выпуклый анализ и вариационные проблемы, пер. с англ., М., 1979. *Ф. П. Васильев.*

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ — свойства алгебраических, тригонометрических или обобщенных полиномов, к-рые выделяют их в качестве решений нек-рых экстремальных задач.

Напр., *Чебышева многочлены* $T_n(x)=\cos(n \arccos x)=2^{n-1}x^n+\ldots$ имеют наименьшую норму в пространстве $C([-1, 1])$ среди всех алгебраич. многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 2^{n-1} (П. Л. Чебышев, 1853) и, таким образом, являются решением следующей экстремальной задачи

$$\max_{x\in[-1,\,1]} |2^{n-1}x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n| \longrightarrow \inf_{a=(a_1,\,\ldots,\,a_n)}.$$

Иначе говоря, многочлен T_n наименее уклоняется от нуля в пространстве $C([-1, 1])$ среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 2^{n-1}.

Экстремальные задачи на пространствах многочленов в значительной части исследуются в пространствах $L_p([a, b])$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. При этом наиболее известные результаты связаны со случаями $p=1$, 2 и ∞ (метрика C). В частности, в этих метриках решен вопрос о явном виде многочленов, наименее уклоняющихся от нуля. В метрике L_1 — это многочлены Чебышева 2-го рода, в метрике L_2 — *Лежандра многочлены*, о метрике C см. выше. Описано также множество классических ортогональных многочленов, являющихся многочленами наименее уклоняющимися от нуля в пространстве L_2 с весом (*Лагерра многочлены*, *Эрмита многочлены*, *Якоби многочлены* и т. п.).

Е. И. Золотарев (1877) рассмотрел вопрос о многочленах вида $x^n+\sigma x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ (с двумя фиксированными старшими коэффициентами), наименее уклоняющихся от нуля в метрике C. Он нашел однопараметрич. семейство многочленов, решающих эту задачу, выразив их через эллиптич. функции.

Многочлены Чебышева экстремальны в задаче о неравенстве для производных, а именно, имеет место следующее точное *Маркова неравенство* (где P_n — многочлен степени $\leqslant n$):

$$\|P_n^{(k)}\|_{C([-1,\,1])}\leqslant|T_n^k(1)|\,\|P_n\|_{C([-1,\,1])}, \qquad (*)$$

в к-ром равенство достигается на T_n. Неравенство (*) для $k=1$ доказал А. А. Марков (1889), для остальных k — В. А. Марков (1892). О подобном неравенстве для тригонометрич. полиномов см. *Бернштейна неравенство*.

Нек-рые экстремальные свойства алгебраических и тригонометрических полиномов в равномерной метрике переносятся на чебышевские системы функций (см. [2]). О теории экстремальных задач и Э. с. п. см. [6].

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2—3, М.— Л., 1947—48; [2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л.— М., 1937; [3] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [4] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [5] Вороновская Е. В., Метод функционалов и его приложения, Л., 1963; [6] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976. *В. М. Тихомиров.*

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ — свойства отдельных функций, к-рые выделяют их как решения нек-рых экстремальных задач. Большинство специальных функций, возникших в математич. анализе могут быть охарактеризованы нек-рым экстремальным свойством. Таковы, напр., *экстремальные свойства\полиномов*: классич. *Лагерра многочлены*, *Лежандра многочлены*, *Чебышева многочлены*, *Эрмита многочлены*, *Якоби многочлены* можно охарактеризовать как многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля в пространстве L_2 с весом. Классич. полиномы являются обычно решениями разных экстремальных задач, нередко возникающих в отдаленных областях анализа. Так, напр., многочлены Чебышева экстремальны в задаче о неравенстве для производных многочленов (см. [1], *Маркова неравенство*). То же можно сказать и о др. специальных функциях. Многие из них являются собственными функциями для дифференциальных операторов, т. е. являются решением нек-рой *изопериметрической задачи*. При этом, наиболее известные специальные функции так или иначе связаны с наличием нек-рой инвариантной структуры (см. *Гармонический анализ абстрактный*), когда они являются собственными функциями *Лапласа — Бельтрами уравнения*, инвариантного относительно сдвигов. Таковы тригонометрич. полиномы, сферич. функции, цилиндрич. функции и др. (см. [2]). Большинство Э. с. ф. может быть сформулировано в виде нек-рого точного неравенства.

С экстремальными задачами теории приближений связаны *Бернштейна неравенство*, *Бора — Фавара неравенство* и др. В частности, неравенство Бора — Фавара отражает экстремальное свойство *Бернулли многочленов*. Э. с. ф. изучаются в теории приближений (см. [6], [7]), в теории численного интегрирования (см. [8]). *Сплайны* могут быть охарактеризованы различными экстремальными свойствами (см. [9]). Многие специальные сплайны обладают рядом экстремальных свойств, касающихся аппроксимации и интерполяции классов функций (см. [7], [8]). Многие Э. с. ф. изучают в комплексном анализе. В частности, *Кёбе функция* является экстремальной функцией ряда задач теории однолистных функций. См. также *Изопериметрическое неравенство*, *Вложения теоремы*.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л.— М., 1937; [2] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [3] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [4] Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965; [5] Mitrinović D. S., Analitičke nejednakosti, Beograd, 1970; [6] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближений, М., 1976; [7] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [8] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [9] Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и его приложения, пер. с англ., М., 1972 *В. М. Тихомиров.*

ЭКСТРЕМУМ — значение непрерывной функции, являющееся максимумом или минимумом (см. *Максимума и минимума точки*). Термин «Э.» употребляется также при изучении наибольших и наименьших значений функционалов в вариационном исчислении. *А. Б. Иванов.*

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ — число, равное отношению расстояния от любой точки *конического сечения* до данной точки (фокуса) к расстоянию от той же точки до данной прямой (директрисы). Два конич. сечения, имеющие равные Э., подобны между собой. Для эллипса Э. $e<1$ (для окружности $e=0$), для гиперболы $e>1$, для параболы $e=1$. Для эллипса и гиперболы Э. можно определить как отношение расстояний между фокусами к длине бо́льшей оси. *А. Б. Иванов.*

ЭКСЦЕССА КОЭФФИЦИЕНТ, эксцесс, — скалярная характеристика островершинности графика плотности вероятности унимодального распределения, к-рую используют в качестве нек-рой меры отклонения рассматриваемого распределения от нормального. Э. к. γ_2 определяется по формуле

$$\gamma_2=\beta_2-3,$$

где $\beta_2=\mu_4/\mu_2^2$ есть 2-й коэффициент Пирсона, μ_2 и μ_4 — 2-й и 4-й центральные моменты вероятностного распределения. В терминах семиинвариантов (кумулянтов) $\varkappa_2$ и $\varkappa_4$ второго и четвертого порядков Э. к. имеет вид

$$\gamma_2=\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}.$$

Если $\gamma_2=0$, то говорят, что плотность вероятности распределения имеет нормальный эксцесс, ибо для нормального распределения Э. к. $\gamma_2=0$. В случае, если Э. к. $\gamma_2>0$, то говорят, что плотность вероятности имеет положительный эксцесс, что, как правило, соответствует тому, что график плотности рассматриваемого распределения в окрестности моды имеет более острую и более высокую вершину, чем нормальная кривая. В случае, когда $\gamma_2<0$, говорят об отрицательном эксцессе плотности, при этом плотность вероятности имеет в окрестности моды более низкую и плоскую вершину, чем плотность нормального закона.

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же непрерывному вероятностному закону, то статистика

$$\hat{\gamma}_2=\frac{1}{n\,(s^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_0)^4-3$$

наз. выборочным коэффициентом эксцесса, где

$$X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_0)^2.$$

Выборочный Э. к. $\hat{\gamma}_2$ используется в качестве точечной статистич. оценки Э. к. γ_2, когда закон распределения случайной величины X_i неизвестен. В случае нормальной распределенности случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ выборочный Э. к. $\hat{\gamma}_2$ асимптотически нормально распределен при $n\to\infty$ с параметрами

$$\mathsf{E}\hat{\gamma}_2=-\frac{6}{n+1}$$

и

$$\mathsf{D}\hat{\gamma}_2=\frac{24n\,(n-2)\,(n-3)}{(n+1)^2\,(n+3)\,(n+5)}=\frac{24}{n}\left[1-\frac{225}{15n+24}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Именно поэтому, если наблюденное значение выборочного Э. к. $\hat{\gamma}_2$ существенно отличается от 0, то следует признать, что распределение случайной величины X_i отлично от нормального, чем и пользуются на практике при проверке гипотезы $H_0: \gamma_2\neq 0$, принятие к-рой равносильно признанию отклонения распределения случайной величины X_i от нормального.

Лит.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983. *М. С. Никулин.*

ЭКСЦЕССИВНАЯ ФУНКЦИЯ для марковского процесса — аналог неотрицательной супергармонической функции.

Пусть в измеримом пространстве $(E, \mathscr{B})$ задана однородная марковская цепь с вероятностями перехода за один шаг $P(x, B)$ $(x\in E, B\in\mathscr{B})$. Измеримая относительно $\mathscr{B}$ функция $f: E\to[0, \infty]$ наз. эксцессивной функцией для этой цепи, если

$$\int_E f(y)\,P(x, dy)\leqslant f(x)$$

всюду в E. Для цепи с не более чем счетным множеством состояний среди Э. ф. есть отличные от констант тогда и только тогда, когда хоть одно из состояний невозвратно.

При заданном в $(E, \mathscr{B})$ однородном марковском процессе $X=(x_t, \zeta, \mathscr{F}_t, P_x)$ с *переходной функцией* $P(t, x, B)$ определение Э. ф. несколько усложнится. Множество B относят к σ-алгебре $\overline{\mathscr{B}}$, если для любой конечной меры μ на $\mathscr{B}$ найдутся такие множества B_μ^1 и B_μ^2, что $B_\mu^1\subset B\subset B_\mu^2$ и $\mu(B_\mu^2\setminus B_\mu^1)=0$. Функция f: $E\to[0, \infty]$ наз. эксцессивной функцией, если она $\mathscr{B}$-измерима и при $t\geqslant 0$ удовлетворяет всюду в E соотношениям

$$P^t f(x)\equiv\int f(y)\,P(t, x, dy)\leqslant f(x),$$

и

$$f(x)=\lim_{s\downarrow 0}P^s f(x).$$

Для части винеровского процесса в нек-рой области $E\subset\mathbb{R}^n$ (см. *Функционал* от марковского процесса) класс Э. ф. совпадает с классом неотрицательных супергармонических в E функций, пополненным функцией $f(x)\equiv\infty$.

В случае стандартного процесса X в локально компактном сепарабельном пространстве E, для Э. ф. $f(x)$ всюду в E выполняется неравенство

$$M_x f(x_\tau)\leqslant f(x),$$

где τ — марковский момент, M_x — математическое ожидание, отвечающее мере P_x, и где положено $f(x_\tau)=0$ при $\tau\geqslant\zeta$. Другое часто используемое свойство Э. ф. состоит в том, что P_x — почти наверное случайная функция $f(x_t)$ непрерывна справа на интервале $[0, \zeta)$ (см. [3]).

Э. ф. $f(x)<\infty$ наз. гармонической, если, как бы ни задавался компакт $K\subset E$, выполняется $f(x)\equiv M_x f(x_\tau)$, где τ — момент первого выхода X из K. Потенциалом наз. любую Э. ф. $f(x)<\infty$, для к-рой

$$\lim_{n\to\infty}M_x f(x_{\tau_n})=0$$

при любом выборе марковских моментов τ_n, $n\geqslant 1$, таких, что $\tau_n\to\zeta$ при $n\to\infty$. Для части винеровского процесса в области $E\subset\mathbb{R}^n$ гармоних. функции и потенциалы, это, соответственно, неотрицательные в E гармонические в классич. смысле функции и потенциалы Грина борелевских мер, сосредоточенных в E.

Примером потенциала служит потенциал $M_x\gamma_\zeta$ аддитивного функционала $\gamma_t\geqslant 0$ от X, если $M_x\gamma_\zeta<\infty$. Э. ф. $f(x)<\infty$ является потенциалом аддитивного функционала в том и только том случае, когда

$$\lim_{n\to\infty}M_x f(x_{\tau_n})\equiv 0,$$

где τ_n — момент 1-го попадания в множество $\{x: f(x)\geqslant n\}$.

В рамках аксиоматич. теории гармонич. пространств Брело все неотрицательные супергармонич. функции являются Э. ф. для нек-рого стандартного процесса.

См. также *Мартина граница*, *Ляпунова стохастическая функция*.

Лит.: [1] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [2] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976, [3] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963, [4] Getoor R. K., Markov processes: Ray processes and right prosesses, B., 1975, [5] Шур М. Г., «Матем заметки», 1973, т. 13, № 4, с. 587—96; [6] Meyer P.-A., «Ann Inst. Fourier», 1962, t 12, p. 125—230; [7] его же, там же, 1963, t. 13, № 2, p. 357—72.

М. Г. Шур.

ЭЛЕМЕНТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — совокупность (D, f) области D на плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$ и аналитич. функции $f(z)$, заданной в D при помощи нек-рого аналитич. аппарата, позволяющего эффективно осуществить аналитич. продолжение $f(z)$ во всю ее область существования как *полной аналитической функции*. Наиболее простой и чаще всего применяемой формой Э. а. ф. является круговой элемент в виде совокупности степенного ряда

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (1)$$

и его круга сходимости $D=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<R\}$ с центром a (центр элемента) и радиусом сходимости $R>0$. Аналитич. продолжение здесь достигается (быть может, многократным) переразложением ряда (1) для различных центров b, $|b-a|\leqslant R$, по формулам вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-b)^n = c_0 + \\ +[c_1(b-a)+c_1(z-b)]+[c_2(b-a)^2+ \\ +2c_2(b-a)(z-b)+c_2(z-b)^2]+\dots .$$

Любой из элементов (D, f) полной аналитич. функции определяет ее однозначно и может быть представлен посредством круговых элементов с центрами $a\in D$. В случае бесконечно удаленного центра $a=\infty$ круговой элемент принимает вид

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

с областью сходимости $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|>R\}$.

В процессе аналитич. продолжения функция $f(z)$ может оказаться многозначной и могут появиться соответствующие *алгебраическим точкам ветвления* т. н. разветвленные элементы вида

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k/\nu},$$

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty} c_k z^{-k/\nu},$$

где $\nu>1$, число $\nu-1$ наз. порядком разветвленности. Разветвленные элементы обобщают понятие Э. а. ф., последние в этой связи наз. также неразветвленными (при $\nu=1$) регулярными (при $m\geqslant 0$) элементами.

В качестве простейшего элемента (D, f) аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \dots, z_n)$, $n>1$, можно принять совокупность кратного степенного ряда

$$f(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = \\ =\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1\dots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\dots(z_n-a_n)^{k_n}, \qquad (2)$$

где $a=(a_1, \dots, a_n)$ — центр, $|k|=k_1+\dots+k_n$, $c_k=c_{k_1}\dots c_{k_n}$, $(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}\dots(z_n-a_n)^{k_n}$, и нек-рого поликруга

$$D=\{z\in\mathbb{C}^n : |z_j-a_j|<R_j, \quad j=1, \dots, n\},$$

в к-ром ряд (2) абсолютно сходится. Однако, при $n>1$ следует иметь в виду, что поликруг не является точной областью абсолютной сходимости степенного ряда.

Понятие Э. а. ф. весьма близко к понятию *ростка* аналитич. функции.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т 1—2, М., 1967—68; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АБЕЛЕВА ГРУППА — абелева группа, порядки всех неединичных элементов к-рой равны одному и тому же простому числу p.

О. А Иванова.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АРИФМЕТИКА — то же, что *арифметика формальная*.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СИСТЕМА АКСИОМ — система аксиом, записанная на языке узкого исчисления предикатов. Системы аксиом *арифметики формальной*, теории множеств Цермело — Френкеля (см. *Аксиоматическая теория множеств*), *типов теории* — примеры Э. с. а.

В. Н. Гришин.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ — совокупность замкнутых формул логики предикатов 1-й ступени. Э. т. $\mathrm{Th}(K)$ класса K *алгебраических систем* сигнатуры Ω наз. совокупность всех замкнутых формул логики предикатов 1-й ступени сигнатуры Ω, истинных на всех системах из класса K. Если класс K состоит из одной системы A, то Э. т. класса K наз. Э. т. системы A. Две алгебраич. системы одной сигнатуры наз. элементарно эквивалентными, если их Э. т. совпадают. Алгебраич. система A сигнатуры Ω наз. моделью Э. т. T сигнатуры Ω, если все формулы из T истинны в A. Э. т. наз. совместной, если она имеет модели. Совместная Э. т. наз. полной, если любые две ее модели элементарно эквивалентны. Класс всех моделей Э. т. T обозначается $\mathrm{Mod}(T)$. Э. т. T наз. разрешимой, если множество формул $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T))$ (т. е. совокупность всех логич. следствий из T) рекурсивно. Класс K алгебраич. систем сигнатуры Ω наз. аксиоматизируемым, если существует такая Э. т. T сигнатуры Ω, что $K=\mathrm{Mod}(T)$. В этом случае T наз. совокупностью аксиом для K. Класс K тогда и только тогда аксиоматизируем, когда $K=\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K))$. Напр., класс плотно линейно упорядоченных множеств без наименьшего и наибольшего элементов аксиоматизируем, его Э. т. разрешима, любые две системы из этого класса элементарно эквивалентны, значит Э. т. этого класса полна; кроме того, Э. т. рассматриваемого класса конечно аксиоматизируема. Класс конечных циклич. групп не является аксиоматизируемым, однако его Э. т. разрешима и, значит, рекурсивно аксиоматизируема. Имеются примеры конечно аксиоматизируемых неразрешимых Э. т. Такими являются Э. т. групп, колец, полей и др. Однако полная рекурсивно аксиоматизируемая Э. т. обязательно разрешима. Поэтому для доказательства разрешимости рекурсивно аксиоматизируемой Э. т. достаточно заметить, что эта Э. т. полна.

Известен ряд методов доказательства полноты. Э. т. наз. категоричной в мощности α, если все ее модели мощности α изоморфны. Э. т., категоричная в нек-рой бесконечной мощности и не имеющая конечных моделей, обязательно полна. Напр., Э. т. алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики рекурсивно аксиоматизируема и категорична в каждой несчетной мощности, а конечных моделей не имеет, поэтому эта теория полна и разрешима. В частности, разрешима Э. т. поля комплексных чисел. Две формулы той же сигнатуры, что и сигнатура теории T, эквивалентны в теории T, если эти формулы имеют одинаковые свободные переменные и для любой модели A теории T и любого способа приписывания этим свободным переменным элементов модели A либо обе формулы одновременно истинны при

этих значениях неизвестных, либо обе они ложны. Полная Э. т. T конечной или счетной сигнатуры тогда и только тогда счетно категорична, когда для каждого n существует конечное число формул с n свободными переменными $v_1, \ldots, v_n$ такое, что каждая формула соответствующей сигнатуры со свободными переменными $v_1, \ldots, v_n$ эквивалентна в T одной из этих формул. Полная теория конечной или счетной сигнатуры, категоричная в одной несчетной мощности, категорична и во всякой другой несчетной мощности. Система A сигнатуры Ω наз. элементарной подсистемой системы B той же сигнатуры, если A является подсистемой системы B и для всякой формулы $\Phi(v_1, \ldots, v_n)$ логики предикатов 1-й ступени сигнатура Ω со свободными переменными $v_1, \ldots, v_n$ и всяких $a_1, \ldots, a_n \in A$ из истинности $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ в A следует истинность $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ в B. Э. т. T наз. модельно полной, если для любых ее моделей A и B из того, что A является подсистемой системы B, следует, что A является элементарной подсистемой B. Оказывается, что модельно полная теория, имеющая такую модель, к-рая изоморфно вкладывается во всякую модель этой теории, является полной. Универсально эквивалентными наз. такие алгебраич. системы одной сигнатуры, на к-рых истинны одни и те же предваренные формулы, не содержащие кванторов существования. Модельно полная Э. т., все модели к-рой универсально эквивалентны, является полной. Используя технику модельной полноты, можно доказать полноту и разрешимость Э. т. вещественно замкнутых полей, в частности поля действительных чисел. Среди других Э. т., являющихся разрешимыми,— Э. т. сложения целых и натуральных чисел, Э. т. абелевых групп, поля p-адических чисел, конечных полей, полей вычетов, упорядоченных абелевых групп, булевых алгебр.

Теория неразрешимых Э. т. была заложена А. Тарским (A. Tarski) в 40-е гг. 20 в., хотя неразрешимость логики предикатов первой ступени была доказана А. Чёрчем (A. Church) еще в 1936, а неразрешимость арифметики натуральных чисел — Дж. Россером (J. Rosser) также в 1936. Говорят, что Э. т. Th (K) класса K алгебраич. систем одной сигнатуры Ω неотделима, если не существует рекурсивного множества формул, содержащего все тождественно истинные замкнутые формулы сигнатуры Ω и содержащегося в Th(K). Э. т. класса K_1 систем сигнатуры $<P^{(2)}>$, состоящей из одного двуместного предиката, наз. относительно определимой в Э. т. класса K_2 систем сигнатуры Ω_2, если существуют такие формулы $\Phi(v_0; u_1, \ldots, u_s)$, $\Psi(v_1, v_2; u_1, \ldots, u_s)$ сигнатуры Ω_2, что для каждой системы A_1 из K_1 можно найти такую систему A_2 из K_2 и такие элементы $b_1, \ldots, b_s$ в A_2, что множество $X = \{x \in A_2 | \Phi(x; b_1, \ldots, b_s)$ истинно в $A_2\}$ вместе с предикатом $P^{(2)}$, определенным на X так, что $P^{(2)}(x, y)$ истинно тогда и только тогда, когда $\Psi(x, y; b_1, \ldots, b_s)$ истинно в A_2, образует алгебраич. систему, изоморфную системе A_1. Это определение естественным образом распространяется и на теории классов K_1 произвольной сигнатуры. Если неотделимая Э. т. класса K_1 относительно определима в Э. т. класса K_2, то Э. т. класса K_2 тоже неотделима. Это позволяет доказывать неотделимость Э. т. многих классов алгебраич. систем. В качестве Th (K_1) при этом удобно брать Э. т. всех конечных бинарных предикатов, Э. т. конечных симметричных предикатов и подобные Э. т. Неотделимые Э. т. неразрешимы. К неразрешимым Э. т. относятся также Э. т. поля рациональных чисел, многих классов колец и полей. Важен результат А. И. Мальцева о неразрешимости Э. т. конечных групп.

Лит.: [1] Ершов Ю. Л., [и др.] «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 4, с. 37—108; [2] Ершов Ю. Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., 1980.

Ю. Л. Ершов, М. А. Тайцлин.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел *чисел теории*, изучающий свойства чисел элементарными методами. Такие методы включают использование свойств делимости, различных форм аксиомы индукции и комбинаторные соображения. Иногда понятие элементарных методов расширяют за счет привлечения простейших элементов математич. анализа. Традиционно неэлементарными считают доказательства, в к-рых используются мнимые числа.

К Э. т. ч. обычно относят задачи, возникающие в таких разделах теории чисел, как теория делимости, теория сравнений, теоретико-числовые функции, неопределенные уравнения, разбиения на слагаемые, аддитивные представления, приближения рациональными числами, цепные дроби. Нередко решение таких задач приводит к необходимости выходить за рамки элементарных методов. Иногда вслед за отысканием неэлементарного решения какой-нибудь задачи находят и ее элементарное решение.

Задачи Э. т. ч. имеют, как правило, многовековую историю и нередко стоят в истоках современных направлений теории чисел и алгебры.

Из сохранившихся клинописных таблиц древних вавилонян можно сделать вывод, что им не были чужды задачи разложения натуральных чисел на простые множители. В 5 в. до н. э. пифагорейцы построили т. н. учение о четных и нечетных числах и обосновали предложение: произведение двух натуральных чисел четно тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей — четное число. Общая теория делимости, по существу, была построена Евклидом. В его «Началах» (3 в. до н. э.) вводится алгоритм отыскания наибольшего общего делителя двух целых чисел и на этой основе намечается обоснование основной теоремы арифметики целых чисел: о возможности и единственности разложения натурального числа в произведение простых сомножителей.

После того как К. Гаусс (C. Gauss) в нач. 19 в. построил теорию делимости для целых комплексных чисел стало ясно, что изучение произвольного *кольца* нужно начинать с построения теории делимости в нем.

Все свойства целых чисел так или иначе связаны с *простыми числами*. Поэтому вопросы распределения простых чисел в натуральном ряду издавна интересовали ученых. Евклиду принадлежит первое доказательство бесконечности множества простых чисел. Только в сер. 19 в. П. Л. Чебышев сделал следующий шаг в изучении функции $\pi(x)$ — числа простых чисел, не превосходящих x. Ему удалось элементарными средствами доказать неравенства, из к-рых следовало, что

$$0{,}92129\,\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1{,}10555\ldots\,\frac{x}{\ln x}$$

для всех достаточно больших x. В действительности, $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$, но это удалось установить только в кон. 19 в. средствами комплексного анализа. Долгое время считалось, что этот результат не может быть получен элементарно. Однако А. Сельберг (A. Selberg, 1949) получил элементарное доказательство этой теоремы. П. Л. Чебышеву удалось также доказать, что для $n \geqslant 2$ интервал $(n, 2n)$ содержит хотя бы одно простое число. Уточнение интервала, содержащего хотя бы одно простое число, требует более глубокого изучения поведения функции $\pi(x)$.

В 3 в. до н. э. был разработан метод *Эратосфена решета* выделения простых чисел из множества натуральных чисел. В 1918 В. Брун (V. Brun) показал, что видоизменение этого метода может служить основой для изучения множества почти простых чисел. Им была получена *Бруна теорема* о простых близнецах. *Бруна решето* является частным случаем общих *решета ме-*

тодов, дающих оценки для количества почти простых чисел, не превосходящих x и принадлежащих последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$. Методы решета позволяют получать такие оценки, если известны «хорошие» приближения в среднем для количества чисел $a_n \leqslant x$, принадлежащих прогрессиям, модуль к-рых растет вместе с x. Среди методов решета, развитых после работ В. Бруна, особое значение приобрело *Сельберга решето*. Наиболее сильные результаты получают сочетанием методов решета с аналитическими. Метод решета в сочетании с *Шнирельмана методом* дал возможность эффективно найти значение k такое, что любое натуральное число $n \geqslant 4$ можно представить суммой не более k простых чисел.

Два целых числа a и b наз. сравнимыми по модулю $m \geqslant 1$, если они дают одинаковые остатки при делении на число m. Для этого отношения на множестве целых чисел К. Гаусс (1801) ввел запись $a \equiv b \pmod m$. Эта форма записи, выявляющая аналогию сравнений с уравнениями, оказалась удобной и способствовала развитию *сравнений* теории.

Многие результаты, полученные до этого П. Ферма (P. Fermat), Л. Эйлером (L. Euler), Ж. Лагранжем (J. Lagrange) и др., а также *китайская теорема об остатках*, просто формулируются и доказываются на языке теории сравнений. Один из наиболее интересных результатов этой теории — *квадратичный закон взаимности*.

Древним вавилонянам было известно большое количество «пифагоровых троек», видимо, им был известен какой-то способ, позволяющий находить сколько угодно целочисленных решений неопределенного уравнения $x^2+y^2=z^2$. Пифагорейцы пользовались формулами $x=\frac{a^2-1}{2}$, $y=a$, $z=\frac{a^2+1}{2}$ для отыскания таких решений этого уравнения. Евклид указал метод, позволяющий последовательно находить целочисленные решения уравнения $x^2-2y^2=1$ (частный случай *Пелля уравнения*). В «Арифметике» Диофанта (3 в. н. э.) заметна попытка построения теории неопределенных уравнений (см. *Диофантовы уравнения*). В частности, Диофант при решении уравнений 2-й степени и нек-рых уравнений высших степеней систематически пользуется приемом, к-рый позволяет ему находить из одного рационального решения данного уравнения др. рациональные решения того же уравнения. П. Ферма (17 в.) открыл новый метод — «метод спуска» и решил ряд уравнений таким методом, но объявленная им как решенная *Ферма теорема* великая, оказалась не под силу элементарным методам.

П. Ферма решил задачу о представлении натуральных чисел суммой двух квадратов целых чисел. В результате исследований Ж. Лагранжа (1773) и К. Гаусса (1801) была решена задача о представлении чисел определенной *бинарной квадратичной формой*. К. Гаусс построил общую теорию бинарных квадратичных форм. Решение задачи о представлении чисел формами более высокой степени (напр., *Варинга проблема*) и квадратичными формами с большим числом переменных обычно выходит за рамки элементарных методов. Только нек-рые частные случаи таких задач решаются элементарно. Примером может служить теорема Лагранжа: каждое натуральное число есть сумма четырех квадратов целых чисел. Следует заметить, что в своей «Арифметике» Диофант неоднократно пользовался возможностью представить натуральное число суммой четырех квадратов целых чисел.

К Э. т. ч. относят теорию разбиений, основы к-рой были заложены Л. Эйлером (1751). Одна из основных задач теории разбиений — изучение функции $P(n)$ — числа представлений натурального числа n в виде суммы натуральных слагаемых. В теории разбиений рассматривают и др. функции подобного типа.

Цепные дроби появились в связи с задачами приближенных вычислений (извлечение квадратного корня из натурального числа, отыскание приближения действительных чисел обыкновенными дробями с малыми знаменателями). Цепные дроби находят применение при решении неопределенных уравнений 1-й и 2-й степени. Используя аппарат цепных дробей, И. Ламберт (J. Lambert, 1766) впервые установил иррациональность числа π. При решении различных задач о приближении действительных чисел рациональными числами в Э. т. ч. наряду с цепными дробями используют также *Дирихле принцип*.

В теории чисел легко назвать большое число элементарно формулируемых и нерешенных до сих пор задач. Напр.: конечно или нет множество четных совершенных чисел; существует ли хотя бы одно нечетное совершенное число; конечно или нет множество простых чисел Ферма; конечно или бесконечно множество простых *Мерсенна чисел*; конечно или нет множество простых чисел вида n^2+1; верно ли, что между квадратами любых соседних натуральных чисел содержится хотя бы одно простое число; ограничено или нет множество неполных частных разложения $\sqrt[3]{2}$ в цепную дробь.

Лит.: [1] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.— Л., 1937; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [3] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [4] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; [5] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с лат., М., 1959; [6] Дэвенпорт Г., Высшая арифметика, пер. с англ., М., 1965; [7] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959; [8] Эндрюс Г., Теория разбиений, пер. с англ., М., 1982; [9] История математики, т. 1—3, М., 1970—72; [10] Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., М., 1966; [11] Dickson L. E., History of the theory of numbers, v. 1—3, N. Y., 1971; [12] Hardy G. H., Wright E. M., An introduction to the theory of numbers, 5 ed., Oxf., 1979; [13] Sierpiński W., Elementary theory of numbers, Warsz., 1964.

А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ СОБЫТИЕ — исходное понятие вероятностной модели. В определении вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ непустое множество Ω наз. пространством Э. с., а его любая точка $\omega \in \Omega$ наз. элементарным событием. При неформальном подходе множество Ω описывает множество всех исходов нек-рого случайного эксперимента и Э. с. ω соответствует элементарному исходу: эксперимент заканчивается одним и только одним элементарным исходом, эти исходы неразложимы и взаимно исключают друг друга. Существует принципиальная разница между Э. с. ω — точкой множества Ω и событием $\{\omega\}$ — элементом нек-рого класса множеств $\mathcal{A}$. См. *Вероятностей теория*, *Вероятностное пространство*, *Случайное событие*.

А. В. Прохоров.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ матрицы $F(x)$ над кольцом многочленов $k[x]$ — степени унитарных неприводимых многочленов над полем k, на к-рые разлагаются инвариантные множители матрицы $F(x)$. Две $(m \times n)$-матрицы над $k[x]$, имеющие один и тот же ранг, тогда и только тогда эквивалентны (т. е. получаются одна из другой с помощью элементарных операций), когда они обладают одной и той же системой Э. д.

Элементарными делителями $(n \times n)$-матрицы A над полем k наз. Э. д. ее характеристич. матрицы $\|xE_n - A\|$. Они могут быть получены следующим образом. Пусть $D_l(x)$ — наибольший общий делитель миноров порядка l матрицы $xE_n - A$, $1 \leqslant l \leqslant n$ и $D_0 = 1$. Тогда инвариантными множителями матрицы $\|xE_n - A\|$ служат

$$i_l(x) = \frac{D_l(x)}{D_{l-1}(x)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Множители $i_l(x)$, отличные от 1, содержатся в $k[x]\setminus k$. Каждый из них представим в виде

$$i_l(x)=(p_1(x))^{m_1}\dots(p_t(x))^{m_t},$$

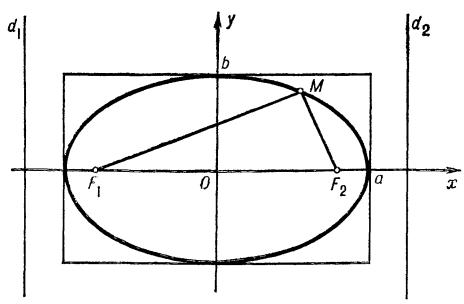
где $p_i(x)$ — унитарные неприводимые над k многочлены, $m_i>0$, $p_i(x)\neq p_j(x)$ при $i\neq j$. Все полученные таким способом многочлены вида $(p(x))^m$ и составят систему Э. д. матрицы A. Две квадратные матрицы над полем подобны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же систему Э. д. Произведение всех Э. д. матрицы над полем совпадает с ее характеристич. многочленом, а наименьшее общее кратное ее Э. д. равно ее минимальному многочлену. Любой набор многочленов вида $l_i(x)=(g_i(x))^{m_i}$, где $g_i(x)$ — унитарный неприводимый над k многочлен, служит системой Э. д. для одного и только одного класса подобных матриц над k порядка n, где n — степень произведения многочленов $l_i(x)$.

Если k — поле разложения характеристич. многочлена матрицы A, то Э. д. матрицы A имеют вид $(x-\lambda)^m$. В этом случае число Э. д. равно числу клеток Жордана жордановой формы матрицы A, а Э. д. $(x-\lambda)^m$ соответствует жорданова клетка $J_m(\lambda)$ порядка m (см. *Жорданова матрица*). Квадратная матрица над полем k подобна диагональной матрице над k тогда и только тогда, когда каждый ее Э. д. имеет вид $x-\lambda$, где $\lambda\in k$.

Д. А. Супруненко.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ — класс функций, состоящий из *многочленов*, *показательных функций*, *логарифмических функций*, *тригонометрических функций* и *обратных тригонометрических функций*, а также функций, получающихся из перечисленных выше с помощью четырех арифметич. действий и суперпозиции (образование *сложной функции*), примененных конечное число раз. Класс Э. ф. наиболее изучен и чаще всего встречается в приложениях математики. Однако многие вопросы приводят к рассмотрению функций, не являющихся Э. ф. (см., напр., *Специальные функции*). Производная от Э. ф. также является Э. ф.; неопределенный интеграл от Э. ф. не всегда выражается через Э. ф. При изучении неэлементарных функций представляют их через Э. ф. при помощи бесконечных рядов, произведений и т. д. *БСЭ-з.*

ЭЛЛИПС (действительный) — плоская кривая, получающаяся в пересечении кругового конуса с плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающей все его образующие в точках одной его полости. Э. есть множество точек M плоскости (см. рис.), для каждой из к-рых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) постоянна и равна $2a>F_1F_2$. Расстояние между фокусами наз. фокусным расстоянием, его принято обозначать через $2c$. Середина отрезка F_1F_2 наз. центром Э.



Прямая, на к-рой лежат фокусы Э., наз. первой (или фокальной) осью. Прямая, проходящая через центр Э. перпендикулярно к первой оси, наз. второй осью Э. Оси Э. являются его осями симметрии. Точки пересечения Э. с осями симметрии наз. его вершинами. Большой осью Э. наз. отрезок (а также длина $2a$ этого отрезка) первой оси Э., заключенный между вершинами Э. Малой осью Э. наз. отрезок (а также длина $2b$ этого отрезка) второй оси Э., заключенного между вершинами Э. Число $e=c/a<1$ наз. *эксцентриситетом* Э. Диаметром Э. наз. любая прямая, проходящая через центр Э.; диаметр может быть определен как прямая, проходящая через середины параллельных хорд. *Директрисой* Э., соответствующей данному фокусу F, наз. прямая d, перпендикулярная первой оси Э. и отстоящая от центра Э. на расстоянии a/e. В общем случае у Э. имеются две директрисы. Э. есть центральная *линия второго порядка*, канонич. уравнение к-рой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение касательной к Э. в точке (x_0, y_0):

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Фокальный параметр Э. (половина длины хорды, проходящей через фокус перпендикулярно первой оси Э.) равен b^2/a. При помощи фокального параметра можно записать уравнение Э. в виде

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

где ρ, φ — полярные координаты, $0\leqslant\varphi<2\pi$.

Если $a=b$, Э. представляет собой окружность; $F_1\equiv F_2\equiv 0$ — центр окружности, a — ее радиус, $e=0$, директрис нет.

Э. обладает следующим оптическим свойством: световые лучи, исходящие из одного фокуса, после зеркального отражения от Э. проходят через другой фокус.

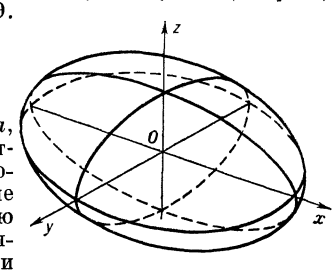
Линия второго порядка, канонич. уравнение к-рой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

где a и b — действительные числа, наз. мнимым эллипсом. *А. Б. Иванов.*

ЭЛЛИПСОИД (действительный) — замкнутая центральная *поверхность второго порядка* (см. рис.). Канонич. уравнение Э. имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Положительные числа a, b, c и отрезки соответствующей длины наз. полуосями Э. Сечение Э. любой плоскостью представляет собой эллипс. Если две полуоси Э. равны между собой, то Э. наз. эллипсоидом вращения, сечения Э. вращения плоскостями, параллельными плоскости равных полуосей, являются окружностями. При $a=b=c$ Э. представляет собой сферу. Центр симметрии Э. наз. его центром.

Поверхность второго порядка, канонич. уравнение к-рой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

наз. мнимым эллипсоидом. *А. Б. Иванов.*

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ГАРМОНИКА — функция точки на эллипсоиде, появляющаяся при решении уравнения Лапласа методом разделения переменных в *эллипсоидальных координатах*.

Пусть декартовы координаты (x, y, z) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_3$ связаны с эллипсоидальными координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) тремя однотипными формулами вида

$$\frac{x^2}{\xi^2-a^2}+\frac{y^2}{\xi^2-b^2}+\frac{z^2}{\xi^2-c^2}=1, \quad a>b>c>0,$$

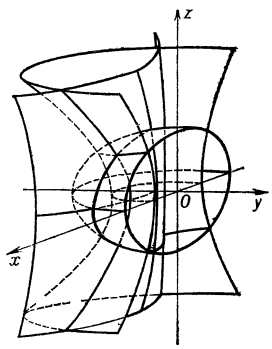
причем $a<\xi_1<+\infty$, $b<\xi_2<a$, $c<\xi_3<b$. Полагая $\xi_1=\xi_1^0$, получают координатные поверхности в виде эллипсоидов. Гармонич. функция $h=h(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, являющаяся решением уравнения Лапласа, записывается как линейная комбинация выражений вида

$$E_1(\xi_1)\,E_2(\xi_2)\,E_3(\xi_3), \qquad (*)$$

где сомножители $E_j(\xi_j)$, $j=1, 2, 3$, суть решения *Ламе уравнения*. Выражения вида (*) при $\xi_1=\xi_1^0$ и их линейные комбинации наз. Э. г., или, как их еще называют, поверхностными Э. г., в отличие от комбинаций выражений (*), зависящих от всех трех переменных (ξ_1, ξ_2, ξ_3), к-рые иногда наз. пространственными Э. г.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1—2, М., 1958—60. *Е. Д. Соломенцев.*

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ, эллиптические координаты в пространстве,— числа λ, μ и ν, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами



$$x^2=\frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y^2=\frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+b^2)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)},$$

$$z^2=\frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$

где $-a^2<\nu<-b^2<\mu<-c^2<\lambda<\infty$. Координатные поверхности (см. рис.): эллипсоиды ($\lambda=$const), однополостные гиперболоиды ($\mu=$const) и двуполостные гиперболоиды ($\nu=$const) с центрами в начале координат. Система Э. к.— ортогональная. Каждой тройке чисел λ, μ и ν соответствуют 8 точек (по одной в каждом октанте), симметричных друг другу относительно плоскостей системы $Oxyz$.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}},$$

$$L_\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}{(\mu+a^2)(\mu+b^2)(\mu+c^2)}},$$

$$L_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\nu+a^2)(\nu+b^2)(\nu+c^2)}}.$$

Если в условиях $a^2>b^2>c^2>0$ при определении Э. к. допускать и равенства, то можно получить вырожденные системы Э. к. *Д. Д. Соколов.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия пространства, риманова кривизна к-рого в любом двумерном направлении постоянна и положительна. Э. г.— многомерное обобщение *Римана геометрии*. *А. Б. Иванов.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — неособая полная *алгебраическая кривая* рода 1. Теория Э. к. является истоком большей части современной алгебраич. геометрии. Но исторически теория Э. к. возникла как часть анализа, как теория *эллиптических интегралов* и *эллиптических функций*.

Примеры. Неособая проективная плоская кубич. кривая, пересечение двух неособых квадрик в трехмерном проективном пространстве, двулистное накрытие проективной прямой, разветвленное ровно в четырех точках, а также одномерное абелево многообразие и главное однородное пространство над ним являются Э. к.

Геометрия Э. к. Пусть X — Э. к. над алгебраически замкнутым полем k. Тогда X бирегулярно изоморфна плоской кубич. кривой (см. [1], [9], [13]). Если $\mathrm{char}\,k\neq 2, 3$, то в проективной плоскости $\mathbf{P}^2$ существует аффинная система координат, в к-рой X имеет уравнение в нормальной форме Вейерштрасса

$$y^2=x^3+ax+b. \qquad (1)$$

Кривая X неособа тогда и только тогда, когда многочлен x^3+ax+b не имеет кратных корней, т. е. дискриминант $\Delta=-(4a^3+27b^2)\neq 0$. В $\mathbf{P}^2$ кривая (1) имеет единственную точку на бесконечности, к-рую обозначают P_0; P_0 — точка перегиба кривой (1), а касательная в P_0 — бесконечно удаленная прямая. j-инвариант Э. к. X

$$j(X)=-\frac{4\cdot 1728}{\Delta}a^3\in k$$

не зависит от выбора системы координат. Равенство j-инвариантов двух Э. к. равносильно тому, что эти Э. к. бирегулярно изоморфны. Для любого $j\in k$ найдется Э. к. X над k с $j(X)=j$.

Групповая структура на Э. к. Пусть $P_0\in X$ — фиксированная точка Э. к. X. Отображение $P\mapsto P-P_0$, сопоставляющее точке $P\in X$ дивизор $P-P_0$ на Э. к. X, устанавливает взаимно однозначное соответствие между Э. к. X и группой Pic^0X классов дивизоров степени 0 на X, т. е. *Пикара многообразием* кривой X. Это соответствие переносит на X структуру коммутативной группы, к-рая согласована со структурой алгебраич. многообразия и превращает X в одномерное абелево многообразие (X, P_0); точка P_0 при этом является нулем группы. Введенная групповая структура допускает следующее геометрич. описание. Пусть $X\subset P^2$ — плоская кубич. кривая. Тогда сумма точек P и Q определяется правилом $P+Q=P_0\circ(P\circ Q)$, где $P\circ Q$ — третья точка пересечения кривой X с прямой, проходящей через точки P и Q. Иначе говоря, сумма трех точек на X равна нулю тогда и только тогда, когда они лежат на одной прямой.

Э. к. как одномерное абелево многообразие. Пусть n_X обозначает эндоморфизм умножения на $n\in\mathbb{Z}$ в (X, P_0). Если (Y, Q_0) — Э. к. с отмеченной точкой Q_0, то любое рациональное отображение $f: X\to Y$ имеет вид $f(P)=h(P)+Q_1$, где $Q_1=f(P_0)\in Y$, а $h: (X, P_0)\to(Y, Q_0)$ — гомоморфизм абелевых многообразий. При этом гомоморфизм h является либо постоянным отображением в точку Q_0, либо *изогенией*, т. е. существует гомоморфизм абелевых многообразий $g: (Y, Q_0)\to(X, P_0)$ такой, что $gh=n_X$, $hg=n_Y$ для нек-рого n (см. [1], [6]).

Группа автоморфизмов Э. к. X действует транзитивно на X, а ее подгруппа $G=\mathrm{Aut}(X, P_0)$ автоморфизмов, оставляющих на месте точку P_0, нетривиальна и конечна. Пусть $\mathrm{char}\,k$ отлична от 2 и 3. Если $j(X)$ не равно 0 или 1728, то группа G состоит из двух элементов 1_X и $(-1)_X$. Порядок G равен 4 при $j(X)=1728$ и 6 при $j(X)=0$ (см. [1], [6], [13]).

Важным инвариантом Э. к. является кольцо эндоморфизмов $R=\mathrm{End}(X, P_0)$ абелева многообразия (X, P_0). Отображение $n\mapsto n_X$ определяет вложение $\mathbb{Z}\subset R$. Если $R\neq\mathbb{Z}$, то говорят, что X — Э. к. с комплексным умножением. Кольцо R может быть одного из следующих типов (см. [1], [9], [13]): I. $R=\mathbb{Z}$. II. $R=\mathbb{Z}+f\mathfrak{O}\subset\mathfrak{O}$. Здесь $\mathfrak{O}$ — кольцо целых алгебраич. чисел мнимого квадратичного поля K, $f\in\mathbb{N}$. III. R — некоммутативная $\mathbb{Z}$-алгебра ранга 4 без делителей нуля. В этом

случае $p=\operatorname{char} k>0$ и R — порядок в алгебре кватернионов над $\mathbb{Q}$, разветвленной только в p и ∞. Такие Э. к. существуют для всех p и наз. суперсингулярными; несуперсингулярные Э. к. в характеристике p наз. обыкновенными Э. к.

Группа $X_n=\operatorname{Ker} n_X$ точек Э. к. X, порядок к-рых делит n, имеет следующую структуру: $X_n\approx(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, если $(n, \operatorname{char} k)=1$. При $p=\operatorname{char} k>0$ для обыкновенных Э. к. $X_{p^m}\approx\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, а для суперсингулярных Э. к. $X_{p^m}\approx\{0\}$. Для простого $l\neq\operatorname{char} k$ *Тейта модуль* $T_l(X)$ изоморфен $\mathbb{Z}_l^2$.

Э. к. над незамкнутыми полями. Пусть X — Э. к. над произвольным полем k. Если множество k-рациональных точек $X(k)$ кривой X непусто, то X бирегулярно изоморфна плоской кубич. кривой (1) с $a, b\in k$ ($\operatorname{char} k\neq 2, 3$). Бесконечно удаленная точка P_0 кривой (1) определена над k. Как и выше, можно определить групповую структуру на кривой (1), превращающую X в одномерное абелево многообразие над k, а множество $X(k)$ в коммутативную группу с нулем P_0. Если k конечно порождено над своим простым подполем, то $X(k)$ — группа с конечным числом образующих (теорема Морделла — Вейля).

Для любой Э. к. X определено *Якоби многообразие* $J(X)$, являющееся одномерным абелевым многообразием над k. Э. к. X является главным однородным пространством над $J(X)$. Если множество $X(k)$ непусто, то выбор точки $P_0\in X(k)$ задает изоморфизм $X\simeq J(X)$, при к-ром точка P_0 переходит в нуль группы $J(X)$. В общем случае Э. к. X и $J(X)$ изоморфны над конечным расширением поля k (см. [1], [4], [13]).

Э. к. над полем комплексных чисел. Э. к. X над $\mathbb{C}$ является компактной римановой поверхностью рода 1 и обратно. Групповая структура превращает X в комплексную группу Ли, являющуюся одномерным комплексным тором $\mathbb{C}/\Lambda$, где Λ — решетка в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обратно, любой одномерный комплексный тор является Э. к. (см. [3]). С топологич. точки зрения Э. к. — двумерный тор.

Теория Э. к. над полем $\mathbb{C}$, по существу, эквивалентна теории эллиптич. функций. Отождествление тора $\mathbb{C}/\Lambda$ с Э. к. осуществляется следующим образом. Эллиптич. функции с данной решеткой периодов Λ образуют поле, порожденное $\wp$-функцией Вейерштрасса (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*) и ее производной $\wp'(z)$, к-рые связаны соотношением

$$\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3.$$

Отображение $\mathbb{C}\longrightarrow \mathrm{P}^2$ ($Z\longmapsto(1:\wp(Z):\wp'(Z))$) индуцирует изоморфизм тора $\mathbb{C}/\Lambda$ и Э. к. $X\subset \mathrm{P}^2$ с уравнением $y^2=4x^3-g_2x-g_3$. Отождествление Э. к. X, заданной уравнением (1), с тором $\mathbb{C}/\Lambda$ осуществляется с помощью криволинейных интегралов от голоморфной формы $\omega=\frac{dx}{y}$ и приводит к совпадению Э. к. X с ее многообразием Якоби $J(X)$.

Описание множества всех Э. к. как торов $\mathbb{C}/\Lambda$ приводит к *модулярной функции* $J(\tau)$. Две решетки Λ и Λ' определяют изоморфные торы тогда и только тогда, когда они подобны, т. е. одна получается из другой умножением на комплексное число. Поэтому можно считать, что решетка Λ порождена числами 1 и τ из $H=\{\tau\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}\tau>0\}$. Две решетки с базисами 1, τ и 1, τ' подобны тогда и только тогда, когда $\tau'=\gamma(\tau)$ для нек-рого элемента γ *модулярной группы* Γ. Модулярная функция

$$J(\tau)=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$$

наз. также абсолютным инвариантом; $J(\tau)=J(\tau')$ тогда и только тогда, когда $\tau'=\gamma(\tau)$ для нек-рого $\gamma\in\Gamma$ и функция $J: H/\Gamma\to\mathbb{C}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных Э. к. над $\mathbb{C}$ и комплексными числами. Если $X=\mathbb{C}/\Lambda$, то $j(X)=1728\,J(\tau)$.

Э. к. X есть Э. к. с комплексным умножением тогда и только тогда, когда τ — мнимая *квадратическая иррациональность*. В этом случае R — подкольцо конечного индекса в кольце целых алгебраич. чисел мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\tau)$. Э. к. с комплексным умножением тесно связаны с *полей классов теорией* для мнимых квадратичных полей (см. [4], [8]).

Арифметика Э. к. Пусть X — Э. к. над конечным полем k из q элементов. Множество $X(k)$ всегда непусто и конечно. Тем самым X снабжается структурой одномерного абелева многообразия над k, а $X(k)$ — структурой конечной коммутативной группы. Порядок A группы $X(k)$ удовлетворяет неравенству $|(q+1)-A|\leqslant 2\sqrt{q}$. Многочлен $t^2-(q+1-A)t+q$ есть характеристич. многочлен *Фробениуса эндоморфизма*, действующего на модуле Тейта $T_l(X)$, $l\neq\operatorname{char} k$. Его корни α, $\bar{\alpha}$ — комплексно сопряженные целые алгебраич. числа, по модулю равные $\sqrt{q}$. Для любого конечного расширения k_n поля k степени n порядок группы $X(k_n)$ равен $q^n+1-(\alpha^n+\bar{\alpha}^n)$. *Дзета-функция* Э. к. X равна

$$(1-q^{-s})(1-q^{1-s})/[1-(q+1-A)\,q^{-s}+q^{1-2s}].$$

Для любого целого алгебраического α, лежащего в нек-ром мнимом квадратичном поле (или в $\mathbb{Q}$) и по модулю равного $\sqrt{q}$, найдется такая Э. к. X над k, что порядок группы $X(k)$ равен $q+1-(\alpha+\bar{\alpha})$.

Пусть k — поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ или его конечное алгебраич. расширение, B — кольцо целых поля k, X — Э. к. над k и пусть множество $X(k)$ непусто. Групповая структура превращает $X(k)$ в коммутативную компактную одномерную *Ли p-адическую группу*. Группа $X(k)$ двойственна по Понтрягину к *Вейля — Шатле группе* $WC(k, X)$. Если $j(X)\notin B$, то X — кривая Тейта (см. [1], [5]) и существует канонич. униформизация группы $X(k)$, аналогичная случаю поля $\mathbb{C}$.

Пусть X — Э. к. над $\mathbb{Q}$ и множество $X(\mathbb{Q})$ непусто. Тогда X бирегулярно изоморфна кривой (1) с $a, b\in\mathbb{Z}$. Из всех кривых вида (1) с целыми a и b, изоморфных X, выбирается такая, для к-рой абсолютная величина дискриминанта Δ минимальна. Кондуктор N и L-функция $L(X, s)$ Э. к. X определяются как формальные произведения локальных множителей

$$N=\Pi f_p,\qquad L(X, s)=\Pi L_p(X, s) \tag{2}$$

по всем простым p (см. [1], [5], [13]). Здесь f_p — нек-рая степень p, $L_p(X, s)$ — мероморфная функция комплексного переменного s, не имеющая ни нуля, ни полюса при $s=1$. Чтобы определить локальные множители, рассматривается редукция кривой X по модулю p ($\neq 2,3$) — плоская проективная кривая X_p над полем вычетов $\mathbb{Z}/(p)$, заданная в аффинной системе координат уравнением

$$y^2=x^3+\bar{a}x+\bar{b}\ (\bar{a}=a \bmod p,\ \bar{b}=b \bmod p).$$

Пусть A_p — число $\mathbb{Z}/(p)$-точек на X_p. Если p не делит Δ, то X_p — Э. к. над $\mathbb{Z}/(p)$ и полагают

$$f_p=1,\quad L_p(X, s)=1/[1-(p+1-A_p)\,p^{-s}+p^{1-2s}].$$

Если p делит Δ, то многочлен $x^3+\bar{a}x+\bar{b}$ имеет кратный корень и полагают

$$L_p(X, s)=1/[1-(p+1-A_p)\,p^{-s}],\ f_p=p^2 \text{ или } p$$

(в зависимости от того, является этот корень трехкратным или нет). Произведение (2) сходится в правой полу-

плоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{2}$. Предполагается, что $L(X, s)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость и что функция

$$\xi_X(s) = N^{s/2}\,(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,L(X, s)$$

($\Gamma(s)$ - *гамма-функция*) удовлетворяет функциональному уравнению $\xi_X(s) = W\xi_X(2-s)$ с $W = \pm 1$ (см. [5], [13]). Эта гипотеза доказана для Э. к. с комплексным умножением.

Группа $X(\mathbb{Q})$ изоморфна $F \oplus X(\mathbb{Q})_t$, где $X(\mathbb{Q})_t$—конечная абелева группа, а F — свободная абелева группа нек-рого конечного ранга r. Группа $X(\mathbb{Q})_t$ изоморфна одной из следующих 15 групп (см. [11]): $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant 10$ или $m = 12$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\nu\mathbb{Z}$, $1 \leqslant \nu \leqslant 4$. Число r наз. р а н г о м Э. к. над $\mathbb{Q}$, или $\mathbb{Q}$-р а н г о м. Известны примеры Э. к. над $\mathbb{Q}$ ранга $\geqslant 12$. Имеется предположение (см. [1], [13]), что над Q существуют Э. к. сколь угодно большого ранга.

Для изучения группы $X(\mathbb{Q})$ используется высота Тейта $\hat{h}$: $X(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, являющаяся неотрицательно определенной квадратичной формой на $X(\mathbb{Q})$ (см. [1], [3], [8], а также *Высота* в диофантовой геометрии). Для любого $c \in \mathbb{R}_+$ множество $\{P \in X(\mathbb{Q}) \mid \hat{h}(P) \leqslant c\}$ конечно. В частности, $\hat{h}$ обращается в 0 в точности на подгруппе кручения $X(\mathbb{Q})_t$.

Важным инвариантом Э. к. X является ее группа Тейта — Шафаревича Ш(X) (см. *Вейля — Шатле группа*). Нетривиальные элементы группы Ш(X) — Э. к., не имеющие $\mathbb{Q}$-точек,— доставляют примеры Э. к., для к-рых не выполнен *Хассе принцип*. Группа Ш(X) периодична и для любого n подгруппа ее элементов, порядки к-рых делят n, конечна. Для большого числа Э. к. проверена конечность 2- и 3-компонент группы Ш (см. [1], [4], [5]). Имеется гипотеза, что и группа Ш конечна.

Гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера (см. [5], [13]) утверждает, что порядок нуля L-функции $L(X, s)$ при $s=1$ равен $\mathbb{Q}$-рангу Э. к. X. В частности, $L(X, s)$ имеет нуль при $s=1$ тогда и только тогда, когда группа $X(\mathbb{Q})$ бесконечна. Гипотеза не доказана ни для одной Э. к. (1984), хотя для Э. к. с комплексным умножением (и $f=1$) установлено, что бесконечность $X(\mathbb{Q})$ влечет за собой наличие нуля у L-функции при $s=1$ (см. [14]). Гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера дает главный член асимптотики L-функции при $s \to 1$, в к-рый входят порядки групп Ш(X) и $X(\mathbb{Q})_t$, определитель высоты Тейта [1]. Эта гипотеза допускает переформулировку в терминах *Тамагавы чисел* (см. [7]).

Предполагается (г и п о т е з а В е й л я), что существует униформизация Э. к. X модулярными функциями относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$ модулярной группы Γ (см. [5], а также *Дзета-функция* в алгебраич. геометрии). Эта гипотеза доказана для Э. к. с комплексным умножением. Известно (см. [15]), что всякая алгебраич. кривая над $\mathbb{Q}$ униформизуется модулярными функциями относительно нек-рой подгруппы конечного индекса группы Γ.

Лит.: [1] К а с с е л с Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 1—48; [2] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [3] М а м ф о р д Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [4] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969, гл. 12, 13; [5] М а н и н Ю. И., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 6, с. 7—71; [6] Х а р т ш о р н Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [7] B l o c h S., «Invent. math.», 1980, v. 58, p. 65—76; [8] L a n g S., Elliptic curves: diophantine analysis, B.— [a. o.], 1978; [9] е г о ж е, Elliptic functions, Reading (Mass.), 1973; [10] M a z u r B., «Invent. math.», 1978, v. 44, p. 129—62; [11] Modular functions of one variable, v. 4, B. — [a. o.], 1975; [12] M e s t r e J. F., «C. r. Acad. sci.», 1982, t. 295, ser. 1, p. 643—44; [13] T a t e J., «Invent. math.», 1974, v. 23, p. 179—206; [14] C o a t e s J., W i l e s A., «Invent. math.», 1977, v. 39, p. 223—51; [15] Б е л ы й Г. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1979, т. 43, с. 267—76.

Ю. Г. Зархин, Вал. С. Куликов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — алгебраическая или аналитическая полная неособая поверхность X, у к-рой имеется пучок *эллиптических кривых*, т. е. морфизм $\pi : X \to B$ на неособую кривую B, общий слой к-рого — неособая эллиптич. кривая. Всякая Э. п. бирационально (бимероморфно) эквивалентна над B однозначно определенной минимальной модели, к-рая характеризуется тем, что слои морфизма π не содержат исключительных кривых 1-го рода. Далее Э. п. будет предполагаться минимальной. Минимальные Э. п. устроены более сложно, чем линейчатые поверхности. Они могут иметь о с о б ы е с л о и $X_t = \pi^{-1}(t)$ (т. е. слои, не являющиеся неособыми эллиптич. кривыми). Имеется классификация [3] особых слоев Э. п. Особый слой $X_t = \sum n_i E_i$ наз. к р а т н ы м, если НОД $(n_i) = m \geqslant 2$, тогда $X_t = mF$ и m наз. к р а т н о с т ь ю с л о я X_t.

На минимальной Э. п. канонич. класс K_X содержит дивизор, являющийся рациональной комбинацией слоев, в частности $(K_X^2) = 0$. Более точно, имеет место следующая формула для канонич. класса (см. [1], [4]):

$$K_X = \pi^*(K_B - d) + \sum (m_i - 1) F_i,$$

где $X_{t_i} = m_i F_i$ — все кратные слои морфизма π, а d — дивизор на B степени $-\chi(\mathcal{O}_X)$. Для эйлеровой топологич. характеристики имеет место формула

$$e(X) = \sum e(X_{t_i}).$$

К л а с с и ф и к а ц и я э л л и п т и ч. п у ч к о в. Пучок $\pi : X \to B$ можно рассматривать как эллиптич. кривую над полем функций $k(B)$. Эта кривая, вообще говоря, не имеет структуры абелева многообразия над $k(B)$. Для выполнения последнего необходимо, чтобы она имела рациональную точку над $k(B)$ (и тогда X бирационально изоморфна поверхности, определяемой в $B \times A^2$ уравнением Вейерштрасса $y^2 = x^3 - g_2 x - g_3$, где g_2, $g_3 \in k(B)$). Задание рациональной точки эквивалентно заданию сечения $e : B \to X$ такого, что $\pi e = \mathrm{id}$; необходимым условием существования сечения является отсутствие кратных слоев. Пучки без кратных слоев наз. п р и в е д е н н ы м и. Любой пучок после подходящего разветвленного накрытия базы имеет сечение (т. е. приведен) [3]. Любой пучок можно сделать приведенным также последовательностью преобразований, обратных к логарифмическим [4],— локальных перестроек пучка в окрестностях слоев.

Приведенные эллиптич. пучки описываются следующим образом. Каждому такому пучку π: $X \longrightarrow B$ соответствует единственный пучок $\mathcal{Y}_B(X) \longrightarrow B$, к-рый является групповым объектом и такой, что X/B является главным однородным пространством над $\mathcal{Y}_B(X)/B$. Пучок $\mathcal{Y}_B(X)/B$ наз. я к о б и е в ы м п у ч к о м для X/B, он характеризуется наличием сечения. Для заданного якобиева пучка $\mathcal{Y}/B$ множество $I(\mathcal{Y}/B)$ классов изоморфных пучков X/B, для к-рых $\mathcal{Y}_B(X) \cong \mathcal{Y}$, имеет когомологич. описание, аналогичное описанию *обратимых пучков*. При этом роль пучка $\mathcal{O}_B^*$ играет пучок $\mathcal{H}^0(\mathcal{Y}/B)$ локальных сечений τ: $\mathcal{Y} \longrightarrow B$. Имеется естественное взаимно однозначное соответствие

$$\theta : I(\mathcal{Y}/B) \longrightarrow H^1(B, \mathcal{H}^0(\mathcal{Y}/B)),$$

при к-ром якобиеву пучку соответствует нулевой элемент. С помощью θ можно различать алгебраич. и неалгебраич. пучки: для приведенного пучка $\pi : X \to B$ поверхность X алгебраическая тогда и только тогда, когда соответствующий ему элемент в $H^1(B, \mathcal{H}^0(\mathcal{Y}/B))$ имеет конечный порядок. Аналогию с обратимыми пучками можно продолжить дальше. Аналогом точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_B \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_B^* \longrightarrow 1$$

является точная последовательность

$$0 \longrightarrow R^1\tau_*\mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{H}^0(T(\mathscr{Y})/B) \longrightarrow \mathscr{H}^0(\mathscr{Y}/B) \longrightarrow 0,$$

где $\mathscr{H}^0(T(\mathscr{Y})/B)$ — пучок локальных сечений расслоения $T(\mathscr{Y})/B$, а $T(\mathscr{Y})_b$ — касательное пространство к слою $\tau^{-1}(b)$ в точке $e(b)$. Граничный гомоморфизм

$$\delta: H^1(B, \mathscr{H}^0(\mathscr{Y}/B)) \longrightarrow H^2(B, R^1\tau_*\mathbb{Z})$$

позволяет узнать, когда один пучок является деформацией другого. Для этого необходимо и достаточно, чтобы соответствующие этим пучкам элементы имели один и тот же образ относительно δ (см. [4]).

Классификация алгебраич. Э. п. Пусть char $k=0$. Для Э. п. X канонич. размерность $k(X)\leqslant 1$, т. е. равна -1, 0 или 1. Э. п. с $k(X)=1$ наз. Э. п. основного типа. Они характеризуются условием: $12K_X\neq 0$ и $|12K_X|\neq\varnothing$. Э. п. с $p_g\geqslant 2$ или, более общо, с $P_m\geqslant 2$ при нек-ром m являются Э. п. основного типа.

Э. п. с $k(X)=0$ характеризуются условием $12K_X=0$. В этом случае $\chi(\mathcal{O}_X)$ может принимать три значения: 2, 1, 0. Если $\chi(\mathcal{O}_X)=2$, то X есть эллиптич. К3-поверхность ($q=0$, $K_X=0$). В этом случае B изоморфна проективной прямой P^1, пучок не имеет кратных слоев и X имеет инварианты $p_g=1$, $q=0$, $b_2=22$. Если $\chi(\mathcal{O}_X)=1$, то X есть поверхность Энриквеса, т. е. поверхность с $p_g=q=0, 2K_X=0$ (всякая поверхность Энриквеса является эллиптической). В этом случае $B\simeq\mathrm{P}^1$, пучок имеет два кратных слоя кратности 2 и X имеет инварианты $p_g=q=0$, $b_2=10$. Если $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, то возможны два случая. Либо X — абелево многообразие (тогда $p_g=1$, $q=2$, $b_2=6$). Либо X — гиперэллиптич. поверхность, т. е. поверхность, у к-рой имеется конечное неразветвленное накрытие — произведение двух эллиптич. кривых. В этом случае $p_g=0$, $b_1=2$, $b_2=2$, $B=\mathrm{P}^1$ и π имеет три или четыре кратных слоя, для кратностей к-рых имеется четыре возможности: (3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6), (2, 2, 2, 2) и соответственно $3K_X=0, 4K_X=0, 6K_X=0$ и $2K_X=0$.

Э. п. с $k(X)=-1$ являются линейчатыми поверхностями. Они характеризуются условием $|12K_X|=\varnothing$. Здесь возможны два случая: 1) X — поверхность с $p_g=q=0$, $b_2=10$ и π не имеет кратных слоев либо имеет один кратный слой; причем поверхности без кратных слоев получаются следующим образом: нужно взять рациональное отображение $\mathrm{P}^2\to\mathrm{P}^1$, определяемое двумя кубиками $F_0=0$ и $F_1=0$, и раздуть их 9 точек пересечения. 2) X — поверхность с $p_g=0$, $q=1$, $b_2=2$, а кратности m_i удовлетворяют неравенству

$$\sum\left(1-\frac{1}{m_i}\right)<2.$$

Формула для канонич. класса и классификация Э. п. обобщены также на случай конечной характеристики поля (см. [5], [6]).

Классификация неалгебраич. Э. п. Для неалгебраич. поверхностей — алгебраич. размерность $a(X)=\mathrm{tr\ deg}\ M(X)=1$ или 0. Если $a(X)=0$, то поверхность X неэллиптическая. Все поверхности с $a(X)=1$ эллиптические. При этом структура Э. п. $\pi: X\to B$ определена почти канонически: любое такое расслоение π обязательно является эллиптическим. Классификация по канонич. размерности точно такая, как и в случае алгебраич. Э. п.: $k(X)=-1\Longleftrightarrow|12K_X|=\varnothing$, $k(X)=0\Longleftrightarrow 12K_X=0$ и $k(X)=1$ (X — Э. п. основного типа)$\Longleftrightarrow|12K_X|\neq\varnothing$, $12K_X\neq 0$.

Неалгебраич. Э. п. с $k(X)=0$ принадлежат одному из классов: 1) К3-поверхности ($\chi(\mathcal{O}_X)=2$, $b_1=0$, $b_2=22$, X — односвязна). 2) Комплексные торы ($K_X=0$, $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, $b_1=4$, $b_2=6$). 3) Поверхности Кодаиры ($K_X=0$, $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, $b_1=3$, $b_2=4$). Поверхности Кодаиры являются расслоениями на эллиптич. кривые с эллиптич. кривой в качестве базы, а с дифференцируемой точки зрения — расслоениями на окружности над трехмерным тором. 4) Поверхности с $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, $p_g=0$, $b_1=1$, $b_2=0$. Для них $mK_X=0$ при $m=2, 3, 4, 6$ (аналогично гиперэллиптич. поверхностям). Они имеют поверхность Кодаиры в качестве конечного неразветвленного накрытия. В случаях 2), 3) и 4) универсальной накрывающей для X является $\mathbb{C}^2$.

Неалгебраич. Э. п. с $k(X)=-1$ являются поверхностями Хопфа, т. е. их универсальная накрывающая есть $\mathbb{C}^2\setminus 0$. Для них $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, $b_1=1$, $b_2=0$. Собственные поверхности Хопфа — это $(\mathbb{C}^2\setminus 0)/Z$, где $T(z_1, z_2)=(\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2)$ — действие образующей T. Они гомеоморфны $S^1\times S^3$ и характеризуются этим условием. Произвольные Э. п. Хопфа являются факторами собственных поверхностей Хопфа [4].

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965; [2] Bombieri E., Husemoller D., «Proc. symp. in pure math.», 1975, v. 29, p. 329—420; [3] Kodaira K., «Ann. Math.», 1960, v. 71, p. 111—52; 1963, v. 77, p. 563—626; 1963, v. 78, p. 1—40; [4] его же, «Amer. J. Math.», 1964, v. 86, p. 751—98; 1966, v. 88, p. 682—721; 1966, v. 90, p. 55—83, 1048—66; [5] Mumford D., в кн.: Global analysis. Papers in honor of K. Kodaira, Tokyo, 1969, p. 325—39; [6] Bombieri E., Mumford D., в кн.: Complex analysis and algebraic geometry, [Camb.], 1977, p. 23—42. *Вал. С. Куликов.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ТОЧКА — точка регулярной поверхности, в к-рой соприкасающийся параболоид является эллиптич. параболоидом. В Э. т. индикатриса Дюпена является эллипсом, гауссова кривизна поверхности положительна, главные кривизны поверхности имеют один знак, а для коэффициентов 2-й квадратичной формы справедливо неравенство

$$LN-M^2>0.$$

Поверхность в окрестности Э. т. является локально выпуклой. *Д. Д. Соколов.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ в собственном смысле — *двоякопериодическая функция*, мероморфная в конечной плоскости комплексного переменного z. Э. ф. обладают следующими основными свойствами.

Не существует целых Э. ф., кроме констант (теорема Лиувилля).

Пусть $2\omega_1$, $2\omega_3$ — примитивные периоды Э. ф. $f(z)$, $\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_1)>0$. Сумма вычетов всех полюсов $f(z)$ в ее параллелограмме периодов

$$\Delta=\{z=2t\omega_1+2\tau\omega_3;\quad 0\leqslant t<1,\quad 0\leqslant\tau<1\}$$

равна нулю.

Пусть r — число полюсов (с учетом их кратности) Э. ф. $f(z)$ в параллелограмме периодов Δ. Тогда $f(z)$ принимает в Δ каждое конечное значение с учетом кратности в точности r раз. Число r наз. порядком Э. ф. Не существует Э. ф., порядок к-рых меньше 2.

Если a_i и b_i, $i=1, \ldots, r$, — все нули и полюсы Э. ф. $f(z)$ в ее параллелограмме периодов Δ с учетом их кратности, то сумма

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)$$

сравнима с нулем по модулю периодов, т. е.

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)=2m_1\omega_1+2m_3\omega_3,$$

где m_1, m_3 — целые числа (частный случай теоремы Абеля, см. *Абелева функция*).

Все Э. ф. с фиксированными примитивными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ образуют алгебраич. поле Э. ф. с двумя образующими. В качестве этих образующих можно взять, напр., функцию Вейерштрасса $\wp$ и ее производную (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*).

Производная Э. ф. является в свою очередь Э. ф. того же порядка с теми же периодами. Каждая Э. ф. удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка.

Каждая Э. ф. $f(z)$ допускает алгебраическую теорему сложения, т. е. значения $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_1+z_2)$ связаны неприводимым алгебраич. уравнением с постоянными коэффициентами. Обратно, имеет место теорема Вейерштрасса: всякая аналитич. функция $f(z)$, допускающая алгебраич. теорему сложения, либо является рациональной функцией от z или от e^z, либо есть Э. ф.

Иногда применяется более общая терминология, связанная с теорией *тета-функций*. Э. ф. III рода наз. всякая мероморфная функция $f(z)$, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$f(z+2\omega_i)=\exp[a_i(z+\omega_i)+b_i]\cdot f(z), \quad i=1,\ 3,$$

где a_i, b_i — нек-рые постоянные. Если $a_1=a_3=0$, то $f(z)$ наз. Э. ф. II рода. Если $a_1=a_3=b_1=b_3=0$, то $f(z)$ наз. Э. ф. I рода, или Э. ф. в собственном смысле. По этой терминологии тета-функции Якоби (см. *Якоби эллиптические функции*) и сигма-функции Вейерштрасса (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*) суть Э. ф. III рода.

Впервые *эллиптические интегралы* исследовались в работах ученых кон. 17 — нач. 19 вв. Я. Бернулли (J. Bernoulli), И. Бернулли (J. Bernoulli), Дж. К. Фаньяно деи Тоски (G. C. Fagnano dei Toschi), Л. Эйлера (L. Euler), А. Лежандра (A. Legendre) конца 17 — начала 19 вв. Эти интегралы появились в задачах вычисления длины дуги эллипса и других кривых 2-го порядка. Они имеют вид $\int R(z, w)\,dz$, где R — рациональная функция от переменных z и w, связанных алгебраич. уравнением

$$w^2=a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4,$$

в к-ром справа стоит многочлен 4-й или 3-й степени без кратных корней. Подынтегральная функция однозначна на двулистной компактной римановой поверхности F рода $g=1$ с четырьмя точками ветвления. Дифференциалы I, II и III рода на F (см. *Дифференциал на римановой поверхности*) порождают соответственно эллиптич. интегралы I, II и III рода. Интеграл I рода является главной униформизирующей поверхности F и поля алгебраич. функций, порождаемых F. Если принять его за независимую переменную, то это поле переходит в поле Э. ф.

Идея непосредственного обращения эллиптич. интегралов в нормальной форме Лежандра возникла и была развита в работах Н. Абеля (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi) в нач. 19 в. Развитое К. Якоби построение Э. ф. на основе тета-функций имеет основное значение для приложений Э. ф. Теоретически более простое построение поля Э. ф., при к-ром в качестве образующих берутся функция $\wp$ и ее производная, было дано К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) в 70-х гг. 19 в.

При развитии теории Э. ф. одной из основных является проблема преобразования Э. ф. и связанных с ними величин при переходе от примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ к другим примитивным периодам $2\hat{\omega}_1$, $2\hat{\omega}_3$, связанным соотношениями

$$\hat{\omega}_1=\alpha\omega_1+\beta\omega_3, \quad \hat{\omega}_3=\gamma\omega_1+\delta\omega_3,$$

где α, β, γ, δ — целые числа такие, что $\alpha\delta-\beta\gamma=n$, n — натуральное число, называемое порядком преобразования. Площадь параллелограмма периодов $2\hat{\omega}_1$, $2\hat{\omega}_3$ в n раз больше площади параллелограмма периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$. При $n=1$ получаются преобразования модулярной группы, откуда возникла связанная с Э. ф. теория *модулярных функций*.

Э. ф. можно трактовать как мероморфные функции, инвариантные относительно преобразований группы сдвигов

$$\{z\longrightarrow z+2n\omega_1+2m\omega_3;\ \ n,\ m\in\mathbb{Z}\}$$

комплексной плоскости. Обобщение этого подхода привело к рассмотрению *автоморфных функций*, инвариантных относительно *дробно-линейных отображений*, составляющих группы более общей природы. Э. ф. и модулярные функции суть частные случаи автоморфных функций.

Обращение эллиптич. интегралов сразу же привело к *Якоби проблеме обращения* более общих *абелевых интегралов* $\int R(z, w)\,dz$, где переменные z и w связаны произвольным алгебраич. уравнением. На этом пути получаются *абелевы функции* — обобщение Э. ф. на случай нескольких комплексных переменных.

Э. ф. и эллиптич. интегралы находят многочисленные применения (как специальные функции) во многих разделах анализа, как средство *униформизации* в алгебраич. геометрии, а также в механике, электродинамике и других прикладных областях.

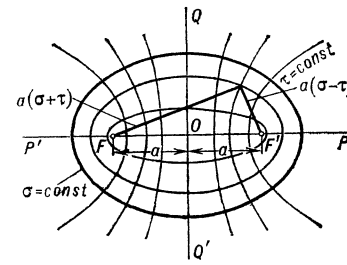
Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., ч. 2, М., 1968; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, М.—Л., 1941; [5] Enneper A., Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte, 2 Aufl., Halle, 1890; [6] Tannery J., Molk J., Eléments de la théories des fonctions elliptiques, t. 1—4, P., 1893—1902.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа σ и τ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами формулами

$$x^2=\frac{(\sigma+a^2)(\tau+a^2)}{a^2-b^2},$$

$$y^2=\frac{(\sigma+b^2)(\tau+b^2)}{b^2-a^2},$$



где $-a^2<\tau<-b^2<\sigma<\infty$. Координатные линии (см. рис.): софокусные эллипсы ($\sigma=$const) и гиперболы ($\tau=$const) с фокусами $(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ и $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$. Система Э. к.— ортогональная. Каждой паре чисел σ и τ соответствуют 4 точки, по одной в каждом квадранте плоскости Oxy, симметричные друг другу относительно осей Ox и Oy.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-\tau}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}},\quad L_\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau-\sigma}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}}.$$

Уравнение Лапласа допускает в Э. к. разделение переменных.

Вырожденными Э. к. наз. числа $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\tau}$, связанные с Э. к. σ и τ формулами (при $a=1$, $b=0$):

$$\sigma=\mathrm{sh}^2\tilde{\sigma},\quad \tau=-\sin^2\tilde{\tau}$$

и с декартовыми прямоугольными координатами x и y — формулами:

$$x=\mathrm{ch}\,\tilde{\sigma}\cos\tilde{\tau},\quad y=\mathrm{sh}\,\tilde{\sigma}\sin\tilde{\tau},$$

где $0\leqslant\tilde{\sigma}<\infty$, $0\leqslant\tilde{\tau}<2\pi$. Иногда эти координаты также наз. эллиптическими.

Коэффициенты Ламе:

$$L_{\tilde{\sigma}}=L_{\tilde{\tau}}=\sqrt{\mathrm{ch}^2\tilde{\sigma}-\cos^2\tilde{\tau}}.$$

Элемент площади:

$$ds=(\mathrm{ch}^2\tilde{\sigma}-\cos^2\tilde{\tau})\,d\tilde{\sigma}\,d\tilde{\tau}.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\mathrm{ch}^2\tilde{\sigma}-\cos^2\tilde{\tau}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{\sigma}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{\tau}^2}\right).$$

Д. Д. Соколов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл от *алгебраической функции* I рода, т. е. интеграл вида

$$\int_{z_0}^{z_1}R(z, w)\,dz, \qquad (1)$$

где $R(z, w)$ — рациональная функция от переменных z и w, связанных алгебраич. уравнением

$$w^2 = f(z) \equiv a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4, \qquad (2)$$

в к-ром $f(z)$ — многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней. При этом обычно подразумевается, что интеграл (1) нельзя выразить через одни только элементарные функции. В том случае, когда такое выражение возможно, интеграл (1) наз. *псевдоэллиптическим интегралом*.

Название Э. и. связано с тем, что впервые они появились при спрямлении дуги эллипса и других кривых 2-го порядка в работах кон. 17 — нач. 18 вв. Я. Бернулли (J. Bernoulli), И. Бернулли (J. Bernoulli), Дж. К. Фаньяно деи Тоски (G. C. Fagnano dei Toschi), Л. Эйлер (L. Euler) заложили основы теории Э. и. и *эллиптических функций*, возникающих при *обращении эллиптических интегралов*.

Уравнению (2) соответствует двулистная компактная риманова поверхность F рода $g=1$, гомеоморфная тору, на к-рой z, w, а следовательно, и $R(z, w)$, рассматриваемые как функции точки поверхности F, однозначны. Интеграл (1) задается как интеграл $\int_L \omega$ от *абелева дифференциала* $\omega = R(z, w)dz$ на F, взятый вдоль некрого спрямляемого пути L. Задание начальной z_0 и конечной z_1 точек этого пути L, вообще говоря, не вполне определяет значение Э. и. (1), или, иначе говоря, Э. и. (1) есть многозначная функция от z_0 и z_1.

Любой Э. и. можно выразить в виде суммы элементарных функций и линейной комбинации канонич. Э. и. I, II и III рода. Последние записываются, напр., следующим образом:

$$I_1 = \int \frac{dz}{w}, \quad I_2 = \int \frac{z\,dz}{w}, \quad I_3 = \int \frac{dz}{(z-c)\,w},$$

где c — параметр Э. и. III рода.

Дифференциал I рода dz/w, соответствующий Э. и. I рода I_1, всюду на римановой поверхности F конечен, дифференциалы II и III рода имеют соответственно особенность типа полюса с нулевым вычетом или простого полюса. Рассматриваемые как функции верхнего предела интегрирования при фиксированном нижнем пределе, все три Э. и. на F многозначны. Если же разрезать F вдоль двух циклов базиса гомологий, то в получившейся односвязной области F^* интегралы I_1 и I_2 будут однозначны, а интеграл I_3 сохраняет еще логарифмич. многозначность, появляющуюся при обходе простого полюса. При переходе через разрез каждый интеграл изменяется на целое кратное соответствующего периода, или модуля периодичности, а I_3 имеет еще, кроме того, третий логарифмический период $2\pi i$, соответствующий обходу особой точки. Таким образом, вычисление интеграла типа (1) сводится к вычислению интеграла вдоль пути L^*, соединяющего на F^* точки z_0 и z_1, и прибавлению соответствующей линейной комбинации периодов.

Подвергая переменное z нек-рым преобразованиям, можно привести функцию w и основные Э. и. к нормальным формам.

В нормальной форме Вейерштрасса выполняется соотношение

$$w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

и интеграл

$$u = -\int_z^\infty \frac{dz}{w}$$

имеет периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$. Обращение этого Э. и. дает эллиптич. функцию Вейерштрасса $\wp(z)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ и инвариантами g_2, g_3 (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*). Вычисление периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ по заданным инвариантам производится при помощи *модулярной функции* $J(\tau)$. Если в нормальном интеграле II рода

$$\int \frac{z\,dz}{w}$$

принять нормальный интеграл I рода u в качестве переменной интегрирования, то при надлежащем выборе постоянной интегрирования будет выполняться равенство

$$\int \frac{z\,dz}{w} = -\zeta(u),$$

где $\zeta(u)$ — дзета-функция Вейерштрасса. При этом периоды нормального интеграла II рода равны $-2\eta_1 = -2\zeta(\omega_1)$, $-2\eta_3 = -2\zeta(\omega_3)$. Нормальный интеграл III рода по Вейерштрассу имеет вид

$$I(z, w; z_0, w_0) = \frac{1}{2}\int \frac{(w+w_0)dz}{(z-z_0)w} = \log \frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)\,\sigma(u_0)} + u\frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)},$$

где $\sigma(u)$ — сигма-функция Вейерштрасса, $z_0 = \wp(u_0)$, $w_0 = \wp'(u_0)$, $u_0 \not\equiv 0 \pmod{(2\omega_1, 2\omega_3)}$. При этом справедливо правило перестановки:

$$I(z, w; z_0, w_0) - I(z_0, w_0; z, w) = \pm\frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)}u - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}u_0 + (2n+1)\pi i,$$

где n — целое число. Периоды нормального интеграла III рода имеют вид

$$-u_0\eta_1 + \zeta(u_0)\,\omega_1 + 2n_1\pi i;$$
$$-u_0\eta_3 + \zeta(u_0)\,\omega_3 + 2n_3\pi i,$$

где n_1, n_3 — целые, $2\pi i$ — логарифмич. период.

В приложениях чаще встречается нормальная форма Лежандра. При этом

$$w^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

где k наз. модулем Э. и., k^2 иногда наз. лежандровым модулем, $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительным модулем. Чаще всего имеет место нормальный случай, когда $0<k<1$, а $z=x=\sin t$ — действительное переменное. Э. и. I рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = F(\varphi, k);$$

он наз. также неполным Э. и. I рода; $\varphi = \operatorname{am} u$ наз. амплитудой Э. и. I рода. Амплитуда есть бесконечнозначная функция от u. Обращение нормального интеграла I рода приводит к эллиптич. функции Якоби $z = \operatorname{sn} u$ (см. *Якоби эллиптические функции*).

Нормальный интеграл II рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$\int_0^z \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt = E(\varphi, k) = E(u;)$$

он наз. также неполным Э. и. II рода.

Интегралы

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k) = K,$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = K'(k) = K',$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k) = E,$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = E'(k) = E'$$

наз. полными Э. и. соответственно I и II рода. Лежандровы интегралы I рода имеют периоды $4K$ и $2iK'$, II рода — периоды $4E$ и $2i(K'-E')$.

Нормальный интеграл III рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$\int_0^z \frac{dx}{(1-n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{dt}{(1-n^2\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \Pi(\varphi;\ n^2,\ k) = \Pi(u;\ n^2),$$

где n^2 — параметр, чаще всего $-\infty<n^2<\infty$. При $-\infty<u^2<0$ или $k^2<u^2<1$ он наз. круговым интегралом, а при $0<n^2<k^2$ или $1<n^2$ — гиперболич. интегралом.

По Якоби нормальный интеграл III рода определяется несколько иначе:

$$\Pi_J(u;\ a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\cdot\mathrm{cn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,a\int_0^u \frac{\mathrm{sn}^2 u\,du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\cdot\mathrm{sn}^2 a},$$

где $n^2=k^2sn^2a$. Связь между интегралами III рода Якоби и Лежандра выражается формулой

$$\Pi(u;\ n^2) = u + \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,a}\Pi_J(u;\ a);$$

круговой характер соответствует мнимым a, гиперболический — действительным a.

Наряду с эллиптич. функциями, Э. и. находят многочисленные и важные применения в различных вопросах анализа и геометрии, физики, в частности механики, астрономии и геодезии. Составлены таблицы Э. и. подробные руководства по теории Э. и. и эллиптич. функций, а также сводки формул.

Лит.: [1] Беляков В. М., Кравцова Р. П., Рапопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, т. 1—2, М., 1962—63; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977.

См. также лит. при ст. *Эллиптическая функция.*

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР — линейный дифференциальный или псевдодифференциальный оператор с обратимым главным символом (см. *Символ оператора*).

Пусть A — дифференциальный или псевдодифференциальный оператор (вообще говоря, матричный) на области $X\subset\mathbb{R}^n$ с главным символом $\sigma_A(x,\xi)$. Если A — оператор порядка m, то $\sigma_A(x,\xi)$ — матричная функция на $X\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ положительно однородная порядка m по переменному $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0$. Тогда эллиптичность означает, что $\sigma_A(x,\xi)$ — обратимая матрица при всех $x\in X$, $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0$. Это понятие эллиптичности наз. эллиптичностью по Петровскому.

Другой вид эллиптичности, эллиптичность по Дуглису — Ниренбергу, предполагает, что A — матричный оператор, $A=(A_{ij})_{i,j=1}^d$, где A_{ij} — оператор порядка s_j-t_i, $(s_1,\ldots,s_d)$ и $(t_1,\ldots,t_d)$ — нек-рые наборы действительных чисел. Тогда можно образовать матрицу главных символов $\sigma_A(x,\xi)=(\sigma_{A_{ij}}(x,\xi))_{i,j=1}^d$, где функция $\sigma_{A_{ij}}(x,\xi)$ положительно однородна по ξ порядка s_j-t_i. Тогда эллиптичность по Дуглису — Ниренбергу означает, что матрица $\sigma_A(x,\xi)$ обратима при всех $x\in X$, $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0$.

Эллиптичность оператора A на многообразии означает эллиптичность операторов, к-рые получаются из него при его записи в локальных координатах. Равносильным образом эту эллиптичность можно описать как обратимость главного символа σ_A, к-рый является функцией на $T^*X\setminus 0$, где T^*X — кокасательное расслоение к X, $T^*X\setminus 0$ — то же расслоение без нулевого сечения. Если оператор A действует в сечениях векторных расслоений $A: C^\infty(X,E)\to C^\infty(X,F)$, то эллиптичность оператора означает обратимость линейного оператора $\sigma_A(x,\xi): E_x\to F_x$ для любой точки $(x,\xi)\in T^*X\setminus 0$ (здесь E_x, F_x — слои расслоений E и F в точке x). Примером Э. о. является *Лапласа оператор*.

Эллиптичность оператора равносильна отсутствию у него действительных характеристич. направлений. Эллиптичность можно также понимать микролокально. А именно, эллиптичность оператора A в точке (x_0,ξ_0) означает обратимость матрицы (линейного отображения) $\sigma_A(x_0,\xi_0)$.

Эллиптичность псевдодифференциального оператора на многообразии с краем (напр., оператора из алгебры Бутеде Монвеля [10], [11]) в граничной точке означает обратимость нек-рого модельного оператора граничной задачи на полуоси. Этот модельный оператор получается из исходного выпрямлением границы, замораживанием коэффициентов главных частей оператора и граничных условий в рассматриваемой точке и взятием преобразования Фурье по касательным направлениям (от x' к ξ') с последующим фиксированием ненулевого вектора ξ', к-рый можно рассматривать как кокасательный вектор к границе. В случае дифференциального оператора и дифференциальных граничных условий описанное условие эллиптичности может быть записано в алгебраич. терминах. В этом случае (а также иногда и в общем случае) это условие часто наз. условием Шапиро — Лопатинского, или условием коэрцитивности.

Наиболее характерными свойствами Э. о. являются: 1) свойства регулярности решений соответствующих уравнений; 2) точные априорные оценки; 3) фредгольмовость Э. о. на компактных многообразиях.

Ниже, для простоты, коэффициенты и символы всех операторов считаются бесконечногладкими.

Пусть дано уравнение $Au=f$, где A — Э. о. Простейшее свойство регулярности таково: если $f\in C^\infty$, то $u\in C^\infty$. Это свойство верно для любых дифференциальных Э. о. с гладкими коэффициентами или псевдодифференциальных Э. о. (с гладкими символами). Оно верно и для Э. о. краевой задачи (т. е. верно вплоть до границы при выполнении условия Шапиро — Лопатинского). Уточнением этого свойства является его микролокальный вариант: если оператор A эллиптичен в точке (x_0,ξ_0) (здесь x_0 — внутренняя точка X) и $(x_0,\xi_0)\notin WF(f)$, то $(x_0,\xi_0)\in WF(u)$, где WF означает *фронт волновой* (распределения или функции). Другое уточнение: если A — Э. о. порядка m и $f\in W_p^s$, то $u\in W_p^{s+m}$, где W_p^s — *Соболева пространство*, $1<p<\infty$. Если A — дифференциальный Э. о. с аналитич. коэффициентами, то из аналитичности f вытекает аналитичность u (в случае уравнений с постоянными коэффициентами это свойство необходимо и достаточно для эллиптичности). Соответствующий микролокальный вариант также справедлив и формулируется на языке аналитических волновых фронтов.

Локальная априорная оценка для Э. о. A порядка m имеет вид

$$\|u\|_{W_p^{s+m}(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|_{W_p^s(\Omega')} + \|u\|_{W_p^{-N}(\Omega')}\right), \qquad (1)$$

где $1<p<\infty$, $s\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{R}$, Ω и Ω' — две области в $\mathbb{R}^n$, причем $\overline{\Omega}$ — компакт, принадлежащий Ω', $Au=f$ в Ω', постоянная C не зависит от u (но может зависеть от s, Ω, Ω', N).

Глобальная априорная оценка для Э. о. A порядка m на компактном многообразии X без края имеет тот же вид, что и (1), но с заменой Ω и Ω' на X. В случае многообразия с краем вместо норм пространств W_p^s в (1) нужно взять нормы, учитывающие структуру вектор-функций u и f (содержащих, вообще говоря, граничные компоненты). Напр., пусть на компактном многообразии X с краем Y задан Э. о. вида $u\mapsto(Au, B_1u|_Y, \ldots, B_ru|_Y)$, где A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m, B_j — дифференциальные операторы порядков m_j, причем $m_j<m$ и выполнено условие Шапи-

ро — Лопатинского (для оператора A и системы граничных операторов $B_1, \ldots, B_r$). Тогда априорная оценка в пространствах Соболева $H^s = W_2^s$ имеет вид

$$\|u\|_s \leqslant C\left(\|Au\|_{s-m} + \sum_{j=1}^{r} \|B_j u\|'_{s-mj-1/2} + \|u\|_0\right),$$

где $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве $H^s(X)$, $\|\cdot\|'_s$ — норма в пространстве $H^s(Y)$, $s \geqslant m$, $u \in H^s(X)$ и постоянная $C > 0$ не зависит от u (но может зависеть от A, B_j, s, X, Y и выбора норм в пространствах Соболева).

Э. о. на компактном многообразии (возможно, с краем) определяет фредгольмов оператор в соответствующих соболевских пространствах, а также в пространствах бесконечно дифференцируемых функций. Его индекс зависит лишь от главного символа и не меняется при непрерывных деформациях главного символа. Это позволяет поставить вопрос о вычислении индекса (см. *Индекса формулы*).

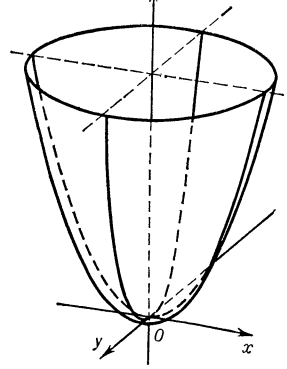
Важную роль играют Э. о. с параметром (см. [12]). При выполнении условия эллиптичности с параметром на компактном многообразии при больших по модулю значениях параметра рассматриваемый Э. о. оказывается обратимым, причем в глобальной априорной оценке типа (1) можно опустить последний член (младшую норму и в правой части).

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1973; [4] Лионс Ж. Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, пер. с франц., М., 1971; [5] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [6] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, пер. с англ., М., 1962; [7] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [8] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [9] Палей Р., Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [10] Rempel S., Schulze B. W., Index theory of elliptic boundary problems, B., 1982; [11] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971, v. 126, p. 11—51; [12] Агранович М. С., Вишик М. И., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 3, с. 53—161.

М. А. Шубин.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД — незамкнутая *поверхность второго порядка*. Канонич. уравнение Э. п. имеет вид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0.$$



Э. п. расположен по одну сторону от плоскости Oxy (см. рис.). Сечения Э. п. плоскостями, параллельными плоскости Oxy, являются эллипсами с равным эксцентриситетом (если $p=q$ — окружностями, Э. п. наз. параболоидом вращения). Сечения Э. п. плоскостями, проходящими через ось Oz, являются параболами. Сечения Э. п. плоскостями Oyz и Oxz наз. главными параболами Э. п. Ось симметрии Э. п. наз. его осью, а точка пересечения оси с Э. п.— вершиной.

А. Б. Иванов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР — цилиндрическая *поверхность второго порядка*, для к-рой направляющей служит эллипс. Если эллипс действительный, то Э. ц. наз. действительным и его канонич. уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

если эллипс мнимый, то Э. ц. наз. мнимым и его канонич. уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

А. Б. Иванов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ в данной точке — дифференциальное уравнение с частными производными порядка m

$$\sum a_{i_1 \ldots i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_n}} + L_1 u = f, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m,$$

где L_1 — дифференциальный оператор порядка ниже m, характеристич. форме к-рого

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum a_{i_1 \ldots i_n} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = m$$

соответствует канонич. уравнение

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

не имеющее действительных точек, кроме $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Для уравнения 2-го порядка характеристич. форма является квадратичной

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$$

и может быть при помощи неособого аффинного преобразования переменных $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i = 1, \ldots, n$, приведена к виду

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2.$$

Когда все $\alpha_i = 1$, или $\alpha_i = -1$, уравнение наз. Э. т. у.

Уравнение наз. Э. т. у. в области своего задания, если оно эллиптично в каждой точке этой области.

Э. т. у. наз. равномерно эллиптическим уравнением, если существуют отличные от нуля действительные числа k_0 и k_1 такие, что

$$k_0 \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Лит. см. при ст. *Дифференциальное уравнение с частными производными.*

А. Б. Иванов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы приближенного отыскания решений дифференциальных уравнений с частными производными эллиптич. типа. Среди различных классов задач, к-рые ставятся для Э. т. у., наиболее хорошо изучены краевые задачи и задачи с данными Коши. Последние поставлены некорректно и требуют для решения специальных методов [1]. Более типичны для Э. т. у. краевые задачи и для их приближенного решения разработано много различных численных методов (см. [2], [3]). Наиболее широкое распространение в вычислительной практике получили сеточные методы, а среди них — метод конечных разностей (см. *Разностные методы*, *Разностных схем теория*, [4], [5]) и метод конечных элементов (м. к. э.) (см. [6]—[9]). Хотя указанные методы и различаются подходом к построению приближенного решения — в первом из них аппроксимируются (см. *Аппроксимация дифференциальной краевой задачи разностной*) уравнение и граничные (краевые) условия, а во втором — само искомое решение,— однако получающиеся для отыскания приближенного решения алгебраич. системы близки по структуре, а в ряде случаев и вовсе совпадают.

Суть метода конечных разностей состоит в следующем: область непрерывного изменения аргументов исходной задачи заменяется дискретным множеством то-

чек (узлов), называемым с е т к о й; производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, аппроксимируются разностными отношениями; при этом краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой алгебраич. уравнений (р а з н о с т н о й с х е м о й). Если полученная таким образом разностная краевая задача разрешима (быть может, только на достаточно мелкой сетке) и ее решение при безграничном измельчении сетки приближается (сходится) к решению исходной задачи для дифференциального уравнения, то полученное на любой фиксированной сетке решение разностной задачи и принимается за приближенное решение исходной задачи.

Простейшим примером Э. т. у. является уравнение Пуассона (уравнение Лапласа, если $f(x, y)\equiv 0$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x, y). \qquad (1)$$

Примеры разностных схем для уравнения Пуассона приведены в статьях *Краевая задача*; численные методы решения для уравнений с частными производными и *Разностное уравнение*.

В м. к. э. аппроксимируется обобщенное решение краевой задачи. Если, напр., уравнение (1) задано при $(x, y)\in\Omega$ и для него рассматривается однородная задача Дирихле, т. е.

$$u(x, y)\,|_{\partial\Omega}=0, \qquad (2)$$

где $\partial\Omega$ — граница Ω, то обобщенным решением задачи (1), (2) наз. функция $u\in \mathring{W}_2^1(\Omega)=\mathring{H}^1(\Omega)$, к-рая при любой функции $v\in\mathring{H}^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_\Omega fv\,dx\,dy. \qquad (3)$$

Здесь $\mathring{H}^1(\Omega)$ — *Соболева пространство* функций, обращающихся в нуль (в смысле обобщенных функций) на $\partial\Omega$. Наиболее важный класс м. к. э. образуют м. к. э. галеркинского типа (конформные м. к. э.). В *Галеркина методе* приближенное решение ищется в конечномерном подпространстве того пространства, на к-ром задано интегральное тождество, определяющее обобщенное решение. Применительно к задаче (3) приближенным по Галеркину решением наз. такая функция $u_h\in S_h(\Omega)\subset\mathring{H}^1(\Omega)$, к-рая при любой функции $v\in S_h(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3). В м. к. э. подпространство $S_h(\Omega)$ должно обладать нек-рыми специальными свойствами (см. *Разностная вариационная схема*).

Специфику конечномерного подпространства, отличающую м. к. э. от других реализаций метода Галеркина, иллюстрирует следующий пример. Пусть область Ω, в к-рой ищется решение задачи (1), (2), есть многоугольник. Область Ω разбивается на малые треугольники (конечные элементы) так, чтобы любые два треугольника либо вовсе не содержали общих точек, либо имели одну общую вершину, либо одну общую сторону. В качестве конечномерного подпространства пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$ выбирается пространство $S_h(\Omega)$ кусочно линейных, линейных над каждым треугольником, непрерывных и обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ функций. Размерность пространства $S_h(\Omega)$ совпадает с числом вершин треугольников (без учета их кратности), не попавших на границу $\partial\Omega$. Указанные вершины наз. у з л а м и. В качестве базиса $S_h(\Omega)$ можно взять совокупность таких элементов $\varphi_i\in S_h(\Omega)$, к-рые отличны от нуля лишь в одном узле. Характерной особенностью этого базиса является то, что у каждого его элемента носитель минимален и образован объединением всех треугольников с общей вершиной в том узле, где данный базисный элемент отличен от нуля. Благодаря этому свойству на каждом конечном элементе (к. э.) отлично от нуля не более трех (по числу вершин, не попавших на $\partial\Omega$) базисных функций, что позволяет использовать сужения указанных базисных функций на к. э. как базис на к. э. и проводить все вычисления на к. э. без привлечения информации о других к. э. Указанное свойство базиса делает м. к. э. весьма технологичным с точки зрения использования ЭВМ [10].

Если, напр., Ω — единичный квадрат, а разбиение Ω на к. э. осуществляется тремя семействами эквидистантных прямых

$$x=mh,\quad y=nh,\quad y=x+ph,\quad m,\ n,\ p\in\mathbb{Z},\quad h^{-1}=N\in\mathbb{N},$$

то при условии, что отличные от нуля значения базисных функций равны единице, для коэффициентов c_{mn} разложения приближенного решения

$$u_h(x, y)=\sum\nolimits_{m,n}c_{mn}\varphi_{mn}(x, y)$$

получают систему уравнений, в точности совпадающую с системой уравнений метода конечных разностей. При этом c_{mn} будут значениями приближенного решения в узлах.

Точность описанного м. к. э. характеризуется оценкой

$$\|u-u_n\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}=O(h),$$

где h — максимальный линейный размер к. э. Чтобы получить бо́льшую точность, нужно приближенное решение искать не в пространстве кусочно линейных функций, а в пространстве кусочно квадратичных или, вообще, кусочно полиномиальных функций. Точность в этом случае при надлежащей гладкости искомого решения будет $O(h^k)$, где k — степень используемых многочленов.

Помимо треугольных к. э. можно использовать и четырехугольные к. э., однако, если стороны четырехугольников не параллельны координатным осям, то необходимо применять изопараметрич. технику, т. е. сначала отобразить рассматриваемый к. э. на канонич. к. э. (в данном случае на прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям) при помощи невырожденного преобразования, обратное к к-рому задается теми же самыми функциями, что и приближенное решение на канонич. к. э. Можно использовать треугольники и четырехугольники с криволинейными сторонами (снова применяя изопараметрич. технику), что необходимо при решении задач в областях с гладкой границей методами более высо́кого порядка точности, чем первый.

Помимо м. к. э. галеркинского типа, существуют так наз. неконформные м. к. э., решения в к-рых ищутся в пространствах, не являющихся подпространствами исходных пространств. Особенно часто такие м. к. э. применяются для задач, связанных с Э. т. у. более высокого, чем второй, порядка.

И метод конечных разностей, и м. к. э. приводят к системам линейных алгебраич. уравнений большого порядка с разреженными матрицами; подавляющее большинство элементов этих матриц нулевые (см. [11], [12]). Получил значительное развитие еще один метод приближенного решения краевых задач для Э. т. у.— метод граничных элементов [13].

Лит.: [1] Л а т т е с Р., Л и о н с Ж.-Л., Метод квазиобращения и его приложения, пер. с франц., М., 1970; [2] К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [3] М и х л и н С. Г., С м о л и ц к и й Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965; [4] С а м а р с к и й А. А., А н д р е е в В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [5] B i r k h o f f G., в кн.: Elliptic problem solvers, N. Y.— L., 1981, p. 17—38; [6] З е н к е в и ч О. К., Метод конечных элементов в технике, пер. с англ., М., 1975; [7] С т р е н г Г., Ф и к с Д ж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [8] С ь я р л е Ф., Метод конечных элементов для эллиптических задач, пер. с англ., М., 1980; [9] М и т ч е л л Э., У э й т Р., Метод

конечных элементов для уравнений с частными производными, пер. с англ., М., 1981; [10] Hinton E., Owen D. R. J., Finite element programming, L., 1977; [11] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [12] Джордж А., Лю Дж., Численное решение больших разреженных систем уравнений, пер. с англ., М., 1984; [13] Бреббиа К., Уокер С., Применение метода граничных элементов в технике, пер. с англ., М., 1982. *В. Б. Андреев.*

ЭМДЕНА УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^\alpha=0, \qquad (1)$$

или, в самосопряженной форме,

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+x^2y^\alpha=0,$$

где $\alpha>0$, $\alpha\neq1$,— константа. Точка $x=0$ является для Э. у. особой. Заменой переменной $x=1/\xi$ уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{y^\alpha}{\xi^4}=0,$$

а заменой $y=\eta/x$ — к виду

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{\eta^\alpha}{x^{\alpha-1}}=0.$$

После замены переменных

$$x=e^{-t},\ y=e^{\mu t}u,\ \mu=2/(\alpha-1),$$

и последующего понижения порядка подстановкой $u'=v(u)$ получается уравнение 1-го порядка

$$\frac{dv}{du}=-(2\mu-1)-\frac{\mu(\mu-1)u+u^\alpha}{v}.$$

Уравнение (1) было получено Р. Эмденом [1] в связи с изучением условий равновесия политропного газового шара; эта задача сводится к задаче существования у уравнения (1) с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=0$ решения, определенного на нек-ром отрезке $[0,\ x_0]$, $0<x_0<\infty$, и обладающего свойствами:

$$y(x)>0 \text{ при } 0\leqslant x<x_0,\ y(x_0)=0.$$

Иногда уравнение (1) наз. также уравнением Лейна — Эмдена.

Более общими, чем Э. у., являются уравнение Фаулера

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+x^\lambda y^\alpha=0,\ \lambda>0,\ \alpha>0,$$

и уравнение Эмдена — Фаулера

$$\frac{d}{dx}\left(x^\rho\frac{dy}{dx}\right)\pm x^\lambda y^\alpha=0, \qquad (2)$$

где ρ, λ, $\alpha\neq1$ — действительные параметры. Как частный случай это уравнение включает уравнение Томаса — Ферми

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^{3/2}}{\sqrt{x}},$$

возникающее при изучении распределения электронов в атоме. Если $\rho\neq1$, то уравнение (2) заменой переменных может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2w}{ds^2}\pm s^\sigma w^\alpha=0.$$

Имеются различные результаты качественного и асимптотич. исследования решений уравнения Эмдена — Фаулера (см., напр., [2], [3]). Подробно изучалось также уравнение типа Эмдена — Фаулера

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\,|\,y\,|^\alpha\operatorname{sign}y=0$$

(см. о нем и его аналоге n-го порядка в [4]).

Лит.: [1] Emden R., Gaskugeln, Lpz.— B., 1907; [2] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954; [3] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1954; [4] Кигурадзе И. Т., Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тб., 1975. *Н. Х. Розов.*

ЭМПИРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, распределение выборки, — распределение вероятностей, к-рое определяется по выборке для оценивания истинного распределения. Пусть результаты наблюдений $X_1,\ \ldots,\ X_n$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $\mathcal{F}(x)$ и пусть $X_{(1)}<X_{(2)}<\ldots<X_{(n)}$ — соответствующий вариационный ряд. Эмпирическим распределением, соответствующим $X_1,\ \ldots,\ X_n$, наз. дискретное распределение, приписывающее каждому значению X_k вероятность $1/n$. Функция Э. р. $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ наз. эмпирической функцией распределения, является ступенчатой функцией со скачками, кратными $1/n$, в точках, определяемых величинами $X_{(1)},\ \ldots,\ X_{(n)}$:

$$\hat{\mathcal{F}}_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant X_{(1)},\\ \frac{k}{n}, & X_{(k)}<x\leqslant X_{(k+1)},\ 1\leqslant k\leqslant n-1,\\ 1, & x>X_{(n)}.\end{cases}$$

При фиксированных значениях $X_1,\ \ldots,\ X_n$ функция $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ обладает всеми свойствами обычной функции распределения. При каждом фиксированном действительном x функция $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ является случайной величиной как функция $X_1,\ \ldots,\ X_n$. Таким образом, Э. р., соответствующее выборке $X_1,\ \ldots,\ X_n$, задается семейством случайных величин $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$, зависящих от действительного параметра x. При этом для фиксированного x

$$\mathsf{E}\hat{\mathcal{F}}_n(x)=\mathcal{F}(x),\quad \mathsf{D}\hat{\mathcal{F}}_n(x)=\frac{1}{n}\mathcal{F}(x)[1-\mathcal{F}(x)]$$

и

$$\mathsf{P}\left\{\hat{\mathcal{F}}_n(x)=\frac{k}{n}\right\}=C_n^k[\mathcal{F}(x)]^k[1-\mathcal{F}(x)]^{n-k}.$$

В соответствии с законом больших чисел $\hat{\mathcal{F}}_n(x)\xrightarrow{\mathsf{P}}\mathcal{F}(x)$, $n\longrightarrow\infty$, при каждом x. Это означает, что $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ — несмещенная и состоятельная оценка функции распределения $\mathcal{F}(x)$. Функция Э. р. равномерно по x сходится с вероятностью 1 к $\mathcal{F}(x)$ при $n\longrightarrow\infty$ или, если

$$D_n=\sup_x|\hat{\mathcal{F}}_n(x)-\mathcal{F}(x)|,$$

то

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}D_n=0\right\}=1$$

(теорема Гливенко — Кантелли).

Величина D_n служит мерой близости $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ к $\mathcal{F}(x)$. А. Н. Колмогоров (1933) нашел предельное распределение: для непрерывной функции $\mathcal{F}(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\sqrt{n}\,D_n<z\}=K(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^ke^{-2k^2z^2},\ z>0.$$

Если $\mathcal{F}(x)$ неизвестна, то для проверки гипотезы о том, что эта функция есть заданная непрерывная функция $\mathcal{F}_0(x)$, применяются критерии, основанные на статистиках типа D_n (см. *Колмогорова критерий*, *Колмогорова — Смирнова критерий*, *Непараметрические методы статистики*).

Моменты и любые другие характеристики Э. р. наз. выборочными (эмпирическими) моментами и характеристиками, напр.:

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ — выборочное среднее,

$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-X)^2$ — выборочная дисперсия,

$\hat{\alpha}_r=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^r$ — выборочный момент r-го порядка.

Выборочные характеристики служат статистич. оценками соответствующих характеристик исходного распределения.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Вандер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984. *А. В. Прохоров.*

ЭНГЕЛЕВ ЭЛЕМЕНТ — элемент кольца Ли или ассоциативного кольца, для к-рого определяемое им внутреннее дифференцирование является нильпотентным. Если все элементы конечномерной алгебры Ли над нек-рым полем энгелевы, то алгебра нильпотентна (см. *Энгеля теорема*). Индекс нильпотентности упомянутого дифференцирования наз. индексом энгелевости элемента. Совокупность Э. э. алгебры Ли в общем случае не является даже подпространством. Однако при наложении дополнительных условий типа обобщенной разрешимости эта совокупность оказывается подалгеброй и даже идеалом [1]. При наличии Э. э. индекса 2 алгебра Ли наз. сильно вырожденной. Наименьший идеал алгебры Ли, фактор-алгебра по к-рому не является сильно вырожденной, наз. радикалом Кострикина.

Лит.: [1] Amayo R. K., Stewart I., Infinite-dimensional Lie algebras, Leyden, 1974; [2] Кострикин А. И., в кн.: Избранные вопросы алгебры и логики, Новосиб., 1973, с. 142—60. *Ю. А. Бахтурин.*

ЭНГЕЛЕВА АЛГЕБРА — ассоциативная алгебра или алгебра Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условию Энгеля: для всякого $X\in\mathfrak{g}$ внутреннее дифференцирование $\operatorname{ad}X$ нильпотентно. Иначе говоря, все элементы Э. а.— *энгелевы элементы* (см. также *Ли нильалгебра*).

Ю. А. Бахтурин.

ЭНГЕЛЕВА ГРУППА — группа G, в к-рой для любых двух элементов a, $b\in G$ существует такое целое $n=n(a, b)$, что $[[\ldots[[a, b], b], \ldots], b]=1$, где $[a, b]$— *коммутатор* элементов a и b. Если это число n можно выбрать не зависящим от a, b, то G наз. Э. г. конечного класса n. Класс Э. г. содержит класс локально нильпотентных групп, но не совпадает с ним. Всякая нильпотентная группа класса n будет Э. г. того же класса. Э. г. класса 2 являются нильпотентными группами класса не большего 3.

Названо по имени Ф. Энгеля (F. Engel).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *Н. Н. Вильямс.*

ЭНГЕЛЯ ТЕОРЕМА: пусть для конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k линейные операторы

$$\operatorname{ad}X\ (\text{где } \operatorname{ad}X(Y)=[X, Y])$$

нильпотентны для всех $X\in\mathfrak{g}$. Тогда существует базис алгебры $\mathfrak{g}$, относительно к-рого матрицы всех операторов $\operatorname{ad}X$ треугольны и имеют нулевую диагональ.

Ф. Энгель доказал (ок. 1887, опубликовано в [1]), что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с указанным свойством разрешима, откуда, в силу *Ли теоремы*, непосредственно вытекает сформулированное выше утверждение. Первое опубликованное доказательство Э. т. принадлежит В. Киллингу [2], указывавшему на приоритет Ф. Энгеля. Э. т. формулируется часто в следующей более общей форме: если $\rho:\mathfrak{g}\to\operatorname{End}V$ — линейное представление конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V ($\mathfrak{g}$ и V — над произвольным полем), причем $\rho(X)$ — нильпотентный эндоморфизм для любого $X\in\mathfrak{g}$, то существует ненулевой вектор $v\in V$ такой, что $\rho(X)v=0$ для любого $X\in\mathfrak{g}$. Если V конечномерно, то отсюда выводится существование в V базиса, относительно к-рого все $\rho(X)$ имеют треугольные матрицы с нулевой диагональю (или, что то же, существует полный флаг $F=\{V_i\}$ в V, для к-рого $\rho(X)(V_i)\subset V_{i-1}$ для всех $X\in\mathfrak{g}$ и $i\geqslant 1$). Заключение Э. т. справедливо также для любого представления ρ, для к-рого алгебра Ли $\rho(\mathfrak{g})$ является линейной оболочкой нек-рого своего подмножества, состоящего из нильпотентных эндоморфизмов и замкнутого относительно операции коммутирования [4].

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ наз. энгелевой, если любой $X\in\mathfrak{g}$ является *энгелевым элементом*, т. е. если все операторы $\operatorname{ad}X$, $X\in\mathfrak{g}$. нильпотентны или, что то же, если для любого X найдется такое n, что

$$\underbrace{[X, [X\ldots[X}_{n}, Y]\ldots]=0$$

для любого $Y\in\mathfrak{g}$. Конечномерная алгебра Ли энгелева тогда и только тогда, когда она нильпотентна. Для бесконечномерных алгебр нильпотентность не вытекает из энгелевости, однако конечно порожденная алгебра Ли, в к-рой $(\operatorname{ad}X)^n=0$ для нек-рого n (где n не зависит от X), нильпотентна [3].

Лит.: [1] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd 3, Lpz., 1893; [2] Killing W., «Math. Ann.», 1888, Bd 31, S. 252—90; [3] Levitzki J., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 52, p. 1033—35; [4] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [5] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976. *В. В. Горбацевич.*

ЭНДОМОРФИЗМ алгебраической системы — отображение алгебраич. системы A в себя, согласованное с ее структурой. А именно, если A — алгебраич. система, сигнатура к-рой состоит из множества Ω_F символов операций и множества Ω_P символов предикатов, то Э. $\varphi:A\to A$ должен удовлетворять следующим двум условиям:

1) $\varphi(a_1, \ldots, a_n\omega)=\varphi(a_1)\ldots\varphi(a_n)\omega$ для любой n-арной операции $\omega\in\Omega_F$ и любой последовательности элементов $a_1, \ldots, a_n$ системы A;

2) $P(a_1, \ldots, a_n)\Rightarrow P(a_1\varphi, \ldots, a_n\varphi)$ для любого n-местного предиката $P\in\Omega_P$ и любой последовательности элементов $a_1, \ldots, a_n\in A$.

Понятие Э. является частным случаем понятия *гомоморфизма* двух алгебраич. систем. Для любой алгебраич. системы все ее Э. образуют моноид относительно операции последовательного выполнения (суперпозиции) отображений, единицей к-рого служит тождественное отображение основного множества системы (см. *Эндоморфизмов полугруппа*).

Э., для к-рого существует обратный, наз. *автоморфизмом* алгебраич. системы. *М. Ш. Цаленко.*

ЭНДОМОРФИЗМОВ КОЛЬЦО — ассоциативное кольцо $\operatorname{End}A=\operatorname{Hom}(A, A)$, состоящее из всех морфизмов A в себя, где A — объект нек-рой *аддитивной категории* C. Умножение в $\operatorname{End}A$ совпадает с композицией морфизмов, а сложение — со сложением морфизмов, определенным аксиомами аддитивной категории. Тождественный морфизм 1_A является единицей кольца $\operatorname{End}A$. Элемент φ из $\operatorname{End}A$ обратим тогда и только тогда, когда φ — автоморфизм объекта A. Если A и B — нек-рые объекты категории C, то группа $\operatorname{Hom}(A, B)$ обладает естественной структурой правого модуля над кольцом $\operatorname{End}A$ и левого модуля над кольцом $\operatorname{End}B$. Пусть $T:C\to C'$ — ковариантный (соответственно контравариантный) аддитивный функтор из аддитивной категории C в аддитивную категорию C'. Тогда для любого объекта A из C функтор T индуцирует естественный гомоморфизм (соответственно естественный антигомоморфизм) $\operatorname{End}A\to\operatorname{End}(T(A))$.

Пусть C — категория модулей над кольцом R. Для R-модуля A кольцо $\operatorname{End}A$ состоит из всех эндоморфизмов абелевой группы A, перестановочных с умноже-

нием на элементы из R. Сумма эндоморфизмов φ, ψ определяется формулой

$$(\varphi+\psi)(a)=\varphi(a)+\psi(a),\ a\in A.$$

Если R — коммутативно, то кольцо End A обладает естественной структурой R-алгебры. Многие свойства модуля A могут быть охарактеризованы в терминах кольца End A. Напр., модуль A неприводим тогда и только тогда, когда End A является телом.

Произвольный гомоморфизм π ассоциативного кольца K в End A наз. представлением кольца K (эндоморфизмами объекта A). Если K — кольцо с единицей, то накладывается дополнительное условие $\pi(1)=1_A$. Любое ассоциативное кольцо K обладает точным представлением в Э. к. нек-рой абелевой группы A. Причем, если K — кольцо с единицей, то в качестве A можно взять аддитивную группу кольца K, на к-рую элементы из K действуют умножением слева. Если же K — кольцо без единицы и K' — кольцо, полученное из K внешним присоединением единицы к K, то в качестве A можно взять аддитивную группу кольца K'.

В случае абелева многообразия X наряду с кольцом End A, являющимся конечно порожденным $\mathbb{Z}$-модулем, рассматривают алгебру эндоморфизмов (алгебру комплексных умножений) $\mathrm{End}^0 X=\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{End}\,X$.

Лит.: [1] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, т. 1—2, пер. с англ., М., 1977—79; [2] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 21, М., 1983, с. 183—254. *Л. В. Кузьмин.*

ЭНДОМОРФИЗМОВ ПОЛУГРУППА — полугруппа, состоящая из эндоморфизмов нек-рого объекта (множества X, наделенного какой-либо структурой σ) с операцией умножения (последовательного применения выполнения преобразований). Объектом X могут быть векторное пространство, топологич. пространство, алгебраич. система, граф и т. д.; он рассматривается обычно как объект нек-рой категории, причем, как правило, морфизмами в этой категории являются отображения, сохраняющие отношения структуры σ (линейные преобразования, непрерывные преобразования, гомоморфизмы и т. п.). Множество End X всех эндоморфизмов объекта X (т. е. морфизмов на свои подобъекты) является подполугруппой полугруппы T_X всех преобразований множества X (см. *Преобразований полугруппа*).

Полугруппа End X может нести в себе значительную информацию о структуре σ. Напр., если X, Y — векторные пространства размерности $\geqslant 2$ над телами F и H соответственно, то из изоморфизма полугрупп End X и End Y их эндоморфизмов (т. е. линейных преобразований) вытекает изоморфизм пространств X и Y (и в частности, изоморфизм тел F и H). Нек-рые предупорядоченные множества и решетки, всякое булево кольцо и нек-рые другие алгебраич. системы определяются своими Э. п. с точностью до изоморфизма. Этот же результат справедлив и для нек-рых модулей и полугрупп преобразований. Аналогичную информацию об объекте X несут в себе и нек-рые собственные подполугруппы полугруппы End X (напр., полугруппы гомеоморфных преобразований топологич. пространства).

Нек-рые классы объектов X (напр., графы, топологич. пространства) могут быть таким же образом охарактеризованы своими полугруппами частичных эндоморфизмов, т. е. частичных преобразований множества X, являющихся морфизмами их подобъектов.

Лит.: [1] Глускин Л. М., в кн.: Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, т. 2, Л., 1964, с. 3—9; [2] Зыков А. А., Теория конечных графов, Новосиб., 1969; [3] Magill K. D., «Semigroup Forum», 1975/76, v. 11, № 3, p. 189—282; [4] Petrich M., Rings and semigroups, B.— N. Y., 1974. *Л. М. Глускин.*

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД — см. *Ритца метод.*

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО — неравенство, тем или иным образом оценивающее *энергии интеграл.*

Лит.: [1] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными, пер. с япон., М., 1977. *А. Б. Иванов.*

ЭНЕРГИЙ ИНТЕГРАЛ — величина, представляющая собой сумму кинетической и потенциальной энергий механич. системы в нек-рый момент времени.

Пусть, напр., в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей S для уравнения гиперболич. типа

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mathrm{div}\,(p\,\mathrm{grad}\,u)-qu+F(x,t)\equiv -Lu+F(x,t),\quad(1)$$

где

$p\in C^1(G)$, $q\in C(\bar G)$, $p(x)>0$, $q(x)\geqslant 0$, $x\in C(G)$, $\rho\in C(G)$,

поставлена смешанная задача

$$u|_{t=+0}=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0}=u_1(x),\quad(2)$$

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0,\ t\geqslant 0,\quad(3)$$

$\alpha\in C(S)$, $\beta\in C(S)$, $\alpha(x)\geqslant 0$, $\beta(x)\geqslant 0$, $\alpha(x)+\beta(x)>0$.

Классич. решение задачи (2), (3) — функция $u(x,t)$ класса $C^2(G\times(0,\infty))\cap C^1(\overline{G\times(0,\infty)})$, удовлетворяющая уравнению (1) в цилиндре $G\times(0,\infty)$, начальным условиям (2) на нижнем основании и граничным условиям (3) на боковой поверхности цилиндра.

Справедливо соотношение

$$J^2(t)=J^2(0)+\int_0^t\int_G F(x,t)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau,\ t\geqslant 0,\quad(4)$$

где

$$J^2(0)=\frac12\int_G\left(\rho u_1^2+p\,|\,\mathrm{grad}\,u_0\,|^2+qu_0^2\right)dx+$$
$$+\frac12\int_{S_0}p\frac{\alpha}{\beta}u_0^2\,dS.$$

Интегралом энергии наз. величина

$$J^2(t)=\frac12\int_G\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+p\,|\,\mathrm{grad}\,u\,|^2+qu^2\right]dx+$$
$$+\frac12\int_{S_0}p\frac{\alpha}{\beta}u^2\,dS.$$

При $F=0$ равенство (4) принимает вид

$$J^2(t)=J^2(0),\ t\geqslant 0.$$

Физич. смысл Э. и. состоит в том, что полная энергия колеблющейся системы при отсутствии внешних возмущений не меняется со временем (закон сохранения энергии).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981. *А. Б. Иванов.*

ЭНЕРГИЯ МЕР — понятие *потенциала теории*, являющееся аналогом физич. понятия потенциальной энергии системы электрич. зарядов. Пусть для точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$,

$$H(|x|)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x|} & \text{при } n=2,\\ \dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{при } n\geqslant 3\end{cases}\quad(1)$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа и

$$U_\mu(x)=\int H(|x-y|)\,d\mu(y)\quad(2)$$

— ньютонов (при $n\geqslant 3$) или логарифмический (при $n=2$) потенциал борелевской меры μ на $\mathbb{R}^n$.

Ограничиваясь пока случаем $n\geqslant 3$, определяют взаимную энергию неотрицательных мер μ и ν равенством

$$(\mu,\nu)=\int H(|x-y|)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=$$
$$=\int U_\mu(y)\,d\nu(y)=\int U_\nu(x)\,d\mu(x),\quad(3)$$

причем $(\mu, \nu)\geqslant 0$, но может оказаться $(\mu, \nu)=+\infty$. Энергия меры $\mu\geqslant 0$ — это число (μ, μ), $0\leqslant (\mu, \mu)\leqslant +\infty$. Для мер μ, ν произвольного знака можно воспользоваться канонич. разложениями $\mu=\mu^+-\mu^-$, $\nu=\nu^+-\nu^-$ (или любыми разложениями вида $\mu=\mu_1-\mu_2$, $\mu_1\geqslant 0$, $\mu_2\geqslant 0$) и определить взаимную Э. м. равенством

$$(\mu, \nu)=(\mu^+, \nu^+)+(\mu^-, \nu^-)-(\mu^+, \nu^-)-(\mu^-, \nu^+),$$

причем взаимная Э. м. может оказаться и отрицательной, но

$$(\mu, \mu)\geqslant (\sqrt{(\mu^+, \mu^+)}-\sqrt{(\mu^-, \mu^-)})^2\geqslant 0.$$

Совокупность $\mathcal{E}$ всех мер с конечной энергией превращается в предгильбертово векторное пространство со скалярным произведением (μ, ν) и энергетической нормой $\|\mu\|_e=\sqrt{(\mu, \mu)}$. При этом выполняются 1) неравенство Буняковского $|(\mu, \nu)|\leqslant \|\mu\|_e\cdot\|\nu\|_e$ и 2) принцип энергии: если $\|\mu\|_e=0$, то $\mu=0$. А. Картан (H. Cartan) показал, что пространство $\mathcal{E}$ не является полным, но множество $\mathcal{E}^+\subset\mathcal{E}$ неотрицательных мер полно в $\mathcal{E}$.

Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. Среди всех вероятностных мер λ на K, т. е. таких, что $\lambda\geqslant 0$, $\lambda(K)=1$, существует экстремальная емкостная мера λ_0 с минимальной Э. м. (λ_0, λ_0), к-рая связана с емкостью $C(K)$ компакта K соотношением

$$(\lambda_0, \lambda_0)=\int U_{\lambda_0}(x)\,d\lambda_0(x)=\frac{1}{C(K)}. \qquad (4)$$

Если потенциал $U_\mu(x)$ меры $\mu\in\mathcal{E}$ допускает градиент с суммируемым квадратом, то имеет место равенство

$$c(n)\,\|\mu\|_e=\|U_\mu\|, \qquad (5)$$

где

$$\|U_\mu\|=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\operatorname{grad}^2 U_\mu(x)\,dx\right)^{1/2}$$

— норма Дирихле, а $c(n)=(n-2)\,2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $n\geqslant 3$. На самом деле равенство (5) остается в силе для любой меры $\mu\in\mathcal{E}$, причем норма Дирихле $\|U_\mu\|$ определяется при помощи соответствующего предельного перехода.

В случае плоскости $\mathbb{R}^2$ непосредственное применение для определения Э. м. формулы (3) с логарифмич. потенциалом (2) невозможно вследствие особого поведения логарифмич. ядра (1) на бесконечности. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, допускающая функцию Грина $g(x, y)$, и μ — борелевская мера на Ω. Применяя в (3) вместо потенциалов $U_\mu(x)$, $U_\nu(x)$ потенциалы Грина вида

$$G_\mu(x)=\int g(x, y)\,d\mu(y),$$

получают при $n\geqslant 3$ определение Э. м., равносильное данному выше для мер на Ω, к-рое, однако, оказывается пригодным и при $n=2$ с сохранением всех описанных свойств (причем $c(2)=2\pi$).

Лит.: [1] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [2] Уэрмер Дж., Теория потенциала, пер. с англ., М., 1980; [3] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966.

Е. Д. Соломенцев.

ЭННЕПЕРА ПОВЕРХНОСТЬ — алгебраическая *минимальная поверхность*, наложимая на поверхность вращения. Ее параметрич. уравнения:

$$x=\frac{1}{4}(u^3-3u-3uv^2),\quad y=\frac{1}{4}(3v+3u^2v-v^3),$$

$$r=\frac{3}{4}(v^2-u^2).$$

Найдена А. Эннепером (A. Enneper, 1864).

М. И. Войцеховский.

ЭНТРОПИЙНАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ — раздел *эргодической теории*, тесно связанный с теорией вероятностей и теорией информации. Природа этой связи в общих чертах такова.

Пусть $\{T_t\}$ — динамич. система (обычно *измеримый поток* или *каскад*) с фазовым пространством W и *инвариантной мерой* μ. Пусть $f: W\to\mathbb{R}$ — измеримая функция, а ξ — *измеримое разбиение* W на прообразы $f^{-1}(c)$, $c\in\mathbb{R}$ (для дальнейшего достаточно рассматривать прообразы f, имеющей счетное, обычно даже конечное, число значений и соответствующие ξ). Тогда

$$\{t\longmapsto f(T_tw)\}$$

есть стационарный (в узком смысле слова) *случайный процесс* с пространством элементарных событий W. Обычным образом этот процесс можно рассматривать как процесс $\{X_t(\omega)\}$, пространством элементарных событий к-рого служит пространство Ω *выборочных функций* ω, снабженное надлежащей мерой ν, а $X_t(\omega)=\omega(t)$. Отображение

$$\pi\colon W\longrightarrow\Omega,\quad (\pi w)(t)=f(T_tw)$$

является гомоморфизмом пространств с мерой (см. определение в ст. *Метрический изоморфизм*), переводящим $\{T_t\}$ в сдвиги $\{S_t\}$, где $(S_t\omega)(\tau)=\omega(t+\tau)$.

Процесс $\{X_t(\omega)\}$ содержит нек-рую информацию об исходной системе $\{T_t\}$. Это может быть даже полная информация, если π — изоморфизм (тогда говорят, что разбиение ξ — образующее для системы $\{T_t\}$; если T — автоморфизм, то разбиение наз. односторонне образующим для T, если оно является образующим для каскада $\{T^n, n\geqslant 0\}$, и двусторонне образующим для T, если оно — образующее для $\{T^n, n\in\mathbb{Z}\}$). Однако $\{X_t(\omega)\}$ зависит также от выбора f, т. е. прежде всего от ξ (конкретные значения f на элементах ξ здесь менее важны). Для эргодической теории интересны те свойства индивидуального процесса $\{X_t(\omega)\}$ или совокупности таких процессов (получающихся при различных ξ), к-рые являются свойствами самой системы $\{T_t\}$. Однако выделить такие свойства долго не удавалось либо они сводились к известным.

Эту трудность удалось преодолеть в середине 50-х гг. 20 в. А. Н. Колмогорову, к-рый ввел принципиально новый (неспектральный) инвариант — метрич. *энтропию* динамич. системы — и подчеркнул роль возрастающих измеримых разбиений η (уже континуальных), т. е. таких, для к-рых $T_t\eta$ мельче η (mod 0) при $t>0$. (Таким является разбиение, описывающее «прошлое» процесса $\{X_t(\omega)\}$.) (См. также *K-система*, *Точный эндоморфизм*.) Разработка этого круга вопросов (включая вопрос о существовании и свойствах образующих разбиений) составляет предмет Э. т. д. с. в том виде, как она сложилась к сер. 60-х гг. (см. [1]). Существенным добавлением к нему явилась более новая и несколько более специальная теория Д. Орнстейна (D. Ornstein), в к-рой более непосредственным образом используются вспомогательные случайные процессы $\{X_t(\omega)\}$ (см. [2]). Ввиду необходимости обеспечить инвариантность относительно метрич. изоморфизма в обеих частях Э. т. д. с., «колмогоровской» и «орнстейновской», вероятностные и теоретико-информационные идеи выступают в существенно преобразованном виде.

Примером могут служить имеющиеся в Э. т. д. с. два условия типа «регулярности» случайного процесса. Одно из них приводит к определению K-систем. Другое, более ограничительное — очень слабая бернуллиевость, — оказывается необходимым и достаточным для того, чтобы сдвиг в пространстве выборочных функций был изоморфен *Бернулли автоморфизму*. Оно поддается проверке в ряде примеров, исходные определения к-рых не имеют отношения к случайным процессам.

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3—56; [2] Орнстейн Д., Эргодическая тео-

рия, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978.

См. также лит. при статьях *К-система*, *Энтропия*, *Эргодическая теория*. *Д. В. Аносов.*

ЭНТРОПИЯ — теоретико-информационная мера степени неопределенности случайной величины. Если ξ — дискретная случайная величина, определенная на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ и принимающая значения $x_1, x_2, \ldots$ с распределением вероятностей $\{p_k,\ k=1,\ 2, \ldots\}$, $p_k=\mathsf{P}\{\xi=x_k\}$, то Э. определяется формулой

$$H(\xi)=-\sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k \qquad (1)$$

(при этом считается, что $0 \log 0=0$). Основанием логарифма может служить любое положительное число, но обычно рассматривают логарифмы по основанию 2 или e, что соответствует выбору *бит* или *нат* (натуральная единица) в качестве единицы измерения.

Если ξ и η — две дискретные случайные величины, принимающие значения $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, с распределениями вероятностей $\{p_k,\ k=1, 2, \ldots\}$ и $\{q_j,\ j=1, 2, \ldots\}$ соответственно, и $\{p_{k|j},\ k=1, 2, \ldots\}$ — условное распределение ξ при условии, что $\eta=y_j$, $j=1, 2, \ldots$, то (средней) условной Э. $H(\xi|\eta)$ величины ξ относительно η наз. величина

$$H(\xi \mid \eta)=-\sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} p_{k\mid j} \log p_{k\mid j}. \qquad (2)$$

Пусть $\xi=\{\xi_k,\ k=\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ — стационарный процесс с дискретным временем и дискретным пространством значений такой, что $H(\xi_1)<\infty$. Тогда Э. (точнее, средней Э. на символ) $\overline{H}(\xi)$ такого стационарного процесса наз. предел

$$\overline{H}(\xi)=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi^n), \qquad (3)$$

где $H(\xi^n)$ — Э. случайной величины $\xi^n=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Известно, что предел в правой части [3] всегда существует и имеет место равенство

$$\overline{H}(\xi)=\lim_{n\to\infty} H(\xi_n \mid \xi_1, \ \ldots, \ \xi_{n-1}), \qquad (4)$$

где $H(\xi_n|\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — условная Э. ξ_n относительно $\xi^{n-1}=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Э. стационарных процессов находит важные применения в теории динамич. систем.

Если μ и ν — две меры на нек-ром измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{A})$, причем мера μ абсолютно непрерывна относительно ν и $d\mu/d\nu$ — соответствующая производная Радона — Никодима, то Э. $H(d\mu/d\nu)$ меры μ относительно меры ν наз. интеграл

$$H(d\mu/d\nu)=\int_{\Omega} \log \frac{d\mu}{d\nu}\, \nu(d\omega). \qquad (5)$$

Частным случаем Э. меры по мере является *дифференциальная энтропия*.

Из многих возможных обобщений понятия Э. для теории информации одним из самых важных является следующее. Пусть ξ и $\tilde{\xi}$ — две случайные величины, принимающие значения в нек-рых измеримых пространствах $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ соответственно. Пусть заданы распределение $p(\cdot)$ случайной величины ξ и класс W допустимых совместных распределений пары $(\xi, \tilde{\xi})$ в множестве всех вероятностных мер в произведении $(\mathfrak{X}\times\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\mathfrak{X}}\times S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$. Тогда W-энтропией (или Э. при заданном условии *сообщений точности воспроизведения* W) наз. величина

$$H_W(\xi)=\inf I(\xi, \tilde{\xi}), \qquad (6)$$

где $I(\xi, \tilde{\xi})$ — *информации количество* в $\tilde{\xi}$ относительно ξ, а нижняя грань берется по всем парам случайных величин $(\xi, \tilde{\xi})$ таким, что совместное распределение $p(\cdot, \cdot)$ пары $(\xi, \tilde{\xi})$ принадлежит W, а ξ имеет распределение $p(\cdot)$. Класс W совместных распределений $p(\cdot, \cdot)$ часто задают с помощью нек-рой неотрицательной измеримой действительнозначной функции $\rho(x, \tilde{x})$, $x\in\mathfrak{X}$, $\tilde{x}\in\tilde{\mathfrak{X}}$,— меры искажения следующим образом:

$$W=\{p(\cdot, \cdot): \mathsf{E}\rho(\xi, \tilde{\xi})\leqslant\varepsilon\}, \qquad (7)$$

где $\varepsilon>0$ — нек-рое фиксированное число. В этом случае величину, определяемую равенством (6), где W задается (7), называют ε-энтропией (или скоростью как функцией искажения) и обозначают $H_\varepsilon(\xi)$. Напр., если $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — гауссовский случайный вектор с независимыми компонентами, $\mathsf{E}\xi_k=0$, $k=1, 2, \ldots, n$, а функция $\rho(x, \tilde{x})$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{x}=(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ имеет вид

$$\rho(x, \tilde{x})=\sum_{k=1}^{n} (x_k-\tilde{x}_k)^2,$$

то $H_\varepsilon(\xi)$ может быть найдена по формуле

$$H_\varepsilon(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \log\max\left(\frac{\mathsf{E}\xi_k^2}{\lambda}, \ 1\right),$$

где λ определяется из уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \min(\lambda, \ \mathsf{E}\xi_k^2)=\varepsilon.$$

Если ξ — дискретная случайная величина, пространства $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ совпадают, а функция $\rho(x, \tilde{x})$ имеет вид

$$\rho(x, \tilde{x})=\begin{cases} 0, & \text{если } x=\tilde{x}, \\ 1, & \text{если } x\neq\tilde{x}, \end{cases}$$

то ε-Э. при $\varepsilon=0$ равна обычной Э., определяемой в (1), т. е. $H_0(\xi)=H(\xi)$.

Лит.: [1] Шеннон К., Математическая теория связи, в сб.: Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243—332; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Berger T., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), 1971; [4] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969. *Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.*

ЭНТРОПИЯ измеримого разбиения ξ пространства с нормированной мерой (X, μ) — понятие, определяемое следующим образом. Если элементы разбиения ξ, имеющие меру нуль, образуют в совокупности множество положительной меры, то Э. измеримого разбиения $H(\xi)=\infty$, в противном случае

$$H(\xi)=-\sum \mu(C) \log \mu(C),$$

где сумма берется по всем элементам ξ, имеющим положительную меру. Логарифм — обычно двоичный. *Д. В. Аносов.*

ЭНТРОПИЯ метрическая динамической системы — один из важнейших инвариантов в *эргодической теории*. Основным является понятие Э. $h(S)$ эндоморфизма S (см. *Метрический изоморфизм*) *Лебега пространства* (X, μ). Для любого конечного *измеримого разбиения* ξ существует предел (энтропия ξ на единицу времени относительно S)

$$h(S, \xi)=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_S^n),$$

$$\xi_S^n=\xi\vee S^{-1}\xi\vee\ldots\vee S^{-n+1}\xi,$$

где $H(\xi)$ — *энтропия* измеримого разбиения ξ, а $\xi\vee\eta$ — разбиение, элементы к-рого суть пересечения элементов разбиений ξ и η (это определение дословно переносится на ξ с $H(\xi)<\infty$; другим способом $h(S, \xi)$ определяется для любых измеримых ξ). Э. $h(S)$ определяют как верхнюю грань $h(S, \xi)$ по всевозможным конечным измеримым ξ (она может равняться ∞; использование всех ξ с $H(\xi)<\infty$ или всех измеримых ξ дает ту же Э.).

Первоначально Э. была определена А. Н. Колмогоровым несколько иначе (см. [1]); приведенный выше вариант был дан позже (см. [2]). В основном случае *апериодического автоморфизма* пространства Лебега определения в конечном счете — эквивалентны [3].

Оказывается, что $h(S^n)=nh(S)$, а если S — автоморфизм, то $h(S^{-1})=h(S)$. Поэтому Э. *каскада* $\{S^n\}$ естественно считать $h(S)$. Для *измеримого потока* $\{S_t\}$ оказывается, что $h(S_t)=|t|h(S_1)$. Поэтому Э. потока естественно считать $h(S_1)$. Несколько иначе определяется Э. для других групп преобразований с инвариантной мерой (она уже не сводится к Э. одного из преобразований, входящих в эту группу; см. [5], [6]). Имеется модификация Э. для случая бесконечной инвариантной меры [7]; еще одна модификация — A-энтропия (где $A=\{k_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел) — получается при замене ξ_S^n на

$$S^{-k_1}\xi \vee \ldots \vee S^{-k_n}\xi$$

и $\lim$ на $\overline{\lim}$ (см. [8]).

Э. является инвариантом метрического изоморфизма динамич. систем, принципиально отличным от известных ранее инвариантов, в основном связанных со *спектром динамической системы*. В частности, с помощью энтропии *Бернулли автоморфизмов* (см. [1]) впервые установлено существование неизоморфных эргодич. систем с одинаковым непрерывным спектром (что контрастирует с ситуацией для дискретного спектра). В более широком плане роль Э. связана с тем, что вместе с ней в эргодич. теории возникло новое направление — энтропийная теория динамич. систем (см. [3], [4] и *эргодическая теория*).

Э. дает нек-рую среднюю характеристику скорости *перемешивания* множества малой меры (точнее, набора таковых, образующих разбиение). Наряду с этой «глобальной» ролью Э. играет и «локальную» роль, к-рая устанавливается эргодической теоремой Бреймана (индивидуальная эргодическая теорема теории информации): для эргодического S при почти всех x

$$\frac{1}{n}\left|\lg \mu\left(C_{\xi_S^n}(x)\right)\right| \longrightarrow h(S, \xi) \text{ при } n \longrightarrow \infty,$$

где $C_\eta(x)$ — элемент разбиения η, содержащий x, а логарифм берется по тому же основанию, что и в определении H (см. [9], [4]). (Теорема Бреймана верна для ξ с $H(\xi)<\infty$ [10], но, вообще говоря, неверна для счетных ξ с $H(\xi)=\infty$ [11]; имеются также варианты с неэргодическим S (см. [4], [12]) и бесконечной μ [13]. Более слабое утверждение о сходимости в смысле L_1 доказано для нек-рого общего класса групп преобразований [6].

Для гладких динамич. систем с гладкой инвариантной мерой установлена связь между Э. и *Ляпунова характеристическими показателями* уравнений в вариациях (см. [14] — [16]).

Название «Э.» объясняется аналогией Э. в теории динамич. систем с Э. в *информации теории* и статистич. физике, вплоть до совпадения этих Э. в нек-рых примерах (см., напр. [4], [17]). Аналогия со статистич. физикой явилась одним из стимулов введения в эргодич. теорию (уже не в чисто метрич. контексте, а для *топологических динамических систем*) новых понятий — «гиббсовских мер», «топологического давления» (аналог свободной энергии) и «вариационного принципа» для последнего (см. *лит.* при статьях *У-система*, *Топологическая энтропия*).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861—64; 1959, т. 124, № 4, с. 754—55; [2] Синай Я. Г., там же, 1959, т. 124, № 4, с. 768—71; [3] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3—56; [4] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [5] Сафонов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1983, т. 47, № 2, с. 421—26; [6] Kieffer J. C., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 6, p. 1031—37; [7] Krengel U., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1967, Bd 7, № 3, S. 161—81; [8] Кушниренко А. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 37—65; [9] Breiman L., «Ann. Math. Statistics», 1957, v. 28, № 3, p. 809—11; 1960, v. 31, № 3, p. 809—10; [10] Chung K. L., там же, 1961, v. 32, № 3, p. 612—14; [11] Пинкель Б. С., «Проблемы передачи информации», 1976, т. 12, № 2, с. 98—103; [12] Ionescu-Tulcea A., «Arkiv mat.», 1961, Bd 4, H. 2—3, № 18, S. 235—47; [13] Klimko E. M., Sucheston L., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1968, Bd 10, № 3, S. 226—35; [14] Миллионщиков В. М., «Дифференциальные уравнения», 1976, т. 12, № 12, с. 2188—92; [15] Песин Я. Б., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 4, с. 55—112; [16] Mañé R., «Ergodic theory and dynamical systems», 1981, v. 1, № 1, p. 95—102; [17] Robinson D. W., Ruelle D., «Commun. math.-phys.», 1967, v. 5, № 4, p. 288—300. *Д. В. Аносов.*

ε-ЭНТРОПИЯ множества в метрическом пространстве — двоичный логарифм наименьшего числа точек ε-сети для этого множества. Иначе говоря, ε-Э. $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$ множества C, лежащего в метрич. пространстве (X, ρ), равна.

$$\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)=\log_2 N_\varepsilon(C, X),$$

где

$$N_\varepsilon(C, X)=\inf\{n \mid \exists x_1, \ldots, x_n, x_i \in X: C \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)\},$$

а $B(\zeta, \alpha)=\{x \in X \mid \rho(x, \zeta) \leqslant \alpha\}$ — шар с центром в точке ζ радиуса α. Определение величины $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$ было дано А. Н. Колмогоровым [1], исходившим от нек-рых идей и определений *информации теории*. Величину $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$ наз. также относительной ε-энтропией; она зависит от пространства X, в к-ром находится множество C, т. е. от метрич. расширения множества C. Величина

$$\mathcal{H}_\varepsilon(C)=\inf \mathcal{H}_\varepsilon(C, X),$$

где нижняя грань берется по всем метрич. расширениям X пространства C, наз. абсолютной ε-энтропией множества C. Величина $\mathcal{H}_\varepsilon(C)$ допускает и прямое определение (также предложенное А. Н. Колмогоровым [1]): для метрич. пространства C величина $\mathcal{H}_\varepsilon(C)$ есть двоичный логарифм мощности $N_\varepsilon(C)$ наиболее экономного (по числу множеств) 2ε-покрытия C. При этом система множеств $\{C_i\}$ наз. 2ε-покрытием C, если $C_i \subset C$, $\bigcup_{i=1}^n C_i=C$ и диаметр каждого множества не превосходит 2ε. Доказано [2] минимальное свойство абсолютной ε-Э. Величины $N_\varepsilon(C)$, $N_\varepsilon(C, X)$ суть величины, обратные к поперечникам $\varepsilon^N(C)$ и $\varepsilon_N(C, X)$, характеризующим наилучшие возможности восстановления элементов из C с помощью таблицы из N элементов и наилучшие возможности аппроксимации N-точечными множествами. Исследование асимптотики ε-Э. различных функциональных классов составило специальный раздел теории приближений.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 3, с. 385—88; [2] Витушкин А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; [3] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 2, с. 3—86. *В. М. Тихомиров.*

ЭПИДЕМИЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, служащий математич. моделью распространения какой-либо эпидемии. Одна из простейших таких моделей описывается марковским процессом с непрерывным временем, состояния к-рого в момент t описываются числом $\mu_1(t)$ больных особей и числом $\mu_2(t)$ восприимчивых особей. Если $\mu_1(t)=m$, $\mu_2(t)=n$, то за время $(t, t+\Delta t)$, $\Delta t \to 0$, вероятности переходов определяются следующим образом: $(m, n) \to (m+1, n-1)$ с вероятностью $\lambda mn\Delta t+o(\Delta t)$; $(m, n) \to (m-1, n)$ с вероятностью $\mu m\Delta t+o(\Delta t)$. В этом случае производящая функция

$$F(t; x, y)=\mathsf{E}x^{\mu_1(t)}y^{\mu_2(t)}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\lambda(x^2-xy)\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\mu(1-x)\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Б. А. Севастьянов.

ЭПИМЕНИДА ПАРАДОКС — то же, что *антиномия* Эпименида.

ЭПИМОРФИЗМ — понятие, отражающее алгебраич. свойства сюръективных отображений множеств. Морфизм $\pi: A \to B$ категории $\mathfrak{N}$ наз. эпиморфизмом, если из равенства $\pi\alpha=\pi\beta$ следует равенство $\alpha=\beta$. Другими словами, Э.— это сократимый слева морфизм.

Всякий изоморфизм является Э. Произведение двух Э. является Э. Поэтому все Э. произвольной категории $\mathfrak{N}$ образуют подкатегорию в $\mathfrak{N}$ (обозначаемую $\mathrm{Epi}\,\mathfrak{N}$).

В категориях множеств, векторных пространств, групп, абелевых групп Э.— это в точности отображения, линейные отображения, гомоморфизмы одного множества, векторного пространства или одной группы на другое множество, векторное пространство или другую группу. Однако в категориях топологич. пространств или ассоциативных колец существуют несюръективные Э. (т. е. не являющиеся отображениями «на»).

Понятие Э. дуально понятию *мономорфизма*.

М. Ш. Цаленко.

ЭПИЦИКЛОИДА — плоская кривая, траектория точки окружности, катящейся по другой окружности и имеющей с ней внешнее касание. Параметрич. уравнения:

$$x=(r+R)\cos\theta-r\cos\left[(r+R)\frac{\theta}{r}\right],$$

$$y=(r+R)\sin\theta-r\sin\left[(r+R)\frac{\theta}{r}\right],$$

где r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной окружности, θ — угол, стягиваемый дугой между точками касания окружностей (см. рис.). В зависимости от величины модуля $m=R/r$ получаются Э. различной формы. При $m=1$ Э.— *кардиоида*, при m целом кривая состоит из m непересекающихся ветвей. Точки возврата $A_1, A_2, \ldots, A_m$ имеют полярные координаты $\rho=R$, $\varphi=2k\pi/m$, $k=0, 1, \ldots, m-1$. Вершины кривой $B_1, B_2, \ldots, B_m$ имеют координаты $\rho=R+2r$, $\varphi=\frac{2\pi}{m}\left(k+\frac{1}{2}\right)$. При m дробном ветви пересекаются; при m иррациональном число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается; при m рациональном Э.— замкнутая алгебраич. кривая. Длина дуги от точки A_1:

$$s=8Rm(1+m)\sin^2\frac{\theta}{4},$$

длина дуги от точки B_1:

$$s=4Rm(1+m)\cos\frac{\theta}{2}.$$

Площадь сектора, ограниченного двумя радиус-векторами кривой и дугой кривой:

$$S=m\pi(R+mR)(R+2mR).$$

Радиус кривизны:

$$r_k=\frac{4Rm(1+m)}{2m+1}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Если точка находится не на катящейся окружности, а лежит вне (внутри) ее, то кривая наз. удлиненной (укороченной) эпициклоидой или эпитрохоидой (см. *Трохоида*). Э. относится к т. н. *циклоидальным кривым*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЭРАТОСФЕНА РЕШЕТО — метод, разработанный Эратосфеном (3 в. до н. э.) и позволяющий отсеивать составные числа из натурального ряда. Сущность Э. р. заключается в следующем. Зачеркивается единица. Число 2 — простое. Зачеркиваются все натуральные числа, делящиеся на 2. Число 3 — первое незачеркнутое число — будет простым. Далее зачеркиваются все натуральные числа, к-рые делятся одновременно и на 2 и на 3. Число 5 — первое незачеркнутое число — будет простым. Продолжая аналогичные вычисления, можно найти сколь угодно большой отрезок последовательности простых чисел. Э. р. нашло развитие в других более сильных методах решета (см., напр., *Брун а решето*).

Б. М. Бредихин.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — см. *Эргодическая теория*.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, метрическая теория динамических систем, — раздел теории динамических систем, изучающий системы с *инвариантной мерой* и смежные вопросы.

1) В «абстрактной», или «общей», части Э. т. рассматриваются измеримые динамич. системы. В наиболее общем смысле это тройки (W, G, F), где W — *измеримое пространство* («фазовое пространство»), G — хаусдорфова локально компактная группа (или полугруппа) со счетной базой, а F — измеримое отображение $G\times W\to W$, определяющее (левое) действие G на W: если $w\in W$, e — единица G и $g, h\in G$, то (при мультипликативной записи операций в G) $F(e, w)=w$ и

$$F(gh, w)=F(g, F(h, w)). \qquad (*)$$

[Подразумевается, что $G\times W$ снабжено структурой измеримого пространства как прямое произведение G и W, причем в G измеримыми считаются *борелевские множества*. При сделанных предположениях о G различные варианты последнего понятия (см. *Бореля мера, Бэра множество*) оказываются эквивалентными.]

Обозначая преобразование $w\mapsto F(g, w)$ через T_g, можно записать (*) в виде $T_{gh}=T_gT_h$. (Можно рассматривать и правое действие, для него $T_{gh}=T_hT_g$.) За исключением тех случаев, когда специально обсуждается вопрос о существовании инвариантной меры (возможно, с определенными специальными свойствами), в Э.т. обычно считают, что W является *пространством с мерой* μ, к-рая σ-конечна или конечна и инвариантна относительно T_g: если $A\subset W$ — измеримое множество, то $\mu(T_g^{-1}A)=\mu(A)$. Конечную меру обычно нормируют; чаще всего (W, μ) есть *Лебега пространство*. Что касается G, то основными являются случаи $G=\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$ (*каскад*) и $G=\mathbb{R}$ (*поток*). О них можно говорить как о случаях с «классич. временем» (дискретным или непрерывным), в соответствии с тем смыслом, к-рый реально может иметь g в конкретных примерах. [По аналогии и в других случаях иногда говорят о «времени» (уже «неклассическом»): не будучи временем в обычном смысле слова, оно может иметь иной физич. смысл, означая, напр., пространственные сдвиги трансляционно инвариантной физич. системы. Э. т. развита в особенности для аменабельных (тем более коммутативных) G; в ряде отношений (хотя и не во всем) в этом случае имеется аналогия с случаем классич. времени. Для неаменабельных G ситуация иная; она изучена хуже.] Ниже рассматривается основной случай: $\{T_t\}$ — *измеримый поток* или каскад в пространстве Лебега (W, μ), сохраняющий μ.

В «абстрактной» Э. т. изучаются как различные статистич. свойства динамич. систем, отражающие их поведение на больших отрезках времени (напр., *эргo-*

дичность, *перемешивание*), так и вопросы, связанные с метрич. классификацией систем (классификацией относительно *метрического изоморфизма*), причем эти две группы вопросов оказываются тесно связанными. Поскольку неэргодич. системы разлагаются на эргодич. компоненты (ссылки см. в статье *Метрическая транзитивность*), то обе группы вопросов в основном надо исследовать для эргодич. систем. Основная часть «абстрактной» Э. т. охватывается следующими шестью направлениями.

а) Оформление Э. т. в самостоятельный раздел связано с эргодической *Неймана теоремой*, *Биркгофа эргодической теоремой* и осознанием их метрич. природы. В дальнейшем появились различные модификации и обобщения этих теорем, зачастую уже не обязательно связанные с динамич. системами (в этом смысле они выходят за рамки Э. т.), они тоже наз. эргодическими теоремами (см. *Максимальная эргодическая теорема*, *Операторная эргодическая теорема*, *Орнстейна — Чекона эргодическая теорема*). Но их разработка для самой Э. т. имела уже меньшее значение.

б) Спектральная теория динамических систем, т. е. исследование вопросов, связанных со *спектром динамической системы*.

в) *Энтропийная теория динамических систем*.

г) *Аппроксимация периодическими преобразованиями*.

д) Замена времени и монотонная эквивалентность (эквивалентность Какутани).

е) Траекторная теория и смежные вопросы.

Для приложений наиболее важными являются направления б) и в). Применительно к потокам идея д) и е) состоит, грубо говоря, в том, чтобы отделить те свойства потока, к-рые зависят от расположения траекторий в фазовом пространстве, от свойств, зависящих от параметризации траекторий посредством времени. Различие между д) и е) состоит в том, что в д) траектория рассматривается как непрерывная кривая с выделенным положительным направлением и соответственно ограничивается класс допускаемых параметризаций, тогда как в е) траектория рассматривается просто как множество точек и соответственно параметризации могут быть разрывными и не обязаны быть монотонными относительно друг друга. Ниже даны точные определения.

Замена времени в потоке $\{T_t\}$ состоит в переходе к новому потоку $\{S_s\}$: время, за к-рое точка w попадет в положение $T_t w$, для нового потока равно $\int_0^t a(T_\tau w)d\tau$, где a, $\frac{1}{a} \in L^1(W, \mu)$, $a>0 \bmod 0$ (поток $\{S_s\}$ имеет инвариантную меру $\lambda(A)=\int_A \frac{1}{a} d\mu$). Говорят, что $\{T_t\}$ и $\{S_s\}$ монотонно эквивалентны. Равносильное определение: два потока монотонно эквивалентны, если они метрически изоморфны *специальным потокам*, построенным по одному и тому же автоморфизму пространства с мерой (и, вообще говоря, различным положительным функциям). Автоморфизмы T, S (равно как и каскады $\{T^n\}$, $\{S^n\}$) наз. монотонно эквивалентными, если T и S метрически изоморфны *специальным автоморфизмам*, построенным по одному и тому же автоморфизму. Динамич. системы траекторно эквивалентны, если существует метрич. изоморфизм их фазовых пространств, переводящий траектории одной системы в траектории другой (как множества точек).

В д) рассматриваются вопросы: насколько сильно могут измениться свойства потока при замене времени; в частности, нельзя ли посредством замены обеспечить, чтобы новый поток имел какое-нибудь специальное свойство (вопрос может ставиться в общем случае или для конкретного потока; замена времени может быть подчинена каким-нибудь специальным условиям); что можно сказать о классификации систем относительно монотонной эквивалентности.

Траекторная эквивалентность для систем с «классическим» временем неинтересна: если инвариантная мера непрерывна, то любые два эргодич. потока или каскада траекторно эквивалентны. Однако для систем с «неклассическим» временем траекторная эквивалентность приводит к содержательной теории.

2) В «прикладной» части Э. т. рассматриваются разнообразные конкретные динамич. системы (и классы таковых), возникающие в различных областях математики, а также в физике. [Исторически зарождение Э. т. связано со статистич. физикой (см. *Динамическая система*, *Статистической физики математические задачи*). Ныне наметились новые связи с этой дисциплиной; см., напр., о гиббсовских мерах в последней статье.] Здесь для рассматриваемых систем изучаются те же вопросы о статистич. свойствах и классификации, что и в 1), однако теперь нельзя считать с самого начала, что рассматриваемая система эргодична. Напротив, выяснение вопроса о ее эргодичности — обычно необходимый (и нередко трудный) этап исследования, даже если в конечном счете устанавливается наличие более сильных статистич. свойств.

Имеются и такие случаи (в теории чисел и статистич. физике), когда речь идет не о применении понятий или результатов Э. т., а об использовании соображений, в каком-то отношении родственных имеющимся в Э. т. Наконец, идеи теории динамич. систем, и в частности Э. т., привлекаются для интерпретации результатов нек-рых численных экспериментов (см. *Странный аттрактор*).

Лит.: [1] Хопф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 113—82; [2] Рохлин В. А., там же, 1949, т. 4, в. 2, с. 57—128; [3] Халмош П., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [4] «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3—172; [5] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [6] Вершик А. М., Юзвинский С. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 133—87; [7] Синай Я. Г., Введение в эргодическую теорию, Ер., 1973; [8] Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [9] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [10] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

Д. В. Аносов.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕКОММУТАТИВНАЯ — раздел теории операторных алгебр, изучающий автоморфизмы *C*-алгебр* с точки зрения *эргодической теории*.

Круг вопросов, рассматриваемых в Э. т. н., и полученные (к 1984) результаты можно в основном разделить на три группы. К первой группе относятся результаты, связанные с построением полной системы инвариантов внешней сопряженности (автоморфизмы θ_1 и θ_2 наз. внешне сопряженными, если существует такой автоморфизм σ, что $\theta_1\sigma\theta_2^{-1}\sigma^{-1}$ есть внутренний автоморфизм). Соответствующая задача классификации решена (см. [1]) для аппроксимативно конечных *факторов* типа II и для факторов типа III_λ, $0<\lambda<1$ (см. [2]).

К другой группе относятся работы, посвященные исследованию свойств равновесных состояний (под состоянием алгебры понимают положительный линейный нормированный функционал на алгебре), инвариантных относительно однопараметрич. групп автоморфизмов. В частности, в них рассматриваются вопросы существования и единственности гиббсовских состояний (см. [3]). К этой группе вопросов примыкают исследования по некоммутативным обобщениям эргодич. теорем (см., напр., [4], [5]).

Третью группу составляют результаты, относящиеся к энтропийной теории автоморфизмов. Построен

[6] инвариант автоморфизмов конечной W^*-алгебры (см. *Неймана алгебра*), обобщающий *энтропию* метрич. динамич. системы. Исследована [7] энтропия автоморфизмов произвольной W^*-алгебры относительно состояния φ.

Лит.: [1] Connes A., «Ann. sci. École norm. supér.», 1975, t. 8, p. 383—419; [2] Голодец В. Я., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 1, с. 43—94; [3] Araki H., «Lecture Notes in Math.», 1978, № 650, p. 66—84; [4] Синай Я. Г., Аншелевич В. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 151—67; [5] Lance E. C., «Invent. math.», 1976, t. 37, p. 201—14; [6] Connes A., Størmer E., «Acta math.», 1975, v. 134, p. 289—306; [7] Степин А. М., Шухов А. Г., «Изв. ВУЗов. Математика», 1982, № 8, с. 52—60.

А. М. Степин.

ЭРГОДИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО в *фазовом пространстве* X (являющемся метризуемым компактом) *топологической динамической системы* $\{S_t\}$ (*потока* или *каскада*), отвечающее нормированной эргодической *инвариантной мере* μ,— множество точек $x\in X$, для к-рых:

а) при любой непрерывной функции $f: X\to\mathbb{R}$ «временно́е среднее»

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(S_t x)\,dt \longrightarrow \int_X f\,d\mu \text{ при } T\longrightarrow\infty;$$

б) $\mu(U)>0$ для любой окрестности U точки x.

Точка, для к-рой при любой непрерывной f существует предел временно́го среднего в а), наз. квазирегулярной. Для такой точки этот предел имеет вид $\int f d\mu$, где μ — нек-рая нормированная инвариантная мера, однако не обязательно эргодическая. Если при этом выполняется б), то точка наз. точкой плотности, а если μ эргодическая, то точка наз. транзитивной; при выполнении обоих этих условий она наз. регулярной. Множество нерегулярных точек имеет меру нуль относительно любой инвариантной нормированной меры. Разбиение множества регулярных точек на Э. м., отвечающие различным μ, представляет собой наиболее сильную реализацию идеи о разложении динамич. системы на эргодич. компоненты (требующую и наиболее сильных ограничений на систему).

Э. м. введены Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым [1], другие изложения и обсуждения различных обобщений и смежных вопросов см. в лит. при статьях *Инвариантная мера*, 1) и *Метрическая транзитивность*.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 411—63.

Д. В. Аносов.

ЭРГОДИЧНОСТЬ динамической системы — свойство, рассматриваемое в *эргодической теории*. Первоначально оно определялось для *каскадов* $\{T^k\}$ и *потоков* $\{T_t\}$ с конечной *инвариантной мерой* μ следующим образом: если на фазовом пространстве W задана функция $f\in L_1(W,\mu)$, то для почти каждой точки w существует временно́е среднее вдоль траектории этой точки, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k w)$$

или

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt),$$

к-рое совпадает с пространственным средним (т. е. с $\frac{1}{\mu(W)}\int f d\mu$). В этом случае говорят также об эргодичности меры μ. В частности, для любого измеримого множества $A\subset W$ среднее время пребывания в A траектории почти каждой точки пропорционально $\mu(A)$ (на самом деле это свойство эквивалентно Э.). Когда была доказана *Биркгофа эргодическая теорема*, стало ясно, что Э. эквивалентна *метрической транзитивности*. В связи с этим стали говорить об Э., понимая под ней метрич. транзитивность, в более общей ситуации, когда уже не приходится говорить о совпадении временны́х и пространственных средних (системы с бесконечной инвариантной или квазиинвариантной мерой, не только потоки и каскады, но и более общие группы и полугруппы преобразований).

Д. В. Аносов.

ЭРДЕША ЗАДАЧА — задача о существовании в n-мерном евклидовом пространстве E_n множества точек, каждые три из к-рых образуют нетупоугольный треугольник (свойство Эрдеша), содержащего более чем 2^n элементов. Поставлена П. Эрдешом (см. [1]); им же было высказано предположение (доказанное в [2]), что задача имеет отрицательный ответ и если множество, обладающее свойством Эрдеша, содержит 2^n элементов, то это может быть в том и только в том случае, когда оно исчерпывает множество вершин n-мерного прямоугольного параллелепипеда из E_n. Доказательство этого утверждения явилось решением и т. н. задачи Кли: чему равно число вершин $m(K)$ многогранника $K\subset E_n$, каждые две вершины к-рого лежат в различных параллельных опорных гиперплоскостях к многограннику K (свойство Кли). Если множество $N\subset E^n$ обладает свойством Эрдеша, то выпуклая оболочка $\operatorname{conv} N$ множества N представляет собой многогранник $M=\operatorname{conv} N$, обладающий свойством Кли, и $m(M)$ равно мощности множества N. Если многогранник K обладает свойством Кли, то $m(K)\leqslant 2^n$. Равенство $m(K)=2^n$ характеризует n-мерный параллелепипед в множестве всех многогранников, обладающих свойством Кли.

Э. з. связана с *Хадвигера гипотезой*: $b(M)=m(M)$.

Лит.: [1] Erdös P., «Michigan Math. J.», 1957, № 4, p. 291—300; [2] Danzer L., Grünbaum B., «Math. Z.», 1962, Bd 79, S. 95—99.

П. С. Солтан.

ЭРЛАНГА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, эрланговское распределение,— сосредоточенное на $(0,\infty)$ распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\frac{(n\mu)^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-n\mu x},\quad x>0,$$

где целое $n\geqslant 1$ и действительное $\mu>0$ — параметры. Характеристич. функция Э. р. имеет вид

$$\left(1-\frac{it}{n\mu}\right)^{-n},$$

а математич. ожидание и дисперсия — соответственно $1/\mu$ и $1/n\mu^2$.

Э. р. есть специальный случай *гамма-распределения*: $p(x)=\alpha g_\lambda(\alpha x)$, где $g_\lambda(y)$ есть плотность гамма-распределения при $\lambda=n$ и где $\alpha=n\mu$. При $n=1$ Э. р. совпадает с *показательным распределением* с параметром μ. Э. р. с параметрами n и μ может быть найдено как распределение суммы n независимых случайных величин, имеющих одинаковое показательное распределение с параметром $n\mu$. При $n\to\infty$ Э. р. стремится к вырожденному распределению, сосредоточенному в точке $1/\mu$.

Выделение Э. р. из системы гамма-распределений объясняется использованием Э. р. в теории массового обслуживания. Во многих случайных процессах массового обслуживания Э. р. появляется как распределение промежутков между случайными событиями или как распределение времен обслуживания. Иногда Э. р. наз. гамма-распределение с плотностью

$$\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\alpha x},\quad x>0.$$

Названо по имени А. Эрланга (A. Erlang), построившего первые математич. модели в задачах массового обслуживания.

А. В. Прохоров.

Лит.: [1] Саати Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1971.

ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА — единая точка зрения на различные геометрии (напр., евклидову, аффинную, проективную), сформулированная впервые Ф. Клейном (F. Klein) на лекции, прочитанной в 1872 в ун-те г. Эрланген (Германия) и напечатанной в том же году под назв. «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований».

Сущность Э. п. состоит в следующем. Как известно, евклидова геометрия рассматривает те свойства фигур, к-рые не меняются при движениях; равные фигуры определяются как фигуры, к-рые можно перевести одну в другую движением. Но вместо движений можно выбрать какую-нибудь иную совокупность геометрич. преобразований и объявить «равными» фигуры, получающиеся одна из другой с помощью преобразований этой совокупности; это приводит к иной «геометрии», изучающей свойства фигур, не меняющиеся при рассматриваемых преобразованиях. Введенное «равенство» должно удовлетворять следующим трем естественным условиям: 1) каждая фигура F «равна» сама себе; 2) если фигура F «равна» фигуре F', то и F' «равна» F; 3) если фигура F «равна» F', а F' «равна» F'', то и F «равна» F''. Соответственно этому надо потребовать, чтобы рассматриваемая совокупность преобразований была группой. Теория, к-рая изучает свойства фигур, сохраняющихся при всех преобразованиях данной группы, наз. геометрией этой группы.

Выбор различных групп преобразований приводит к разным геометриям. Так, рассмотрение группы движений приводит к обычной (евклидовой) геометрии; замена движения аффинными преобразованиями или проективными преобразованиями приводит к аффинной соответственно проективной геометрии. Основываясь на идеях А. Кэли (A. Cayley), Ф. Клейн показал, что принятие за основу группы проективных преобразований, переводящих в себя нек-рый круг (или произвольное конич. сечение), приводит к неевклидовой геометрии Лобачевского. Ф. Клейн ввел в рассмотрение довольно широкий круг других геометрий, определяемых подобным же образом.

Э. п. не охватывает нек-рых важных разделов геометрии, напр. риманову геометрию. Однако Э. п. имела для дальнейшего развития геометрии существенное стимулирующее значение.

Лит.: [1] Клейн Ф., Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»), в кн.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] его же, Элементарная математика с точки зрения высшей, пер. с нем., 2 изд., т. 2, М.— Л., 1934; [3] его же, Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939; [4] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978. *БСЭ-3.*

ЭРМИТА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — форма записи многочлена $H_m(x)$ степени m, решающего задачу интерполирования функции $f(x)$ и ее производных в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, т. е. удовлетворяющего условиям:

$$\left.\begin{aligned} &H_m(x_0)=f(x_0),\ H_m'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots \\ &\qquad\ldots,\ H_m^{(\alpha_0-1)}(x_0)=f^{(\alpha_0-1)}(x_0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &H_m(x_n)=f(x_n),\ H_m'(x_n)=f'(x_n),\ \ldots \\ &\qquad\ldots,\ H_m^{(\alpha_n-1)}(x_n)=f^{(\alpha_n-1)}(x_0), \\ &m=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i-1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Э. и. ф. может быть записана в виде:

$$H_m(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1} f^{(j)}(x_i)\times$$

$$\times\frac{1}{k!}\frac{1}{j!}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]^{(k)}_{x=x_i}\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j-k}},$$

где $\Omega(x)=(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}$.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966. *М. К. Самарин.*

ЭРМИТА МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены Чебышева — Эрмита,— многочлены, ортогональные на интервале $(-\infty, \infty)$ с весовой функцией $h(x)=\exp(-x^2)$. Стандартизованные Э. м. определяются *Родрига формулой*

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}.$$

Наиболее употребительны формулы

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$

$$\exp(2xw-w^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}w^n.$$

Первые Э. м. имеют вид

$$H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=4x^2-2,$$

$$H_3(x)=8x^3-12x,$$

$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12,\quad H_5(x)=32x^5-160x^3+120x,\ldots$$

Многочлен $H_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-2xy'+2ny=0$.

Ортонормированные Э. м. определяются равенством

$$\hat{H}_n(x)=\frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}.$$

Э. м. с единичным старшим коэффициентом имеют вид

$$\tilde{H}_n(x)=\frac{1}{2^n}H_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n}e^{x^2}(e^{-x})^{(n)}.$$

Ряды Фурье по Э. м. внутри интервала $(-\infty, \infty)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье.

В математич. статистике и теории вероятностей применяются Э. м., соответствующие весовой функции

$$h(x)=\exp(-x^2/2).$$

Определение Э. м. встречается у П. Лапласа [1]. Подробное исследование этих многочленов опубликовал П. Л. Чебышев в 1859 (см. [2]). Затем эти многочлены изучал Ш. Эрмит [3]. В. А. Стеклов [4] доказал плотность множества всех многочленов в пространстве функций, квадрат к-рых интегрируем с весом $h(x)=\exp(-x^2)$ на всей оси.

См. также *Классические ортогональные многочлены.*

Лит.: [1] Laplace P. S., «Mém. classe sci. math., phys. inst. France», 1810, p. 279—347; [2] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 335—41; [3] Hermite Ch., «C. r. Acad. sci.», 1864, t. 58, p. 93—100, 266—73; [4] Стеклов В. А., «Изв. АН», 1916, т. 10, с. 403—16; [5] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979. *П. К. Суетин.*

ЭРМИТА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$f(n)=H\{F(x)\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)F(x)\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $H_n(x)$ — *Эрмита многочлен* степени n. Формула обращения имеет вид

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{f(n)}{2^n n!}H_n(x)=H^{-1}\{f(n)\},\ -\infty<x<\infty,$$

если ряд сходится. Э. п. сводит операцию

$$R[F(x)]=e^{x^2}\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{d}{dx}F(x)\right]$$

к алгебраической по формуле

$$H\{R[F(x)]\} = -2nf(n).$$

Если функция $F(x)$ ограничена вместе со всеми производными до порядка p включительно, то

$$H\{F^{(p)}(x)\} = f(n+p).$$

Э. п. введено также для специального класса обобщенных функций (см. [2]). Оно используется при решении дифференциальных уравнений, содержащих оператор R.

Лит.: [1] Debnath L., «Mat. vesnik», 1964, № 1, с. 285—292; [2] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЭРМИТА ПРОБЛЕМА — задача об однородных арифметических минимумах положительных n-арных квадратичных форм с действительными коэффициентами, равносильная задаче о плотнейших решетчатых упаковках n-мерных шаров одинакового радиуса (см. *Геометрия чисел*).

Пусть $f=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$,— положительная квадратичная форма над $\mathbb{R}$ определителя $d=d(f)=\det(f)\neq 0$;

$$m(f) = \inf_{\substack{x\in\mathbb{Z}^n \\ x\neq 0}} f(x) = \min_{\substack{x\in\mathbb{Z}^n \\ x\neq 0}} f(x)$$

— ее однородный арифметич. минимум. Величина

$$\gamma_n = \sup_{f\text{—п. кв. ф. } \{d(f)\}^{1/n}} \frac{m(f)}{\{d(f)\}^{1/n}} = \max_{f\text{—п. кв. ф. } \{d(f)\}^{1/n}} \frac{m(f)}{\{d(f)\}^{1/n}}$$

наз. постоянной Эрмита; $\gamma_n=\{\gamma(F_n)\}^2$, где $F_n(x)=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/n}$ — лучевая функция, отвечающая шару.

Первоначально под Э. п. понималась задача нахождения или оценки γ_n (сверху и снизу). Точные значения для γ_n известны только для $n\leqslant 8$ (см. [1], с. 318). Оценки для γ_n см. в [2], [1], § 38.

В дальнейшем под Э. п. стали понимать отыскание локальных максимумов для $m(f)/\{d(f)\}^{1/n}$ в пространстве коэффициентов и отвечающих им форм f — предельных или экстремальных. Известны алгоритмы отыскания всех классов предельных форм. В частности, алгоритм Вороного совершенных форм (см. [1], [3], [4]).

Проблема была поставлена Ш. Эрмитом (Ch. Hermite, 1850).

Лит.: [1] L'ekkerkerker C. G., Geometry of numbers, Groningen — [a. o.], 1969; [2] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968; [3] Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.— Л., 1947; [4] Барановский Е. П., в кн.: Итоги науки. Математика. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 189—225.

А. В. Малышев.

ЭРМИТА ТОЖДЕСТВО — тождество, примененное Ш. Эрмитом (Ch. Hermite, 1873) к нек-рым специально построенным многочленам для доказательства трансцендентности числа e. В упрощенном виде Э. т.

$$e^x F(0) - F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt,$$

где $f(x)$ — многочлен от x, а

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^k(x).$$

ЭРМИТА УРАВНЕНИЕ — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$w'' - 2zw' + 2\lambda w = 0$$

или, в самосопряженной форме,

$$\frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\frac{dw}{dz}\right) + \lambda e^{-z^2} w = 0;$$

здесь λ — константа. Замена неизвестной функции $w=u\exp(z^2/2)$ приводит Э. у. к уравнению

$$u'' + (\lambda + 1 - z^2)\,u = 0,$$

а после замены переменных

$$w = v\exp(t^2/4),\quad t = z\sqrt{-2}$$

из Э. у. получается *Вебера уравнение*

$$v'' + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4}\right) v = 0.$$

Э. у. при $\lambda=2n$, где n — натуральное число, имеет среди своих решений *Эрмита многочлен* степени n

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}).$$

Этим и объясняется название самого дифференциального уравнения. В общем случае решения Э. у. выражаются через специальные функции — функции параболического цилиндра, или функции Вебера — Эрмита. *Н. Х. Розов.*

ЭРМИТА ФУНКЦИИ — решения *Эрмита уравнения*

$$w'' - 2zw' + 2\lambda w = 0.$$

Э. ф. имеют вид

$$P_\lambda(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} \exp(-t^2+2zt)\,t^{-\lambda-1}\,dt,$$

$$Q_\lambda(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{C_2} \exp(-t^2+2zt)\,t^{-\lambda-1}\,dt,$$

где C_1 — контур в комплексной плоскости t, состоящий из лучей $(-\infty, -a)$, $(a, +\infty)$ и полуокружности $|t|=a>0$, $\operatorname{Im} t\geqslant 0$, $C_2=-C_1$. Полусумма этих решений

$$H_\lambda(z) = [P_\lambda(z) + Q_\lambda(z)]/2$$

при целом $\lambda=n\geqslant 0$ равна *Эрмита многочлену* $H_n(z)$. Уравнением Эрмита наз. также уравнение

$$y'' - xy' + \nu y = 0.$$

При ν целом это уравнение имеет *фундаментальную систему решений* $He(x)$, $he_\nu(x)$, где $He_\nu(x)$ — многочлены Эрмита, $he_\nu(x)$ суть Э. ф. 2-го рода, к-рые выражаются через *вырожденную гипергеометрическую функцию*:

$$he_{2n}(x) = (-2)^n n!\,{}_1F_1\left(-n+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$he_{2n+1}(x) = -(-2)^n n!\,{}_1F_1\left(-n-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right).$$

Справедливы тождества:

$$He_\nu(x)\,he'_\nu(x) - he_\nu(x)\,He'_\nu(x) = \nu!\,e^{x^2/2},$$

$$He_\nu(x)\,he_{\nu-1}(x) - He_{\nu-1}(x)\,he_\nu(x) = (\nu-1)!\,e^{x^2/2}.$$

Лит.: [1] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 3 изд., т. 1, М.— Л., 1951; [2] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963.

М. В. Федорюк.

ЭРМИТОВ ОПЕРАТОР, симметрический оператор,— линейный оператор A в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(A)$ и такой, что $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для любых $x, y\in D(A)$. Это условие эквивалентно тому, что: 1) $D(A)\subset D(A^*)$, 2) $Ax=A^*x$ для всех $x\in D(A)$, где A^* — оператор, сопряженный с A, т. е. что $A\subset A^*$. Ограниченный Э. о. либо определен на всем H, либо по непрерывности расширяется до такого и при этом $A=A^*$, т. е. A — *самосопряженный оператор*. Неограниченный Э. о. может как иметь, так и не иметь самосопряженных расширений. Иногда эрмитовым наз. самосопряженный оператор, сохраняя для оператора, эрмитова в указанном выше смысле, название симметрический. В конечномерном пространстве Э. о. описывается *эрмитовой матрицей*.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., Хар., 1978; [2] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Соболев.*

ЭРМИТОВА МАТРИЦА, эрмитово-симметрическая матрица, самосопряженная матрица,— квадратная матрица $A=\|a_{ik}\|$ над полем $\mathbb{C}$, совпадающая со своей эрмитово-сопряженной матрицей

$$A^*=\overline{A}^{\top}=\|\overline{a}_{ki}\|,$$

т. е. матрица, элементы к-рой удовлетворяют условию $a_{ik}=\overline{a}_{ki}$. Если все $a_{ik}\in\mathbb{R}$, то Э. м. A — симметрич. матрица. Э. м. фиксированного порядка образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Если A, B — Э. м. одного порядка, то $AB+BA$ — Э. м. Относительно операции $A\circ B=\frac{1}{2}(AB+BA)$ Э. м. (порядка n) составляют *йорданову алгебру*. Произведение AB Э. м. является Э. м. тогда и только тогда, когда A и B перестановочны.

Э. м. порядка n служат матрицами эрмитовых преобразований n-мерного унитарного пространства в ортонормированном базисе (см. *Самосопряженное линейное преобразование*). С другой стороны, Э. м.—это матрицы эрмитовых форм в n-мерном комплексном векторном пространстве. Как и *эрмитовы формы*, Э. м. могут быть определены над любым телом с антиинволюцией.

Все собственные значения Э. м. действительны. Для каждой Э. м. A существует унитарная матрица U такая, что $U^{-1}AU$ — диагональная действительная матрица. Э. м. наз. неотрицательной (или положительно полуопределенной), если все ее главные миноры неотрицательны, и положительно определенной, если все они положительны. Неотрицательные (положительно определенные) Э. м. соответствуют неотрицательным (положительно определенным) эрмитовым линейным преобразованиям и эрмитовым формам. *А. Л. Онищик.*

ЭРМИТОВА МЕТРИКА — 1) Э. м. в комплексном векторном пространстве V — положительно определенная *эрмитова форма* в V. Пространство V, снабженное Э. м., наз. унитарным (или комплексно евклидовым, или эрмитовым векторным) пространством, а Э. м. в нем — эрмитовым скалярным произведением. Любые две Э. м. в V переводятся друг в друга автоморфизмом пространства V. Таким образом, множество всех Э. м. в V является однородным пространством группы $GL_n(\mathbb{C})$ и отождествляется $GL_n(\mathbb{C})/U(n)$, где $n=\dim V$.

Комплексное векторное пространство V можно рассматривать как вещественное векторное пространство $V^{\mathbb{R}}$, снабженное оператором комплексной структуры $J(x)=ix$. Если h — Э. м. в V, то форма $g=\mathrm{Re}\,h$ является евклидовой метрикой (скалярным произведением) в V, а форма $\omega=\mathrm{Im}h$ — невырожденной кососимметрической билинейной формой в V. При этом $g(Jx, Jy)=g(x, y)$, $\omega(Jx, Jy)=\omega(x, y)$, $\omega(x, y)=g(x, Jy)$. Любая из форм g, ω однозначно определяет h.

2) Э. м. в комплексном векторном расслоении π: $E\to M$ — функция $g: p\mapsto g_p$ на базе M, сопоставляющая точке $p\in M$ эрмитову метрику g_p в слое $E(p)=\pi^{-1}(p)$ расслоения π и удовлетворяющая следующему условию гладкости: для любых гладких локальных сечений e, e' расслоения π функция $p\mapsto g_p(e_p, e'_p)$ является гладкой.

В любом комплексном векторном расслоении существует Э. м. Связность ∇ в комплексном векторном расслоении π наз. согласованной с Э. м. g, если g и оператор J комплексной структуры в слоях расслоения π ковариантно постоянны (т. е. $\nabla g=\nabla J=0$), иначе говоря, если соответствующий параллельный перенос слоев расслоения π вдоль кривых на базе является изоморфизмом слоев как унитарных пространств. Для любой Э. м. существует согласованная с ней связность, к-рая, вообще говоря, не единственна. В случае, когда π есть голоморфное векторное расслоение над комплексным многообразием M (см. *Векторное аналитическое расслоение*), существует единственная связность ∇ расслоения π, согласованная с данной Э. м. и удовлетворяющая следующему условию: ковариантная производная любого голоморфного сечения e расслоения π относительно любого антиголоморфного комплексного векторного поля $\overline{X}$ на M равна нулю (каноническая эрмитова связность). Форму кривизны этой связности можно рассматривать как 2-форму типа (1,1) на M со значением в расслоении эндоморфизмов векторного расслоения π. Канонич. связность можно рассматривать также как связность в главном $GL(n, \mathbb{C})$-расслоении $\tilde{\pi}: P\to M$, ассоциированном с голоморфным расслоением π комплексной размерности n. Она характеризуется как единственная связность в $\tilde{\pi}$, горизонтальные подпространства к-рой являются комплексными подпространствами касательных пространств комплексного многообразия P.

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1981; [2] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [3] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [4] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961. *Д. В. Алексеевский.*

ЭРМИТОВА СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* на эрмитовом многообразии M, относительно к-рой ковариантно постоянны тензор φ комплексной структуры и фундаментальная 2-форма $\Omega=\frac{i}{2}g_{\alpha\beta}\omega^{\beta}\wedge\overline{\omega}^{\alpha}$, следовательно и эрмитова форма $ds^2=g_{\alpha\beta}\overline{\omega}^{\alpha}\omega^{\beta}$. Если аффинная связность на M задана локальными формами связности $\omega^{\alpha}_{\beta}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\overline{\gamma}}\overline{\omega}^{\gamma}$, то эти условия выражаются в виде $\omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}=0$, $\omega^{\overline{\alpha}}_{\beta}=\overline{\omega}^{\alpha}_{\overline{\beta}}$, $dg_{\alpha\beta}=\overline{\omega}^{\gamma}_{\alpha}g_{\gamma\beta}+g_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}$. На заданном эрмитовом многообразии M существует одна и только одна Э. с., у к-рой $\Gamma^{\alpha}_{\beta\overline{\gamma}}=0$.

Обобщением Э. с. является почти эрмитова связность, к-рая определяется аналогичными условиями ковариантного постоянства тензоров φ^i_j и g_{ij} с $g_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j=g_{ij}$ на почти эрмитовом многообразии $\tilde{M}$. Почти Э. с. на заданном $\tilde{M}$ существует с нек-рым произволом, к-рый сосредоточен в ее тензоре кручения: если тензоры кручения двух почти Э. с. совпадают, то и сами связности совпадают. Например, существует одна и только одна почти Э. с., у к-рой формы кручения являются суммами «чистых» форм (т. е. форм типа (2,0) и типа (0,2)),— вторая каноническая связность Лихнеровича.

Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [2] Yano K., Differential geometry on complex and almost complex spaces, Oxf., 1965. *Ю. Г. Лумисте.*

ЭРМИТОВА СТРУКТУРА на многообразии M — пара (J, g), состоящая из комплексной структуры J многообразия M и эрмитовой метрики g в касательном расслоении TM, т. е. римановой метрики g, инвариантной относительно J:

$$g(JX, JY)=g(X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y на M. Э. с. задает в каждом касательном пространстве T_pM структуру эрмитова векторного пространства (см. *Эрмитова метрика*). Многообразие с Э. с. наз. эрмитовым многообразием. Э. с. определяет на M диффе-

ренциальную 2-форму $\omega(X, Y)=g(X, JY)$, к-рая наз. канонич. 2-формой эрмитова многообразия. Любую комплексную структуру J на многообразии M можно дополнить нек-рой римановой метрикой g до Э. с. (J, g): в качестве g можно взять метрику $g(X, Y)=g_0(X, Y)+g_0(JX, JY)$, где g_0 — произвольная риманова метрика.

Каноническую эрмитову связность эрмитовой метрики g можно рассматривать как аффинную связность с кручением T на M, относительно к-рой поля J и g ковариантно постоянны. Среди всех аффинных связностей, удовлетворяющих этим условиям, она однозначно характеризуется тождеством $T(JX, Y)=T(X, JY)$, справедливым для ее тензора кручения T и произвольных векторных полей X, Y. Тензор кривизны R канонич. связности удовлетворяет условию $R(JX, JY)=R(X, Y)$. Эрмитово многообразие является *кэлеровым многообразием* тогда и только тогда, когда каноническая эрмитова связность не имеет кручения и совпадает тем самым со связностью Леви-Чивита метрики g.

Естественным обобщением понятия Э. с. является понятие почти эрмитовой структуры — пары (J, g), состоящей из почти комплексной структуры J многообразия M и римановой метрики g, инвариантной относительно J. Если фундаментальная 2-форма $\omega(X, Y)=g(X, JY)$ замкнута, то почти Э. с. наз. почти кэлеровой. Задание почти Э. с. равносильно редукции структурной группы касательного расслоения к группе $U(n)$, где $n=\frac{1}{2}\dim M$. Любая невырожденная дифференциальная 2-форма на многообразии M является фундаментальной 2-формой нек-рой почти Э. с.

Лит. см. при статье *Эрмитова метрика*.

Д. В. Алексеевский.

ЭРМИТОВА ФОРМА на левом R-модуле X — отображение $\varphi: X\times X\to R$, линейное по первому аргументу и удовлетворяющее условию

$$\varphi(y, x)=\varphi(x, y)^J, \quad x, y\in X.$$

При этом R — кольцо с единицей, снабженное инволютным антиавтоморфизмом J. В частности, φ является *полуторалинейной формой* на X. Сам модуль X при этом наз. эрмитовым пространством. Аналогично тому, как это делается для билинейных форм, для Э. ф. определяется эквивалентность (в другой терминологии, изометричность) и, соответственно, изоморфизм (изометрия) эрмитовых пространств (в частности, автоморфизм). Все автоморфизмы Э. ф. φ образуют группу $U(\varphi)$, называемую унитарной группой, ассоциированной с Э. ф. φ; ее строение хорошо изучено, когда R — тело (см. *Унитарная группа*).

Э. ф. является частным случаем ε-эрмитовой формы (ε — элемент центра кольца R), т. е. такой полуторалинейной формы ψ на X, что

$$\psi(y, x)=\varepsilon\psi(x, y)^J, \quad x, y\in X.$$

При $\varepsilon=1$ ε-эрмитова форма является Э. ф., а при $\varepsilon=-1$ она наз. косоэрмитовой, или антиэрмитовой, формой. Если $J=1$, то Э. ф.— это симметрическая билинейная форма, а косоэрмитова форма — это кососимметрическая, или антисимметрическая билинейная форма. Если отображение

$$X\to \mathrm{Hom}_R(X, R), \quad y\mapsto f_y,$$

где $f_y(x)=\varphi(x, y)$ для любого $x\in X$, биективно, то Э. ф. φ наз. невырожденной Э. ф., или эрмитовым скалярным произведением на X.

Если X — свободный R-модуль с базисом $e_1, \ldots, e_n$, то матрица $\|a_{ij}\|$, где $a_{ij}=\varphi(e_i, e_j)$, наз. матрицей Э. ф. φ в указанном базисе; она является *эрмитовой матрицей* (т. е. $a_{ij}=a_{ji}^J$). Э. ф. φ невырождена тогда и только тогда, когда матрица $\|a_{ij}\|$ обратима. Если R — тело, $\mathrm{char}\, R\neq 2$ и X конечномерен над R, то в X существует ортогональный относительно φ базис (в к-ром матрица Э. ф. диагональна).

Если R — коммутативное кольцо с единицей, $R_0=\{r\in R | r^J=r\}$ и матрица Э. ф. φ определена, то определитель этой матрицы лежит в R_0. При замене базиса в X этот определитель умножается на ненулевой элемент из R вида $\alpha\alpha^J$, где α —обратимый элемент кольца R. Указанный определитель, рассматриваемый с точностью до умножения на такие элементы, наз. детерминантом Э. ф., или детерминантом эрмитова пространства X; он является важным инвариантом Э. ф., участвующим в классификации Э. ф.

Пусть R коммутативно. Тогда Э. ф. φ на X порождает квадратичную форму $Q(x)=\varphi(x, x)$ на X над R_0. Рассмотрение таких форм лежит в основе конструкции группы Витта кольца R с инволюцией (см. *Витта кольцо*, *Витта разложение*, *Витта теорема*). В случае, когда R — максимальное упорядоченное поле, на Э. ф. распространяется *инерции закон* (и возникают связанные с ним понятия сигнатуры, индекса инерции, положительной и отрицательной определенности). Если R — поле и $J\neq 1$, то R является квадратичным расширением Галуа поля R_0, и изометричность двух невырожденных Э. ф. над R равносильна изометричности порожденных ими квадратичных форм над R_0: это сводит классификацию невырожденных Э. ф. над R к классификации невырожденных квадратичных форм над R_0.

Если $R=\mathbb{C}$, а J — инволюция комплексного сопряжения, то полную систему инвариантов Э. ф. на конечномерном пространстве образуют ранг и сигнатура соответствующей квадратичной формы. Если R — локальное поле или поле функций от одной переменной над конечным полем констант, то полную систему инвариантов для невырожденной Э. ф. образуют ранг и детерминант. Если R — конечное поле, то инвариант только один — ранг. О случае, когда R — алгебраич. расширение поля $\mathbb{Q}$, см. [3]. Э. ф. впервые рассмотрены Ш. Эрмитом (Ch. Hermite, 1853) в связи с нек-рыми задачами теории чисел

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Milnor J., Husemoller D., Symmetric bilinear forms, B.— [a. o.], 1972; [4] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, 3 ed., B.— [a. o.], 1973.

В. Л. Попов.

ЭРМИТОВО СИММЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — связное комплексное многообразие M с *эрмитовой структурой*, каждая точка к-рого $p\in M$ является изолированной неподвижной точкой нек-рой голоморфной инволютивной изометрии S_p многообразия M. Компонента единицы G группы голоморфных изометрий пространства M транзитивна на M. Пусть K — стационарная подгруппа в G относительно нек-рой точки $O\in M$. Тогда M наз. пространством компактного или некомпактного типа в соответствии с типом *глобально симметрического риманова пространства* G/K. Каждое Э. с. п. M является прямым произведением $M=M_0\times M_-\times M_+$, где все сомножители есть односвязные Э. с. п., $M_0=\mathbb{C}^n$, M_- и M_+ — пространства компактного и некомпактного типа соответственно. Любое Э. с. п. компактного или некомпактного типа односвязно и является прямым произведением неприводимых Э. с. п.

Некомпактные неприводимые Э. с. п. совпадают с пространствами вида G/K, где G — связная некомпактная простая группа Ли с тривиальным центром, а K — максимальная компактная подгруппа в G, имеющая недискретный центр. Компактные неприводимые Э. с. п. совпадают с пространствами вида G/K, где G — связная компактная простая группа Ли с тривиальным

центром, а K — максимальная связная собственная подгруппа в G, имеющая недискретный центр.

Э. с. п. некомпактного типа имеют следующее истолкование в теории функций многих комплексных переменных. Пусть $\mathbb{C}^n$ есть n-мерное комплексное векторное пространство. Ограниченной областью наз. ограниченное открытое связное подмножество пространства $\mathbb{C}^n$. Ограниченная область наз. симметрической, если каждая точка $p \in D$ является изолированной неподвижной точкой нек-рого инволютивного голоморфного диффеоморфизма области D на себя. Имеет место теорема: а) каждая ограниченная симметрич. область D, будучи снабжена метрикой Бергмана (см. *Бергмана кернфункция*, *Однородная ограниченная область*), является Э. с. п. некомпактного типа, в частности, ограниченная симметрич. область обязательно односвязна; б) пусть M — Э. с. п. некомпактного типа, тогда существует ограниченная симметрич. область D и голоморфный диффеоморфизм многообразия M на D.

Лит. см. при статье *Симметрическое пространство*.

А. С. Феденко.

ЭРМИТОВО ЯДРО — комплекснозначная функция $K(x, y)$, интегрируемая с квадратом на $[a, b]\times[a, b]$ и удовлетворяющая условию (эрмитовой симметричности)

$$\overline{K}(x, y) = K(y, x) \qquad (1)$$

для почти всех $(x, y) \in [a, b]\times[a, b]$. Черта в равенстве (1) означает переход к комплексно сопряженному значению. Если Э. я. почти всюду не равно нулю, то оно имеет по крайней мере одно характеристич. значение (собственное значение), т. е. существует такое число λ, что уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = 0$$

имеет ненулевое решение (собственная функция, соответствующая числу λ). Все характеристич. значения Э. я. действительны и на любом сегменте может находиться лишь конечное их множество. Собственные функции Э. я., соответствующие различным характеристич. значениям, ортогональны между собой.

Существует ортонормированная (конечная или бесконечная) последовательность собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, соответствующих характеристич. значениям $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)/\lambda_k] \qquad (2)$$

сходится в среднем на квадрате $[a, b]\times[a, b]$ к ядру K. Если Э. я. непрерывно и ряд (2) сходится равномерно в $[a, b]\times[a, b]$, то его сумма равна K. Для того чтобы система характеристич. значений и собственных функций Э. я. была конечной, необходимо и достаточно, чтобы ядро было вырожденным.

Все *итерированные ядра* Э. я. также являются Э. я.

Линейный интегральный оператор, порожденный Э. я., является самосопряженным. Э. я. наз. полным (или замкнутым), если система его собственных функций полна в $L_2([a, b])$; в противном случае оно наз. неполным. Э. я. наз. положительным (отрицательным), если все его характеристические числа положительны (отрицательны). Полное положительное (отрицательное) ядро наз. положительно (отрицательно) определенным.

Отрезок $[a, b]$ можно заменить областью Ω n-мерного евклидова пространства.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Интегральные уравнения, М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ЭТАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ — наиболее важный пример топологии Гротендика (см. *Топологизированная категория*), позволяющий дать определение когомологич. и гомотопич. инвариантов для абстрактных алгебраич. многообразий и схем. Пусть X — схема. Э. т. на X наз. категория X_{et} этальных X-схем, объектами к-рой служат *этальные морфизмы* $U \to X$, а морфизмами — морфизмы X-схем. Конечные семейства $(f_i : U_i \to U)$ такие, что $U = \bigcup_i f_i(U_i)$ объявляются покрытиями, и тем самым в X_{et} вводится топология.

Предпучком множеств (групп, абелевых групп и т. д.) на X_{et} наз. контравариантный функтор F из категории X_{et} в категорию множеств (групп и т. д.). Предпучок $\mathcal{F}$ наз. пучком, если для любого покрытия $(f_i: U_i \to U)$ сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ определяется своим ограничением на U_i и для всякого согласованного набора сечений $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ существует единственное сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ такое, что $f_i^*(s) = s_i$. На этальные пучки на X (т. е. пучки на категории X_{et}) переносятся многие стандартные понятия *пучков теории*. Напр., если $f: X \to Y$ — морфизм схем, а $\mathcal{F}$ — этальный пучок на X, то, полагая для $V \in Y_{\text{et}}$

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(X \times_Y V),$$

получают так наз. прямой образ $f_*\mathcal{F}$ пучка $\mathcal{F}$ при морфизме f. Сопряженный слева к f_* функтор f^* наз. функтором обратного образа. В частности, слоем пучка $\mathcal{F}$ в геометрической точке η: Spec $K \to X$ (где K — алгебраически замкнутое поле) наз. множество $\mathcal{F}_\eta = \eta^*\mathcal{F}(\text{Spec } K)$.

Важным примером пучка на X_{et} является пучок $\mathcal{F}_Z$, представимый нек-рой X-схемой Z; для него $\mathcal{F}_Z(U) = \text{Hom}_X(U, Z)$. Если Z — конечная и этальная X-схема, то пучок $\mathcal{F}_Z$ наз. локально постоянным. Пучок $\mathcal{F}$ наз. конструктивным, если существует конечное разбиение схемы X на локально замкнутые подсхемы X_i такое, что ограничение $F \mid X_i$ локально постоянно на каждом X_i.

См. также *Этальные когомологии* и *Гомотопический тип* топологизированной категории.

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 3—12; [2] Милн Д., Этальные когомологии, пер. с англ., М., 1983; [3] Théorie des topos et cohomologie étale des schemas, t. 1—3, B.— [a. o.], 1972—73; [4] Cohomologie étale, B.— [a. o.], 1977.

В. И. Данилов.

ЭТАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ — когомологии пучков в *этальной топологии*. Они определяются стандартным образом при помощи производных функторов. А именно, пусть X — схема и X_{et} — этальная топология на X. Тогда категория пучков абелевых групп на X_{et} является абелевой категорией с достаточным количеством инъективных объектов. Функтор Γ глобальных сечений точен слева, и его производные функторы $\mathcal{F} \mapsto H^q(X, \mathcal{F})$ (где $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X_{et}) наз. функторами когомологий. При этом $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. Аналогично определяются высшие прямые образы $R^q f_*(\mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ относительно морфизма $f: X \to Y$; для них имеет место аналог *Лере спектральной последовательности*. Если $\mathcal{F}$ — пучок неабелевых групп, удается определить множество $H^1(X, \mathcal{F})$ (см. *Неабелевы когомологии*).

Наиболее важные результаты в теории Э. к. получены для конструктивных этальных пучков абелевых групп. Центральный из них — теорема конечности и замены базы: пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм, и $\mathcal{F}$ — конструктивный пучок на X. Тогда пучки $R^q f_*(\mathcal{F})$ конструктивны, и слой $R^q f_*\mathcal{F}$ в геометрич. точке $y \to Y$ изоморфен группе когомологий $H^q(f^{-1}(y), \mathcal{F})$ слоя $f^{-1}(y) = X \times_Y y$. Аналогичные теоремы верны для любого морфизма конечного типа, если использовать когомологии с компактными носителями.

Если X — алгебраич. многообразие над алгебраически замкнутым полем, то для любого конструктивного пучка $\mathcal{F}$ на X когомологии с компактными носителя-

ми $H^q_c(X, \mathcal{F})$ конечны и равны 0 при $q > 2\dim X$. Если к тому же X — аффинное многообразие, то $H^q(X, \mathcal{F})=0$ для $q > \dim X$.

Для многообразий над полем комплексных чисел Э. к. конструктивных пучков совпадают с классич. когомологиями со значениями в этих пучках. Справедлива теорема о специализации для гладкого морфизма: пусть $f: X \to Y$ — гладкий собственный морфизм схем, и целое число n обратимо на Y; тогда пучки $R^q f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ локально постоянны на Y.

Для Э. к. имеют место аналог двойственности Пуанкаре (см. *Двойственность* в алгебраической геометрии) и *Кюннета формулы*. Каждый алгебраич. цикл коразмерности i дает класс когомологий в размерности $2i$, что позволяет построить теорию *Чжэня классов*.

Э. к. конструктивных пучков используются для построения *l-адических когомологий* и доказательства гипотез Вейля о *дзета-функции*.

Лит.: [1] Гротендик А., в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге. Сб. докладов, М., 1962, с. 116—37; [2] Милн Дж., Этальные когомологии, пер. с англ., М., 1983; [3] Cohomologie étale, B.— [e. a.], 1977; [4] Cohomologie l'-adique et fonctions, B.— [e. a.], 1977; [5] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 1—3, B.— [e. a], 1972—73. *В. И. Данилов.*

ЭТАЛЬНЫЙ МОРФИЗМ — гладкий морфизм алгебраич. многообразий или схем относительной размерности 0. Эквивалентным образом можно определить Э. м. схем $f: X \to Y$ как локально конечно представленный плоский морфизм такой, что для любой точки $y \in Y$ $k(y)$-схема $f^{-1}(y)=X \otimes_Y k(y)$ конечна и сепарабельна. Э. м. обладает свойством подъема инфинитезимальных деформаций: если $f: X \to Y$ — Э. м., Y' — аффинная Y-схема и Y'_0 — замкнутая подсхема в Y', задаваемая нильпотентным пучком идеалов, то естественное отображение $\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X)$ биективно. Указанное свойство характеризует Э. м. Наконец, Э. м. можно определить как плоский неразветвленный морфизм. (Локально конечно представленный морфизм $f: X \to Y$ неразветвлен, если диагональное вложение $X \to X \times_Y X$ является локальным изоморфизмом.)

Этальность (как и гладкость и неразветвленность) сохраняется при композиции морфизмов и при замене базы. Открытое вложение является Э. м. Любой морфизм между этальными Y-схемами этальный. Для гладких многообразий этальность $f: X \to Y$ означает, что f индуцирует изоморфизм касательных пространств. Локально Э. м. задается многочленом с ненулевой производной.

Э. м. играют важную роль в теории *этальных когомологий*, при определении *фундаментальной группы* схемы, *алгебраического пространства* и *гензелева кольца*.

Лит.: [1] Grothendieck A., Dieudonne J., Eléments de géométrie algébrique, N. Y., 1971; [2] Revêtements étales et groupe fondamental, B.— [e. a.], 1971. *В. И. Данилов.*

ЭФФЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА — несмещенная статистическая оценка, дисперсия к-рой совпадает с нижней гранью в *Рао — Крамера неравенстве*. Э. о. является достаточной статистикой для оцениваемого параметра. Если Э. о. существует, то ее можно получить с помощью метода максимального правдоподобия. В силу того, что во многих случаях нижняя грань в неравенстве Рао — Крамера не является достижимой, в математич. статистике часто Э. о. наз. оценку, имеющую минимальную дисперсию в классе всех *несмещенных оценок* рассматриваемого параметра.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968. *М. С. Никулин.*

ЭФФЕКТИВНОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КРИТЕРИЯ — понятие, позволяющее осуществлять в случае больших выборок количественное сравнение двух различных статистич. критериев, применяемых для проверки ложной и той же статистич. гипотезы. Необходимость измерять эффективность критериев возникла в 30—40-е гг., когда появились простые с точки зрения вычислений, но «неэффективные» ранговые процедуры.

Существует несколько различных подходов к определению асимптотич. эффективности критерия. Пусть распределение наблюдений определяется действительным параметром θ и требуется проверить гипотезу H_0: $\theta=\theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta \neq \theta_0$. Пусть также нек-рому критерию с уровнем значимости α требуется N_1 наблюдений для достижения мощности β против заданной альтернативы θ, а другому критерию того же уровня требуется для этого N_2 наблюдений. Тогда можно определить относительную эффективность первого критерия по отношению ко второму формулой $e_{12}=\frac{N_2}{N_1}$. Понятие относительной эффективности дает исчерпывающую информацию при сравнении критериев, но оказывается неудобным для применения, поскольку величина e_{12} является функцией трех аргументов: α, β и θ и обычно не поддается вычислению в явном виде. Для того чтобы обойти эту трудность, используют предельные переходы.

Величина $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} e_{12}(\alpha, \beta, \theta)$ при фиксированных α и β (если этот предел существует) наз. асимптотической относительной эффективностью (АОЭ) по Питмену. Аналогично определяется АОЭ по Бахадуру — в этом случае при фиксированных β и θ устремляют к нулю α, и АОЭ по Ходжесу — Леману, когда при фиксированных α и θ вычисляют предел при $\beta \to 1$.

Каждое из этих определений имеет свои достоинства и недостатки. Так, напр., АОЭ по Питмену вычисляется обычно легче, чем АОЭ по Бахадуру (вычисление последней связано с нетривиальной задачей изучения асимптотики вероятностей больших уклонений тестовых статистик), однако в ряде случаев оказывается менее чувствительным средством для сравнения двух критериев.

Пусть, напр., наблюдения распределены по нормальному закону со средним θ и дисперсией 1 и проверяется гипотеза H_0: $\theta=0$ против альтернативы H_1: $\theta>0$. И пусть рассматриваются критерии значимости, основанные на выборочном среднем $\bar{X}$ и дроби Стьюдента t. Поскольку t-критерий не использует информации о величине дисперсии, он должен проигрывать оптимальному критерию, основанному на $\bar{X}$. Однако с точки зрения АОЭ по Питмену эти критерии эквивалентны. С другой стороны, АОЭ по Бахадуру t-критерия по отношению к $\bar{X}$ строго меньше 1 при любом $\theta>0$.

В более сложных случаях АОЭ по Питмену может зависеть от α или β и ее вычисление оказывается очень трудным. Тогда вычисляют ее предельное значение при $\beta \to 1$ или $\alpha \to 0$. Последнее обычно совпадает с предельным значением АОЭ по Бахадуру при $\theta \to \theta_0$.

О других подходах к определению АОЭ см. в [2], [4], последовательные аналоги понятия АОЭ введены в [5] — [7]. Выбор того или иного определения АОЭ должен основываться на том, какая из них дает более точное приближение к относительной эффективности e_{12}, однако в настоящее время (1984) в этом направлении почти ничего не известно.

Лит.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Bahadur R., «Ann. Math. Stat.», 1967, v. 38, № 2, p. 303—24; [3] Hodges J., Lehmann E., там же, 1956, v. 27, № 2, p. 324—35; [4] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Lai T. L., «Ann. Stat.», 1978, v. 6, № 5, p. 1027—47; [6] Berk R., Brown L., там же, 1978, v. 6, № 3, p. 567—81; [7] Berk R., там же, 1976, v. 4,

№ 5, p. 891—911; [8] Wieand H., там же, 1976, v. 4, № 5, p. 1003—11; [9] Groeneboom P., Oosterhoff J., «Stat. neerlandica», 1977, v. 31, p. 1—24. *Я. Ю. Никитин.*

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ — понятие, используемое при сравнении статистич. процедур из данного класса с оптимальной. В математич. статистике понятие оптимальности статистич. процедуры выражается в терминах риска (функции риска) процедуры, к-рый, в свою очередь, непосредственно зависит от выбора функции потерь. Поэтому может оказаться, что одна и та же статистич. процедура является очень эффективной или даже оптимальной в каком-то одном смысле и мало эффективной в другом смысле.

Э. с. п.— понятие, не совсем четко определенное; более точный смысл оно приобретает в конкретных задачах математич. статистики, в таких, как, напр., статистических гипотез проверка и статистическое оценивание. *М. С. Никулин.*

ЭФФЕКТИВНЫЙ КРИТЕРИЙ — наиболее мощный критерий в рассматриваемом классе статистич. критериев, имеющих один и тот же *значимости уровень*. *М. С. Никулин.*

Ю

ЮНГА ДИАГРАММА порядка m — *Юнга таблица* порядка m, в клетках к-рой каким-либо образом расположены числа 1, 2, . . ., m, (см. табл.). Ю. д. наз. стандартной, если в каждой ее строке и в каждом столбце числа идут в порядке возрастания. Число всех Ю. д. для данной таблицы Юнга t порядка m равно $m!$, а число стандартных Ю. д. равно

$$\frac{m!}{\prod \lambda_{ij}},$$

5	7	9	4
8	2	1	
3			
6			

где произведение берется по всем клеткам c_{ij} таблицы t, а λ_{ij} обозначает длину соответствующего крюка. *Э. Б. Винберг*

ЮНГА ПРИЗНАК — один из достаточных признаков сходимости *Фурье ряда* в точке. Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π, интегрируема по Лебегу на отрезке $[0, 2\pi]$, $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ и в точке x_0 выполнены следующие условия: $\varphi_{x_0}(t) \to 0$ при $t \to +0$; функция $\psi(t) = t\varphi_{x_0}(t)$ имеет конечную вариацию $V(\delta) \equiv \operatorname{Var} \psi(t)$ на отрезке $[0, \delta]$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, где $\delta_0 > 0$ — нек-рое фиксированное число; $V(\delta) = O(\delta)$ при $\delta \to +0$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к $f(x_0)$ (см. [2]). Ю. п. сильнее *Жордана признака*. Установлен У. Юнгом [1].

Лит.: [1] Young W. H., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1916, v. 17, p. 195—236; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. *Б. И. Голубов.*

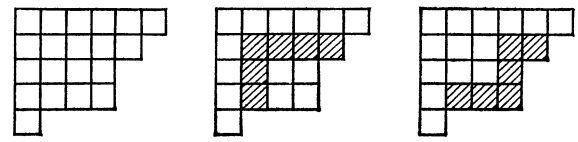
ЮНГА СИММЕТРИЗАТОР — элемент e_d группового кольца группы S_m, определяемый *Юнга диаграммой* d порядка m по следующему правилу. Пусть R_d (соответственно C_d) — подгруппа группы S_m, состоящая из всех подстановок, переводящих каждое из чисел 1, 2, ..., m в число, находящееся в той же строке (соответственно в том же столбце) диаграммы d. И пусть

$$r_d = \sum_{g \in R_d} g, \quad c_d = \sum_{g \in C_d} \varepsilon(g)\, g,$$

где $\varepsilon(g) = \pm 1$ — четность подстановки g. Тогда $e_d = c_d r_d$ (иногда определяют $e_d = r_d c_d$).

Основное свойство Ю. с. состоит в том, что он пропорционален неразложимому идемпотенту групповой алгебры $\mathbb{C}S_m$. Коэффициент пропорциональности равен произведению длин всех крюков диаграммы d. *Э. Б. Винберг.*

ЮНГА ТАБЛИЦА порядка m — графическое представление разбиения $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ натурального числа m (где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r > 0$, $\sum \lambda_i = m$). Ю. т. t_λ состоит из m клеток, располагающихся в ее строках и столбцах таким образом, что в i-й строке находится λ_i клеток, причем первые клетки всех строк находятся в одном (первом) столбце. Напр., разбиение (6, 5, 4, 4, 1) числа 20 представляется Ю. т. (см. табл. слева).



Транспонированная Ю. т. t'_λ соответствует сопряженному разбиению $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$, где λ'_j — число клеток в j-м столбце Ю. т. Так, в приведенном выше примере сопряженным разбиением будет (5, 4, 4, 4, 2, 1).

Каждая клетка Ю. т. определяет два множества клеток — так наз. крюк и косой крюк. Пусть c_{ij} — клетка, находящаяся в i-й строке и j-м столбце данной Ю. т. Соответствующий ей крюк h_{ij} есть множество, состоящее из клеток c_{il} с $l \geqslant j$ и c_{kj} с $k \geqslant i$, а косой крюк есть наименьшее связное множество крайних клеток, содержащее последнюю клетку i-й строки и последнюю клетку j-го столбца. Напр., для изображенной слева Ю. т. крюк и косой крюк, определяемые клеткой c_{22}, имеют вид, показанный на табл. в центре и справа соответственно.

Длиной крюка (соответственно косого крюка) наз. число входящих в него клеток. Длина крюка h_{ij} равна $\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$. При удалении из Ю. т. косого крюка длины p получается Ю. т. порядка $m-p$. Высотой крюка (соответственно косого крюка) наз. число строк, в которых располагаются его клетки.

Язык Ю. т. и *Юнга диаграмм* используется в теории *представлений симметрических групп* и в теории *представлений классических групп*. Он был предложен А. Юнгом (см. [1]).

Лит.: [1] Young A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1901, v. 33, p. 97—146; 1902, v. 34, p. 361—402. *Э. Б. Винберг.*

ЮНГА ТЕОРЕМА: каждое множество диаметра d евклидова пространства E_n принадлежит шару из E_n радиуса $r = d\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$. Имеются аналоги и обобщения Ю. т. (напр., замена евклидова расстояния на другие метрики) (см. [2]).

Теорема доказана Г. Юнгом [1].

Лит.: [1] Jung H. W. E., «J. reine und angew. Math.», 1901, Bd 123, S. 241—57; [2] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968; [3] Хадвигер Г., Дебруннер Г., Комбинаторная геометрия плоскости, пер. с нем., М., 1965. *П. С. Солтан.*

Я

ЯДЕРНАЯ C^*-АЛГЕБРА — C^*-алгебра A, обладающая следующим свойством: для любой C^*-алгебры B в алгебраическом тензорном произведении $A \otimes B$ этих алгебр существует единственная норма, пополнение в к-рой превращает $A \otimes B$ в C^*-алгебру. Таким образом, Я. C^*-а. по отношению к тензорным произведениям ведут себя подобно *ядерным пространствам* (хотя бесконечномерные Я. C^*-а. не являются ядерными пространствами). Класс Я. C^*-а. включает в себя все C^*-алгебры типа I. Этот класс замкнут относительно индуктивного предела. Если I — замкнутый двусторонний идеал в C^*-алгебре A, то A ядерна тогда и только тогда, когда ядерны I и A/I. Подалгебра в Я. C^*-а. не обязана быть Я. C^*-а. Тензорное произведение C^*-алгебр A и B ядерно тогда и только тогда, когда A и B (обе) являются Я. C^*-а. Если G — аменабельная локально бикомпактная группа, то обертывающая C^*-алгебра групповой алгебры $L^1(G)$ ядерна (обратное неверно). Каждое факторпредставление Я. C^*-а. гиперфинитно, т. е. порождаемая этим представлением *Неймана алгебра* может быть получена из возрастающей последовательности конечномерных факторов (матричных алгебр). Любое факторсостояние на ядерной C^*-подалгебре в C^*-алгебре продолжается до факторсостояния на всей алгебре.

Пусть $L(H)$ есть C^*-алгебра всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, A есть C^*-алгебра операторов в H. Если A — Я. C^*-а., то ее слабое замыкание $\overline{A}$ является инъективной алгеброй Неймана, т. е. существует проекция $L(H) \to \overline{A}$ с единичной нормой; в этом случае коммутант A' алгебры A также инъективен. Произвольная C^*-алгебра A ядерна тогда и только тогда, когда ее обертывающая алгебра Неймана инъективна.

C^*-алгебра A ядерна тогда и только тогда, когда она обладает свойством вполне положительной аппроксимации, т. е. тождественный оператор в A аппроксимируется в сильной операторной топологии линейными операторами конечного ранга с нормой, не превосходящей 1, и с нек-рым дополнительным свойством «вполне положительности» [1].

Любая Я. C^*-а. обладает свойством аппроксимации и ограниченной аппроксимации (см. *Ядерный оператор*). Однако существует неядерная C^*-алгебра со свойством ограниченной аппроксимации. C^*-алгебра $L(H)$ всех ограниченных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве H не обладает свойством вполне положительной аппроксимации и даже свойством аппроксимации, так что $L(H)$ не является Я. C^*-а.

Лит.: [1] Lance E. Ch., «Proc. Symp. Pure Math.», 1982, v. 38, pt 1, p. 379—99; [2] Братгели У., Робинсон Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, пер. с англ., М., 1982.

Г. Л. Литвинов.

ЯДЕРНАЯ БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА — билинейная форма $B(f, g)$ на декартовом произведении $F \times G$ локально выпуклых пространств F и G, допускающая представление вида

$$B(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle f, f_i' \rangle \langle g, g_i' \rangle,$$

где $\{\lambda_i\}$ — суммируемая последовательность, $\{f_i'\}$ и $\{g_i'\}$ — равностепенно непрерывные последовательности в сопряженных к F и G пространствах F' и G' соответственно, а значение линейного функционала a' на векторе a обозначается $\langle a, a' \rangle$. Все Я. б. ф. непрерывны. Если F — ядерное пространство, то для любого локально выпуклого пространства G все непрерывные билинейные формы на $F \times G$ являются ядерными (теорема о ядре). Этот результат принадлежит А. Гротендику [1]; в приведенной форме теорема о ядре сформулирована в [2], другие формулировки см. в [3]. Справедливо и обратное утверждение: если для пространства F выполняется заключение теоремы о ядре, то это пространство ядерно.

Для пространств гладких финитных функций теорему о ядре впервые получил Л. Шварц [4]. Пусть D — ядерное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на прямой, наделенное стандартной локально выпуклой топологией Шварца, так что сопряженное пространство D' состоит из всех обобщенных функций на прямой. Для частного случая $F=G=D$ теорема о ядре эквивалентна следующему утверждению: всякий непрерывный билинейный функционал на $D \times D$ имеет вид

$$B(f, g) = \langle f(t_1)\, g(t_2), F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, t_2)\, f(t_1)\, g(t_2)\, dt_1\, dt_2,$$

где $f(t)$, $g(t) \in D$ и $F = F(t_1, t_2)$ — обобщенная функция от двух переменных. Аналогичную формулировку допускает теорема о ядре для пространств гладких финитных функций от нескольких переменных, пространств быстро убывающих функций и других конкретных ядерных пространств. Аналогичные результаты справедливы и для полилинейных форм.

Непрерывную билинеиную форму $B(f, g)$ на $D \times D$ можно отождествить с непрерывным линейным оператором $A : D \to D'$ с помощью равенства

$$B(f, g) = \langle g, Af \rangle,$$

что приводит к формулировке теоремы Шварца о ядре: для каждого непрерывного линейного отображения $A : D \to D'$ существует такая однозначно определенная обобщенная функция $F(t_1, t_2)$ от двух переменных, что

$$A : f(t_1) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, t_2)\, f(t_2)\, dt_2$$

для всех $f \in D$. Другими словами, A является интегральным оператором с ядром F.

Лит.: [1] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955; [2] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [3] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Schwartz L., «Proc. Intern. Congr. Math.» (Camb., 1950), 1952, v. 1, p. 220—30; [5] его же, «J. d'Analyse Math.», 1954/55, v. 4, p. 88—148.

Г. Л. Литвинов.

ЯДЕРНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ гомоморфизма $\varphi : A \to A'$ алгебраич. систем — конгруэнция θ на алгебраич. системе A, состоящая из всех пар $(a, b) \in A \times A$, для к-рых $\varphi(a) = \varphi(b)$. Для всякой конгруэнции θ алгебраич. системы существует гомоморфизм φ этой системы, для к-рого θ является Я. к. Если θ — Я. к. сильного гомоморфизма φ алгебраич. системы A на

систему A', то канонич. отображение $a/\theta \to \varphi(a)$, где $a/\theta = \{x \in A \mid (x, a) \in \theta\}$, есть изоморфизм факторсистемы A/θ на систему A'.

Лит. см. при статье *Гомоморфизм.* *Д. М. Смирнов.*

ЯДЕРНАЯ НОРМА, следовая норма,— норма в пространстве $N(X, Y)$ *ядерных операторов*, отображающих банахово пространство X в банахово пространство Y.

Пусть X, Y — банаховы пространства над полем действительных или комплексных чисел, $L(X, Y)$ — пространство всех непрерывных линейных операторов, отображающих X в Y, $F(X, Y)$ — линейное подпространство, состоящее из операторов конечного ранга (т. е. операторов с конечномерным образом). Банахово сопряженное пространство к X обозначается X', значение функционала $x' \in X'$ на векторе $x \in X$ обозначается $\langle x, x' \rangle$.

Каждый ядерный оператор $A \in N(X, Y)$ допускает представление в виде

$$x \mapsto Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i' \rangle y_i, \qquad (1)$$

где $\{x_i'\}$ и $\{y_i\}$ — такие последовательности в X' и Y соответственно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\| \|y_i\| < \infty;$$

такие представления наз. ядерными. Величина

$$\|A\|_1 = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\| \|y_i\|, \qquad (2)$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным ядерным представлениям вида (1), наз. ядерной нормой оператора A. Эта норма превращает $N(X, Y)$ в банахово пространство, к-рое содержит $F(X, Y)$ в качестве плотного линейного подпространства. Если $A \in N(X, Y)$, то сопряженный оператор A' содержится в $N(Y', X')$ и $\|A'\|_1 \leqslant \|A\|_1$. Пусть $\|\cdot\|$ — обычная операторная норма в $L(X, Y)$. Тогда $\|A\| \leqslant \|A_1\|$ для всех $A \in N(X, Y)$. Если $A \in L(Y, Z)$, $B \in N(X, Y)$, то $AB \in N(X, Z)$ и $\|AB\|_1 \leqslant \|A\| \, \|B\|_1$; если $A \in N(Y, Z)$, $B \in L(X, Y)$, то $AB \in N(X, Z)$ и $\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_1 \|B\|$. Любой оператор $F \in F(X, Y)$ представим в виде

$$x \mapsto Fx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle y_i. \qquad (3)$$

Величина

$$\|F\|_1^0 = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\| \|y_i\|, \qquad (4)$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным конечным представлениям вида (3), наз. конечной ядерной нормой оператора F. Пространство $F(X, Y)$ можно отождествить с тензорным произведением $X' \otimes Y$. При этом оператору F вида (3) соответствует элемент

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i \in X' \otimes Y, \qquad (5)$$

и конечная Я. н. (4) переходит в норму

$$\|u\| = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\| \|y_i\|, \qquad (6)$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным представлениям элемента u в виде (5). Эта норма наз. тензорным (или скрещенным) произведением норм в Y и в X'. Пополнение $X' \otimes Y$ по норме (6) обозначается $X' \hat{\otimes} Y$. Отображение $X' \otimes Y \to L(X, Y)$, при к-ром элемент (5) переходит в оператор (3), продолжается до непрерывного линейного оператора $\Gamma : X' \hat{\otimes} Y \to L(X, Y)$. Образ оператора Γ совпадает с $N(X, Y)$. Если отображение Γ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $X' \hat{\otimes} Y$ и $N(X, Y)$, то $N(X, Y)$ совпадает с замыканием $F(X, Y)$ по норме (4); в этом случае сужение Я. н. на $F(X, Y)$ совпадает с конечной Я. н. Однако в общем случае оператор Γ может иметь нетривиальное ядро, так что Я. н. является результатом факторизации нормы в $X' \otimes Y$ (см. *Ядерный оператор*).

Пусть $X = Y = H$, где H — сепарабельное гильбертово пространство; $L(H) = L(H, H)$ — алгебра ограниченных операторов в H, $L^1(H) = N(H, H)$ — идеал ядерных операторов в $L(H)$. В этом случае отображение Γ взаимно однозначно, для операторов конечного ранга Я. н. совпадает с конечной Я. н. и каждый оператор $A \in L^1(H)$ имеет след $\mathrm{tr}A$ (см. *Ядерный оператор*). Я. н. оператора $A \in L^1(H)$ совпадает с величиной $\mathrm{tr}\,[(A^*A)^{1/2}]$, где A^* — сопряженный к A оператор в H. Я. н. связана с *Гильберта—Шмидта нормой* $\|\cdot\|_2$ неравенством $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_1$. Общий вид линейного непрерывного функционала в банаховом пространстве $L^1(H)$ дается формулой

$$A \to \mathrm{tr}\,(AB), \qquad (7)$$

где B — произвольный оператор из $L(H)$, причем норма функционала (7) совпадает с $\|B\|$. Следовательно, $L(H)$ изометрично пространству, сопряженному к $L^1(H)$. Формула (7) дает общий вид линейного функционала и на замкнутом подпространстве $L^\infty(H)$ в $L(H)$, состоящем из всех вполне непрерывных (компактных) операторов; при этом $A \in L^\infty(H)$, а B пробегает $L^1(H)$. При этом норма функционала (7) совпадает с $\|B\|_1$, т. е. пространство ядерных операторов $L^1(H)$ с Я. н. изометрично пространству, сопряженному к $L^\infty(H)$ в обычной операторной норме. Перечисленные результаты допускают нетривиальные обобщения на случай операторов в банаховых пространствах.

Пример. Пусть $X = Y = l^1$ — пространство суммируемых последовательностей. Оператор $A \in L(l^1, l^1)$ содержится в $N(l^1, l^1)$ тогда и только тогда, когда существует такая бесконечная матрица $\|\sigma_{ik}\|$, что A переводит последовательность $\{\xi_k\} \in l^1$ в $\{\eta_i\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ik}\xi_k\right\} \in l^1$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \sup_k |\sigma_{ik}| < \infty$. В этом случае $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_k |\sigma_{ik}|$.

Лит.: [1] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955; [2] Пич А., Операторные идеалы, пер. с англ., М., 1982; [3] его же, Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [5] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [6] Морен К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; [7] Дэй М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961. *Г. Л. Литвинов.*

ЯДЕРНАЯ ПАРА морфизма категории — категорное обобщение отношения эквивалентности, индуцированного отображением одного множества в другое. Пара морфизмов $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : R \to A$ категории $\mathfrak{K}$ наз. ядерной парой морфизма $\alpha : A \to B$, если $\varepsilon_1\alpha = \varepsilon_2\alpha$ и если для любой пары морфизмов φ, $\psi : X \to A$, для к-рой $\varphi\alpha = \psi\alpha$, существует такой единственный морфизм $\gamma : X \to R$, что $\varphi = \gamma\varepsilon_1$ и $\psi = \gamma\varepsilon_2$.

Пусть $\mathfrak{V}$ — произвольная категория однотипных универсальных алгебр и всех гомоморфизмов между ними, замкнутая относительно конечных произведений, и пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : R \to A$ — Я. п. гомоморфизма $f : A \to B$ из $\mathfrak{V}$. Тогда образ гомоморфизма

$$\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 : R \to A \times A,$$

индуцированного парой ε_1, ε_2, является конгруэнцией на алгебре A. Обратно, если $R \subseteq A \times A$ — произвольная конгруэнция на A, i — вложение R в $A \times A$, p_1, p_2—проекции $A \times A$ на A, то пара гомоморфизмов

ip_1, $ip_2 : R \to A$ является Я. п. естественного гомоморфизма алгебры A на факторалгебру A/R.

В произвольной категории с конечными произведениями и ядрами пар морфизмов Я. п. морфизма $\alpha : A \to B$ строится следующим образом. Выбирают произведение $A \times A$ с проекциями π_1 и π_2 и находят ядро μ пары морфизмов $\pi_1\alpha$, $\pi_2\alpha : A \times A \to B$. Тогда пара морфизмов $\mu\pi_1$, $\mu\pi_2$ является Я. п. морфизма α.

М. Ш. Цаленко.

ЯДЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — *локально выпуклое пространство*, у к-рого все линейные непрерывные отображения в каждое банахово пространство являются *ядерными операторами*. Понятие Я. п. возникло [1] при исследовании вопроса о том, для каких пространств справедливы аналоги теоремы Шварца о ядре (см. *Ядерная билинейная форма*). Основополагающие результаты теории Я. п. принадлежат А. Гротендику [1]. Употребительные в анализе функциональные пространства, как правило, являются банаховыми или Я. п. Важную роль играют Я. п. в спектральном анализе операторов в гильбертовых пространствах (построение оснащенных гильбертовых пространств, разложения по обобщенным собственным векторам и т. п.) (см. [2]). Я. п. тесно связаны с теорией меры на локально выпуклых пространствах (см. [3]). Удается охарактеризовать Я. п. в терминах инвариантов типа размерности (аппроксимативная размерность, диаметральная размерность и др.) (см. [2], [4], [5]). Одним из таких инвариантов является функциональная размерность, к-рая для многих пространств, состоящих из целых аналитич. функций, совпадает с числом переменных, от к-рых зависят эти функции (см. [2]).

По своим свойствам Я. п. приближаются к конечномерным пространствам. Каждое ограниченное множество в Я. п. предкомпактно. Если Я. п. полно (или хотя бы квазиполно, т. е. каждое замкнутое ограниченное множество является полным), то оно полурефлексивно (т. е. второе сопряженное к этому пространству совпадает с ним по запасу элементов) и каждое замкнутое ограниченное множество в нем является компактным. Если квазиполное Я. п. является *бочечным пространством*, то оно является и *Монтеля пространством* (в частности, рефлексивно); всякая слабо сходящаяся счетная последовательность в таком пространстве сходится и в исходной топологии. Нормированное пространство ядерно тогда и только тогда, когда оно конечномерно. Каждое Я. п. обладает свойством аппроксимации: любой непрерывный линейный оператор в таком пространстве можно приблизить в операторной топологии предкомпактной сходимости операторами конечного ранга (т. е. непрерывными линейными операторами с конечномерными образами). Тем не менее существуют ядерные *Фреше пространства*, не обладающие свойством ограниченной аппроксимации: в таком пространстве тождественный оператор не является пределом счетной последовательности операторов конечного ранга в сильной или слабой операторной топологии [6]. Построены Я. п. Фреше без базиса Шаудера, причем такие пространства могут иметь сколь угодно малую диаметральную размерность, т. е. в нек-ром смысле могут быть сколь угодно близкими к конечномерным [7]. Для Я. п. построен и контрпример к проблеме инвариантного подпространства: в нек-ром ядерном пространстве Фреше указан непрерывный линейный оператор, не имеющий нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств [8].

Примеры Я. п. 1) Пусть $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех (действительных или комплексных) бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, наделенное топологией равномерной сходимости со всеми производными на компактных подмножествах в $\mathbb{R}^n$. Сопряженное к $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ пространство $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех *обобщенных функций* с компактным носителем. Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — линейные подпространства в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, состоящие соответственно из функций с компактным носителем и из функций, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Сопряженные к $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ относительно стандартной топологии пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ состоят соответственно из всех обобщенных функций и всех обобщенных функций медленного роста. Пространства $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, наделенные сильными топологиями, являются полными рефлексивными Я. п.

2) Пусть $\{a_{np}\}$ — бесконечная матрица, причем $0 \leqslant a_{np} < \infty$, $a_{np} \leqslant a_{n(p+1)}$, n, $p = 1, 2, \ldots$. Пространство таких последовательностей $\xi = \{\xi_n\}$, что $|\xi|_p = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n| a_{np} < \infty$ для всех p, с топологией, задаваемой преднормами $\xi \to |\xi|_p$, наз. пространством Кёте и обозначается $\mathcal{K}(a_{np})$. Это пространство ядерно тогда и только тогда, когда для любого p найдется такое q, что $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{np}/a_{nq}) < \infty$.

Свойства наследования. Локально выпуклое пространство ядерно тогда и только тогда, когда ядерно его пополнение. Каждое подпространство (отделимое факторпространство) Я. п. ядерно. Прямая сумма, индуктивный предел счетного семейства Я. п., а также произведение, проективный предел любого семейства Я. п.— снова Я. п.

Пусть E — произвольное локально выпуклое пространство, E' — сопряженное пространство к E, наделенное сильной топологией. Если E' — Я. п., то E наз. дуально ядерным. Если E — произвольное пространство, а F — Я. п., то пространство $L(E, F)$ непрерывных линейных операторов из E в F является Я. п. относительно сильной *операторной топологии* (простой сходимости); если к тому же E полурефлексивно и дуально ядерно, то $L(E, F)$ ядерно и в топологии ограниченной сходимости.

Метрические и дуально метрические Я. п. Локально выпуклое пространство E наз. дуально метрическим или пространством типа $(\mathcal{D}\mathcal{F})$, если оно имеет счетную фундаментальную систему ограниченных множеств и каждое (сильно) ограниченное счетное объединение равностепенно непрерывных подмножеств в E' равностепенно непрерывно. Всякое сильное сопряженное к метризуемому локально выпуклому пространству является дуально метрическим; обратное неверно. Если E — пространство типа $(\mathcal{D}\mathcal{F})$, то E' — пространство типа $(\mathcal{F})$ (пространство Фреше, т. е. полное и метризуемое). Примерами Я. п. типа $(\mathcal{F})$ являются пространства Кёте, а также $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$; соответственно $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$ — Я. п. типа $(\mathcal{D}\mathcal{F})$. Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ не являются ни метрическими, ни дуально метрическими.

Метрические и дуально метрические Я. п. сепарабельны, а если они полны, то рефлексивны. Переход к сопряженному пространству $E \to E'$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Я. п. типа $(\mathcal{F})$ и полными Я. п. типа $(\mathcal{D}\mathcal{F})$. Если E — полное Я. п. типа $(\mathcal{D}\mathcal{F})$, а F — Я. п. типа $(\mathcal{F})$, то пространство операторов $L(E, F)$, наделенное топологией ограниченной сходимости, ядерно и дуально ядерно.

Каждое Я. п. типа $(\mathcal{F})$ изоморфно подпространству пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций на прямой, т. е. $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ — универсальное пространство для Я. п. типа $(\mathcal{F})$ (см. [10]). Пространство Фреше E ядерно тогда и только тогда, когда всякий безусловно сходящийся ряд в E сходится абсолютно (т. е. по любой непрерывной преднорме). Интенсивно изучаются пространства голоморфных функций на Я. п. типа $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{D}\mathcal{F})$ (см. [11]).

Тензорные произведения Я. п. и пространства вектор-функций. Алгебраическое тензорное произведение $E\otimes F$ локально выпуклых пространств E и F можно наделить проективной и слабой топологиями, превращающими $E\otimes F$ в топологическое тензорное произведение. Проективная топология — это сильнейшая локально выпуклая топология, для к-рой каноническое билинейное отображение $E\times F\to E\otimes F$ непрерывно. Слабая топология (или топология (би)равностепенно непрерывной сходимости) индуцируется при естественном вложении $E\otimes F\to L_e(E'_\tau, F)$, где E'_τ — сопряженное пространство к E, наделенное топологией Макки $\tau(E', E)$, а $L_e(E'_\tau, F)$ — пространство непрерывных линейных отображений $E'_\tau\to F$, наделенное топологией равномерной сходимости на равностепенно непрерывных множествах в E'. При этом вложении элемент $x\otimes y\in E\otimes F$ переходит в оператор $x'\mapsto\langle x, x'\rangle y$, где $\langle x, x'\rangle$ — значение функционала $x'\in E'$ на $x\in E$. Пополнение $E\otimes F$ в проективной (слабой) топологии обозначается $E\hat{\otimes}F$ (соответственно $E\tilde{\otimes}F$).

Для того чтобы E было Я. п., необходимо и достаточно, чтобы для произвольного локально выпуклого пространства F проективная и слабая топологии в $E\otimes F$ совпадали, т. е.

$$E\hat{\otimes}F=E\tilde{\otimes}F. \qquad (1)$$

Если F совпадает с пространством l^1 суммируемых последовательностей, то E — Я. п.; вместо l^1 можно взять любое пространство с безусловным базисом (см. [12]). Тем не менее существует такое (неядерное) бесконечномерное сепарабельное банахово пространство X, что $X\hat{\otimes}X=X\tilde{\otimes}X$ (см. [13]). Если E и F — полные пространства и F — Я. п., то вложение $E\otimes F\to L_e(E'_\tau, F)$ продолжается до изоморфизма между $E\hat{\otimes}F$ и $L_e(E'_\tau, F)$.

Если E — ненулевое Я. п., то $E\hat{\otimes}F$ ядерно тогда и только тогда, когда F ядерно. Если E и F — оба пространства типа $(\mathcal{F})$ (или $(\mathcal{DF})$) и E — ядерно, то $E\hat{\otimes}F$ — пространство типа $(\mathcal{F})$ (соответственно $(\mathcal{DF})$) и $(E\hat{\otimes}F)'=E'\tilde{\otimes}F'$.

Пусть E — полное Я. п., состоящее из скалярных функций (не всех) на нек-ром множестве T, причем E является индуктивным пределом (локально выпуклой оболочкой) счетной последовательности пространств типа $(\mathcal{F})$ и топология в E не слабее топологии поточечной сходимости функций на T. Тогда для любого полного пространства F можно отождествить $E\hat{\otimes}F$ с пространством всех таких отображений (вектор-функций) $T\to F$, что скалярные функции $t\mapsto\langle f(t), y'\rangle$ принадлежат E для всех $y'\in F'$. В частности, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)\hat{\otimes}F$ совпадает с пространством всех бесконечно дифференцируемых вектор-функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в F, а $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)\hat{\otimes}\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)=\mathcal{E}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)=\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Структура Я. п. Пусть U — выпуклая закругленная окрестность нуля в локально выпуклом пространстве E, а p — соответствующий U функционал Минковского (непрерывная преднорма), E_U — факторпространство $E/p^{-1}(0)$ с нормой, индуцированной преднормой p, $\hat{E}_U$ — пополнение нормированного пространства E_U. Определено непрерывное каноническое линейное отображение $E\to\hat{E}_U$; если окрестность U содержит окрестность V, то канонически определяется непрерывное линейное отображение $\hat{E}_V\to\hat{E}_U$.

Для локально выпуклого пространства E следующие условия эквивалентны: 1) E является Я. п.; 2) в E существует такой базис $\mathfrak{B}$ выпуклых закругленных окрестностей нуля, что для любой окрестности $U\in\mathfrak{B}$ канонич. отображение $E\to\hat{E}_U$ является ядерным оператором; 3) отображение $E\mapsto\hat{E}_U$ ядерно для любой выпуклой закругленной окрестности нуля U в E; 4) всякая выпуклая закругленная окрестность нуля U в E содержит другую такую окрестность нуля V, что ядерно канонич. отображение $\hat{E}_V\to\hat{E}_U$.

Пусть E — Я. п. Для любой окрестности нуля U в E и любого такого числа p, что $1\leqslant p\leqslant\infty$, существует выпуклая закругленная окрестность $V\subset U$, для к-рой E_V (по норме) изоморфно подпространству в пространстве l^p суммируемых со степенью p последовательностей. Таким образом, E совпадает с локально выпуклым ядром (индуктивным пределом) семейства пространств, изоморфных l^p. В частности (случай $p=2$) в любом Я. п. E существует такой базис окрестностей нуля $\{U_\alpha\}$, что все пространства $\hat{E}_{U_\alpha}$ гильбертовы; таким образом, E — мультигильбертово пространство, т. е. топология в E может быть порождена семейством преднорм, каждая из к-рых получается из нек-рой неотрицательно определенной эрмитовой формы на $E\times E$. Любое полное Я. п. изоморфно проективному пределу семейства гильбертовых пространств. Пространство E типа $(\mathcal{F})$ ядерно тогда и только тогда, когда его можно представить в виде такого проективного предела $E=\varprojlim g_{mn}H_n$ счетного семейства гильбертовых пространств H_n, что g_{mn} — ядерные операторы (или хотя бы *Гильберта—Шмидта операторы*) при $m<n$.

Базисы в Я. п. В Я. п. любой равностепенно непрерывный базис является абсолютным. В пространстве типа $(\mathcal{F})$ любой счетный базис (хотя бы слабый) является равностепенно непрерывным базисом Шаудера, так что в Я. п. типа $(\mathcal{F})$ всякий базис является абсолютным (в частности, безусловным). Аналогичный результат справедлив для полных Я. п. типа $(\mathcal{DF})$ и всех Я. п., для к-рых имеет место теорема о замкнутом графике. Факторпространство Я. п. типа $(\mathcal{F})$ с базисом не обязано иметь базис (см. [4], [5], [6]).

Пусть E — Я. п. типа $(\mathcal{F})$. Топологию в E можно задать счетной системой преднорм $x\mapsto\|x\|_p$, $p=1, 2, \ldots$, причем $\|x\|_p\leqslant\|x\|_{p+1}$ для всех $x\in E$. Если в E существует базис или непрерывная норма, то преднормы $\|\cdot\|_p$ можно считать нормами. Пусть $\{e_n\}$ — базис в E; тогда любой элемент $x\in E$ разлагается в сходящийся (абсолютно и безусловно) ряд

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n,$$

где координаты ξ_n имеют вид $\xi_n=\langle x, x'_n\rangle$, а функционалы x'_n образуют биортогональный базис в E'. Пространство E изоморфно пространству Кёте $\mathcal{K}(a_{np})$, где $a_{np}=\|e_n\|_p$; при этом изоморфизме элемент $x\in E$ переходит в последовательность своих координат $\{\xi_n\}$. Базис $\{f_n\}$ в E эквивалентен базису $\{e_n\}$, т. е. получается из него под действием изоморфизма тогда и только тогда, когда пространства Кёте $\mathcal{K}(\|e_n\|_p)$ и $\mathcal{K}(\|f_n\|_p)$ совпадают как множества [4]. Базис $\{f_n\}$ наз. регулярным (или правильным), если существует система норм $\|\cdot\|_p$ и перестановка индексов σ такие, что $\|f_{\sigma(n)}\|_p/\|f_{\sigma(n)}\|_q$ монотонно убывает при всех $q\geqslant p$. Если Я. п. E типа $(\mathcal{F})$ имеет регулярный базис, то любые два базиса в E квазиэквивалентны (т. е. могут быть сделаны эквивалентными путем перестановки и нормировки элементов одного из них). Существуют и другие достаточные условия, при к-рых все базисы в E квазиэквивалентны (см. [4], [14]). Полное описание класса Я. п., обладающих этим свойством, неизвестно (1984).

Пример. Функции Эрмита $\varphi_n(t)=e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$ образуют базис в полном метрич. Я. п. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ быстро убывающих вместе со всеми производными гладких

функций на прямой. Пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ изоморфно пространству Кёте $\mathscr{K}(n^p)$.

Лит.: [1] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Минлос Р. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1959, т. 8, с. 497—518; [4] Митягин Б. С., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 4, с. 63—132; [5] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [6] Dubinsky E d., Structure of nuclear Fréchet spaces, B.— [a. o.], 1979; [7] Зобин Н. М., Митягин Б. С., «Функц. анализ и его прилож.», 1974, т. 8, в. 4, с. 35—47; [8] Atzmon A., «Ann. Math.», 1983, v. 117, № 3 p. 669—94; [9] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [10] Kōmura T., Kōmura Y., «Math. Ann.», 1966, Bd 162, S. 284—88; [11] Dineen S., Complex analysis in locally convex spaces, Amst., 1981; [12] John K., Zizler V., «Math. Ann.», 1979, Bd 244, № 1, S. 83—87; [13] Pisier G., «C. r. Acad. sci.», 1981, t. 293, p. 681—83; [14] Драгилев М. М., Базисы в пространствах Кёте, Ростов н/Д, 1983.

Г. Л. Литвинов.

ЯДЕРНЫЙ ОПЕРАТОР, ядерное отображение,— линейный оператор, отображающий одно *локально выпуклое пространство* в другое и допускающий специального вида аппроксимацию операторами конечного ранга (т. е. линейными непрерывными операторами с конечномерными образами). Я. о. обладает нек-рыми свойствами, присущими конечномерным операторам. В частности, Я. о., отображающий в себя пространство с базисом, имеет конечный след (см. ниже), совпадающий с суммой ряда, составленного из диагональных элементов матрицы этого оператора относительно произвольного базиса. Я. о. и появились первоначально под наименованием «операторов со следом» в математическом аппарате квантовой механики (см. [1], [2]). В гильбертовом пространстве операторы со следом взаимно однозначно соответствуют двухвалентным тензорам, и след оператора совпадает с результатом свертки соответствующего тензора. С помощью такого соответствия А. Растон [3] перенес понятие Я. о. на случай банаховых пространств и независимо А. Гротендик — на случай локально выпуклых пространств в связи с теорией *ядерных пространств* (см. [4], [5]). Пусть E и F — локально выпуклые пространства над полем действительных или комплексных чисел, E' и F' — сопряженные к ним пространства, наделенные сильной топологией, $L(E, F)$ — векторное пространство всех непрерывных линейных отображений E в F, а $S(E, F)$ — пространство всех слабо непрерывных линейных отображений E в F; $L(E)=L(E, E)$, $S(E)=S(E, F)$.

Линейный оператор $A : E\to F$ наз. ядерным, если он представим в виде

$$x\mapsto Ax=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle x, x'_i\rangle y_i, \qquad (1)$$

где $\{\lambda_i\}$ — суммируемая числовая последовательность, $\{x'_i\}$ — равностепенно непрерывная последовательность в E' и $\{y_i\}$ — последовательность элементов из нек-рого полного ограниченного выпуклого закругленного множества в F; при этом значение линейного функционала x' на векторе x обозначается $\langle x, x'\rangle$. Представление (1) можно рассматривать как разложение оператора в сумму операторов ранга 1 (т. е. с одномерным образом), и соответствующий ряд абсолютно сходится в $L(E, F)$ в топологии равномерной сходимости на ограниченных множествах. Таким образом, в этой топологии Я. о. A является пределом последовательности операторов конечного ранга. Если E и F — банаховы пространства, то Я. о. A аппроксимируется операторами конечного ранга по *ядерной норме*.

Разложение (1) наз. ядерным представлением оператора A. Любой Я. о. допускает такое ядерное представление (1), что $x'_i\to 0$, $y_i\to 0$. Если E — *бочечное пространство* и полно или хотя бы квазиполно (т. е. замкнутые ограниченные множества в E полны), то разложение (1) ядерно тогда и только тогда, когда последовательности $\{x'_i\}$ и $\{y_i\}$ ограничены.

Меняя требования к последовательностям $\{\lambda_i\}$, $\{x'_i\}$, $\{y_i\}$, можно получить различные модификации понятия Я. о. (см. [4], [5], [7]). Если от последовательности $\{x'_i\}$ потребовать (вместо равностепенной непрерывности), чтобы ее элементы содержались в каком-нибудь полном ограниченном выпуклом закругленном множестве в E', то разложение (1) определяет оператор Фредгольма; такие операторы образуют естественную область применения теории Фредгольма (см. [4], [5]). Всякий Я. о. является оператором Фредгольма, а любой оператор Фредгольма $A : E\to F$ превращается в Я. о., если наделить E *Макки топологией*. Я. о. A наз. строго ядерным (или Я. о. порядка 0), если допускает такое ядерное представление (1), что $\{\lambda_i\}$ — быстро убывающая последовательность, т. е. $\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^p<\infty$ при всех $p>0$.

Интегральные операторы (в частности, интегральные операторы Фредгольма) дают многочисленные примеры Я. о. и их модификаций (см. [4], [5], [7], [8]).

Свойства Я. о. Всякий Я. о. $A\in L(E, F)$ компактен, т. е. отображает нек-рую окрестность нуля в E во множество с компактным замыканием в F. Таким образом, любой Я. о. непрерывен, а любой оператор Фредгольма слабо непрерывен. Произведение (в любом порядке) Я. о. и непрерывного линейного оператора является Я. о. В частности, совокупность всех Я. о. образует идеал в алгебре $L(E)$; соответственно операторы Фредгольма образуют идеал в $S(E)$. Строго Я. о. также образуют идеал в $L(E)$. Всякий Я. о. $A\in L(E, F)$ имеет единственное продолжение $\hat{A}\in L(\hat{E}, F)$, где $\hat{E}$ — пополнение E, причем $\hat{A}$ — Я. о. Если $A\in L(E, F)$ — оператор Фредгольма, то сопряженное отображение $F'\to E'$ является Я. о. Для любого Я. о. $A\in L(E, F)$ существуют такие банаховы пространства E_1, F_1, компактные операторы $K_1\in L(E, E_1)$, $K_2\in L(F_1, F)$ и Я. о. $B\in L(E_1, F_1)$, что $A=K_2BK_1$. Если $A\in L(E)$ — строго Я. о., то упорядоченная по убыванию абсолютной величины последовательность собственных значений (вообще говоря комплексных) этого оператора является быстро убывающей.

Пусть пространство E ядерно, а F — полное или квазиполное пространство. Тогда для оператора $A\in L(E, F)$ следующие утверждения эквивалентны: 1) A является Я. о.; 2) A компактен; 3) A ограничен, т. е. отображает нек-рую окрестность нуля в ограниченное множество в F; 4) A — строго Я. о.

Пусть E, F, G — гильбертовы пространства, $K_1\in L(E, F)$, $K_2\in L(F, G)$ — *Гильберта—Шмидта операторы*. Тогда произведение $K_2K_1\in L(E, G)$ является Я. о. Обратно, каждый Я. о. является произведением двух операторов типа Гильберта—Шмидта. Произвольный вполне непрерывный оператор $A\in L(E, F)$ является Я. о. тогда и только тогда, когда сходится ряд, составленный из собственных значений положительно определенного оператора $T\in L(E)$, входящего в полярное разложение $A=UT$, где U — изометрич. оператор, отображающий область значений оператора T в пространство F (см. [9]).

Операторы со следом. Пусть E — произвольное локально выпуклое пространство, A — Я. о. (оператор Фредгольма), отображающий E в себя и допускающий представление вида (1). Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle y_i, x'_i\rangle$ сходится абсолютно, и его сумма, обозначаемая $\mathrm{tr}A$, наз. следом Я. о. (соответственно оператора Фредгольма) A при условии, что эта величина не зависит от представления (1). В этом случае след корректно

определен (см. [4], [5]). Если разложение (1) содержит лишь конечное число слагаемых, то A — оператор конечного ранга и $\mathrm{tr}\ A$ совпадает со следом конечномерного оператора, индуцируемого в образе оператора A.

Пусть $E'\overline{\otimes}E$ — индуктивное тензорное произведение пространств E' и E, т. е. пополнение (алгебраического) тензорного произведения $E'\otimes E$ в самой сильной *локально выпуклой топологии*, при к-рой раздельно непрерывно каноническое билинейное отображение $E'\times E\to E'\otimes E$ (пара (x', x) переходит в $x'\otimes x$). Композиция этого отображения с любой непрерывной линейной формой на $E'\overline{\otimes}E$ дает раздельно непрерывную билинейную форму на $E'\times E$, причем соответствие между формами указанного типа взаимно однозначно. В частности, билинейная форма $(x', x)\mapsto \langle x, x'\rangle$ соответствует непрерывной линейной форме на $E'\overline{\otimes}E$. Значение этой формы на элементе $u\in E'\overline{\otimes}E$ обозначается $\mathrm{tr}u$. Элемент $u\in E'\overline{\otimes}E$ наз. ядром Фредгольма, если он допускает разложение вида

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i'\otimes y_i, \qquad (2)$$

где последовательности $\{\lambda_i\}$, $\{x_i'\}$, $\{y_i\}$ такие же, как в разложении (1) для оператора Фредгольма. Ядра Фредгольма образуют подпространство в $E'\overline{\otimes}E$, обозначаемое $E'\overline{\otimes}E$.

Пусть алгебра $S(E)$ слабо непрерывных операторов в E наделена слабой *операторной топологией*, к-рая задается преднормами $A\mapsto |\langle Ay, x'\rangle|$, где $A\in S(E)$, а x' и y пробегают соответственно E' и E. Отображение $\Gamma: E'\overline{\otimes}E\to S(E)$, переводящее элемент u вида (2) в оператор A вида (1), корректно определено, линейно и непрерывно, причем $\mathrm{tr}u=\mathrm{tr}\Gamma(u)$, если след оператора $A=\Gamma(u)$ корректно определен. Если пространства E и E' полны (напр., если E — *Фреше пространство*), то Γ продолжается по непрерывности на $E'\overline{\otimes}E$. Образы элементов из $E'\overline{\otimes}E$ при этом отображении наз. операторами со следом (см. [4], [5]). Если пространство E банахово, то всякий оператор со следом является Я. о., так что в этом случае классы Я. о., операторов Фредгольма и операторов со следом совпадают. Существуют операторы со следом, не являющиеся операторами Фредгольма (напр., в ядерных пространствах Фреше). Некомпактность таких операторов затрудняет их изучение.

Проблема однозначности. Если отображение Γ взаимно однозначно или хотя бы из условия $\Gamma(u)=0$ следует, что $\mathrm{tr}u=0$, то след оператора $\Gamma(u)$ можно корректно определить равенством $\mathrm{tr}\Gamma(u)=\mathrm{tr}u$.

Указанная возможность тесно связана со свойством аппроксимации, к-рое состоит в том, что $L(E)$ содержит сеть операторов конечного ранга, сходящуюся к единичному оператору в топологии равномерной сходимости на всех предкомпактных множествах. Если E — банахово пространство, то след любого Я. о. корректно определен тогда и только тогда, когда выполнено свойство аппроксимации [4]. Построено [11] рефлексивное сепарабельное пространство X без свойства аппроксимации (и без базиса Шаудера, что решает известную проблему Банаха). Тем самым решен и вопрос об однозначности отображения Γ: существует такой элемент $u\in X'\overline{\otimes}X$, что $\Gamma(u)=0$, но $\mathrm{tr}u=1$. Если локально выпуклое пространство E обладает свойством аппроксимации, то каждый Я. о. имеет корректно определенный след; если $\{B_\nu\}$ — сеть операторов конечного ранга, сходящаяся к произвольному оператору $B\in L(E)$ равномерно на всех предкомпактных (или хотя бы выпуклых уравновешенных компактных) множествах, то равенство

$$\mathrm{tr}(AB)=\lim_{\nu}\mathrm{tr}(AB_\nu) \qquad (3)$$

справедливо для любого Я. о. A (см. [12]). Однако существует локально выпуклое пространство со свойством аппроксимации, в к-ром нельзя корректно определить след для всех операторов Фредгольма. Любой оператор Фредгольма в локально выпуклом пространстве E имеет корректно определенный след, если E обладает свойством ограниченной аппроксимации, т. е. существует сеть операторов конечного ранга, сходящаяся к единичному оператору в слабой операторной топологии и ограниченная в этой топологии; указанным свойством обладает любое пространство с базисом Шаудера. Если $\{B_\nu\}$ — ограниченная сеть, сходящаяся в $S(E)$ к произвольному оператору B (напр., если $\{B_\nu\}$ — произвольная сходящаяся в $S(E)$ счетная последовательность), то соотношение (3) выполняется для любого оператора Фредгольма A при условии, что операторы AB_ν имеют корректно определенный след (напр., если B_ν — операторы конечного ранга или E обладает свойством ограниченной аппроксимации). Если E обладает свойством аппроксимации (ограниченной аппроксимации), то для любого Я. о. (оператора Фредгольма) A и любого оператора B из $L(E)$ (соответственно из $S(E)$) выполнено: $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ (см. [12]).

Матричный след. Пусть локально выпуклое пространство E обладает базисом Шаудера $\{e_i\}$, $i=1, 2, \ldots$, так что любой вектор $x\in E$ допускает разложение $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i'\rangle e_i$, где $e_i'\in E'$. Величина $\sum_{i=1}^{\infty}\langle Ae_i, e_i'\rangle$ наз. матричным следом оператора A, если указанный ряд сходится; этот ряд сходится абсолютно, если базис безусловный. Любой оператор Фредгольма в пространстве с базисом Шаудера имеет корректно определенный след, совпадающий с матричным следом, к-рый в этом случае не зависит от выбора базиса [13].

Любой непрерывный оператор в гильбертовом пространстве является ядерным тогда и только тогда, когда этот оператор имеет конечный матричный след для любого ортонормированного базиса (см. [2], [8], [9]).

Ядерный след. Пусть T — компактное пространство с мерой Бореля μ, $C(T)$ — банахово пространство непрерывных функций на T, наделенное топологией равномерной сходимости, $K(t, s)$ — непрерывная функция на $T\times T$. Тогда линейный интегральный оператор

$$K:\ \varphi(t)\mapsto\int_T K(t, s)\varphi(s)\,d\mu(s)$$

в пространстве $C(T)$ (классический интегральный оператор Фредгольма) является ядерным и имеет корректно определенный след, причем

$$\mathrm{tr}K=\int_T K(t, t)\,d\mu(t). \qquad (4)$$

Если K — интегральный оператор с ядром $K(t, s)$, действующий в нек-ром пространстве функций на пространстве T с мерой μ, и если правой части равенства (4) можно приписать какой-либо разумный смысл, то эта величина наз. ядерным следом оператора K. Для различных классов интегральных операторов получены условия, обеспечивающие ядерность этих операторов и позволяющие приписать смысл формуле (4) (см. [4], [5], [8], [14]).

Спектральный след. Пусть E — локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел, A — Я. о. в E. Спектр оператора A, как и любого компактного оператора, представляет собой либо конечное множество, либо сходящуюся к нулю последователь-

ность, причем любое ненулевое собственное значение имеет конечную спектральную кратность. Если ряд

$$\sum_j \sigma_j(A), \qquad (5)$$

составленный из ненулевых собственных значений оператора A, причем каждое собственное значение входит в (5) столько раз, какова его спектральная кратность, сходится абсолютно, то его сумма наз. спектральным следом Я. о. A и обозначается $\mathrm{tr}_\sigma A$. Любой Я. о. в гильбертовом пространстве имеет спектральный след, совпадающий с матричным следом [15]. Пусть E — мультигильбертово пространство, т. е. топология в E может быть порождена семейством преднорм, каждая из к-рых получается из нек-рой неотрицательно определенной эрмитовой формы на $E\times E$; примером мультигильбертова пространства является любое *ядерное пространство*. Тогда всякий Я. о. A в E имеет корректно определенный след и спектральный след, причем $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}A$ (см. [13]). При этом Я. о. A может и не иметь матричного следа. Я. о. A в банаховом пространстве может не иметь спектрального следа даже в том случае, когда это пространство имеет базис и след $\mathrm{tr}A$ корректно определен. Может нарушаться и равенство $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}A$. Напр., в банаховом пространстве c_0 сходящихся к нулю последовательностей существует такой Я. о. A, что $\mathrm{tr}\,A=1$, $A^2=0$, так что A не имеет ненулевых собственных значений и $\mathrm{tr}_\sigma A=0$. Можно указать условия на оператор, выполнение к-рых обеспечивает существование и совпадение величин $\mathrm{tr}_\sigma A$ и $\mathrm{tr}A$ для Я. о. A, действующего в произвольном банаховом или локально выпуклом пространстве (не обладающем, быть может, какими-либо аппроксимационными свойствами) (см. [4], [14], [16], [17]).

Пример. Пусть E — комплексное банахово пространство, $L(E)$ — алгебра линейных непрерывных операторов в E, наделенная обычной операторной нормой. Для произвольного оператора $A\in L(E)$ пусть $\alpha_r(E)$ обозначает точную нижнюю грань величин $\|A-F\|$, где F пробегает совокупность всех операторов из $L(E)$, ранг (т. е. размерность образа) к-рых не превосходит числа $r=0, 1, 2,\ldots$ Совокупность всех операторов $A\in L(E)$, для к-рых $\sum\alpha_r(A)<\infty$, обозначается $l^1(E)$. Каждый оператор $A\in l^1(E)$ является ядерным; если E — гильбертово пространство, то $l^1(E)$ совпадает с множеством всех Я. о. в E. Для произвольного банахова пространства E каждый оператор $A\in l^1(E)$ имеет след $\mathrm{tr}A$ и спектральный след, и $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}A$ (см. [16], [17]).

Лит.: [1] Нейман И., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [2] Schatten R., Neumann J., «Ann. Math.», 1946, v. 47, № 3, p. 608—30; [3] Ruston A. F., «Proc. Lond. Math. Soc.» (2), 1951, v. 53, № 2, p. 109—24; [4] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955; [5] Гротендик А., «Математика», 1958, т. 2, № 5, с. 51—103; [6] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [7] Пич А., Операторные идеалы, пер. с англ., М., 1982; [8] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [9] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [10] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [11] Энфло П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—155; [12] Литвинов Г. Л., «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1983, в. 39, с. 73—87; [13] его же, «Тр. семинара по вект. и тенз. анализу», 1979, в. 19, с. 263—272; [14] Pietsch A., «Math. Nachr.», 1981, Bd 100, S. 61—91; [15] Лидский В. Б., «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 3, с. 485—87; [16] Маркус А. С., Мацаев В. И., «Матем. сб.», 1971, т. 86, № 2, с. 299—313; [17] König H., «Studia Math.», 1980, t. 67, № 2, p. 157—72. *Г. Л. Литвинов.*

ЯДРО в теории игр — множество, состоящее из всех недоминируемых ситуаций, т. е. такое множество ситуаций C, что отношение *доминирования* $s\underset{K}{\succ}c$ невозможно ни при каких ситуациях $s\in S$, $c\in C$ и коалиции $K\in\mathfrak{N}_u$. Выделяют следующие основные типы Я.

1) c-ядро — множество $c(v)$ таких дележей, к-рые не доминируются никакими другими дележами; c-ядро совпадает с множеством дележей, удовлетворяющих для любой коалиции S условию: $\sum_{i\in S}x_i\geqslant v(S)$. Если $c(v)=\varnothing$ и Н — М-решение (см. *Решение* в теории игр) существует, то c (v) содержится в любом Н — М-решении.

2) k-ядро — множество $k(v)$ таких индивидуально рациональных конфигураций $(x, \mathfrak{B})$ (см. *Устойчивость* в теории игр), что для любых i, $j\in B\in\mathfrak{B}$ выполняется неравенство

$$(\max_{S\in\tau_{ij}} e(S, x)-\max_{S\in\tau_{ji}} e(S, x))\,x_j\leqslant 0,$$

где $e(S, x)=v(S)-\sum_{k\in S}x_k$, а τ_{ij} — множество коалиций, содержащих игрока i и не содержащих игрока j. Я. $k(v)$ содержится в M_1^i-устойчивом множестве.

3) n-ядро — дележ $n(v)$, минимальный на множестве дележей относительно квазипорядка $\underset{v}{\preceq}$, определяемого следующим образом: $x\underset{v}{\preceq}y$ тогда и только тогда, когда вектор $\theta(x, v)=(\theta_1(x, v),\ldots, \theta_n(x, v))$, где $\theta_i(x, v)=\max\limits_{|u|=i}\min\limits_{S\in u}e(S, x)$, лексикографически предшествует вектору $\theta(y, v)$. Я. $n(v)$ существует и единственно для любой игры с непустым множеством дележей. В кооперативной игре n-ядро содержится в k-ядре.

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 103—07. *А. И. Соболев.*

ЯДРО интегрального оператора — функция двух аргументов $K(x, y)$, определяющая интегральный оператор A равенством

$$\varphi(y)=A[\varphi(x)]=\int K(x, y)\,\varphi(x)\,d\mu(x),$$

где x пробегает пространство X с мерой $d\mu(x)$, а $\varphi(x)$ принадлежит нек-рому пространству функций, определенных на X. *Г. Л. Литвинов.*

ЯДРО комплексной последовательности — множество точек расширенной комплексной плоскости, определенное для последовательности $\{z_n\}$ следующим образом. Пусть R_n — наименьшая замкнутая выпуклая область комплексной плоскости, содержащая точки z_{n+1}, z_{n+2}, ... Если не существует полуплоскости, содержащей эти точки, то областью R_n является вся комплексная плоскость, включая бесконечно удаленную точку ∞; если такие полуплоскости существуют, то R_n их общая часть. При этом точка ∞ включается в R_n, если последовательность $\{z_n\}$ неограничена, и не включается, если ограничена. Пересечение $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}R_n$ всех R_n наз. ядром последовательности $\{z_n\}$.

Если $\{z_n\}$ ограничена, то ее Я. совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества предельных точек; если $\{z_n\}$ сходится к z_0, $z_0\neq\infty$, то Я. состоит из одной точки z_0. Я. действительной последовательности $\{z_n\}$ является отрезок действительной оси с концами

$$a=\varliminf_{n\to\infty}z_n \quad\text{и}\quad b=\varlimsup_{n\to\infty}z_n.$$

Я. любой последовательности не может быть пустым, хотя и может состоять из одной бесконечно удаленной точки, как, напр., для последовательности $\{z_n\}$, $z_n=n+in$. Последовательность $\{z_n\}$, Я. к-рой состоит из одной бесконечно удаленной точки, иногда называют определенно расходящейся. Для действительной последовательности это означает, что или $z_n\to+\infty$ или $z_n\to-\infty$.

В теории суммирования рассматриваются вопросы ядерного включения методов суммирования. Метод

суммирования A ядерно сильнее метода суммирования B на множестве последовательностей U, если для любой последовательности $\{z_n\}\subset U$ имеет место включение $K_A\subset K_B$, где K_A и K_B — ядра A и B — средних последовательности $\{z_n\}$.

Лит.: [1] Кнопр К., «Math. Z.», 1930, Bd 31, S. 97—127, 276—305; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *И. И. Волков.*

ЯДРО линейного оператора — линейное подпространство области определения линейного оператора, состоящее из всех векторов, к-рые отображаются этим оператором в нуль. Я. линейного непрерывного оператора, определенного на нек-ром топологическом векторном пространстве, является замкнутым линейным подпространством в этом пространстве. Для случая локально выпуклых пространств линейный непрерывный оператор имеет нулевое ядро (т. е. взаимно однозначно отображает область определения на образ) тогда и только тогда, когда сопряженный оператор имеет слабо плотный образ. *Г. Л. Литвинов.*

ЯДРО лупы — совокупность элементов лупы, являющихся одновременно лево-, право- и среднеассоциативными (или пересечение левого, правого и среднего ядер лупы). Элемент a лупы наз. левоассоциативным, если $a(bc)=(ab)c$ для любых b, c из этой лупы. Совокупность левоассоциативных элементов наз. левым ядром лупы. Аналогично определяются право- и среднеассоциативные элементы и соответствующие Я. Левое и правое Я. могут быть определены и для квазигрупп, но непустым средним Я. обладают только лупы. Все Я. лупы являются ее подгруппами. Все три Я. JP-лупы совпадают между собой, а в лупах Муфанг являются, кроме того, нормальной подлупой (см. *Луна*). *О. А. Иванова.*

ЯДРО метода суммирования — функция $K_n(t)$ (зависящая от параметра), значения к-рой есть средние данного метода, примененного к ряду

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos \nu t. \qquad (1)$$

Я. метода суммирования служит для интегрального представления средних этого метода при суммировании рядов Фурье. Так, если метод суммирования определен преобразованием последовательности в последовательность посредством матрицы $\|a_{nk}\|$, n, $k=0, 1, \ldots$, то ядром этого метода является функция

$$K_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}D_k(t),$$

где $D_k(t)$ — частичные суммы ряда (1):

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos \nu t=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}. \qquad (2)$$

В этом случае средние ряда Фурье 2π-периодич. функции $f(x)$ могут быть выражены через функцию и Я. формулой

$$\sigma_n(f, x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(t-x)\,dt.$$

В частности, Я. метода средних арифметических имеет вид

$$K_n(t)=\frac{2}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right]^2$$

и наз. ядром Фейера. Я. метода суммирования Абеля выражается формулой

$$K(r, t)=\frac{1}{2}\,\frac{1-r}{1-2r\cos t+r^2},\quad 0\leqslant r<1,$$

и наз. ядром Пуассона. Функция $D_k(t)$ в (2) наз. ядром Дирихле.

Функция $\overline{K}_n(t)$, значения к-рой есть средние метода суммирования, примененного к ряду

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin \nu t,$$

наз. сопряженным ядром метода суммирования.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965. *И. И. Волков.*

ЯДРО множества, открытое ядро множества M — совокупность $\langle M\rangle$ всех внутренних точек M. Если A_1B — взаимно дополнительные множества топологич. пространства X, т. е. $B=X\setminus A$, то $X\setminus[A]=\langle B\rangle$, $X\setminus\langle B\rangle=[A]$, где $[A]$ — замыкание множества A. *М. И. Войцеховский.*

ЯДРО морфизма категории — понятие, частными случаями к-рого являются понятия ядра линейного преобразования векторных пространств, ядра гомоморфизма групп, колец и т. п. Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми *морфизмами*. Морфизм $\mu: K\to A$ наз. ядром морфизма $\alpha: A\to B$, если $\mu\alpha=0$ и всякий морфизм φ, для к-рого $\varphi\alpha=0$, однозначно представим в виде $\varphi=\psi\mu$. Я. морфизма α обозначается $\ker\alpha$.

Если $\mu=\ker\alpha$ и $\mu'=\ker\alpha$, то $\mu'=\xi\mu$ для единственного изоморфизма ξ. Обратно, если $\mu=\ker\alpha$ и ξ — изоморфизм, то морфизм $\mu'=\xi\mu$ есть ядро α. Таким образом, все Я. морфизма α образуют подобъект объекта A, к-рый обозначается $\mathrm{K}\mathrm{er}\alpha$.

Если $\mu=\ker\alpha$, то μ — *нормальный мономорфизм*. Обратное, вообще говоря, неверно. Я. нулевого морфизма $0: A\to B$ равно 1_A. Я. единичного морфизма 1_A существует тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{K}$ имеется *нулевой объект*.

Не во всякой категории с нулевыми морфизмами каждый морфизм обладает Я. С другой стороны, в категории $\mathfrak{K}$ с нулевым объектом морфизм $\alpha: A\to B$ обладает ядром в том и только в том случае, когда в $\mathfrak{K}$ существует универсальный квадрат относительно морфизмов α и $0: 0\to B$. Это условие выполнено, в частности, для любого морфизма локально малой слева категории с нулевым объектом и с копроизведениями.

Понятие «Я. морфизма» дуально понятию «коядро морфизма». *М. Ш. Цаленко.*

ЯДРО полугруппы — наименьший двусторонний идеал данной полугруппы. Я. имеет не всякая полугруппа. О свойствах Я. полугрупп и о полугруппах, обладающих Я., см. *Минимальный идеал*, *Архимедова полугруппа*, *Сплетение* полугрупп, *Топологическая полугруппа*. *Л. Н. Шеврин.*

ЯКОБИ МАТРИЦА — квадратная матрица $J=\|a_{ik}\|$ с действительными элементами, у к-рой $a_{ik}=0$ при $|i-k|>1$. Если обозначить $a_i=a_{ii}$ $(i=1, \ldots, n)$, $b_i=a_{ii+1}$, $c_i=a_{i+1i}$ $(i=1, \ldots, n-1)$, то Я. м. примет вид

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & c_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-1} & a_n \end{Vmatrix}.$$

Любой минор Я. м. J является произведением нек-рых главных миноров матрицы J и нек-рых ее элементов. Я. м. J вполне неотрицательна (то есть неотрицательны все миноры матрицы J) тогда и только тогда, когда неотрицательны все ее главные миноры и все элементы b_i и $c_i(i=1, \ldots, n-1)$. Если $b_ic_i>0$ при $i=1, \ldots, n-1$, то корни характеристич. многочлена J действительны и различны.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2 изд., М.— Л., 1950. *Д. А. Супруненко.*

ЯКОБИ МЕТОД — 1) Я. м.— метод приведения квадратичной формы к канонич. виду при помощи треугольного преобразования неизвестных, предложенный К. Якоби (C. Jacobi, 1834) (см. [1]).

Пусть дана билинейная форма

$$f=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ki}x_iy_k$$

(не обязательно симметрическая) над нек-рым полем P, и пусть матрица $A=\|a_{ki}\|$ этой формы удовлетворяет следующему условию:

$$\Delta_k\neq 0,\ k=1,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

где Δ_k — минор k-го порядка, стоящий в ее левом верхнем углу. Тогда форма f может быть записана в таком виде:

$$f=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_kv_k}{\Delta_{k-1}\Delta_k}, \tag{2}$$

где $u_1=\frac{\partial f}{\partial y_1}$, $v_2=\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\Delta_0=1$, а при $k=2,\ \ldots,\ n$,

$$\left.\begin{aligned} u_k&=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k-1} & \frac{\partial f}{\partial y_1}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k-1} & \frac{\partial f}{\partial y_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk-1} & \frac{\partial f}{\partial y_k}\end{Vmatrix},\\ v_k&=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{k-11} & \frac{\partial f}{\partial x_1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{k-12} & \frac{\partial f}{\partial x_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{k-1k} & \frac{\partial f}{\partial x_k}\end{Vmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В частности, если A — симметрич. матрица и f — квадратичная форма с матрицей A, удовлетворяющая условию (1), то форма f приводится к канонич. виду

$$f=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k^2}{\Delta_{k-1}\Delta_k},\ \Delta_0=1, \tag{4}$$

при помощи следующего преобразования неизвестных:

$$u_k=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k-1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k-2} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk-1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_k}\end{Vmatrix} \tag{5}$$

при $k=2,\ \ldots,\ n$, и

$$u_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Это преобразование имеет треугольную матрицу и записывается в виде

$$u_k=\sum_{i=k}^{n}c_{ki}x_i, \tag{6}$$

где C_{ki} — минор матрицы A, стоящий в строках с номерами $1, 2, \ldots, k-1, k$ и столбцах с номерами $1, 2, \ldots, k-1, i$.

Формулы (2) — (7) наз. иногда формулами Якоби.

В случае, когда матрица квадратичной формы f удовлетворяет лишь условию

$$\Delta_i\neq 0,\ i=1,\ \ldots,\ r,$$
$$\Delta_{r+1}=\ldots=\Delta_n=0,$$

где r — ранг формы, эта форма может быть приведена к каноническому виду

$$f=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\Delta_{k-1}\Delta_k}u_k^2, \tag{7}$$

(здесь $\Delta_0=1$) треугольным преобразованием неизвестных. Приведение можно осуществить при помощи метода Гаусса (см. [1], с. 272—275). В частности, если поле $P=\mathbb{R}$, то положительный индекс инерции квадратичной формы f равен числу сохранений знака, а отрицательный индекс инерции — числу перемен знака в ряду чисел

$$1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_r.$$

См. также *Инерции закон.*

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966.

И. В. Проскуряков.

2) Я. м.— *простой итерации метод* для решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$, в к-ром предварительное преобразование системы к виду $x=Bx+g$ осуществляется по правилу

$$B=E-D^{-1}A,\ g=D^{-1}b,\ D=(d_{ij}),\ d_{ii}=a_{ii},$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ d_{ij}=0,\ i\neq j.$$

3) Я. м.— *вращений метод* для решения полной проблемы собственных значений и собственных векторов эрмитовой матрицы.

Г. Д. Ким.

ЯКОБИ МНОГООБРАЗИЕ, якобиан, алгебраической кривой S — главно поляризованное абелево многообразие $(J(S), \Theta)$, сопоставляемое этой кривой. Иногда Я. м. является просто коммутативной алгебраич. группой. Если S — гладкая проективная кривая рода g над полем $\mathbb{C}$ или, в классич. терминологии, компактная риманова поверхность рода g, то интегрирование голоморфных 1-форм по 1-циклам на S задает вложение

$$H_1(S,\mathbb{Z})\longrightarrow H^0(S,\Omega_S)^*,$$

образ к-рого является решеткой максимального ранга (здесь Ω_S — пучок голоморфных 1-форм на S). Я. м. кривой S есть факторногообразие

$$J(S)=H^0(S,\Omega_S)^*/H_1(S,\mathbb{Z}).$$

В качестве поляризации на нем берется класс когомологий Θ из

$$H^1(J(S),\ \mathbb{Z})\wedge H^1(J(S),\mathbb{Z})=H^2(J(S),\ \mathbb{Z})\subset H^2(J(S),\mathbb{C}),$$

соответствующий форме пересечения на $H_1(S,\mathbb{Z})\cong H_1(J(S),\mathbb{Z})$. Эта поляризация является главной, т. е. $\Theta^g=g!$. Для более явного задания Я. м. обычно берется нек-рый базис $\delta_1,\ \ldots,\ \delta_{2g}$ в $H_1(S,\mathbb{Z})$ и базис из форм $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_g$ в $H^0(S,\Omega_S)$. Эти данные определяют матрицу Ω размера $g\times 2g$ — матрицу периодов римановой поверхности

$$\Omega=\left\|\int_{\delta_j}\omega_i\right\|.$$

Тогда $J(S)=\mathbb{C}^g/\Lambda$, где Λ — решетка с базисом, состоящим из столбцов матрицы Ω. Базисы $\{\delta_j\}$ и $\{\omega_i\}$ можно выбрать так, что $\Omega=\|E_gZ\|$; при этом матрица $Z=X+iY$ симметрична и $Y>0$ (см. *Абелев дифференциал*). Класс поляризации представляется формой ω, к-рая в стандартных координатах $(z_1,\ \ldots,\ z_g)$ на $\mathbb{C}^g$ записывается в виде

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_{1\leqslant j,\,k\leqslant g}(Y^{-1})_{jk}\,dz_j\wedge d\bar{z}_k.$$

Вместо класса когомологий Θ часто рассматривают двойственный к нему эффективный дивизор, обозначаемый той же буквой; он определен однозначно с точностью до сдвига. Геометрич. описание дивизора Θ

дается отображением Абеля $\mu : S \to J(S)$, заданным формулой

$$\mu(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \omega_1, \ldots, \int_{s_0}^{s} \omega_g \right) + \Lambda,$$

где $s_0 \in S$ — фиксированная точка. Пусть $S^{(d)}$ есть d-я симметрич. степень кривой S, т. е. фактормногообразие многообразия S^d по симметрич. группе (точки многообразия $S^{(d)}$ соответствуют эффективным дивизорам степени d на S). Формула $\mu(s_1, \ldots, s_d) = \mu(s_1) + \ldots + \mu(s_d)$ определяет продолжение отображения Абеля до отображения μ: $S^{(d)} \longrightarrow J(S)$. Тогда $\Theta = W_{g-1} = \mu(S^{(g-1)})$.

Отношение эквивалентности в $S^{(g)}$, определяемое отображением μ, совпадает с рациональной эквивалентностью дивизоров (теорема Абеля). Кроме того, $\mu(S^{(g)}) = J(S)$ (теорема Якоби об обращении). Сам К. Якоби [1] занимался проблемой обращения в случае $g=2$ (см. также *Якоби проблема обращения*). Указанные теоремы определяют изоморфизм $J(S) \cong \mathrm{Pic}^g(S)$, где $\mathrm{Pic}^g(S)$ — компонента *Пикара группы* $\mathrm{Pic}(S)$, отвечающая дивизорам степени g. Умножение на класс дивизора — gs_0 приводит к канонич. изоморфизму абелевых многообразий $J(S) \cong \mathrm{Pic}^0(S)$.

В случае полной гладкой кривой над произвольным полем Я. м. $J(S)$ определяется как *Пикара многообразие* $\mathrm{Pic}S$. Отображение Абеля μ сопоставляет точке $s \in S$ класс дивизора $s - s_0$, а поляризация определяется дивизором $W_{g-1} = \mu(S^{(g-1)})$.

Значение Я. м. в теории алгебраич. кривых видно из следующей *Торелли теоремы*: неособая полная кривая однозначно определяется по своему якобиану (с учетом поляризации), см. [5]. Переход от кривой к ее якобиану позволяет лианеризовать ряд нелинейных задач теории кривых. Напр., вопрос об описании специальных дивизоров на S (т. е. эффективных дивизоров D, для к-рых $h^0(S, O(K-D)) > 0$) по существу переводится на язык особенностей специальных подмногообразий $W_d = \mu(S^{(d)})$ якобиана $J(S)$. Этот перевод основан на теореме Римана — Кэмпфа об особенностях (см. [1], [5]). Одно из следствий теоремы Римана — Кэмпфа состоит в том, что многообразие особых точек дивизора поляризации $\Theta = W_{g-1}$ имеет коразмерность, не превосходящую 4. Это свойство Я. м. является характеристическим, если рассматривать лишь главно поляризованные абелевы многообразия, принадлежащие окрестности якобиана общей кривой. Точнее, если многообразие особых точек дивизора поляризации главно поляризованного абелева многообразия A имеет коразмерность $\leqslant 4$ и A не принадлежит нескольким выделенным компонентам многообразия модулей, то $A \cong J(S)$ для нек-рой гладкой кривой S (см. [2]).

Другой подход к выделению якобианов среди абелевых многообразий — задание уравнений на значения θ-функций и их производных в специальных точках. Отыскание таких уравнений называют проблемой Шоттки.

В случае особой кривой S Я. м. $J(S)$ называют подгруппу в $\mathrm{Pic}(S)$, определяемую дивизорами, имеющими степень 0 по каждой неприводимой компоненте кривой S (она совпадает со связной компонентой единицы в $\mathrm{Pic}(S)$). Если кривая S задана модулем m на гладкой модели N, то $J(S)$ обычно называют обобщенным якобианом кривой N (относительно модуля m) и обозначают через Jm (см. [6]).

Лит.: [1] Jacobi C. G. J., Gesammelte Werke, Bd 2, B., 1882, S. 5—16, 23—50; [2] Andreotti A., Mayer A., «Ann. Scu. Norm. Super. Pisa», 1967, v. 21, p. 189—238; [3] Griffiths Ph. A., An introduction to the theory of special divisors on algebraic curves, Providence, 1980; [4] Mumford D., Curves and their jacobians, Ann Arbor, 1978; [5] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1982; [6] Серр Ж. П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968.

В. В. Шокуров.

ЯКОБИ МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \ \beta > -1, \ x \in [-1, 1].$$

Стандартизованные Я. м. определяются *Родрига формулой*

$$P_n(x; \alpha, \beta) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n],$$

а ортонормированные Я. м. имеют вид

$$\hat{P}_n(x; \alpha, \beta) =$$

$$= \sqrt{\frac{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}} P_n(x; \alpha, \beta).$$

Многочлен $P_n(x; \alpha, \beta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2) y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2) x] y' + n(n+\alpha+\beta+1) = 0.$$

При $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$ и $\beta \geqslant -\frac{1}{2}$ для ортонормированных Я. м. имеет место весовая оценка

$$(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} (1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}} |\hat{P}_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant c_1, \quad x \in [-1, 1],$$

где постоянная c_1 не зависит от n и x. А в точках $x = \pm 1$ последовательность $\{\hat{P}_n(x; \alpha, \beta)\}$ возрастает со скоростью $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ и $n^{\beta+\frac{1}{2}}$ соответственно.

Ряды Фурье по Я. м. внутри интервала $(-1, 1)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье. А в окрестности концов отрезка ортогональности свойства рядов Фурье — Якоби иные, ибо в точках $x = \pm 1$ ортонормированные Я. м. возрастают неограниченно. Равномерная сходимость ряда Фурье — Якоби на всем отрезке $[-1, 1]$ имеет место, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на этом отрезке и $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\gamma$, причем $p + \gamma > q + \frac{1}{2}$, где

$$q = \max\{\alpha, \beta\} > -\frac{1}{2}.$$

При этих условиях выполняется неравенство

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \hat{P}_k(x; \alpha, \beta)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2}{n^{p+\gamma}} n^{q+\frac{1}{2}}, \quad x \in [-1, 1],$$

где постоянная c_2 не зависит от n и x. С другой стороны, для остатка ряда Фурье — Якоби при $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$ и $\beta \geqslant -\frac{1}{2}$ справедлива весовая оценка

$$(1-x^2)^{1/4} \sqrt{h(x)} |f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \hat{P}_k(x; \alpha, \beta)| \leqslant$$

$$\leqslant c_3 E_n(f) \ln n, \quad x \in [-1, 1],$$

где $n \geqslant 2$, постоянная c_3 не зависит от n и x, а $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ многочленами порядка не выше n.

Я. м. были введены К. Якоби [1] в связи с решением гипергеометрич. уравнения. Частными случаями Я. м. являются *Лежандра многочлены* (при $\alpha = \beta = 0$), *Чебышева многочлены* 1-го рода (при $\alpha = \beta = -1/2$), Чебышева многочлены 2-го рода (при $\alpha = \beta = 1/2$), *ультрасферические многочлены* (при $\alpha = \beta$).

См. также ст. *Классические ортогональные многочлены.*

Лит.: [1] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1859, Bd 56, S. 149—65; [2] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979. *П. К. Суетин.*

ЯКОБИ ПОЛЕ — поле экстремалей, удовлетворяющих уравнению Якоби (см. *Геодезическая линия*).

ЯКОБИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$J\{F(x)\}=f^{(\alpha,\beta)}(n)=\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,F(x)\,dx,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — *Якоби многочлен* степени n; $\alpha>-1$, $\beta>-1$ — действительные числа. Формула обращения имеет вид

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^{-1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\times$$
$$\times f^{(\alpha,\beta)}(n),\quad -1<x<1,$$
$$\delta_n=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

если ряд сходится.

Я. п. сводит операцию

$$T[F(x)]=\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dF}{dx}+[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)x]\frac{dF}{dx}\right\}$$

к алгебраической по формуле

$$J\{T[F(x)]\}=-(n+1)(n+\alpha+\beta)f^{(\alpha,\beta)}(n)+$$
$$+\{[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)F(x)\}\Big|_{-1}^{1}.$$

При $\alpha=\beta=0$ Я. п. переходит в *Лежандра преобразование*, при $\alpha=\beta=\nu-\frac{1}{2}$ — в *Гегенбауэра преобразование*. Я. п. применяется при решении дифференциальных уравнений, содержащих оператор T. Я. п. введено также для специального класса обобщенных функций.

Лит.: [1] Scott E. J., «Quart. J. Math.», 1953, v. 4, № 13, p. 36—40; [2] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967; [3] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ЯКОБИ ПРИНЦИП, принцип стационарного действия, вариационный интегральный принцип механики, установленный К. Якоби [1] для голономных консервативных систем. Согласно Я. п., если заданы начальное P_0 и конечное P_1 положения голономной консервативной системы, то для действительного движения действие по Якоби

$$S=\int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(U+h)}\,ds,\quad ds^2=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j$$

имеет стационарное значение по сравнению со всякими другими бесконечно близкими движениями между теми же самыми начальным и конечным положениями и с тем же самым постоянным значением h энергии, что и в действительном движении. Здесь $U(q_1,\ \ldots,\ q_n)$ — силовая функция активных сил, действующих на систему, q_i — обобщенные лагранжевы координаты системы, кинетич. энергия к-рой

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad \dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}.$$

К. Якоби (см. [1]) показал, что если начальное P_0 и конечное P_1 положения системы достаточно близки одно к другому, то действие S имеет минимум для действительного движения. Я. п. приводит задачу определения действительной траектории голономной консервативной системы к геометрич. задаче отыскания в римановом пространстве с метрикой

$$ds^2=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j$$

экстремалей вариационной задачи.

См. также *Вариационные принципы классической механики.*

Лит.: [1] Jacobi C., Vorlesungen über Dynamik, B., 1866 (рус. пер.: Якоби К., Лекции по динамике, Л.— М., 1936). *В. В. Румянцев.*

ЯКОБИ ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ — проблема обращения *абелевых интегралов* I рода произвольного поля *алгебраических функций*. Иначе говоря, проблема обращения абелевых интегралов I рода на компактной римановой поверхности F рода $p\geqslant 1$, соответствующей данному алгебраич. уравнению $F(z,\ w)=0$.

Пусть $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_p$ — базис абелевых дифференциалов I рода на F. Обращение одного абелева интеграла, напр. $\int_{c_1}^{w_1}\varphi_1\equiv u_1(w_1)=z_1$, т. е. представление всевозможных рациональных функций от w_1, в частности представление функции $w_1=w_1(z_1)$ как функций от z_1, имеет смысл только при $p=1$ — в этом случае речь идет об *обращении эллиптического интеграла*, к-рое приводит к двоякопериодическим *эллиптическим функциям*. Напр., обращение нормального интеграла I рода в нормальной форме Лежандра

$$u_1(w_1)=\int_0^{w_1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=z_1$$

приводит к *Якоби эллиптической функции* $w_1=\mathrm{sn}\,z_1$.

Как заметил еще К. Якоби (C. Jacobi, 1832), проблема обращения при $p>1$ должна рассматриваться для всех абелевых интегралов I рода $\int\varphi_1,\ \ldots,\ \int\varphi_p$ в совокупности, так как должны получиться функции с $2p$ периодами. В общем случае при $p\geqslant 1$ рациональная постановка Я. п. о. состоит в следующем: пусть дана система равенств

$$\int_{c_1}^{w_1}\varphi_j+\int_{c_2}^{w_2}\varphi_j+\ldots+\int_{c_p}^{w_p}\varphi_j=z_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\quad (1)$$

в к-рой нижние пределы интегрирования $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_p$ — фиксированные точки на F; $w_1,\ \ldots,\ w_p$ — текущие точки на F; $z=(z_1,\ \ldots,\ z_p)$ — данные произвольные комплексные числа. Требуется указать, при каких условиях и как можно обратить систему (1), т. е. получить представление всевозможных симметрических рациональных функций от w_k, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ p$, как функций от $z=(z_1,\ \ldots,\ z_p)$.

Вследствие зависимости от формы путей, соединяющих на F точки c_k и w_k, абелевы интегралы в (1), как функции от верхних пределов w_k, многозначны: при изменении формы пути они могут получить приращение в виде целочисленной линейной комбинации периодов. Отсюда вытекает, что (1) является в сущности системой сравнений по модулю периодов дифференциалов $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_p$. Получаемые при решении Я. п. о. функции от комплексных переменных $z=(z_1,\ \ldots,\ z_p)$ не должны изменять своих значений при прибавлении к аргументу любой целочисленной комбинации периодов дифференциалов $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_p$. Это будут, следовательно, специальные *абелевы функции* с $2p$ независимыми периодами.

Для случая $p=1$, т. е. для *эллиптического интеграла*, построение эллиптич. функций, решающих проблему обращения, достигается при помощи сравнительно простых тета-функций Якоби от одного комплексного переменного z, причем мероморфные эллиптич. функции строятся в виде отношений целых тета-функций. Решение общей Я. п. о. также возможно при помощи тета-функций $\theta_H(z)=\theta_H(z_1,\ \ldots,\ z_p)$ 1-го порядка от p комплексных переменных с полуцелыми характеристиками H.

Матрица периодов W базисных абелевых дифференциалов φ_j имеет вид

$$W=\begin{Vmatrix}\pi_i & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p}\\ 0 & \pi i & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp}\end{Vmatrix},\quad a_{jk}=a_{kj},\quad (2)$$

причем римановы соотношения (см. *Абелева функция*) между периодами обеспечивают равномерную сходимость на компактах пространства $\mathbb{C}^p$ представляющих тета-функции $\theta_H(z)$ рядов, построенных по матрице W. При помощи тета-функции $\theta(z)=\theta_0(z)$ с нулевой характеристикой строится суперпозиция

$$\Phi(w)=\theta(u(w)-z),$$

где

$$u(w)=\left\{u_1(w_1)=\int_{c_1}^{w_1}\varphi_1,\ \ldots,\ u_p(w_p)=\int_{c_p}^{w_p}\varphi_p\right\}$$

— вектор абелевых интегралов, $w=(w_1, \ldots, w_p)$ — система точек на F; $\Phi(w)$ наз. *Римана тета-функцией*. Для данной системы чисел $z\in\mathbb{C}^p$ либо в нормальном случае функция $\Phi(w)$ имеет на F единственную систему нулей $\eta_1, \ldots, \eta_p$, либо в исключительном случае тождественно обращается в нуль. Эти нули $\eta_1, \ldots, \eta_p$ и дают решение Я. п. о. Исключительные точки z, для к-рых $\Phi(w)\equiv 0$, составляют в $\mathbb{C}^p$ множество низшей размерности.

Явные выражения специальных абелевых функций, решающих Я. п. о. в полном объеме, строятся при помощи отношений тета-функций вида $\theta_H(z)/\theta(z)$, в к-рых тета-функция с нулевой характеристикой служит общим знаменателем. При прибавлении к аргументу периодов тета-функции умножаются на определенные мультипликаторы. Для отношений тета-функций, вследствие сокращений, нетривиальным мультипликатором может быть только -1. Следовательно, квадраты отношений не изменяются при прибавлении к аргументу периодов и получаются абелевы функции с $2p$ периодами.

К Я. п. о. примыкает важная проблема построения для данной системы тета-функций $\theta_H(z)$ с общей матрицей W, удовлетворяющей условиям сходимости, соответствующего ей поля алгебраич. функций и соответствующей римановой поверхности. Для того чтобы такое построение было возможно, различные элементы a_{jk} матрицы W, число к-рых равно $p(p+1)/2$, должны удовлетворять $(p-2)(p-3)/2$ дополнительным соотношениям, и исследование этих соотношений при $p>3$ представляет собой весьма трудную задачу (см. [1], [3]—[5]).

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Clebsch A., Gordan P., Theorie der Abelschen Funktionen, [Würzburg], 1967; [4] Conforto F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, B., 1956; [5] Мамфорд Д., «Математика», 1973, т. 17, № 4, с. 34—42. *Е. Д. Соломенцев.*

ЯКОБИ СИМВОЛ $\left(\frac{a}{P}\right)$ — функция, определяемая для всех целых a, взаимно простых с заданным нечетным целым числом $P>1$, следующим образом: если $P=p_1p_2\ldots p_r$ — разложение числа P на простые сомножители, не обязательно различные, то

$$\left(\frac{a}{P}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{a}{p_2}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(\frac{a}{p_r}\right),$$

где $\left(\frac{a}{p_i}\right)$ — *Лежандра символы*.

Я. с. является обобщением символа Лежандра и обладает аналогичными с ним свойствами. В частности, для Я. с. справедлив закон взаимности

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}},$$

где P, Q — положительные нечетные взаимно простые числа, а также два дополнения к этому закону

$$\left(\frac{-1}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}},\quad \left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$

Я. с. введен К. Якоби (C. Jacobi, 1837).

С. А. Степанов.

ЯКОБИ СКОБКИ, скобки Майера — дифференциальное выражение

$$[F, G]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{\partial G}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}+p_k\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right] \quad (1)$$

от двух функций $F(x, u, p)$ и $G(x, u, p)$, $2n+1$ независимых переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $p=(p_1, \ldots, p_n)$.

Основные свойства:

1) $[F, G]=-[G, F]$;

2) $[F, GH]=G[F, H]+H[F, G]$;

3) если $G=g(y)$, $y=(y_1, \ldots, y_s)$ и $y_i=f_i(x)$, то $[F, G]=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial g}{\partial y_i}[F, f_i]$;

4) $[F, [G, H]]+[G, [H, F]]+[H, [F, G]]=\frac{\partial F}{\partial u}[G, H]+\frac{\partial G}{\partial u}[H, F]+\frac{\partial H}{\partial u}[F, G]$.

Последнее свойство носит название тождества Якоби (см. [1], [2]).

Выражение (1) иногда записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial x_k}-\frac{\partial G}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial x_k}\right),$$

где принято символическое обозначение

$$\frac{dH}{dx_k}=\frac{\partial H}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial H}{\partial u}, \quad (2)$$

если переменные u и p_k трактовать как значения функций от $x(x_1, \ldots, x_n)$, причем $p_k=\partial u/\partial x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$, то (2) приобретает смысл полной производной по x_k.

Если функции F и G не зависят от u, то их Я. с. (1) переходит в *Пуассона скобку*.

Лит.: [1] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1862, Bd 60, S. 1—181; [2] Mayer A., «Math. Ann.», 1876, Bd 9, S. 347—70; [3] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [4] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959. *А. П. Солдатов.*

ЯКОБИ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Axy+By^2+ax+by+c}{Ax^2+Bxy+\alpha x+\beta y+\gamma},$$

или, в более симметричной форме,

$$(a_1x+b_1y+c_1)(x\,dy-y\,dx)+$$
$$+(a_2x+b_2y+c_2)\,dx+(a_3x+b_3y+c_3)\,dy=0,$$

где все коэффициенты — постоянные числа. Это уравнение, являющееся частным случаем *Дарбу уравнения*, впервые исследовал К. Якоби [1]. Я. у. всегда интегрируется в замкнутой форме применением следующего алгоритма. Сначала непосредственной подстановкой отыскивается по крайней мере одно линейное частное решение

$$y=px+q.$$

Затем делается преобразование переменных

$$\xi=\frac{x}{px-y+q},\quad \eta=\frac{y}{px-y+q},$$

в результате чего получается уравнение, приводимое к однородному уравнению.

Лит.: [1] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1842, Bd 24; [2] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; [3] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976. *Н. Х. Розов.*

ЯКОБИ УСЛОВИЕ — необходимое условие оптимальности в задачах вариационного исчисления. Я. у. является необходимым условием неотрицательности 2-й вариации минимизируемого функционала в точке его минимума (равенство нулю 1-й вариации функционала

обеспечивается выполнением необходимых условий первого порядка — дифференциального *Эйлера уравнения*, *трансверсальности условием*, а также *Вейерштрасса условием*).

Пусть, напр., поставлена задача минимизации функционала

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\,dt \qquad (1)$$

при заданных условиях на концах

$$x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2. \qquad (2)$$

Если $x(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, есть решение задачи (1), (2), то 1-я вариация функционала δJ должна быть равна нулю, и отсюда следуют необходимые условия 1-го порядка, а 2-я вариация

$$\delta^2 J(\eta)=\int_{t_1}^{t_2}(F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}^2+2F_{x\dot{x}}\eta\dot{\eta}+F_{xx}\eta^2)\,dt \qquad (3)$$

должна быть больше или равна нулю при любой кусочно гладкой функции $\eta(t)$, удовлетворяющей нулевым граничным условиям

$$\eta(t_1)=0,\quad \eta(t_2)=0. \qquad (4)$$

Уравнение Эйлера для функционала $\delta^2 J(\eta)$:

$$F_{xx}\eta+F_{x\dot{x}}\dot{\eta}-\frac{d}{dt}(F_{\dot{x}\dot{x}}\eta+F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta})=0 \qquad (5)$$

наз. у р а в н е н и е м Я к о б и. Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка относительно неизвестной функции $\eta(t)$. Все коэффициенты в (5) при η и $\dot{\eta}$ вычисляются при значениях t, x, $\dot{x}$, соответствующих известному оптимальному решению $x(t)$ и, следовательно, все они являются известными функциями, зависящими от аргумента t.

Функция $\eta(t)\equiv 0$, $t_1\leqslant 1\leqslant t_2$, удовлетворяет уравнению Якоби при граничных условиях (4), то есть является экстремалью функционала $\delta^2 J(\eta)$. С другой стороны, для $\eta(t)\equiv 0$ 2-я вариация $\delta^2 J(\eta)=0$ и так как для оптимального решения $x(t)$ 2-я вариация неотрицательна при любых $\eta(t)$, то функция $\eta(t)\equiv 0$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, доставляет минимум функционалу $\delta^2 J(\eta)$. Если выполнено условие Лежандра $F_{\dot{x}\dot{x}}\neq 0$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, то есть $x(t)$ является неособенной экстремалью, то при начальных условиях $\eta(t_1)=\dot{\eta}(t_1)=0$ решение уравнения Якоби тождественно равно нулю.

Точка $t=c$ наз. с о п р я ж е н н о й с точкой $t=a$, если существует решение уравнения Якоби, обращающееся в нуль при $t=a$ и $t=c$, и не равное тождественно нулю между a и c. Согласно необходимому Я. у., если неособенная экстремаль $x(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, доставляет минимум функционалу (1), то интервал (t_1, t_2) не содержит точек, сопряженных с t_1.

Практич. смысл Я. у. может быть пояснен следующим образом. Пусть Я. у. не выполняется, т. е. существует точка a, $t_1<a<t_2$, сопряженная с t_1. Тогда можно было бы построить непрерывную функцию

$$\eta_1(t)=\begin{cases}\eta(t), & t_1\leqslant t\leqslant a,\quad \eta(t)\not\equiv 0,\\ 0, & a\leqslant t\leqslant t_2,\end{cases}$$

являющуюся решением уравнения (5), для к-рой $\delta^2 J(\eta_1)=0$. Таким образом, $\eta_1(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, является ломаной экстремалью функционала $\delta^2 J(\eta)$ с угловой точкой при $t=a$. Но согласно необходимому условию Вейерштрасса — Эрдмана (см. *Эйлера уравнение*), требующему непрерывности выражений $F-\dot{x}F_{\dot{x}}$ и $F_{\dot{x}}$ в угловой точке, при $t=a$ должно выполняться равенство $\dot{\eta}_1(a)=0$, что вместе с $\eta_1(a)=0$ дает $\eta_1(t)\equiv 0$, а это противоречит предположению $\eta(t)\not\equiv 0$, $t_1\leqslant t\leqslant a$.

Для непосредственной проверки Я. у. следует рассматривать решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям

$$\eta(t_1)=0,\quad \dot{\eta}(t_1)=1.$$

Пусть $\Delta(t_1, t)$ — это решение. Для того, чтобы точка $t=a$, $t_1\leqslant a\leqslant t_2$, была сопряжена с t_1, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Delta(t_1, t)$ обратилась в нуль при $t=a$. Таким образом, выполнение Я. у. эквивалентно условию необращения в нуль решения уравнения Якоби $\Delta(t_1, t)$ на интервале (t_1, t_2).

В более общем случае, когда рассматривается вариационная задача на условный минимум (задача в форме Лагранжа, Майера или Больца), формулировка Я. у. имеет нек-рые особенности. Возникающая здесь задача на минимум 2-й вариации функционала формулируется как задача на условный экстремум (в форме задачи Больца). Эта задача наз. п р и с о е д и н е н н о й з а д а ч е й, а ее экстремали — п р и с о е д и н е н н ы м и э к с т р е м а л я м и. Дифференциальные условия связи и граничные условия в присоединенной задаче на минимум 2-й вариации получаются в результате варьирования соответствующих условий исходной вариационной задачи. Определение сопряженной точки остается по форме таким же. Для неотрицательности 2-й вариации функционала на классе присоединенных экстремалей, удовлетворяющих присоединенным условиям для концов, должно выполняться Я. у., требующее, чтобы интервал (t_1, t_2) не содержал точек, сопряженных с t_1.

Я. у. установлено К. Якоби (C. Jacobi, 1837).

Лит.: [1] Б л и с с Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Л а в р е н т ь е в М. А., Л ю с т е р н и к Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ЯКОБИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — эллиптические функции, возникшие при непосредственном обращении *эллиптических интегралов* в нормальной форме Лежандра. Эта задача обращения была решена в 1827 независимо К. Якоби (C. Jacobi) и, в несколько иной форме, Н. Абелем (N. Abel). Конструкция Якоби основывается на применении *тета-функций*.

Пусть τ — комплексное число с $\operatorname{Im}\tau>0$. Тета-функции Якоби $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ представляют собой следующие ряды, абсолютно и равномерно сходящиеся на компактах плоскости комплексного переменного v:

$$\vartheta_0(v)=\vartheta_0(v;\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi m^2\tau}e^{2i\pi mv}=$$
$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi m^2\tau}\cos(2\pi mv);$$

$$\vartheta_1(v)=\vartheta_1(v;\tau)=$$
$$=i\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\tau}e^{(2m-1)i\pi v}=$$
$$=2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\tau}\sin[(2m+1)\pi v];$$

$$\vartheta_2(v)=\vartheta_2(v;\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\pi\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\tau}e^{(2m-1)i\pi v}=$$
$$=2\sum_{m=0}^{\infty}e^{i\pi\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\tau}\cos[(2m+1)\pi v];$$

$$\vartheta_3(v)=\vartheta_3(v;\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\pi m^2\tau}e^{2i\pi mv}=$$
$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}e^{i\pi m^2\tau}\cos(2\pi mv).$$

Эти ряды достаточно быстро сходятся. Обозначения $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ восходят к К. Вейерштрассу

(K. Weierstrass). Вместо $\vartheta_0(v)$ часто пишут $\vartheta_4(v)$, имеются и другие системы обозначений. Сам К. Якоби применял обозначения: $\Theta(v)=\vartheta_0(v/2K)$, $H(v)=\vartheta_1(v/2K)$, $H_1(v)=\vartheta_2(v/2K)$, $\Theta_1(v)=\vartheta_3(v/2K)$, где $K=\pi\vartheta_3^2(0)/2$.

Все тета-функции Якоби представляют собой целые трансцендентные функции комплексного переменного v, причем $\vartheta_1(v)$ — нечетная функция, а остальные функции $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ четные.

Имеют место следующие соотношения периодичности:

$$\vartheta_0(v\pm 1)=\vartheta_0(v),$$
$$\vartheta_0(v\pm\tau)=-e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp 2i\pi v}\cdot\vartheta_0(v);$$
$$\vartheta_1(v\pm 1)=-\vartheta_1(v),$$
$$\vartheta_1(v\pm\tau)=-e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp 2i\pi v}\cdot\vartheta_1(v);$$
$$\vartheta_2(v\pm 1)=-\vartheta_2(v),$$
$$\vartheta_2(v\pm\tau)=e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp 2i\pi v}\cdot\vartheta_2(v);$$
$$\vartheta_3(v\pm 1)=\vartheta_3(v),$$
$$\vartheta_3(v\pm\tau)=e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp 2i\pi v}\cdot\vartheta_3(v),$$

из к-рых вытекает, что тета-функции являются эллиптич. функциями III рода по Эрмиту.

Различные тета-функции связаны между собой формулами преобразования:

$$\vartheta_0\left(v\pm\tfrac{1}{2}\right)=\vartheta_3(v),$$
$$\vartheta_0\left(v\pm\tfrac{1}{2}\tau\right)=\pm ie^{-\frac{1}{4}i\pi\tau}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\vartheta_1(v);$$
$$\vartheta_1\left(v\pm\tfrac{1}{2}\right)=\pm\vartheta_2(v),$$
$$\vartheta_1\left(v\pm\tfrac{1}{2}\tau\right)=\pm ie^{-\frac{1}{4}i\pi\tau}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\vartheta_0(v);$$
$$\vartheta_2\left(v\pm\tfrac{1}{2}\right)=\mp\vartheta_1(v),$$
$$\vartheta_2\left(v\pm\tfrac{1}{2}\tau\right)=e^{-\frac{1}{4}i\pi\tau}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\vartheta_3(v);$$
$$\vartheta_3\left(v\pm\tfrac{1}{2}\right)=\vartheta_0(v),$$
$$\vartheta_3\left(v\pm\tfrac{1}{2}\tau\right)=e^{-\frac{1}{4}i\pi\tau}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\vartheta_2(v).$$

Все четыре тета-функции удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}=4i\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}.$$

Важное значение имеют так наз. нулевые значения тета-функций $\vartheta_0(0)$, $\vartheta_1'(0)$, $\vartheta_2(0)$, $\vartheta_3(0)$; при этом $\vartheta_1(0)=0$. Между ними имеются следующие соотношения:

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_0(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),\quad \vartheta_3^4(0)=\vartheta_0^4(0)+\vartheta_2^4(0).$$

По отдельности

$$\vartheta_0(0)=H_0H_3^2,\quad \vartheta_2(0)=2e^{\frac{1}{4}i\pi\tau}H_0H_1^2,$$
$$\vartheta_3(0)=H_0H_2^2,\quad \vartheta_1'(0)=2\pi e^{\frac{1}{4}i\pi\tau}H_0^3,$$

где

$$H_0=\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2i\pi m\tau}),$$
$$H_1=\prod_{m=1}^{\infty}(1+e^{2i\pi m\tau}),$$
$$H_2=\prod_{m=1}^{\infty}(1+e^{(2m-1)i\pi\tau}),$$
$$H_3=\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{(2m-1)i\pi\tau}),$$
$$H_1H_2H_3=1.$$

Функция $\vartheta_0(v)$ имеет простые нули в точках $m+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau$; $\vartheta_1(v)$ — в точках $m+n\tau$; $\vartheta_2(v)$ — в точках $m-\frac{1}{2}+n\tau$; $\vartheta_3(v)$ — в точках $m-\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau$; m, $n=0,\pm1,\ldots$.

Из соотношений периодичности видно, что нек-рые отношения тета-функций будут эллиптич. функциями в собственном смысле. Основные эллиптические функции Якоби — $\mathrm{sn}u$ (*синус амплитуды*), $\mathrm{cn}u$ (*косинус амплитуды*) и $\mathrm{dn}u$ (*дельта амплитуды*). Эти обозначения введены Х. Гудерманом (Ch. Gudermann, 1838). Названия происходят от старых обозначений, введенных самим К. Якоби ($\mathrm{sn}u=\sin\mathrm{am}u$, $\mathrm{cn}u=\cos\mathrm{am}u$, $\mathrm{dn}u=\Delta\,\mathrm{am}u$) и позднее вышедших из употребления.

Новое переменное u связано с v соотношением $u=v\cdot\pi\vartheta_3^2(0)$. Если $k=\vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0)$ — модуль эллиптических функций, то Я. э. ф. следующим образом выражаются через тета-функции или посредством сходящихся в окрестности начала степенных рядов:

$$\mathrm{sn}\,u=\mathrm{sn}\,(u;\,k)=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}=$$
$$=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!}-\ldots,$$
$$\mathrm{cn}\,u=\mathrm{cn}\,(u;\,k)=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}=$$
$$=1-\frac{u^2}{2!}+(1+4k^2)\frac{u^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!}+\ldots,$$
$$\mathrm{dn}\,u=\mathrm{dn}\,(u;\,k)=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}=$$
$$=1-k^2\frac{u^2}{2!}+k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!}-k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!}+\ldots.$$

Удобные обозначения для обратных величин и отношений были введены Дж. Глейшером (J. Glaisher, 1882):

$$\mathrm{ns}\,u=\frac{1}{\mathrm{sn}\,u},\quad \mathrm{nc}\,u=\frac{1}{\mathrm{cn}\,u},\quad \mathrm{nd}\,u=\frac{1}{\mathrm{dn}\,u},$$
$$\mathrm{cs}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u},\quad \mathrm{ds}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u},\quad \mathrm{dc}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u},$$
$$\mathrm{sc}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u},\quad \mathrm{sd}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{cd}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}.$$

Я. э. ф. $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$ являются эллиптич. функциями 2-го порядка с периодами: $4K$ и $2iK'$ для $\mathrm{sn}u$; $4K$ и $2(K+iK')$ для $\mathrm{cn}u$; $2K$ и $4iK'$ для $\mathrm{dn}u$. Здесь $K=K(k)=\pi\vartheta_3^2(0)/2$, $K'=K(k')=-i\tau K$ — значения полных эллиптич. интегралов I рода, $k'=\sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль эллиптических функций. Я. э. ф. имеют только простые полюсы, расположенные в точках $2mK+(2n+1)iK'$; m, $n=0,\pm1,\ldots$.

Три Я. э. ф. связаны соотношениями:

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1,$$
$$\mathrm{dn}^2u+k^2\mathrm{sn}^2u=1,$$
$$\mathrm{dn}^2u-k^2\mathrm{cn}^2u=1-k^2=k'^2,$$
$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u=\mathrm{cn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u,$$
$$\frac{d}{du}\mathrm{cn}\,u=-\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u,$$
$$\frac{d}{du}\mathrm{dn}\,u=-k^2\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{cn}\,u$$

и дифференциальными уравнениями

$$\left(\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u\right)^2=(1-\mathrm{sn}^2u)(1-k^2\mathrm{sn}^2u),$$
$$\left(\frac{d}{du}\mathrm{cn}\,u\right)^2=(1-\mathrm{cn}^2u)(k'^2+k^2\mathrm{cn}^2u),$$
$$\left(\frac{d}{du}\mathrm{dn}\,u\right)^2=(1-\mathrm{dn}^2u)(\mathrm{dn}^2u-k'^2).$$

Теоремы сложения для Я. э. ф. имеют вид:

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2)=\frac{\operatorname{sn}u_1\cdot\operatorname{cn}u_2\cdot\operatorname{dn}u_2+\operatorname{sn}u_2\cdot\operatorname{cn}u_1\cdot\operatorname{dn}u_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2u_1\cdot\operatorname{sn}^2u_2},$$

$$\operatorname{cn}(u_1+u_2)=\frac{\operatorname{cn}u_1\cdot\operatorname{cn}u_2-\operatorname{sn}u_1\cdot\operatorname{dn}u_1\cdot\operatorname{sn}u_2\cdot\operatorname{dn}u_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2u_1\cdot\operatorname{sn}^2u_2},$$

$$\operatorname{dn}(u_1+u_2)=\frac{\operatorname{dn}u_1\cdot\operatorname{dn}u_2-k^2\operatorname{sn}u_1\cdot\operatorname{cn}u_1\cdot\operatorname{sn}u_2\cdot\operatorname{cn}u_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2u_1\cdot\operatorname{sn}^2u_2}.$$

Связь Я. э. ф. с эллиптич. интегралами выражается в том, что если

$$u=\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^\varphi\frac{ds}{\sqrt{1-k^2\sin^2s}}$$

— эллиптич. интеграл I рода в нормальной форме Лежандра, то его обращение имеет вид $z=\operatorname{sn}u$; в этом и состоял исходный пункт теории Якоби. Переменная $\varphi=\operatorname{am}u$ есть бесконечнозначная функция от u и наз. амплитудой эллиптического интеграла u,

$$\operatorname{cn}u=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2u}=\cos\operatorname{am}u,$$

$$\operatorname{dn}u=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2u}=\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u}.$$

Основные соотношения между постоянными:

$$K=K(k)=\tfrac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0;\tau),\quad K'=K(k'),$$

$$\tau K=iK',\ k=\frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)},\ k'=\frac{\vartheta_0^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}.$$

В прикладных задачах обычно задан модуль k, причем чаще всего имеет место так наз. нормальный случай $0<k<1$, или задан дополнительный модуль $k'=\sqrt{1-k^2}$, $0<k'<1$. Требуется найти K, K', τ или $q=e^{i\pi\tau}$. Полагая $2\varepsilon=(1-\sqrt{k'})/(1+\sqrt{k'})$, при $0<k<1$ имеем $0<\varepsilon<1/2$. Для определения q получается быстро сходящийся при $0<\varepsilon<1/2$ ряд

$$q=e^{i\pi\tau}=\varepsilon+2\varepsilon^5+15\varepsilon^9+150\varepsilon^{13}+O(\varepsilon^{17}).$$

Значения полных эллиптич. интегралов K и K' определяются по формулам

$$K=\tfrac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0;\tau)=\frac{\pi}{2}\left\{1+2\sum_{m=1}^{\infty}q^{m^2}\right\},$$

$$K'=\frac{1}{\pi}K\ln\left(\frac{1}{q}\right),$$

или при помощи таблиц.

При $k=0$ и $k=1$ Я. э. ф. вырождаются соответственно в тригонометрич. и гиперболич. функции:

$$\operatorname{sn}(u;0)=\sin u,\quad \operatorname{cn}(u;0)=\cos u,$$
$$\operatorname{dn}(u;0)=1;\quad \operatorname{sn}(u;1)=\operatorname{th}u,$$
$$\operatorname{cn}(u;1)=\operatorname{dn}(u;1)=1/\operatorname{ch}u.$$

В теоретич. отношении более простое построение теории эллиптич. функций дано К. Вейерштрассом в 1862—63 (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*). При заданном модуле k, $0<k<1$, инварианты Вейерштрасса e_1, e_2, e_3 вычисляются, напр., по формулам $e_1=(2-k^2)/3$, $e_2=(2k^2-1)/3$, $e_3=-(1+k^2)/3$, и далее $g_2=-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)$, $g_3=4e_1e_2e_3$. Полупериоды теперь определяются по формулам $\omega_1=K/\sqrt{e_1-e_3}$, $\omega_3=iK'/\sqrt{e_1-e_3}$, что и дает возможность вычислить все остальные величины, относящиеся к эллиптич. функциям Вейерштрасса.

Лит.: [1] Jacobi C., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Königsberg, 1829; Gesammelte Werke, Bd 1, B., 1881; [2] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [4] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [5] Enneper A., Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte, 2 Aufl., Halle/Saale, 1890; [6] Tannery J., Molk J., Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, t. 1—4, P., 1893—1902; [7] Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, М.— Л., 1941; [8] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции Формулы, графики,таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977.

Е. Д. Соломенцев.

ЯКОБИАН, определитель Якоби, функциональный определитель специального вида, составленный из частных производных 1-го порядка. Пусть заданы m функций $x_i=\varphi_i(t_1,\ldots,t_m,t_{m+1},\ldots,t_n)$, $i=1,2,\ldots,m$, имеющих частные производные 1-го порядка по переменным $t_1,t_2,\ldots,t_m$, тогда Я. этих функций называют определитель вида

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}&\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}&\cdots&\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}&\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}&\cdots&\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_m}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial t_1}&\frac{\partial\varphi_m}{\partial t_2}&\cdots&\frac{\partial\varphi_m}{\partial t_m}\end{vmatrix}$$

кратко обозначаемый символом

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)}{D(t_1,t_2,\ldots,t_m)}.$$

Модуль Я. характеризует растяжение (сжатие) элементарного объема при переходе от переменных $x_1,x_2,\ldots,x_m$ к переменным $t_1,t_2,\ldots,t_m$. Назван по имени К. Якоби (C. Jacobi), впервые изучившего его свойства и применение.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1—2, М., 1971—73; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975.

В. А. Ильин.

ЯНГА—МИЛЛСА ПОЛЕ — *связность* в *главном расслоении* над (псевдо) римановым многообразием, кривизна к-рой удовлетворяет условию гармоничности (уравнению Янга — Миллса).

Я.— М. п., наз. также калибровочными полями, используются в современной физике для описания физич. полей, играющих роль переносчиков взаимодействия. Так, электромагнитное поле в электродинамике, поле векторных W-бозонов — переносчиков слабого взаимодействия в теории электрослабого взаимодействия Вайнберга — Салама и, наконец, глюонное поле — переносчик сильного взаимодействия — описываются Я.— М. п. Гравитационное поле также может быть интерпретировано как Я. —М. п. (см. [4]).

Впервые концепция связности как нек-рого поля была развита Г. Вейлем (H. Weyl, 1917), к-рый также сделал попытку описания электромагнитного поля в терминах связности. В 1954 Ч. Янг (C. Yang) и Р. Миллс (R. Mills) предположили, что пространство внутренних степеней свободы элементарных частиц (напр., изотопич. пространство, описывающее две степени свободы нуклона, соответствующих двум его чистым состояниям — протону и нейтрону) зависит от точки пространства — времени, причем внутренние пространства, соответствующие различным точкам, канонически не изоморфны. На геометрич. языке предположение Янга — Миллса состоит в том, что пространство внутренних степеней свободы является векторным расслоением над пространством — временем, не обладающим канонич. тривиализацией, а физич. поля описываются сечениями этого расслоения. Для написания дифференциального уравнения эволюции поля необходимо ввести в расслоение некрую связность — тривиализацию расслоения вдоль кривых базы. Такая связность с фиксированной группой голономии описывает физич. поле (получившее назв. поля Янга — Миллса). Из вариационного принципа выводятся уравнения для свободного Я.— М. п., являющиеся естественным нелинейным обобщением *Максвелла уравнений*.

Более строгое определение Я.— М. п. состоит в следующем. Пусть $\pi: P\to M$ — главное G-расслоение над римановым многообразием M и $E(M)=P\times_G E\to$

→ M — векторное расслоение, ассоциированное с π и G-модулем E. Связность ∇ расслоения π определяет оператор $\nabla^E : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E M)$, действующий в пространстве $\Gamma(E)$ сечений расслоения $E(M)$. Он продолжается до оператора $d^\nabla : \Gamma(E_p) \to \Gamma(E_{p+1})$, действующего в пространстве $\Gamma(E_p)$ $E(M)$-значных p-форм по формуле $d^\nabla(\omega \otimes e) = d\omega \otimes e + (-1)^p \omega \wedge \nabla^E e$. Формально сопряженный к d^∇ оператор δ^∇ на p-формах равен $\delta^\nabla = (-1)^{p+1} * d^\nabla *$, где $*$ — оператор Ходжа.

Связность ∇ в главном G-расслоении наз. полем Янга — Миллса, если кривизна R^∇, рассматриваемая как 2-форма со значениями в векторном расслоении $\mathfrak{g}(M) = P \times_{Ad G} \mathfrak{g}$ (где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G), удовлетворяет уравнению $\delta^\nabla R^\nabla = 0$.

Для *римановой связности* ∇^g риманова многообразия (M, g) уравнение Янга — Миллса равносильно условию симметричности

$$(\nabla^g_X \mathrm{ric})(Y, Z) = (\nabla^g_Y \mathrm{ric})(X, Z), \quad X, Y, Z \in D(M)$$

ковариантной производной тензора Риччи ric. Таким образом, примерами Я.— М. п. служат римановы связности пространств Эйнштейна и прямых произведений таких пространств. В частности, римановы связности пространств Кэлера — Эйнштейна и кватернионных римановых пространств определяют Я.— М. п. в главных расслоениях реперов со структурными группами $U(n/2)$ и $Sp(1) \cdot Sp(n/4)$. Примерами неэйнштейновых римановых связностей, удовлетворяющих уравнению Янга — Миллса, являются римановы связности конформно плоских метрик с постоянной скалярной кривизной и непостоянной секционной кривизной. Примерами нериманових связностей, удовлетворяющих уравнениям Янга — Миллса, являются связности в нормальном расслоении вполне геодезич. подмногообразий симметрического пространства или кватернионных подмногообразий кватернионного пространства, индуцированные римановыми связностями этих пространств.

Уравнение Янга — Миллса является вариационным уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала $L(\nabla)$ в пространстве связностей главного расслоения π, задаваемого формулой

$$L(\nabla) = \int_M \langle R^\nabla, R^\nabla \rangle.$$

Риманово многообразие (M, g) предполагается компактным и ориентированным, а скобка $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в слоях векторного расслоения $\mathfrak{g}(M) \otimes \Lambda^2$, определяемое $Ad G$-инвариантным скалярным произведением в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и скалярным произведением в слоях расслоения Λ^2 2-форм на M, индуцированным метрикой g. Таким образом, Я.— М. п. суть критич. точки функции $L(\nabla)$. Я.— М. п. наз. устойчивым, если 2-й дифференциал функции L в точке ∇ положительно определен (и, следовательно, ∇ есть локальный минимум функции L) и слабо устойчивым, если 2-й дифференциал неотрицательно определен. Известно, что не существует слабо устойчивых Я.—М. п., в произвольном нетривиальном главном расслоении над стандартной сферой S^n при $n \geqslant 5$. С другой стороны, при $n \geqslant 3$ риманова связность стандартной римановой метрики факторпространства S^n/Γ сферы по свободно действующей нетривиальной конечной группе изометрий Γ является устойчивым Я.—М.п. [5].

Наибольший интерес для физики представляет Я.— М.п. на четырехмерных римановых (а также лоренцевых) многообразиях. В этом случае оператор Ходжа $*$ отображает пространство 2-форм на M (со значениями в произвольном векторном расслоении) на себя, причем это отображение является инволютивным ($*^2 = id$) и зависит только от ориентации и конформного класса метрики g. Связность ∇ в главном расслоении над M^4 наз. самодуальной связностью или инстантоном (соответственно, антисамодуальной связностью или антиинстантоном), если ее 2-форма кривизны R^∇ является собственным вектором оператора Ходжа с собственным значением 1 (соответственно, —1). В силу тождества Бьянки инстантоны и антиинстантоны являются Я.— М. п. Более того, они являются точками абсолютного минимума функции L. В случае главного расслоения над стандартной сферой со структурной группой $SU(2)$, $SU(3)$ или $SU(4)$ все локальные минимумы функции L исчерпываются инстантонами и антиинстантонами (и, следовательно, являются глобальными). Риманова связность риманова многообразия M^4 является инстантоном только для многообразий с группой голономии $G \subset \mathrm{Sp}(1)$. Все такие компактные многообразия исчерпываются комплексными поверхностями К3.

Группа $G(\pi) = \Gamma(P *_{Ad} G)$ тождественных на базе автоморфизмов расслоения $\pi : P \to M$ наз. калибровочной группой. Она естественным образом действует в множестве $C^+(\pi)$ инстантонов расслоения π с группой голономии G. Факторпространство $M^+(\pi) = C^+(\pi)/G(\pi)$ наз. пространством модулей неприводимых инстантонов расслоения π. Если структурная группа G расслоения π компактна и полупроста, а база M^4 является компактным ориентированным римановым многообразием с неотрицательной ненулевой скалярной кривизной и самодуальным тензором конформной кривизны Вейля, то пространство модулей $M^+(\pi)$ либо пусто, либо является многообразием размерности

$$\dim M^+(\pi) = 2p_1(\mathfrak{g}(M)) - {}^1/_2 \dim G\,(\chi(M^4) - \sigma(M^4)),$$

где $p_1(\mathfrak{g}(M))$ — первое *Понтрягина число* расслоения $\mathfrak{g}(M)$, а $\chi(M^4)$, $\sigma(M^4)$ — характеристика Эйлера — Пуанкаре и *сигнатура* многообразия M^4.

Наиболее полные результаты получены в физически важном случае расслоений над стандартной сферой S^4 с классическими компактными структурными группами G. В частности, получено описание всех инстантонов в таких расслоениях в чисто алгебраич. терминах (напр., в терминах нек-рых модулей над грассмановой алгеброй или в терминах решений нек-рых кватернионных матричных уравнений, см. [1]). Для случая группы $G = Sp(1)$ известно явное описание всех инстантонов. Напр., для $Sp(1)$-расслоения $\pi_1 : P_1 \to S^4$ с *Понтрягина числом* 1 пространство модулей $M^+(\pi_1) \approx \mathbb{R}^+ \times \mathbb{H}$, где $\mathbb{R}^+$ — множество положительных чисел, а $\mathbb{H}$ — множество кватернионов. Паре $(\lambda, a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{H}$ отвечает инстантон, задаваемый $\mathfrak{g}$-значной 1-формой связности

$$A(x) = \mathrm{Im}\, \frac{\overline{u(x)} \cdot du(x)}{1 + |u(x)|^2},$$

где $u(x) = \lambda(\overline{a - x})^{-1}$, $x \in \mathbb{H}$. Кватернионы из $\mathbb{H} \approx \mathbb{R}^4$ отождествляются с точками сферы S^4 с помощью стереографич. проекции, а алгебра Ли $\mathfrak{g} = Sp(1)$ рассматривается как алгебра Ли $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ чисто мнимых кватернионов.

Лит.: [1] Манин Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем., т. 17, М., 1981, с. 3—55; [2] Шварц А. С., там же, с. 113—73; [3] Atiyah M. [и др.], «Proc. Roy. Soc. Lond.», 1978, A 362, p. 425—61; [4] Попов Д. А., Дайхин Л. И., «Докл. АН СССР», 1975, т. 225, № 4, с. 790—93; [5] Bourguignon J. [и др.], «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1979, v. 76, № 4, p. 1550—53; [6] Коноплева Н. П., Попов В. Н., Калибровочные поля, 2 изд., М., 1980; [7] Yang C. N., Mills R. L., «Phys. Rev.», 1954, v. 96, № 1, p. 191—95; [8] Геометрические идеи в физике, пер. с англ., М., 1983.

Д. В. Алексеевский.

ЯЧЕЙКА — термин, применяемый иногда для обозначения такого параллелограмма периодов *двоякопериодической функции* $f(z)$, на сторонах к-рого нет полюсов и к-рый получается из основного параллелограмма периодов сдвигом на нек-рый вектор $z_0 \in \mathbb{C}$.

Лит.: [1] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963.

Е. Д. Соломенцев.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В указатель вошли названия всех статей «Математической энциклопедии» (они набраны жирным шрифтом), понятия (термины), определения которых приведены в статьях, а также упоминаемые в статьях наиболее важные результаты. Следом за термином даны указания на номер тома (также набранный жирным шрифтом) и номер столбца. Указатель составлен строго по алфавиту, первые повторяемые термины заменены знаком тире. Названия статей и термины даны, как правило, в единственном числе и лишь некоторые из них во множественном Так как от этого зависит место статьи (термина) в алфавите, следует иметь в виду оба варианта. Составитель указателя Н Г. Дорохина.

А

Абак 1, 13
Абелев автомат 1, 67
- групповой объект 1, 1149
Абелев дифференциал 1, 13—15, 2, 240
- -, базис, 1, 13
- -, дивизор 1, 15
- - нормальный 1, 14
- - нормированный 1, 14
- -, полярный период 1, 14
- -, циклический период 1, 14
- идемпотент 4, 941
Абелев интеграл 1, 15—17
- -, Абеля теорема 1, 17
- - канонический 1, 16
- - нормальный 1, 16
- -, матрица периодов 1, 16
- -, полярный период 1, 16
- -, циклический период 1, 16
- потенциал 2, 239
Абелева группа 1, 17—20
- - вполне разложимая 1, 19
- - делимая 1, 19
- - конечно порожденная 1, 18
- -, Куликова критерий 1, 18
- -, нуль 3, 1082
- -, периодическая часть 1, 18
- - полная 1, 19
- - примарная 1, 18
- -, Прюфера ранг 1, 19
- - с конечным числом образующих, основная теорема 1, 18
- - свободная 4, 1078
- -, тип 1, 19
- -, характеристика элемента 1, 19
- -, элемент бесконечной высоты 1, 18
- -, элемент высоты n 1, 18
- - элементарная 5, 972
Абелева категория 1, 20—22
- -, Габриеля — Попеску теорема 1, 21
- -, Митчелла теорема 1, 20
- -, плотная подкатегория 1, 21
- мультиоператорная группа 3, 839
Абелева схема 1, 22
- S-схема 1, 22
Абелева функция 1, 22—24
- -, базис периодов 1, 22
- - вырожденная 1, 22
- -, группа периодов 1, 22
- -, матрица периодов 1, 23
- -, модуль периодов 1, 22
- - невырожденная 1, 22
- -, параллелотоп периодов 1, 23
- -, периоды 1, 22
- -, род 1, 23
- -, система основных периодов 1, 22
- -, - периодов 1, 22
- -, - примитивных периодов 1, 22
- -, сложения теорема 1, 24
- - специальная 1, 22
Абелево кольцо 4, 941
Абелево многообразие 1, 143, 2, 1012
- -, Морделла — Вейля теорема 1, 25
- пространство 1, 1066
- расширение 1, 845; 4, 399, 908
- функциональное поле 1, 23
Абеля дифференциальное уравнение 1, 25
Абеля задача 1, 26
Абеля интегральное уравнение 1, 26
- - -, обобщение 1, 26
- - -, ядро 1, 26
Абеля метод суммирования 1, 27
Абеля неравенство 1, 27
Абеля преобразование 1, 27
Абеля признак для функциональных рядов 1, 28
- - для числовых рядов 1, 28
- средние 4, 25
Абеля теорема 1, 28—29
- - для рядов Дирихле 1, 29
- - для степенных рядов 1, 28
- - о дивизорах 2, 132, 5, 1047
- - о мероморфных функциях 3, 648
- - о непрерывности суммы степенного ряда 1, 29
- - о степенных рядах 5, 219
- - об абелевых интегралах 1, 17
- - об алгебраических уравнениях 1, 28, 193, 852
- ядро интегрального уравнения 1, 26
Абеля — Гончарова интерполяционный ряд 1, 30
Абеля — Гончарова проблема 1, 29—31
Абеля — Пуассона метод суммирования 1, 31
Абнормальная подгруппа 1, 32
Абсолют 1, 32—34, 4, 676
- в проективной геометрии 1, 33
- регулярного топологического пространства 1, 32
θ-абсолют пространства 1, 33
Абсолютная величина 1, 34; 2, 77
- - действительного числа 1, 34
- - комплексного числа 1, 34, 2, 1008
- - функционала 4, 479
Абсолютная геометрия 1, 34
- группа топологического пространства 1, 1045
- замкнутость 4, 425
- конгруэнция 1, 492
- неизмеримость 3, 667
Абсолютная непрерывность 1, 34—36
- - интеграла 1, 34
- - меры 1, 34
- - функции 1, 34
- - функции множества 1, 35
- - -, Лебега теорема 1, 36
- неустойчивость 5, 565
- плоскость 1, 492
Абсолютная погрешность 1, 36; 4, 356
- постоянная Шнирельмана 5, 895
- проекционная константа 1, 390
Абсолютная суммируемость 1, 36—38
- - в степени p 1, 37
- устойчивость 5, 562
- ε-энтропия 4, 494; 5, 1008
Абсолютно беспристрастная последовательность 1, 38
- выпуклая подгруппа 1, 792
- выпуклое множество 1, 799; 4, 1010
- гомотопическая группа 1, 1063
- замкнутое пространство 2, 436
Абсолютно интегрируемая функция 1, 38
- линейный компакт 4, 1157
- наименьший вычет 1, 814
- непрерывное распределение 3, 989
- непрерывный спектр 5, 128
- неприводимая группа 3, 995
- неприводимый многочлен 3, 754, 997
- неразветвленный идеал 3, 1001
- нормальное число 3, 1071
- оптимальная стратегия 4, 34
Абсолютно плоское кольцо 1, 39
- полупростой эндоморфизм 4, 466
- равносильные методы суммирования 4, 800
- регулярный метод суммирования 1, 37
- свободная алгебра 4, 1079
- суммирующий базис 1, 377
- сходящееся бесконечное произведение 1, 445
- сходящийся двойной ряд 2, 30
Абсолютно сходящийся несобственный интеграл 1, 39; 3, 1017
- - - -, Коши критерий 1, 39
Абсолютно сходящийся ряд 1, 40; 4, 1065
- эквивалентные методы суммирования 4, 800
Абсолютного будущего область 4, 151
- прошлого область 4, 151
- удаления область 4, 151
Абсолютное дифференцирование 2, 896
Абсолютное значение 1, 41
- - p-адическое 1, 41
- -, аппроксимации теорема 1, 42
- - архимедово 1, 41
- - неархимедово 1, 41
- -, Островского теорема 1, 42
- - тривиальное 1, 41
- - ультраметрическое 1, 41
- кручение 3, 129
Абсолютное топологическое свойство 1, 42
Абсолютные компоненты 1, 935
- координаты 1, 935
Абсолютный базис 1, 377
- инвариант 5, 981
- - в теории геометрических объектов 1, 937
- - в теории модулярных функций 3, 789
- - формы 2, 541
- - p-функции Вейерштрасса 1, 622
- интегральный инвариант 2, 601
- максимум 3, 494
- минимум 3, 494, 4, 1132
Абсолютный момент 1, 42
- параллелизм 4, 204
- ретракт 4, 976
- - окрестностный 4, 976
- экстремум 1, 974
Абстрактная алгебраическая геометрия 1, 141
- аналитическая поверхность 1, 249
- вычислительная машина 1, 825
- машина 1, 825; 3, 626
- почти периодическая функция 3, 1119
- риманова область 4, 1014
- - поверхность 1, 178; 4, 1015, 5, 317
- теория потенциала 4, 531
- триангуляция 3, 152
- функция 3, 1119
- - аналитическая 1, 274
Абстрактное алгебраическое многообразие 1, 188
- дифференциальное уравнение 2, 280
- параболическое уравнение 3, 334
- ядро расширения 4, 899
Абстрактный гармонический анализ 1, 880
- комплекс 3, 151
- многогранник 5, 902
- оператор Вольтерра 1, 754
- симплициальный комплекс 2, 995, 4, 1159
Абстракция актуальной бесконечности 1, 43
Абстракция математическая 1, 43
Абстракция отождествления 1, 44
Абстракция потенциальной осуществимости 1, 44
Абсцисса 1, 45, 244, 358; 2, 80
- сходимости ряда Дирихле 2, 183
«Аварийный останов» 1, 826
Авост 1, 826
Автодуальная проективная плоскость 4, 669
Автоинформативности мера 3, 738
Автоковариации функция 1, 45
Автоковариация 1, 45
Автоколебания 1, 45—47
- релаксационные 1, 46
Автоколебательная система 1, 45
- -, обратная связь 1, 45
- -, принудительная синхронизация 1, 47
Автокореллограмма 1, 47
Автокорреляция 1, 47
Автомат 1, 47—51, 3, 626
- абелев 1, 67
- автономный 1, 54
-, алгебраическая теория 1, 66
- асинхронный 1, 48, 49
- без памяти 1, 49
- без потери информации 1, 50
- бесконечный 1, 48
Автомат вероятностный 1, 51
-, гомоморфизм 1, 68
- групповой 1, 67
- детерминированный 1, 48
-, диаграмма переходов 1, 72
-, изоморфизм 1, 68
-, композиция 1, 68
Автомат конечный 1, 52—57
- линейный 1, 68
- магазинный 3, 628
-, макроподход 1, 48, 53, 72
-, матрица переходов 1, 72
-, микроподход 1, 50, 55, 75
- Мили 1, 53
- минимальный 1, 69
-, минимизация 1, 69
- Мура 1, 53, 72
-, Мура теорема 1, 69, 78
- над деревьями 1, 68
- над термами 1, 68
- недетерминированный 1, 48
нечеткий 1, 49
- нильпотентный 1, 67
- обобщенный 1, 68
- обратимый 1, 50
-, операция обратной связи 1, 69
- перестановочный 1, 67
-, полная система 1, 70

-, полугруппа 1, 67
- приведенный 1, 69, 78
-, прямое произведение 1, 68
- растущий 1, 48, 51
- с конечной памятью 1, 50
- с конечным запоминанием 1, 50
- с линейной тактикой 1, 58
- с переменной структурой 1, 49
- самонастраивающийся 1, 50
- свободный 1, 67
-, способ задания 1, 72
- структурный 1, 53
-, суперпозиция 1, 69
-, таблица переходов 1, 72
-, теория 1, 77
-, функциональный элемент 1, 75
- циклический 1, 67
- частичный 1, 49
-, эквивалентность состояний 1, 78
-, элемент памяти 1, 75
МП-автомат 1, 1088
Автомата поведение 1, 57
- - в случайной среде 1, 57
- - в стационарной среде 1, 57
- - оптимальное 1, 57
Автоматизация программирования 1, 58
Автоматический перевод 1, 59
Автоматического управления теория 1, 60—66
Автоматная грамматика 1, 1087
- сеть 1, 53
Автоматное кодирование 2, 938
Автоматный оператор 5, 695
— язык 1, 1087
Автоматов алгебраическая теория 1, 66—68
Автоматов гомоморфизм 1, 68
Автоматов композиции 1, 68
Автоматов минимизация 1, 69
Автоматов полные системы 1, 70—72
Автоматов способы задания 1, 72—77
Автоматов теория 1, 77
Автоматов эквивалентность 1, 78
Автоморфизм 1, 79; 3, 370
- алгебраического многообразия 1, 187
- алгебраической поверхности 1, 154
- - системы 1, 198
- апериодический 1, 297
- Бернулли 1, 418
- билинейной формы 1, 482
- бирациональный 1, 494
-, внешняя сопряженность 5, 1012
- вполне эргодический 2, 805
- графа 1, 1112
- группы внешний 1, 736
- - внутренний 1, 736
- инволютивный инверсный 4, 477
- интегральный 2, 601
- кватернионной структуры 2, 839
- кольца внутренний 1, 736
- контраградиентный 2, 1071
- конфигурации 2, 1077
- конформной структуры 2, 1089
- косовой 3, 33
- метрический 1, 482, 3, 668
- моноида внутренний 1, 736
-, мультипликативное разложение Жордана 2, 422
- области 1, 471
- производный 4, 690
- регулярный 4, 944
- специальный 5, 137
- унипотентный 2, 422
- формульный 1, 199
- формы 4, 82
- Фробениуса 1, 849; 5, 667
- целочисленный 2, 779
I-автоморфизм 1, 198
IC-автоморфизм 1, 198
K-автоморфизм 4, 1194
Автоморфизмов внутренних группа 4, 639
- группа 1, 198
- - универсальная 1, 199
- многообразия семейство 1, 187
- порядковых группа 1, 199
Автоморфная форма 1, 79
Автоморфная функция 1, 79—81
- -, теорема об алгебраических соотношениях 1, 81
Автонимия 1, 81
Автономная система 1, 82—84
- -, геометрическая интерпретация 1, 83
- -, Лиувилля теорема 1, 83
- -, фазовая траектория 1, 83
- -, фазовое пространство 1, 83
- -, фазовый поток 1, 83
- -, эквивалентность 1, 84
Автоморфности условие 3, 786
Автономный автомат 1, 54
Автополярная фигура 4, 476
Автополярный треугольник 4, 990
Авторегрессии — скользящего среднего смешанный процесс 5, 48
Авторегрессионная спектральная оценка 5, 103
Авторегрессионный процесс 1, 84
Авторегрессия 1, 85
Автоустойчивая модель 2, 1060
Агвипея Ньютона 1, 297
Адамара вариационная формула 1, 85
- вариация 4, 218
- квазианалитический класс функций 2, 725
- лакуна 1, 86
Адамара матрица 1, 85
- - обобщенная 1, 86
- неравенство 1, 85
- - некорректно поставленной задачи 3, 47, 608, 937
Адамара теорема 1, 86—88
- - мультипликационная 1, 87
- - о лакунах 1, 86
- - о трех кругах 1, 87
- - о целых функциях 1, 86
- - об определителях 1, 87
- - об умножении особенностей 1, 87
- условие 1, 86
Адамара — Картана теорема о кривизне 3, 101
- - - о римановых многообразиях 4, 1009
Адамарова конфигурация 1, 506
Адамаровская композиция 1, 88
Адамаровское произведение 1, 88
Адамса e-инвариант 5, 286
Адамса метод 1, 88
- спектральная последовательность 5, 107
Адаптивное оптимальное управление 4, 47
Аддитивная арифметическая функция 1, 89
- граница функции 1, 1042
Аддитивная группа кольца 1, 89; 2, 967
- групповая схема 1, 1147
Аддитивная категория 1, 89
- -, Гротендика группа 1, 1133
Аддитивная проблема делителей 1, 90
Аддитивная равномерная структура 1, 90
- система счисления 5, 315
- схема 4, 942
Аддитивная теория идеалов 1, 90
Аддитивная теория чисел 1, 91—94
Аддитивная функция 1, 94; 3, 636
- - множеств 5, 720
- - сегмента, Варда теорема 1, 578
σ-аддитивная функция множеств 5, 720
Аддитивное отношение 1, 94
- отображение 1, 1133
- разложение Жордана 2, 421
Аддитивность 1, 94
Аддитивные задачи теории чисел 1, 91
Аддитивные проблемы теории чисел 1, 94, 256
Аддитивный шум 5, 918
- функтор 1, 89
Аддиционная теорема в топологии 1, 95, 1048; 3, 836
Адекватная матрица 3, 765
Адель 1, 95
Адема соотношения 5, 228, 229, 231
Адиабатический инвариант 1, 96—98; 2, 381
- - вечный 1, 97
- - временной 1, 97
- - стационарный 1, 97
Адиабатическое течение 1, 98
Адическая топология 1, 98
p-адическая группа Ли 3, 240
- единица 1, 100
- норма 1, 41, 100
l-адические когомологии 1, 99
l-адический лучок 1, 99
p-адическое абсолютное значение 1, 41
p-адическое аналитическое многообразие 1, 278
- - пространство 1, 285
p-адическое число 1, 99—101
- -, Гензена лемма 1, 918
Адо теорема об алгебрах Ли 3, 244
Адсорбция 1, 101
-, Ленгмюра уравнение 1, 101
Адъюнкта 1, 188
Азартная игра 1, 102
Азимутальная проекция 2, 754
Аккретивный оператор 2, 228
Аксиальная точка 3, 1072
Аксиальный вектор 1, 102; 4, 106
Аксиом схема 1, 102
Аксиома 1, 103; 5, 334, 640, см. также соответствующее название
Аксиоматизированный класс алгебраических систем 5, 972
Аксиоматизируемый класс 1, 103, 158, 3, 769
Аксиоматика отделенная 3, 414
Аксиоматическая система полуформальная 1, 434
- теория гомологий 5, 231
Аксиоматическая теория множеств 1, 104—109
- - -, класс 2, 862
- - формальная 3, 653
Аксиоматический метод 1, 109—113
- - неформальный 3, 1028
Аксиоматическое исчисление формальное 3, 653
Аксонометрия 1, 113
Активная емкость 1, 1089
Активный вычислительный алгоритм 4, 62
Актуальная бесконечность 1, 43, 44
Акцептор 1, 54
Алберта алгебра 3, 900
- кольцо 3, 901
- теорема о лупах 2, 519
Алгамс 1, 113
Алгебра 1, 114, 155; 2, 961; 5, 497
Алгебра (наука) 1, 114—118
Алгебра абсолютно свободная 4, 1079
- Алберта 3, 900
- алгебраическая 1, 134
- альтернативная 1, 237
- альтернионов 1, 239
- аменабельная 2, 916
- антикоммутативная 1, 292
- антисимметричная 1, 133
- ассоциативная 1, 340
- аффиноидная 2, 417
-, базис 1, 374; 2, 1022
- банахова 1, 381
- бесконечного представленческого типа 4, 585
- бинарно лиева 1, 488
-, биразмерность 1, 1054
- борелевская 1, 536
- Брауэра 1, 546, 4, 726
- булева 1, 550
-, Веддерберна теорема 2, 1022
- векторная 1, 632
- векторно-матричная 3, 161
- вектор-функций 1, 650
- внешняя 1, 732
- внутренне свободная 4, 1079
- вполне отделимая 2, 916
- вполне симметричная 4, 1148
- Гейтинга 4, 726
- гильбертова 1, 978
-, главная норма элемента 2, 212
-, главный многочлен 2, 212
-, главный след элемента 2, 212
- гомологическая 1, 1049
-, гомоморфизм 2, 961
- градуированная 1, 1084
- Грассмана 1, 732, 2, 732, 735
-, группа когомологий 2, 909
- групповая 1, 1144, 1145
-, деформация 2, 107
- дикого типа 4, 585
- Дирихле 1, 133
-, дискриминант 2, 211
- дифференциальная 2, 242
- дуальная 2, 390
- дуальных чисел 2, 32
- Жегалкина 2, 409
- жесткая 2, 107
- m-значной логики 3, 714
-, изоморфизм 2, 961
- индуцированная 3, 920
- инцидентности 4, 263
- йорданова 2, 693
- касательная 3, 462
- квазилокальных наблюдаемых 5, 203
- квазихопфова 5, 790
- кватернионов, базис 1, 372
- Клиффорда 2, 881
- коммутативная 2, 981
- комплексных умножений 5, 1001
- конечно определенная 4, 34
- конечного типа 4, 585
- конечномерная 2, 961
-, кронекерово произведение 3, 118
- Кэли 3, 157, 160
- Кэли — Диксона 3, 160, 161
- Ландвебера—Новикова 5, 865
- Ли 3, 242
- - алгебраической группы 3, 245
- - аналитической группы 3, 247
- -, Вейля группа 1, 625
- - группы Ли 3, 247
- - локальной группы Ли 3, 268
- - ограниченная 3, 248
- линейная 3, 291
Алгебра логики 1, 123—129
- локально конечная 3, 431
- - нильпотентная 3, 434
- разрешимая 3, 435
- Мальцева 3, 463, 508
- матриц 3, 611
- матричная 3, 611
- менгерова 2, 968
Алгебра мер 1, 129, 881
- метабелева 3, 241
-, минимальный многочлен 2, 212
Алгебра множеств 1, 129, 552; 3, 759
- моноунарная 5, 496
- муфанг-лиева 3, 508
- над полем 3, 291
- неассоциативная 3, 899
- Неймана 1, 978, 3, 920
- нильпотентная 3, 1041
- нормированная 3, 1081
- общая 3, 1140
-, общий элемент 2, 211
- полилинейная 4, 406
- полугрупповая 4, 456
- полупростая 1, 383; 4, 463, 804
- Понтрягина 5, 790
- Поста 3, 714, 4, 513
- предельная 2, 108
- представленческого типа 4, 585
- присоединенная 4, 640
- проективная 4, 663
- простая 4, 700
- псевдобулева 1, 546, 4, 696, 726
- равномерная 2, 966, 4, 785
-, радикал 1, 383, 4, 804
- радикальная 4, 805
-, ранг 4, 858
- редуцированная 3, 920
-, резольвента элемента 1, 383
- ручного типа 4, 585
Алгебра с ассоциативными степенями 1, 130
Алгебра с делением 1, 131
- - - центральная 1, 131
- с единицей 1, 381
- с инволюцией 1, 383

- с конечным числом образующих 2, 987
- с равномерной сходимостью, 1, 131
- свободная 4, 1079
- сепарабельная 4, 1113
- симметрическая 4, 1140
- симметрической билинейной формы 2, 693
- симметричная 1, 133, 2, 548; 4, 1148
- слабо наследственная 2, 916
- событий 4, 943
-, спектр элемента 1, 383
- Стинрода 5, 228
- Стоуна 5, 234
- Стоуна — Вейерштрасса 1, 884
-, структурная константа 2, 1022; 5, 254
-, стягивание 2, 108
- тензорная 5, 329
-, тензорное произведение 5, 331
- топологическая 5, 366
- трехосновная 1, 67
- унарная 5, 496
- универсальная 1, 155; 5, 497
- формально жесткая 2, 108
-, Фробениуса теорема 2, 1022

Алгебра функций 1, 131—134; 2, 986
- - аналитическая 1, 132
- - регулярная 1, 132
- фильтрованная 5, 616
- фробениусова 5, 669
- Фурье 1, 382; 5, 509
- Фурье — Стилтьеса 5, 509
- Хопфа 5, 790
- центральная 5, 804
- цилиндрическая 5, 825
- штейнова 5, 900
- энгелева 3, 901; 5, 999
- эндоморфизмов 5, 1001

A-алгебра гензелева 1, 918

*B**-алгебра 1, 118

BL-алгебра 1, 488

C^*-алгебра 1, 118

-, Гельфанда — Наймарка теорема 1, 384

-, полярное разложение 4, 480
- приведенная 5, 512
-, след 4, 1209
-, спектр 5, 100
-, характер 5, 746
- ядерная 5, 1029

CCR-алгебра 1, 119

k-алгебра аналитическая 1, 278
- квазианалитическая 1, 278

NGCR-алгебра 1, 119

p-алгебра Ли 3, 248

***PI*-алгебра** 1, 120—123

r-алгебра 4, 805

*W**-алгебра 3, 920

σ-алгебра борелевская 1, 130
- бэровских множеств 3, 643
- множеств 1, 130
- опциональная 4, 63
- предсказуемая 4, 581
- цилиндрическая 5, 825

Ω-алгебра 4, 1128
- мультиоператорная (линейная) 3, 839

Алгебраическая алгебра 1, 134
- - Ли 3, 249
- - -, Жордана разложение 2, 422
- - ограниченной степени 1, 134

Алгебраическая геометрия 1, 134—141

Алгебраическая геометрия абстрактная 1, 141
- - арифметическая 1, 182
- -, двойственность 2, 34
- -, конечности теоремы 2, 1024
- гиперповерхность 1, 1009

Алгебраическая группа 1, 142
- - анизотропная 4, 860
- -, Бореля теорема 1, 539
- -, Бореля — Морозова теорема 1, 539
- -, Вейля группа 1, 625
- -, *k*-гомоморфизм 1, 142
- -, группа характеров 5, 767
- - диагонализируемая 2, 122
- -, Жордана разложение 2, 422
- -, *k*-изоморфизм 1, 143
- -, Кнезера — Брюа — Титса теорема 1, 847
- - линейная 1, 143; 3, 297
- -, определенная над полем 1, 142
- - ортогональная 4, 83
- - полупростая 4, 464

Алгебраическая группа преобразований 1, 143
- -, радикал 4, 804
- - разложимая 4, 860
- -, размерность 1, 142
- -, ранг 4, 860
- -, рациональное представление 4, 920
- -, рациональности теоремы 4, 923
- - связная 1, 142
- - собственно ортогональная 4, 83
- - специальная ортогональная 4, 83
- -, форма 5, 634
- -, характер 5, 747
- единица 1, 196
- зависимость 1, 148
- инфинитезимальная симметрия 3, 1023

Алгебраическая иррациональность 1, 144
- кратность собственного значения 5, 58

Алгебраическая кривая 1, 144—148
- -, арифметический род 1, 144
- -, Вейерштрасса точка 1, 619
- -, Гарнака теорема 2, 70
- -, гессиан 1, 955
- - каноническая 1, 146
- - основного типа 1, 146
- -, Петровского теорема 2, 70
- - плоская 4, 309
- -, порядок 4, 504
- -, род 1, 145
- лингвистика 1, 249
- линия 3, 383

Алгебраическая независимость 1, 148
- норма 3, 1048

Алгебраическая операция 1, 149
- -, арность 1, 149
- особая точка 1, 173, 679

Алгебраическая поверхность 1, 149—154, 250
- -, автоморфизм 1, 154
- -, делитель Севери 1, 151
- -, инвариант Цейтена — Сегре 1, 150
- -, иррегулярность 1, 150
- -, классификация 1, 152
- -, линейный род 1, 150
- -, минимальная модель 1, 152
- -, Нётера формула 1, 150
- - общего типа 4, 113
- - основного типа 4, 113
- -, Пикара число 1, 151
- -, плюриканоническая система 1, 150
- -, проблема модулей 1, 153
- - регулярная 1, 150
- -, Римана—Роха теорема 1, 151
- -, системы кривых 1, 151
- -, топологические свойства 1, 151
- -, численные инварианты 1, 150
- подгруппа 1, 142
- производная 2, 733; 4, 26

Алгебраическая размерность 1, 154, 374

Алгебраическая решетка 1, 154
- семантика 4, 696
- сеть 2, 804

Алгебраическая система 1, 155—160
- -, базис тождеств 1, 186
- -, базисный ранг 4, 858
- -, гомоморфизм 1, 1061
- -, диаграмма 3, 766
- -, изоморфизм 1, 156
- - конечная 1, 155
- - конечного типа 1, 155
- - конструктивная 3, 1088
- -, мощность 1, 155
- -, носитель 1, 155
- -, нуль 3, 1082
- - нумерованная 3, 1088
- -, описание 3, 766
- -, основное множество 1, 155
- -, подпрямое произведение 4, 379
- -, порядок 1, 155
- -, расширение 5, 876
- - резидуально конечная 1, 184
- -, реплика 4, 974
- - свободная 1, 374, 4, 1079
- -, свободный базис 1, 373
- -, сигнатура 1, 156, 4, 1128
- -, факторсистема 1, 157
- - финитно аппроксимируемая 1, 184
- -, элементарное расширение 3, 766
- спираль 5, 141
- степень точности 2, 794
- теория автоматов 1, 66
- теория инвариантов 2, 540

Алгебраическая теория чисел 1, 164—169

Алгебраическая *K*-теория 1, 160—164

Алгебраическая топология 1, 169—173
- -, двойственность 2, 35

Алгебраическая точка ветвления 1, 173
- -, порядок 1, 174
- факторгруппа 1, 142
- форма записи комплексного числа 2, 1008

Алгебраическая функция 1, 174—178
- -, группа монодромии 1, 176
- -, индекс ветвления 1, 176
- -, критические значения 1, 175
- -, локальная униформизующая 1, 177
- - полная 1, 177
- -, полюс 1, 176
- -, порядок ветвления 1, 176
- -, род 1, 177; 4, 1048

Алгебраически замкнутое подполе 4, 909

Алгебраически замкнутое поле 1, 178
- зависимые функции 3, 650
- компактная абелева группа 5, 880
- неприводимое представление 3, 997
- эквивалентные представления 5, 943

Алгебраические числа ассоциированные 1, 196
- - сопряженные 1, 196

Алгебраический базис 1, 374
- - векторного пространства 1, 643
- гомоморфизм алгебраической группы 1, 142
- *K*-изоморфизм алгебраической группы 1, 143
- интеграл 1, 15
- класс гомологий 1, 180
- - когомологий 1, 180
- комплекс Пуанкаре 4, 747
- многочлен 5, 797

Алгебраический многочлен наилучшего приближения 1, 179
- полином 5, 797
- пучок когерентный 2, 903
- - прямых 4, 773
- степенной ряд 3, 1035

Алгебраический тор 1, 179
- -, группа характеров 1, 179
- - расщепимый 1, 179
- узел 3, 739

Алгебраический цикл 1, 179
- -, алгебраическая эквивалентность 1, 180
- -, гомологическая эквивалентность 1, 181
- -, рациональная эквивалентность 1, 180
- -, Тейта гипотеза 1, 181
- -, Ходжа гипотеза 1, 180
- -, численная эквивалентность 1, 181
- -, τ-эквивалентность 1, 181
- элемент 1, 134, 4, 415, 908

Алгебраически-логарифмическая особая точка 1, 182

Алгебраических многообразий арифметика 1, 182
- подмногообразий семейство 1, 180

Алгебраических систем квазимногообразие 1, 183

Алгебраических систем класс 1, 184

Алгебраических систем многообразие 1, 185
- функций поле 1, 178

Алгебраического многообразия автоморфизм 1, 187

Алгебраическое дополнение 1, 188

Алгебраическое замыкание 1, 188
- значение корня 1, 323
- интерполирование 2, 622

Алгебраическое многообразие 1, 188, 5, 299
- - абстрактное 1, 188
- -, Бертини теоремы 1, 431
- - действительное 2, 70
- -, деформация 2, 105
- -, дифференциальная форма 2, 265
- -, инволюция 2, 549
- -, касательный конус 2, 756
- -, кратность особой точки 3, 90
- -, конструктивное подмножество 2, 1054
- -, особая точка 4, 118
- - полное 4, 423
- - поляризованное 4, 476
- -, размерность 4, 919
- -, рациональная функция 4, 919
- -, теория пересечений 4, 253
- множество 2, 671
- - афинное 1, 359
- подмногообразие, коразмерность 3, 14
- поле 1, 197

Алгебраическое пространство 1, 189
- расширение 4, 909

Алгебраическое сравнение 1, 190
- -, степень 1, 190

Алгебраическое уравнение 1, 191—195
- -, Абеля теорема 1, 28, 193, 852
- -, Бюдана — Фурье теорема 1, 570
- -, Гаусса метод 1, 898
- -, корень 1, 192; 3, 15
- -, Кронекера — Вебера теорема 1, 852
- -, метод квадратного корня 2, 791
- - неприводимое 1, 192
- - приводимое 1, 192
- -, разрешимость в радикалах 1, 193
- -, резольвента 4, 949

Алгебраическое число 1, 195—198, 258
- -, высота 1, 196
- -, Дирихле теорема о единицах поля 1, 165
- - над полем 1, 197
- -, поле 1, 196; 4, 398
- - целое 1, 196

Алгебраической независимости мера 1, 198

Алгебраической системы автоморфизм 1, 198

Алгебро-геометрическое кольцо 1, 939

Алгебры логики функция 1, 553; 4, 699

Алгебры основная теорема 1, 199

Алгол 1, 200

Алгол-68 1, 201

Алголоподобная схема программ 4, 650

Алгоритм 1, 202; 2, 1045

Алгоритм в алфавите 1, 206
- вероятностный 5, 458
- вычислительный 1, 826
- Евклида 2, 397
- инвертирующий 1, 1147
- итерационный 2, 689
- Кока 1, 1090
- кольцевой 1, 562
- Куайна 1, 560

Алгоритм локальный 1, 207
- -, величина памяти 1, 209
- -, индекс 1, 209
- - наилучший 1, 209
- -, метрическая теория 1, 228
- метрический 2, 1051
- несамоприменимый 1, 210
- -, область применимости 1, 227

- операторный 1, 825
- регулярных точек 1, 561
- самоприменимый 1, 210
-, сочетание 1, 225
-, теория 1, 226
- универсальный 5, 500
- упорядочивания 1, 208
-, эквивалентность 1, 229
A-алгоритм 1, 561
QR-алгоритм 2, 687
Алгоритма изображение 1, 210
Алгоритма сложность вычислений 1, 210—213
Алгоритма сложность описания 1, 213
Алгоритмическая логика 4, 653
- неразрешимость 3, 1003
Алгоритмическая проблема 1, 214—218, 227, 3, 537
- - ограниченная 1, 221
Алгоритмическая сводимость 1, 218
Алгоритмическая теория информации 1, 219—222
Алгоритмическая теория множеств 1, 222
- условная энтропия 1, 222
- энтропия 1, 222
Алгоритмический вычислительный процесс 1, 202
- оператор 2, 1052
Алгоритмический язык 1, 222—225
- - рекурсивных функций 4, 976
Алгоритмическое количество информации 1, 222
- число 5, 314
Алгоритмов сочетания 1, 225
Алгоритмов теория 1, 226—229
Алгоритмов эквивалентность 1, 229
Алгорифм 1, 202
- нормальный 3, 1072
Александера двойственность 1, 230
- идеал 1, 232
Александера инварианты 1, 231
- матрица 5, 488
- - зацепления 1, 232
- - накрытия 1, 232
- многочлен 1, 232, 5, 488
- модуль 5, 488
- - зацепления 1, 232
- - накрытия 1, 232
- сфера 2, 137
- теорема о комплексах 3, 153
- - о зацеплениях 5, 490
- - о числах Бетти 1, 231
Александера — Понтрягина двойственность 1, 231
- - теорема двойственности 1, 231
Александера — Спеньера когомологии 5, 861
Александрова бикомпактное расширение 1, 233
- компактификация 1, 233
- поперечник 4, 493
- теорема о бэровских мерах 3, 644
- - о выпуклых многогранниках 1, 802
- - - - поверхностях 1, 788
- - о канторовых многообразиях 2, 716, 717
- - - - множествах 2, 718
- - о компактах 2, 990
- - о метрике 4, 1200
- - о непрерывных отображениях 3, 987
- - о несущественных отображениях 3, 1020
- - о препятствии 1, 1056; 3, 437
- - о размерностных инвариантах 4, 824
- - о регулярных функциях множеств 4, 938
- - о существенных отображениях 4, 823, 827
- - об измеримости множеств 5, 298
- - об ε-отображениях и ε-сдвигах 4, 827
- - об ω-отображениях 4, 827
формула размерностей бикомпактов 4, 822
Александрова — Урысона теорема о пространстве иррациональных чисел 2, 96
Александрова — Фенхеля неравенство 5, 50
Александрова — Хаусдорфа теорема о метрике 3, 671
- - - о G_δ-множестве 2, 96
- - - о полноте 4, 425
Александрова — Чеха гомологии и когомологии 1, 234; 5, 126
- - группа гомологий 1, 234
- - когомологии 5, 861
- - модуль гомологий 1, 234
Александровское бикомпактное расширение 5, 393
Алеф-нуль 1, 235
Алефы 1, 235
-, Бернштейна формула 1, 235
-, обобщенная континуум-гипотеза 1, 235
-, рекурсивная формула Тарского 1, 235
-, - - Хаусдорфа 1, 235
Аликвотная дробь 1, 235, 315
Алфавит 1, 111, 235; 2, 1043, 4, 1082
- вспомогательный 1, 1092
- входной 1, 53, 54
- выходной 1, 53, 54
- конечный 1, 819
- основной 1, 1092
Алфавитная система счисления 5, 315
Алфавитное кодирование 2, 935
Альбанезе многообразие 1, 236
Альбедный метод 1, 236
Альмукантарат 2, 753
Альтернанс, Валле Пуссена теорема 1, 576
- чебышевский 5, 848
- -, точки 1, 236
Альтернанса точки 1, 236
Альтернатива 1, 237; 2, 656; 4, 386
Альтернативная алгебра 1, 237
- гипотеза 5, 185
- сетевая модель 4, 1120
Альтернативное кольцо 1, 237
- - артиново 1, 238
- -, нильпотентность 1, 237
- -, правая нильпотентность 1, 237
- -, разрешимость 1, 237
- -, центр 1, 238
- -, - ассоциативный 1, 238
- -, - коммутативный 1, 238
- тело 1, 237
Альтернативные кольца и алгебры 1, 237—239
Альтернация 1, 240
Альтернион 1, 239
-, алгебра 1, 239
-, модуль 1, 240
Альтернирование 1, 240
Альтернированное полилинейное отображение 4, 407
- произведение 1, 240
Альтернированный интеграл 2, 335
- тензор 1, 240
Альтернирующее зацепление 1, 241
Альтернирующие узлы и зацепления 1, 241
Альтернирующий метод Шварца 5, 884
- узел 1, 241
Альфа 1, 241
Альфана пучок 1, 242
Альфорса аналитическая мера 1, 246
- теорема для клейновых групп 2, 877
- - об аналитической емкости 1, 246
Амальгама 1, 242
Амальгама групп 1, 243
Аменабельная алгебра 2, 916
- группа 2, 535, 5, 512
Амплитуда комплексного числа 2, 1009
- свободного гармонического колебания 4, 1084
Амплитуда эллиптического интеграла 1, 243, 5, 990, 1057
Амплитудно-фазовая функция 4, 241
Амплитуды косинус 3, 38
- синус 4, 1191
Анализ — см соответствующее название
Анализирующая модель языка 1, 247
Аналитическая алгебра функций 1, 132
- k-алгебра 1, 278
Аналитическая геометрия 1, 243—245
- гиперповерхность 1, 1009
- группа 1, 245
- деформация 2, 103
- дуга 1, 246
Аналитическая емкость 1, 246, 2, 407
- иерархия Клини 2, 490
Аналитическая кривая 1, 246
- - замкнутая 1, 246
- - правильная 1, 246
- локальная группа 3, 267
- пупа 3, 462
- мера 1, 246
- - Альфорса 1, 246
Аналитическая модель языка 1, 247—249
- - - парадигматическая 1, 248
- - - синтагматическая 1, 248
- нормальность кольца 1, 939
Аналитическая плоскость 1, 249
Аналитическая поверхность 1, 249; 5, 860
Аналитическая поверхность абстрактная 1, 249
- -, классификация 1, 250
- подгруппа 1, 245
- почти периодическая функция 4, 545
- приведенность кольца 1, 939
- прямая 1, 249
- статика 5, 169
- структура 2, 355
- -, деформация 2, 102
Аналитическая теория дифференциальных уравнений 1, 251—254
Аналитическая теория чисел 1, 254—261
- - -, аддитивные проблемы 1, 256
- - -, дисперсионный метод 1, 260
- - -, круговой метод 1, 259
- - -, метод большого решета 1, 260
- - -, - комплексного интегрирования 1, 259
- - -, - тригонометрических сумм 1, 259
Аналитическая функция 1, 261—274; 5, 690
Аналитическая функция абстрактная 1, 274
- -, ветвь 1, 268, 680
- -, вычет 1, 264, 814, 816
- - гиперкомплексного переменного 1, 1007
- -, граничные задачи 1, 1095
- -, граничные свойства 1, 1098
- -, двойственность 2, 41
- -, единственности теорема 1, 264
- -, Жордана лемма 2, 420
- -, Жюлиа теорема 2, 426
- -, изолированная особая точка 2, 503
- -, интегральная теорема Коши 1, 263
- -, интегральная формула Коши 1, 263
- -, интегральное представление 2, 585
- -, логарифмический вычет 1, 815
- - многозначная 1, 266
- -, Мореры теорема 1, 263
- - на римановой поверхности 4, 1028
- - нескольких комплексных переменных 1, 268
- -, нормальное семейство 3, 1068
- -, область существования 1, 267
- - обобщенная 3, 1099
- -, особая точка 1, 264, 4, 113
- -, особенность 4, 131
- - полная 1, 267; 4, 413
- -, полярное множество 4, 478
- -, проблема граничного представления 1, 1099
- -, проблема единственности 1, 1099
- -, проблема существования граничных значений 1, 1098
- -, рельеф 4, 969
- -, римановы поверхность 4, 1015
- -, росток 4, 415
- -, свойство единственности 2, 401
- -, склеивания теоремы 4, 1201
- -, точка ветвления 1, 679
- -, униформизация 5, 514
- -, элемент 1, 267, 4, 413, 5, 971
Аналитический вектор 1, 275, 276, 447
- волновой фронт 5, 672
Аналитический дифференциал 1, 276, 2, 239
- -, вычет 1, 816
- индекс комплекса 2, 553
- квадратичный дифференциал 2, 786
Аналитический ландшафт 1, 276
- морфизм 1, 281
Аналитический образ 1, 276
Аналитический оператор 1, 276
Аналитический полиэдр 1, 277
- -, грань 1, 277
- -, ребро 1, 277
Аналитический пучок 1, 277, 286
- - когерентный 2, 739
- рельеф 1, 276
- способ задания функции 5, 716
Аналитический функционал 1, 277
- элемент 1, 283, 4, 413
Аналитическое банахово пространство 1, 385
- векторное поле 2, 278
Аналитическое выражение 1, 277
Аналитическое дополнение 1, 278
Аналитическое кольцо 1, 278
- конструирование оптимального регулятора 4, 44
Аналитическое многообразие 1, 278
- - p-адическое 1, 278
- - вещественное 1, 278
- -, комплексная структура 2, 1005
- - комплексное 1, 278
Аналитическое множество 1, 279—281, 2, 93, 3, 455, 762
- - исключительное 1, 288; 2, 673
- -, неприводимая компонента 1, 280
- - неприводимое 1, 280
- - однородное 1, 280
- - приводимое 1, 280
- -, пучок идеалов 2, 904
- -, размерность 1, 280
- -, регулярная точка 1, 280
- -, страта 1, 280
- -, стратификация 1, 280
- -, стягивание 2, 673
- -, точка неприводимости 1, 281
- накрытие 1, 281
Аналитическое отображение 1, 281, 285
- - банаховых пространств 1, 274
- - плоское 1, 282
- подмногообразие 4, 371
- подпространство 1, 286
Аналитическое представление 1, 283, 446
- продолжение 1, 267
- -, канонический элемент 1, 283
- - максимальное 1, 283
- -, Пойа теорема 2, 41
Аналитическое продолжение функции 1, 283
- -, элемент 1, 283
Аналитическое пространство 1, 285
- - p-адическое 1, 285
- - вещественное 1, 285, 689
- - гладкое 1, 285
- -, глобальная размерность 1, 285
- -, двойственность 2, 39

- -, дифференциальное исчисление 2, 277
- - жесткое 2, 417
- - комплексное 1, 285
- -, коразмерность 3, 14
- -, модификация 3, 770
- -, неособая точка 1, 285
- - неприводимое 3, 995
- - нормальное 3, 1068
- -, особая точка 1, 285
- - приведенное 1, 286
- -, простая точка 1, 285
- -, размерность 1, 285
- -, теоремы конечности 2, 1024
- семейство векторных пространств 1, 640
- - комплексных многообразий 2, 102
К-аналитическое множество 2, 406
Аналлагматическая геометрия 1, 289; 3, 122
Анафорическая связь 4, 1184
Ангармоническое отношение 1, 289, 2, 27
Ангера функция 1, 289
Андронова — Витта теорема об устойчивости 1, 289, 4, 69
Анизотропная алгебраическая группа 4, 860
- билинейная форма 1, 713
Анизотропная группа 1, 290; 3, 487
- диагнозируемая алгебраическая группа 2, 122
- квадратичная форма 2, 778
- - линейная алгебраическая группа 3, 298
Анизотропное ядро 1, 290; 2, 778
Аннулятор 1, 290, 2, 43
- множества 1, 644
- модуля 3, 778
- поливектора 4, 403
Аномалия лучевой функции 1, 947
Аномальная пара 5, 524
Аносова система 4, 1195
Ансамбль Гиббса канонический 5, 179
- динамических систем 2, 147
- микроканонический 5, 200
- равновесный 5, 179
- статистический 5, 178
Антагонистическая игра 1, 290; 2, 471
Антецедент 4, 1104, 1105
Антецедента закон отрицания 4, 386
Антецедентное правило 1, 921
Антианалитическая функция 1, 292
Антианалитическое представление 1, 283
Антивиньовский символ 4, 1134
Антиголоморфная функция 1, 292
Антигомоморфизм решетки 4, 981
Антидвижение 1, 292
- в псевдоевклидовом пространстве 4, 740
Антидискретная топология 1, 292
Антидискретное пространство 1, 292
Антиизоморфизм 1, 292
Антиинверсия 2, 545
Антиинстантон 5, 1060
Антикватернион 1, 240
Антикоммутативная алгебра 1, 292
Антикоммутации соотношение 5, 518
Антикоммутационные соотношения 4, 258
Антиконформное отображение 1, 292
Антилинейное отображение 4, 458
Антилогарифм 1, 292
Антиномия 1, 292—296
Антипараллелограмм 1, 296
Антипараллельные прямые 1, 296
Антиподера 4, 370
Антиподы 1, 297
Антипризма 1, 297
Антисимметрирование 1, 240
Антисимметрическая билинейная форма 1, 482, 3, 41
Антисимметричная алгебра 1, 133
- - равномерная 4, 786
Антисимметричное бинарное отношение 1, 488
Антисимметричный тензор 1, 297
Антитонное отображение 1, 297
Антитонный оператор 3, 960
Антье 1, 297
Аньези локон 1, 297
Апериодический автоморфизм 1, 297
Антипериодическое условие 5, 915
Антисимметрическое пространство Фока 5, 631
Антиэрмитова форма 5, 1021
Аполлония задача 1, 298.
- окружность 1, 298
Аполлония теорема 1, 298
Аполярности условие 1, 354
Аполярные сети 1, 298
Апория 1, 293
Апостериорная вероятность 1, 298
Апостериорное распределение 1, 298
Апофема 1, 298, 299; 3, 750
Аппеля многочлены 1, 299
- полиномы 1, 299
Аппеля преобразование 1, 301
Аппеля уравнения 1, 301
Аппликата 1, 244, 302, 358, 2, 80
Аппликация 2, 970
Аппроксимативная дифференцируемость 1, 302
Аппроксимативная компактность 1, 303
Аппроксимативная непрерывность 1, 303
Аппроксимативная производная 1, 303, 3, 804
Аппроксимативно дифференцируемая функция 1, 302
Аппроксимативно компактное множество 1, 304
- непрерывная функция 1, 303
Аппроксимативное производное число 1, 304
Аппроксимативный дифференциал 1, 302
Аппроксимативный предел 1, 304
Аппроксимации порядок 4, 627
- теорема для почти периодических функций 4, 544, 547
- - об абсолютном значении 1, 42
- теория 4, 627
Аппроксимационная вязкость 5, 303
Аппроксимация 1, 305
Аппроксимация дифференциального оператора разностным 1, 305
Аппроксимация дифференциального уравнения разностным 1, 307
Аппроксимация дифференциальной краевой задачи разностной 1, 308
- Паде 4, 187
Аппроксимация периодическими преобразованиями 1, 310
- сеточная 3, 304
- симплициальная 4, 1161
- стохастическая 5, 235
Аппроксимирующая последовательность областей 2, 683
Априорная вероятность 1, 311
- оценка 4, 844
Априорное распределение 1, 311
- - наименее благоприятное 5, 192
Арабские цифры 1, 312
Арбитражная схема 1, 312
Арбитражное решение 1, 312
Аргумент 1, 313
- комплексного числа 1, 313; 2, 1009
- функции 5, 713
Аргумента принцип 1, 313
- - обобщенный 1, 313
Ареа-функция 1, 313
Ареиса — Ройдена теорема 2, 985
Арифметизация 1, 314
Арифметика 1, 314—319
- алгебраических многообразий 1, 182
- гейтинговская 1, 911
- интуиционистская 1, 911
- конструктивная 2, 1040
-, основная теорема 4, 876
- Пеано 2, 759; 4, 229
- примитивно рекурсивная 3, 412
- теоретическая 1, 314
Арифметика формальная 1, 319—321
- элементарная 5, 972
Арифметическая алгебраическая геометрия 1, 182
- голоэдрия 3, 108
Арифметическая группа 1, 321
- -, род элемента 4, 1049
- дробь 2, 989
- иерархия Клини — Мостовского 2, 490
- ошибка 2, 928, 929
- полуформальная система 2, 1040
Арифметическая прогрессия 1, 322
- -, делителей проблема 2, 87
- -, Дирихле теорема 2, 187
Арифметическая пропорция 1, 322
- универсальная алгебра 5, 498
- формула 1, 319
Арифметическая функция 1, 322
- - аддитивная 1, 89
Арифметический инвариант фигуры 5, 614
- код 2, 934
Арифметический континуум 1, 323
Арифметический корень 1, 323
- предикат 1, 320
Арифметический род 1, 323, 4, 1049
- - алгебраической кривой 1, 144
- - виртуальный 1, 323
Арифметический ряд 1, 322, 324
Арифметический треугольник 1, 325
Арифметических функций асимптотика 5, 878
Арифметическое значение корня 1, 323
- исчисление 1, 319
- многообразие Коэна — Маколея 3, 69
Арифметическое пространство 1, 325
Арифметическое распределение 1, 325
Арифметическое среднее 1, 325; 5, 161
Арккосинус 3, 37
Арккотангенс 3, 43
Арксинус 4, 1191
Арксинуса закон 1, 325, 419
Арксинуса распределение 1, 326
Арктангенс 5, 320
Аркус-функция 1, 326
Аркфункция 1, 326, 3, 1135
n-арная квазигруппа 2, 803
- операция 1, 149
n-арное отношение 4, 153
Арность 4, 650
- алгебраической операции 1, 149
- операции 1, 155, 4, 18
- отношения 1, 155
n-арный предикат 4, 153
АРСС-процесс 5, 48
Артина гипотеза 2, 119
- закон взаимности 1, 168
- компонента 4, 916
- символ 1, 168; 5, 668
Артина — Риса лемма о кольцах 1, 98
Артина — Рисса условие для идеалов 4, 635
Артина — Шмидта дзета-функция 2, 119
Артина — Шрейера теория 3, 149
Артинов модуль 1, 327
Артинова группа 1, 327
Артиново кольцо 1, 327
- - альтернативное 1, 238
- -, Веддерберна — Артина теорема 1, 612
Арфа инвариант 2, 527
Архангельского теорема о перистых пространствах 4, 271
- - о хаусдорфовых пространствах 3, 835
Архимеда аксиома 1, 327, 293, 328, 652, 970; 5, 877
- принцип для конусов 2, 1075
Архимеда тела 1, 328; 3, 711; 4, 463
Архимедов класс 1, 328
Архимедова группа 1, 328
Архимедова полугруппа 1, 328, 329
Архимедова спираль 1, 329
Архимедово абсолютное значение 1, 41
- - -, Островского теорема 1, 42
Архимедово кольцо 1, 329
- отношение эквивалентности 1, 328
- пространство 4, 1038
- свойство 2, 74
- тело 3, 431
- упорядоченное векторное пространство 4, 470
Арцела вариация 1, 330
- теорема о компактности 3, 995
Арцела — Александрова теорема о квазиравномерной сходимости 2, 820; 4, 792
Арцела — Асколи теорема для последовательности непрерывных функций 1, 330
- - - о компактности 3, 672
- - - о равностепенной непрерывности 4, 801
Асимметрии коэффициент 1, 330
Асимметричное многообразие 1, 331
Асимметричный граф 1, 1112
Асимметрия отрицательная 1, 331
- положительная 1, 331
Асимметрия распределения 1, 331
Асимптота 1, 331
- гиперболы 1, 988
Асимптотика арифметических функций 5, 878
- числовых функций 5, 878
Асимптотическая линия 1, 332; 2, 252
- -, Бельтрами — Эннепера теорема 1, 332, 409
- орбитальная устойчивость 2, 776
- орбитально устойчивая траектория 4, 69
- относительная эффективность критерия 5, 1026
- оценка 4, 498
Асимптотическая плотность 1, 332
- полоса 4, 438
Асимптотическая последовательность 1, 333
- почти периодическая функция 3, 1120
Асимптотическая пренебрегаемость 1, 333
Асимптотическая производная 1, 333, 3, 804
Асимптотическая резольвента 4, 453
Асимптотическая сеть 1, 333
- скорость сходимости 5, 304
Асимптотическая точка 1, 334, 5, 424
- η-устойчивость 5, 573
- эффективность критерия 5, 1025
Асимптотическая формула 1, 334
Асимптотически моногенная функция 3, 804
Асимптотически несмещенная оценка 1, 334
- - функция 1, 334
Асимптотически несмещенный критерий 1, 334
- оптимальная последовательность автоматов 1, 58
- равные функции 4, 498
- условно устойчивое решение 5, 550, 551

- устойчивая система 1, 63
- - - линейных дифференциальных уравнений 3, 341
- - схема 4, 846
Асимптотически устойчивое решение 1, 334; 2, 775; 5, 568, 569
- - -, Барбашина — Красовского теорема 1, 65
Асимптотически эффективная оценка 1, 335; 4, 175
Асимптотические координаты 5, 87
Асимптотический базис 1, 335
- конус гиперболоида 1, 1000
- метод Вентцеля — Крамера — Бриллюэна 1, 716
- многоугольник 3, 752
Асимптотический предел 1, 335
Асимптотический ряд 1, 335, 338
- - внешний 3, 503
- - внутренний 3, 503
Асимптотический степенной ряд 1, 335
Асимптотическое выражение 1, 336
Асимптотическое значение 1, 336
- множество 4, 565
Асимптотическое направление 1, 337; 2, 252
Асимптотическое представление 1, 337
Асимптотическое равенство 1, 337
Асимптотическое разложение 1, 337
- - в смысле Пуанкаре 1, 338
- - в смысле Эрдейи 1, 338
- соотношение 4, 497
Асимптотической равнораспределенности свойство 5, 76
Асинхронный автомат 1, 48
Ассемблер 3, 596
n-ассоциатив 4, 444
Ассоциативная алгебра 1, 340
- -, Веддерберна теорема 1, 341
- -, Веддерберна — Мальцева теорема 1, 612
- - конечномерная 2, 1021
- -, представление 4, 584
- -, расширение 4, 898
- - свободная 4, 1081
- -, характер 5, 746
Ассоциативное исчисление 1, 338
- -, изоморфизм 1, 339
- - неразрешимое 1, 339
- кольцо 1, 340; 2, 961
Ассоциативно - коммутативное кольцо 1, 239
Ассоциативности закон 1, 125, 340
Ассоциативность 1, 340
Ассоциативные кольца и алгебры 1, 340
Ассоциативный центр альтернативного кольца 1, 238
Ассоциатор 1, 342
Ассоциированная мера 4, 1039
- по Борелю функция 1, 343, 538
- форма 5, 863
- - многообразия 3, 159
Ассоциированная функция 1, 342, 538
Ассоциированные алгебраические числа 1, 196
- уравнения 5, 419
- числа 1, 166
Астроида 1, 343
Астрометрии математические задачи 1, 343
Астрономии математические задачи 1, 344—346
Астрофизики математические задачи 1, 346—351
- релятивистской математические задачи 4, 970
Атлас 2, 730; 3, 743
- канонический 5, 722
- многообразия 2, 755
- хефлигеровский 5, 782
C^k-атлас 2, 355
Атом 1, 351
- водородоподобный 1, 739
- пространства 3, 638
Атомарная формула 3, 416, 417; 4, 578, 5, 641
Атомарное кольцо 1, 351
Атомическое распределение 1, 352
Атомная решетка 1, 352
Аттрактор 5, 246
- Лоренца 3, 451
Атьи теорема двойственности 5, 363
Атьи — Зингера теорема об индексе 2, 552, 5, 763, 868
- - формулы индекса 2, 551
Атьи — Хирцебруха (— Уайтхеда) спектральная последовательность 5, 107
Аумана теорема в математической экономике 3, 590
Ауслендера — Буксбаума теорема о регулярных кольцах 4, 939
Ауэрбаха система 1, 391
Аффикс 1, 352
Аффинитет 1, 352
Аффинная геометрия 1, 352
Аффинная группа 1, 352, 362
- - Вейля 3, 17
Аффинная дифференциальная геометрия 1, 352—354
- длина дуги 1, 364
Аффинная кривизна 1, 354
Аффинная минимальная поверхность 1, 355
Аффинная нормаль 1, 355
Аффинная оболочка 1, 355
Аффинная связность 1, 355—357, 2, 268
- -, геодезическая линия 1, 357
- -, объект 1, 356
- -, структурные уравнения 1, 356
Аффинная система координат 1, 358
- структура 5, 249
Аффинная сфера 1, 358
Аффинная схема 1, 358
- - дискретная 1, 358
- -, замкнутое вложение 1, 359
- - квазикомпактная 1, 358
- - неприводимая 1, 358
- - нётерова 1, 358
- - нормальная 1, 358
- - приведенная 1, 358
- - регулярная 1, 358
- - связная 1, 358
- - целостная 1, 358
- *S*-схема 1, 363
Аффинная унимодулярная группа 1, 359
Аффинно полная универсальная алгебра 5, 498
Аффинное алгебраическое многообразие 1, 360
Аффинное алгебраическое множество 1, 359
- - -, идеал 1, 359
- - -, координатное кольцо 1, 360
- - - неприводимое 1, 360
- - -, уравнение 1, 360
Аффинное кручение 1, 360
- локально симметрическое пространство 4, 1146
Аффинное многообразие 1, 360
- -, геометрическая точка 1, 361
- -, рациональная точка 1, 361
- отображение 1, 362
- подпространство 1, 362, 3, 345
Аффинное преобразование 1, 361
Аффинное пространство 1, 360, 362
- -, вектор 1, 362
- -, Зариского топология 2, 444
- -, Шаля соотношение 1, 362
Аффинное псевдорасстояние 1, 363
Аффинное расстояние 1, 363
Аффинной связности однородное пространство 3, 1176
- - пространство 1, 355
- - -, движение 2, 21
Аффинности критерий Серра 1, 359
Аффинные координаты 1, 358
Аффинный базис 1, 358
- изоморфизм 1, 362
Аффинный морфизм 1, 363
- объем 3, 1150
Аффинный параметр 1, 364
- поперечник 4, 493
Аффинный репер 1, 364
Аффинный тензор 1, 364
Аффиноидная алгебра 2, 417
Аффинор 1, 364
«Ахиллес и черепаха» 1, 293
Ациклический элемент 1, 364
Ациклическое топологическое пространство 2, 198
Ацикличный континуум 1, 364
Аэродинамики математические задачи 1, 364—370

Б

База 1, 371
-, вес 1, 371
- гомологии 1, 1040
- деформации 4, 118
- дизъюнктная 1, 371
- σ-дизъюнктная 1, 371
- дискретная 1, 371
- σ-дискретная 1, 371
- замкнутая 1, 371
- локальная 1, 371
- m-локальная 1, 371
- n-m-локальная 1, 371
- локально счетная 1, 371
- σ-локально конечная 1, 371
- открытая 1, 371
- равномерная 1, 371; 3, 657
- равномерности 4, 795
- расслоения 1, 637; 4, 893
- регулярная 1, 372; 3, 657
- решеточная 1, 372
- топологии 1, 371
- m-точечная 1, 371
- n-m-точечная 1, 371
- точечно конечная 1, 371
- точечно счетная 1, 371
- σ-точечно конечная 1, 371
- точки 1, 371
- фильтра 5, 615
n-база 1, 372, 3, 835
Базис 1, 372—378; 4, 101
- абелева дифференциала 1, 13
- абсолютно суммирующий 1, 377
- абсолютный 1, 377
- алгебраический 1, 374
- алгебры 1, 374, 2, 1022
- - кватернионов 1, 372
- асимптотический 1, 335
- аффинный 1, 358
- банахова пространства 1, 392
- бар-индукции 1, 393
- безусловный 1, 377, 392; 4, 101
- булевой алгебры 1, 373
- векторного пространства 1, 374, 643
- векторный 1, 633
- вершины многогранного множества 4, 1152
- вполне суммирующий 1, 377
- Гамеля (Хамеля) 1, 375
-, Гильберта теорема 1, 971
- двойственный 2, 49
-, дискриминант 2, 210
- дифференциальной сепарабельности 4, 825
- дуальный 2, 49
- идеала 2, 482
- индукции 2, 558; 3, 564
- Картана 3, 273
- Картана — Вейля 2, 740
- Картана — Серра 5, 228
-, квазиэквивалентность 1, 377
-, компоненты 1, 374
-, координаты 1, 374
- корневой системы 3, 17
- многообразия 1, 186
- модуля 1, 374
- натурального ряда 1, 372
- натягивающий 1, 378
- обобщенный 1, 374
- ограниченно полный 1, 378
- ортогональный 4, 85, 99
- ортонормированный 1, 492, 634, 981; 4, 85, 99
- *G*-ортонормированный 4, 719
- *J*-ортонормированный 1, 986
- периодов 1, 374; 2, 50
- - абелевой функции 1, 22
- почти периодической функции 1, 375
- простой 3, 718
- Рисса 4, 1035, 1038
- свободный 1, 373
- сепарирующий 5, 426
- слабый суммирующий 1, 377
- - счетный 1, 376
- стохастический 5, 240
- суммирования 1, 392
- суммирующий 1, 377
- счетного типа 1, 376
- счетный 1, 376
- тождеств алгебраической системы 1, 186
- топологии 1, 371, 373
- топологический 1, 375
- трансцендентности 5, 425
- - дифференциальный 4, 825
- условный 1, 392
- фильтра 1, 373
- циклов в графе 1, 1110
- Шаудера 1, 377, 492
- Шевалле 3, 274
- Шура 2, 689
-, эквивалентность 1, 377
T-базис 1, 392
Базиса проблема 1, 376, 392
Базисная размерность 1, 373
- частота 2, 338
Базисное логическое исчисление 3, 412
Базисное множество 1, 378
- отображение 1, 374, 375
- пространство схемы 5, 299
Базисный инвариант 2, 542
Базисный коммутатор 1, 379
- минор системы линейных уравнений 3, 357
- ранг 3, 902
- - алгебраической системы 4, 858
Базовый оператор 1, 224
Баланс межотраслевой 3, 586
Баланса метод 4, 845
- условие 5, 420
Балансовых множителей метод 4, 251
Банаха индикатриса 1, 379, 606
- система 3, 183
- теорема о гомеоморфизме 4, 142
- - о гомоморфизме 5, 384
- - о линейных операторах 3, 372
- - об изоморфизме 3, 1134
- - об обратном операторе 1, 389
Банаха — Алаоглу теорема о полярах 4, 476
Банаха — Гротендика теорема о локально выпуклых пространствах 5, 383
Банаха — Зарецкого теорема о *N*-свойстве функции 3, 458
Банаха — Мазура оператор 1, 379
- - теорема о метрических пространствах 3, 671
Банаха — Мазура функционал 1, 379
Банаха — Стоуна теорема об изометрии банаховых пространств 1, 390
Банаха — Штейнхауза теорема о линейных операторах 1, 389; 3, 372
Банаха — Штейнхауза теорема о пространствах линейных отображений 1, 380
Банахов модуль 1, 381
- - проективный 1, 381
Банахова алгебра 1, 381
- - вполне симметричная 1, 383
- -, группа когомологий 2, 915
- - коммутативная 1, 381, 2, 984
- - Ли 3, 250
- - с инволюцией 1, 383
- - - -, эрмитов элемент 1, 384
Банахова группа Ли 3, 250
- пара 2, 628
Банахова решетка 1, 384
- - ограниченных элементов 1, 385
Банахова симметричная алгебра 4, 1149
- структура 1, 384
Банахово аналитическое многообразие 1, 385
- - множество 1, 385
Банахово аналитическое пространство 1, 385
- многообразие 2, 357

Банахово пространство 1, 386; 3, 1047
- -, аналитическое отображение 1, 274
- -, базис 1, 392
- -, базис суммирования 1, 392
- -, Банаха теорема 1, 389
- -, Банаха — Стоуна теорема 1, 390
- -, Банаха — Штейнхауза теорема 1, 389
- - гладкое 1, 389
- -, Дворецкого — Роджерса теорема 1, 391
- - идеальное 2, 629
- -, качественная теория дифференциальных уравнений 2, 771
- - квазирефлексивное 1, 388
- - конечномерное 1, 391
- -, конус 1, 586; 2, 1075
- -, линейно топологические свойства 1, 390
- - локально равномерно выпуклое 1, 389
- -, проблема базиса 1, 392
- - промежуточное 2, 628
- - равномерно выпуклое 1, 389
- - - гладкое 1, 389
- - рефлексивное 1, 388
- - слабо полное 1, 389
- - строго нормированное 1, 389
- -, Эберлейна — Шмульяна теорема 1, 388

Банга — Мандельбройта условие 2, 799

Барбашина — Красовского теорема об асимптотической устойчивости 1, 65

Барбье теорема о кривых постоянной ширины 1, 392

Бар-индукция 1, 393

Барицентр 1, 393

Барицентрические координаты 1, 393, 2, 996, 4, 1152, 1160

Барицентрическое измельчение 4, 1160

Барицентрическое подразделение 1, 394, 4, 380, 1160

Баркан формула 3, 764

Бар-конструкция 5, 167

Барометрическая формула 1, 519

Барсотти — Тейта группа 2, 82

Бартлетта критерий 1, 394

Барьер 1, 394, 395, 1031
- задерживающий 5, 12
- поглощающий 5, 12
- фильтра 4, 533

Барьера критерий Лебега 4, 933

Барьерный метод вращений 1, 766

Басса теорема о кручении Рейдемейстера 4, 954

Башня полей 1, 395

Бегущей волны метод 1, 396

Бееике — Зоммера теорема для голоморфных функций 3, 990

Бееике — Штейна теорема об областях голоморфности 1, 396, 1031

Безгранично делимая случайная величина 1, 397
- - характеристическая функция 1, 397

Безгранично делимое распределение 1, 397—399
- - -, область частичного притяжения 5, 836

Безгранично делимых распределений разложение 1, 399

Безиковича почти периодические функции 1, 400
- расстояние 3, 1119

Безмоментная теория оболочек 3, 1128

Безотказность 3, 854

Безу кольцо 1, 400

Безу теорема для многочленов 1, 400
- - для систем уравнений 1, 401
- - о гиперповерхностях 4, 254
- - о неприводимых кривых 4, 309

Безусловная суммируемость 1, 401

Безусловная сходимость 1, 401
- - ряда 5, 549

Безусловный базис 1, 377, 392; 4, 101
- эксперимент 3, 860; 5, 342

Бейеса формула 1, 402

Бейесовская оценка 1, 402

Бейесовская решающая функция 1, 403

Бейесовский подход к статистическим задачам 1, 403

Бейесовский подход эмпирический 1, 404—406
- риск 1, 403

Бейесовское решающее правило 5, 192
- решение оптимальное 4, 508

Бейтмена метод 1, 406

Бейтмена функция 1, 406

Беллмана уравнение 1, 407, 585
- функция 4, 43

Беллмана — Харриса процесс 1, 407

Белый шум 1, 407

Бельтрами дифференциальный параметр 2, 350; 3, 205, 206

Бельтрами интерпретация 1, 408

Бельтрами координаты 1, 409

Бельтрами метод 1, 409
- теорема в римановой геометрии 2, 67
- - о линейчатых поверхностях 3, 380

Бельтрами уравнение 1, 409, 2, 810; 3, 205, 1101

Бельтрами — Клейна интерпретация 3, 403

Бельтрами — Эннепера теорема об асимптотических линиях 1, 332, 409

Бемольная коцепь 1, 410; 2, 133

Бемольная норма 1, 409

Бемольная форма 1, 410
- цепь 1, 409; 2, 133

Бендиксона критерий 1, 411

Бендиксона преобразование 1, 411

Бендиксона сфера 1, 412
- уравнение простое 5, 670
- формула 4, 1106

Бергмана кернфункция 1, 412
- метрика 1, 413; 3, 1172
- теорема о свободных алгебрах 4, 1081
- - о централизаторе 1, 342

Бергмана — Вейля интеграл 1, 414

Бергмана — Вейля представление 1, 413
- - формула 1, 413

Берег разреза 4, 848

Березиниан 5, 278

Беренса — Фишера проблема 1, 414

Бёркиля интеграл 1, 415

Бёркиля — Колмогорова интеграл 1, 416

Бернайса лемма в исчислении предикатов 1, 910
- - в комбинаторике 2, 978

Бернара тензор 5, 250

Бёрнсайда проблема о конечных группах 1, 416
- - о периодических группах 1, 416
- георема о конечных группах 3, 1064
- - об алгебре матриц 3, 612

Бернсайдово многообразие 1, 1137

Бёрнсайдовского типа проблемы для нильалгебр 3, 901

Бернулли автоморфизм 1, 418

Бернулли блуждание 1, 418—421

Бернулли интеграл 1, 421

Бернулли испытания 1, 421

Бернулли лемниската 1, 422

Бернулли метод 1, 423

Бернулли многочлены 1, 423

Бернулли распределение 1, 424, 489

Бернулли схема 1, 424

Бернулли теорема в теории вероятностей 1, 424
- топологический автоморфизм 4, 1136

Бернулли уравнение 1, 425

Бернулли числа 1, 425

Бернуллиевская система 4, 1195

Бернштейна интерполяционный процесс 1, 426
- квазианалитический класс функций 2, 799

Бернштейна метод 1, 427—429

Бернштейна многочлены 1, 429
- множество 3, 919

Бернштейна неравенство в теории вероятностей 1, 429
- - в теории приближений 1, 430
- проблема о минимальных поверхностях 4, 306

Бернштейна теорема о минимальных поверхностях 1, 430
- - об эквивалентности множеств 2, 715
- формула для алефов 1, 235

Бернштейна — Рогозинского метод суммирования 1, 431

Бертини инволюция 3, 95

Бертини теоремы об алгебраических многообразиях 1, 431

Бертрана задача 1, 301, 432

Бертрана кривые 1, 432
- пара 1, 432

Бертрана парадокс 1, 432

Бертрана постулат 1, 433; 4, 877; 5, 846

Бертрана признак сходимости числовых рядов 1, 433

Бесквантерное логико-математическое исчисление 3, 412

Бескоалиционная игра 1, 433; 2, 471
- -, квазиинформационное расширение 2, 807
- неатомическая игра 3, 903

Бесконечная выпуклая поверхность 1, 788
- группа подстановок 4, 382
- -, представление 4, 585

Бесконечная десятичная дробь 1, 434; 2, 98

Бесконечная игра 1, 434

Бесконечная индукция 1, 434
- -, конструктивное правило 1, 435
- область 3, 1098
- сумма 4, 1063

Бесконечно большая переменная величина 1, 456
- - числовая последовательность 4, 557

Бесконечно большая функция 1, 435
- малая переменная величина 1, 456

Бесконечно малая, порядок 4, 504
- - числовая последовательность 4, 557

Бесконечно малая функция 1, 435; 4, 498, 559

Бесконечно малое изгибание 1, 435—437
- - - жесткое 1, 436
- - - тривиальное 1, 436

Бесконечно малых исчисление 1, 437—442

Бесконечно удаленная гиперплоскость 1, 443
- - особая точка 1, 253; 4, 749
- - плоскость 1, 443
- - прямая 1, 443
- - точка 1, 443, 456; 2, 484

Бесконечно удаленные элементы 1, 442—444, 456

Бесконечного порядка дифференциальный оператор 2, 346
- - системы дифференциальных уравнений 2, 336
- - точка ветвления 1, 680

Бесконечного порядка уравнение 1, 444
- представленческого типа алгебра 4, 585
- типа множество 1, 945
- - целая функция 5, 798

Бесконечное произведение 1, 444—446
- - абсолютно сходящееся 1, 445
- - Вейерштрасса 1, 869
- -, Вейерштрасса теорема 1, 616
- -, значение 1, 445
- - равномерно сходящееся 1, 445
- - сходящееся 1, 444
- расширение 4, 909

Бесконечной высоты элемент абелевой группы 1, 18

Бесконечной индукции правило 1, 921; 2, 728

Бесконечномерная сфера 5, 289

Бесконечномерное векторное пространство 1, 643
- канторово многообразие 2, 717
- многообразие 3, 743

Бесконечномерное представление 1, 446—452
- -, спектральный анализ 1, 451

Бесконечномерное пространство 1, 452—455; 5, 706

Бесконечномерный анализ 5, 385

Бесконечномерный бикомпакт 1, 454
- комплекс 2, 995
- шар 5, 882

Бесконечноместная операция 1, 149

Бесконечносвязная область 1, 455; 3, 748, 1098

Бесконечности аксиома 1, 106, 455; 3, 415; 5, 352

Бесконечность 1, 455—458
- актуальная 1, 43, 44
- потенциальная 1, 44, 45

Бесконечный автомат 1, 48
- геометрический комплекс 1, 933
- латинский квадрат 3, 208
- многоугольник 3, 749

Бесконтекстная грамматика 1, 1087

Бесконтекстные правила 1, 1087

Бесконтекстный язык 1, 1087
- - детерминированный 1, 1088
- - неоднозначный 1, 1088
- - однозначный 1, 1088

Бесповторная формула 3, 716

Беспорядок 2, 545

Бесселев потенциал 1, 458

Бесселева система 1, 458
- функция 1, 460; 5, 820
- мнимого аргумента 1, 461; 3, 476

Бесселево ядро 1, 458

Бесселя интегральное представление 5, 822

Бесселя интерполяционная формула 1, 459

Бесселя неравенство 1, 459; 4, 101
- общее уравнение 1, 462
- сферическая функция 5, 822
- тождество 1, 459

Бесселя уравнение 1, 460—462
- -, индекс 1, 460
- - неоднородное 1, 461
- -, приведенная форма 1, 460

Бесселя функции 1, 462

Бесследный тензор 4, 597

Бета теорема в теории моделей 3, 767

Бета-распределение 1, 463
-, плотность 1, 866

Бета-функция 1, 464
- неполная 1, 489; 3, 979

Бетти группа 1, 464

Бетти число 1, 99, 464, 627, 1044; 3, 439
- -, Александера теорема 1, 231

Биаксиальное пространство 1, 492

Биалгебра 5, 790

Бианки конгруэнция 1, 465
- первое тождество 3, 132

Бианки поверхность 1, 465

Бианки преобразование 1, 465

Бианки тождество 1, 357, 465; 3, 99, 103; 4, 997, 1007

Бибербаха гипотеза для однолистных функций 1, 466
- - локальная 1, 466

Бибербаха многочлены 1, 467
- неравенство 2, 513
- свойство для групп Ли 2, 201

Бибербаха — Эйленберга функции 1, 467

Библиотека подпрограмм 5, 167

Бивектор 1, 468
-, координаты 1, 469
- свободный 1, 469

Бивекторное пространство 1, 469

Бигармоническая функция 1, 470

Бигармоническое уравнение 1, 470

Биголоморфное отображение 1, 268, 471
Биективное отображение 1, 471; 3, 760; 5, 714
Биективный морфизм 1, 485
Биекция 1, 471; 3, 760
Биение 1, 578; 4, 1085
Биений режим 1, 786
Бинвариантная метрика 5, 625
Бикасательная 4, 333
Бикатегория 1, 471
Биквадратичный вычет 1, 814; 5, 153, 217
- невычет 5, 217
Биквадратное уравнение 1, 471
Бикомпакт 1, 472, 473; 5, 392
- бесконечномерный 1, 454
- диадический 1, 475; 2, 126
- совершенно нормальный 1, 475
- стоуновский 1, 552
- упорядоченный 1, 475
- экстремально несвязный 4, 143
Бикомпактификация 1, 472, 477
Бикомпактная группа, представление 4, 585
Бикомпактно открытая топология 1, 472
Бикомпактное отображение 1, 472; 4, 155
- - открытое 4, 142
- произведение, Тихонова теорема 5, 355
Бикомпактное пространство 1, 473—477; 4, 393
- - локальное 3, 426
- -, Тихонова теорема 1, 473
Бикомпактное расширение 1, 477—481; 4, 909
- - Александрова 1, 233
- - александровское 5, 393
- - максимальное 1, 477
- - одноточечное 5, 393
- - Стоуна — Чеха 5, 234
- - Уолмена 5, 520
- - уолменовского типа 1, 479
- - Фрейденталя 5, 662
- -, эквивалентность 1, 477
Бикомпактности условие 5, 392
Бикомпактность 1, 473, 481
Бикомплекс 1, 481
Бикруг 1, 500
Билинейная интегральная форма 1, 482
- метрика, пространство 4, 717
Билинейная форма 1, 482
- -, автоморфизм 1, 482
- - анизотропная 1, 713
- - антисимметрическая 1, 482; 3, 41
- - знакопеременная 1, 482
- - изометричная 1, 482
- -, изометрия 1, 482
- -, индекс инерции 2, 563
- - кососимметрическая 1, 482; 3, 41
- - неособая 1, 483
- - определенная 1, 713
- - особая 1, 483
- - отрицательно определенная 2, 563
- -, ранг 1, 483, 4, 859
- -, сигнатура 2, 563
- - симметрическая 1, 482
- - ядерная 5, 1029
- -, ядро 1, 483
- функция 1, 484
Билинейное отображение 1, 484
- - вырожденное 1, 484
- -, матрица 1, 484
- - невырожденное 1, 484
- -, прямая сумма 1, 484
- соотношение Римана 1, 13; 4, 995
Билинейный дифференциал 1, 485
- ряд ядра 2, 596
Билинейный функционал 1, 485
Биматричная игра 1, 485; 2, 471
Бимероморфное отображение 3, 651
Бимодальное распределение 1, 485; 3, 763
Бимодуль 1, 485
Биморфизм 1, 485
Бинарная p-адическая группа 1, 486
Бинарная квадратичная форма 1, 486
- - -, дискриминант 1, 486
- - -, Зигеля теорема 1, 487
- - -, определитель 1, 486
- операция 1, 149; 4, 18
- проблема в теории чисел 1, 93
Бинарная форма 1, 487; 5, 634
- -, степень 1, 487
Бинарно лиева алгебра 1, 488
Бинарное отношение 1, 488; 4, 151
- - антисимметричное 1, 488
- -, вычислимый инвариант 1, 821
- - обратное 1, 488
- - рефлексивное 1, 488
- - симметричное 1, 488
- - транзитивное 1, 488
- - функциональное 1, 489
- поле 3, 1044
Бинга критерий для метризуемых пространств 3, 657
Бине формула 5, 613
Бине — Коши формула для определителей 4, 31
Бином 1, 489
- дифференциальный 2, 343
- Ньютона 2, 974; 3, 1089
Биномиальное распределение 1, 489
Биномиальные коэффициенты 1, 490; 2, 974
Биномиальный ряд 1, 491
Бинормаль 1, 491; 2, 250
Биортогональная система 1, 392, 491, 644
Бипланарная геометрия 1, 492
Бипланарное пространство 1, 492
Биполяра 4, 476
Биполярные координаты 1, 492
Бипростая полугруппа 4, 702
Биразмерность алгебры 1, 1054
Бирациональная геометрия 1, 493
Бирационально изоморфные схемы 1, 494
- эквивалентные кривые 4, 309
- - схемы 1, 494
Бирациональное отображение 1, 494; 4, 309, 920
Бирациональное преобразование 1, 494
- соответствие, Зариского теорема 2, 444
Бирациональный автоморфизм 1, 494
- изоморфизм 1, 494
- инвариант 1, 493
Бирациональный морфизм 1, 494
Бирегулярное кольцо 4, 940
Биркгофа теорема для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 3, 499
- - о рекуррентных точках 4, 954
- - о Ω-системах 1, 159, 185
Биркгофа эргодическая теорема 1, 495
Биркгофа — Витта теорема об алгебрах Ли 1, 495
Биркгофа — Тарского принцип 3, 978
Биркгофа — Фринка теорема о решетках 4, 982
Биркгофа — Хинчина эргодическая теорема 5, 210
Бисвязное пространство 1, 496
Бисдвиг полугрупп 4, 1100
Биссектор 1, 496
Биссекторная плоскость 1, 496
Биссектриса 1, 496
Бисферические координаты 1, 492
Бит 1, 496
Битензор 1, 469
Биупорядоченное множество 4, 935
Бифакторное отображение 1, 496
Бифунктор 1, 496; 5, 685
Бифуркационное значение 1, 497
- множество 5, 361
Бифуркация 1, 496—498
Бихарактеристика 1, 498
Бихроматический граф 1, 1108
Бицадзе задача 5, 39
- общая смешанная задача 5, 46
- принцип экстремума 5, 46
Бицадзе уравнение 1, 499
Бициклическая полугруппа 1, 499
Бицилиндр 1, 500
Бицилиндрика 1, 500
Бицилиндрическая область 1, 500
Бицилиндрические координаты 1, 500
Бишопа теорема о продолжении 4, 662
Биэдр 4, 74
Бланчфилда форма 5, 489
Близкая к выпуклой функция 1, 795
Близкие множества 1, 500
Близкое к разрывному периодическое решение 4, 967
Близнецов парадокс 4, 150
- проблема 1, 500
Близнецы 1, 500
-, Бруна теорема 1, 549
Близости пространство 1, 500—504
- -, метризуемость 1, 501
- -, поправление 1, 503
- - правильное 1, 503
- -, равномерное покрытие 1, 502
- - Стоуна — Чеха 1, 501
Близостная структура 1, 500
Близостное произведение 1, 503
Близость 1, 500, 504
- Лодато 1, 501
- нормальная 1, 501
- Федорчука 1, 501
- хаусдорфова 1, 501
Блихфельдта теорема о решетках 1, 946
Блок 1, 504; 5, 412
- выборочный 1, 776
Блоковый код 2, 931
Блок-схема 1, 504
-, матрица инцидентности 1, 505
- с делимостью на группы 1, 506
- симметричная 1, 506
-, схема связанности 1, 505
- типа латинского квадрата 1, 506
- треугольная 1, 506
- уравновешенная неполная 1, 505
- циклическая 1, 506
- частично уравновешенная 1, 505
Блотто игры 1, 506
Блоха константа 1, 506
- теорема о голоморфных функциях 1, 506
Блуждание Бернулли 1, 418
- симметричное 5, 12
- случайное 5, 12
Блуждающая точка 1, 507
Блуждающее множество 1, 507
Блуждающей трубки метод 1, 507
Блэкуэлла теорема в теории статистического оценивания 5, 196
Бляшке множитель 1, 508
- принцип компактности 1, 509
Бляшке произведение 1, 508
Бляшке сумма 4, 1213
Бляшке теорема выбора 1, 509
- - о голоморфной функции 1, 509
- функция 1, 508
Бляшке — Вейля формула 1, 509
Боголюбова неравенство в статистической механике 1, 509
- - для корреляционной функции 1, 510
- - для функции Грина 1, 510
- - для функционала свободной энергии 1, 509
Боголюбова теорема об особенностях типа $1/q^2$ 1, 511
Боголюбова теорема «острие клина» 1, 511
Боголюбова цепочка уравнений 1, 512
Боголюбова — Парасюка теорема о перенормировке 4, 244
Бозе система 1, 514
- статистика 1, 514
Бозе — Эйнштейна статистика 1, 514
Бозон 5, 632
Бозонное пространство Фока 5, 631
Боковая грань призмы 4, 633
- поверхность конуса 2, 1074
- - цилиндра 5, 818
- сторона трапеции 5, 428
Бокса интеграл 1, 515
Бокштейна гомоморфизм 2, 923
Больца задача 1, 516
Больцано — Вейерштрасса принцип выбора 1, 516
- - теорема 2, 991
Больцано — Вейерштрасса теорема в теории пределов 1, 517
- - условие 4, 1104
Больцмана линеаризированное уравнение 1, 517
Больцмана распределение 1, 518
Больцмана статистика 1, 520
Больцмана H-теорема 1, 521
Больцмана уравнение 1, 521
Большая индуктивная размерность 2, 556; 4, 821
- ось эллипса 5, 978
- посылка 3, 790
Большая система 1, 522; 4, 1214
- статистическая сумма 5, 179
- теорема Пикара об аналитических функциях 4, 285
- - Ферма 5, 605
Больших отклонений вероятности 1, 522
Больших чисел закон 1, 522—526; 4, 572
Больших чисел усиленный закон 1, 527—529
- - - Бореля 1, 539
Большого размаха функция 3, 1058
- решета метод 1, 260
Большое каноническое распределение Гиббса 1, 957
Большое решето 1, 530
Большой канонический ансамбль 5, 200
- - - Гиббса 5, 179
- круг 4, 667; 5, 290
- подмодуль 4, 372
- статистический ансамбль Гиббса 1, 958
Боля почти периодические функции 1, 530
- теорема об устойчивости 5, 575
Бомбьери — Кодаиры теорема об алгебраических поверхностях 4, 113
Бонне поверхность 5, 923
Бонне сеть 1, 531
Бонне теорема в теории поверхностей 1, 531; 2, 253, 785; 3, 380
- - о среднем значении 1, 531
- формула среднего значения 4, 993
Боннезена неравенство 1, 531
Бора компакт 1, 531
- неравенство 5, 585
Бора почти периодические функции 1, 532
- пространство 1, 387
Бора — Фавара неравенство 1, 532
Бордантность 1, 532
(β, φ)-бордантность 2, 889
Бордизм 1, 532—535
- неориентированный 1, 533
- ориентированный 1, 533
-, разложение на ручки 4, 1059
- сингулярный 4, 304
- слоений 1, 534
- узлов 5, 482
- унитарный 1, 534
h-бордизм 1, 534
Борелевская алгебра 1, 536
- σ-алгебра 1, 130
- иерархия 2, 490
- подалгебра 1, 538; 3, 279
- подгруппа 1, 538; 3, 280
Борелевская система множеств 1, 535
- структура Макки 3, 477
Борелевская функция 1, 535
Борелевский изоморфизм 1, 535

Борелевских множеств критерий 1, 535
Борелевское множество 1, 130, 536; 2, 93
- - двустороннее 2, 58
- -, Лузина критерий 1, 535
- -, Суслина критерий 1, 535
Борелевское поле множеств 1, 536
Борелевское поле событий 1, 535
- тело множеств 1, 536
Бореля исключительное значение 2, 674
Бореля лемма о покрытии 1, 540
Бореля мера 1, 536
- - τ-гладкая 1, 537
- - на прямой 1, 537
- - плотная 1, 537
Бореля метод суммирования 1, 537
- подалгебра 1, 538; 4, 192
Бореля подгруппа 1, 538
- представление обобщенное 5, 160
Бореля преобразование 1, 538
- теорема о группах Вейля 5, 761
Бореля теорема о неподвижной точке 1, 539
- - о распределении дробных долей 3, 663
- - плотности 2, 201
- - трансгрессии 5, 416
Бореля усиленный закон больших чисел 1, 539
Бореля — Кантелли лемма для случайных событий 1, 539
Бореля — Лебега теорема о покрытии 1, 540
- - условие 5, 392
Бореля — Морозова теорема для алгебраических групп 1, 539
Бореля — Помпею формула 3, 55
Борнологическое пространство 5, 494
- - локально выпуклое 5, 381
Борсука пара 3, 14
Борсука проблема в комбинаторной геометрии 1, 540
- теорема об антиподах 1, 297
Ботта теорема о спектрах пространств 5, 103
- - периодичности в K-теории 1, 541
- - - в теории Морса 3, 829
Боуза — Чоудхури — Хоквингема код 2, 932
Бохнера интеграл 1, 541
Бохнера почти периодические функции 1, 542
- преобразование 2, 589
- теорема о положительно определенной функции 4, 432
- - - - обобщенная 1, 882
- - о характеристических функциях 5, 757
Бохнера — Мартинелли интеграл 1, 543
Бохнера — Мартинелли представление 1, 542
Бохнера — Хинчина теорема о положительно определенных функциях 5, 739
Бочечное пространство 1, 544
Бочка 1, 544; 2, 661
Браве подгруппа 3, 108
- решетка 3, 110
- типы 3, 106
Брандта группоид 1, 544
Брандта полугруппа 1, 544
Брауна теорема об изотопии 2, 520
Брауна — Маккоя радикал 4, 807
Брауна — Робинсона метод для матричных игр 3, 619
Брауэра аксиома в теории размерности 4, 824
- алгебра 1, 546; 4, 726
Брауэра группа 1, 544—546; 2, 911
- -, Тзена теорема 1, 545
- принцип непрерывности 2, 642
- пространство 4, 533
Брауэра решетка 1, 546
- свойство сходимости 4, 532
- степень 5, 222
- структура 1, 546
- теорема об инвариантности области 1, 546
- - о веере 1, 613
Брауэра теорема о неподвижной точке 1, 546, 1049; 4, 976
- характер 2, 1021
Брауэра — Гротендика группа 1, 546
Брауэра — Зигеля теорема о квадратичных полях 2, 783
Брауэра — Лебега теорема о размерности 4, 826
Брауэра — Севери многообразие 1, 546
- - схема 1, 547
Брауэра — Трэлла проблема о представлениях 4, 585
Брауэра — Урысона теорема о непрерывном продолжении 4, 661
Брауэра — Хопфа теорема о гомотопических группах 5, 283
Брауэровское понимание принципа выводимости 1, 779
Брахистохрона 1, 548
Бреймана эргодическая теорема 5, 1007
Брело пространство 4, 533
- свойство сходимости 4, 532
- теорема о разрешимых функциях 4, 275
Брианшона теорема о шестисторонниках 1, 548
- точка 1, 548
- шестисторонник 1, 548
Брианшона — Паскаля конфигурация 2, 1078
Брио — Буке уравнение 1, 548
Брискорна группа 3, 36
Броуновского движения процесс 1, 548; 4, 77
Бруна решето 1, 549
Бруна теорема о близнецах 1, 549
Брунна — Минковского теорема о выпуклых множествах 1, 549
- - - - параллельных линиях 4, 209
Брунново зацепление 5, 484
Брушлинского — Эйленберга теорема о компактах 2, 985
Брюа разложение 1, 549
Бубнова — Галеркина метод 1, 550, 842
Буква 1, 550; 2, 1043
- предикатная 4, 577
Булеан 1, 373
Булева алгебра 1, 550—553
- -, базис 1, 373
- -, вес 1, 552
- - нормированная 1, 552; 5, 20
- - однородная 1, 552
- - полная 1, 552
- - свободная 1, 552; 4, 1081
- -, Стоуна теорема 1, 552
- матрица 1, 554
операция 1, 551
решетка 1, 550
Булева функция 1, 553
- -, граф 1, 557
- -, дизъюнктивная нормальная форма 1, 563
- -, конъюнктивная нормальная форма 1, 563
- -, кратчайшая форма 1, 559
- -, минимальная форма 1, 559
- - монотонная 1, 557; 3, 812
- -, протяженность 1, 556
- -, разброс 1, 565
- -, размерность 1, 556
- -, расшифровка 1, 558
- -, сложность нормальной формы 1, 559
- - случайная 1, 1111
- -, способ задания 1, 553
- -, цепь 1, 556
- -, цикл 1, 557
Булево кольцо 1, 554
- программирование 2, 678
Булево уравнение 1, 553, 554
Булевозначная модель 1, 554—556
Булево-универсальная формула 1, 185
Булевых функций метрическая теория 1, 556—558
Булевых функций минимизация 1, 558—563
Булевых функций нормальные формы 1, 563—565
Бумага вероятностная 1, 665
Буняковского неравенство 1, 565
Бура теорема о винтовой поверхности 1, 706
Бурали — Форти парадокс 1, 295
Бурау представление 3, 34
Бурже функция 1, 565
Буркхольдера неравенства для мартингалов 3, 533
Бута лемниската 1, 566
Бутылка Клейна 2, 873
Бушевание 1, 566
Бушевания многообразие 1, 566
Бушующая система 1, 566
Былова теорема о центральных показателях 5, 810
Быстрого дискретного преобразования Фурье метод 3, 697
Быстродействие игры преследования 4, 602
Быстродействия задача 4, 43
Быстродействующих регуляторов синтез 1, 65
Быстрое время 3, 501
- движение 3, 500
Бьенеме — Чебышева неравенство 5, 842
Бьерлинга задача о минимальных поверхностях 1, 567
Бэра классификация 1, 567
Бэра классы 1, 567; 2, 93
- -, Лебега теорема 1, 535
- критерий для модулей 2, 664
- мера 1, 537
- - плотная 1, 537
Бэра множество 1, 568
- нижний радикал 4, 807
- произведение 1, 569
Бэра пространство 1, 568
- свойство метризуемых пространств 3, 657
Бэра свойство множества 1, 568
Бэра теорема о полных пространствах 1, 568
- - о полунепрерывных функциях 1, 568
- - о разрывных функциях 1, 568
Бэра умножение 1, 569
- функция 1, 567
Бэра — Леви полугруппа 4, 703
Бэровская мера 3, 643
- полугруппа 4, 982
- функция 1, 535, 567
Бэровское кольцо 4, 940
- $*$-кольцо 4, 986
Бэрри — Эссеена неравенство 1; 569; 5, 820
Бюдана — Фурье теорема об алгебраических уравнениях 1, 570
Бюджетное множество 3, 587
Бюргерса вектор 3, 131
Бюрмана теорема о голоморфных функциях 1, 570
Бюрмана — Лагранжа ряд 1, 570
Бюффона задача об игле 1, 571

B

Вагнера — Престона теорема о полугруппах 2, 546
Вакуум 2, 831
Вакуумный вектор 5, 632
Валентность ковариантная 5, 326
- контравариантная 5, 326
- общая 5, 326
Валирона дефект 2, 100; 4, 888
- исключительное значение 2, 675
Валле Пуссена метод суммирования 1, 573
Валле Пуссена многоточечная задача 1, 573
Валле Пуссена признак 1, 574
Валле Пуссена производная 1, 574
Валле Пуссена сингулярный интеграл 1, 575
Валле Пуссена сумма 1, 575
- - теорема о наилучшем приближении функции 3, 871
Валле Пуссена теорема о простых числах 1, 576
- - - об альтернансе 1, 576
- - формула 2, 180
- - - для задачи Дирихле 1, 782
- - ядро 1, 573, 575
Валлиса формула 1, 576
Вальда редукция 3, 874
Вальда тождество 1, 576
Валюативный критерий полноты 4, 423
дю Валя особенность 4, 119
Ван дер Вардена гипотеза о перманентах 4, 273
Ван дер Вардена критерий 1, 577
- спинор 2, 176
Ван дер Поля уравнение 1, 577
Вана теорема максимальности 2, 201
Вандермонда определитель 1, 578
- узел 5, 422
Вандивера признак для регулярных простых чисел 2, 668
Варда теорема о дифференцировании 1, 578
Вариации коэффициент 1, 579
- параметра метод 4, 211
- постоянных метод 2, 440
Вариации среднего значения теорема в статистической механике 1, 579
Вариаций граничных метод 1, 1103
- метод 1, 581
Вариационная задача 1, 579
- - Гаусса 1, 895
- - Дирихле 2, 177
- - многомерная 3, 728
- - разрывная 4, 853
- - с частными производными 3, 728
- разностная схема 4, 831
- формула Адамара 1, 85
- - для однолистных функций 1, 737
Вариационное исчисление 1, 580—586
Вариационное исчисление в целом 1, 592—594
- -, Вейерштрасса основная теорема 1, 620
- -, Вейерштрасса условия экстремума 1, 616
- -, - формула 1, 620
- -, Гамильтона — Якоби теория 1, 857
- -, действие 1, 966
- -, Дюбуа — Реймона лемма 2, 394
- -, качественные методы 1, 585
- -, Клебша условие 2, 872
- -, Лагранжа задача 1, 582
- -, метод вариаций 1, 581
- -, многомерные задачи 1, 593
- -, одномерные задачи 1, 594
- -, Пале—Смейла условие 1, 593
- -, простейшая задача 1, 580
- -, прямые методы 1, 581
- -, связь с теоремой конусов 1, 586
- -, ε-функция 1, 620
- -, Якоби теорема 1, 858
Вариационное исчисление: численные методы 1, 586—592
Вариационно-параметрический метод 1, 594
Вариационно-разностный метод 4, 831
Вариационные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными 2, 302
Вариационные принципы в теории функций комплексного переменного 1, 595
Вариационные принципы классической механики 1, 596—603
- - механики, Журдена принцип 2, 426

Вариационный принцип Д'Аламбера — Лагранжа 2, 11
- - Владимирова 1, 719
- - Гамильтона — Остроградского 1, 856
- - Гаусса 1, 900
- - Герца 1, 954
Вариационный ряд 1, 603; 4, 499
Вариация 1, 603
- Адамара 4, 218
- аргумента 1, 604
- Арцела 1, 330
- Витали 1, 708
- вторая 1, 769
- Гато 1, 894, 895
- заряда 5, 312
- игольчатая 1, 604; 4, 488
- конечная 1, 606
- ломаная 1, 604
Вариация множества 1, 604
- ограниченная 1, 606
Вариация однолистной функции 1, 605
Вариация отображения 1, 606
- первая 1, 608; 4, 234
- по направлениям 1, 604
- полная 4, 415
- произвольных постоянных 4, 693
- Пьерпонта 4, 777
- со скользящим режимом 1, 604
- Тонелли плоская 5, 363
- Фреше 5, 664
Вариация функции 1, 606—608; 4, 161
- Харди 5, 768
- - полная 1, 35
- - положительная 4, 430
Вариация функционала 1, 608
Ф-вариация 1, 607
Варинга проблема в теории чисел 1, 609
- теорема о сравнениях 1, 191
Вариньона теорема в механике 1, 610
Варма преобразование 3, 633
Варшамова — Гилберта оценка 2, 932
Ватсона метод 2, 233
Ватсона преобразование 1, 610
Введения отрицания правило 4, 631
- дизъюнкции правило 1, 781
Введения параметра метод 1, 610; 3, 175
- правило 1, 919
Вебба функция 3, 717
Вебера преобразование 2, 589
Вебера уравнение 1, 611
Вебера функция 1, 612; 4, 200
Вебера — Эрмита функции 1, 612; 4, 200
Веддерберна теорема об алгебрах 2, 1022
- - об ассоциативных алгебрах 1, 341
- - о телах 1, 341
Веддерберна — Артина теорема об артиновых кольцах 1, 612, 3, 612
Веддерберна — Мальцева теорема об ассоциативных алгебрах 1, 612
Ведущее собственное значение 4, 434
Ведущий модуль 2, 192
- - группы классов 1, 167
- - квазихарактера 2, 827
Веер 1, 613
- Кпастера — Куратовского 1, 760; 3, 151
Веерное произведение 1, 613
Вейбулла вероятностная бумага 1, 614
Вейбулла распределение 1, 614
Вейерштрасса аксиома непрерывности 3, 990
- бесконечное произведение 1, 869
- вторая теорема о непрерывности функций 3, 984
- знак 1, 622
- каноническое произведение 2, 713
Вейерштрасса кольцо 1, 614
Вейерштрасса координаты 1, 615
Вейерштрасса критерий минимальной поверхности 1, 615
- недифференцируемая функция 3, 909
- необходимое условие экстремума 4, 52
- нормальная форма эллиптического интеграла 5, 989
- первая теорема о непрерывности функций 3, 984
- первичный множитель 1, 616; 2, 714
- подготовительная теорема для формальных степенных рядов 5, 643
преобразование 1, 899; 2, 589
- примарный множитель 1, 616; 2, 714
Вейерштрасса признак равномерной сходимости 1, 615
Вейерштрасса теорема о бесконечном произведении 1, 616
- - о мероморфных функциях 3, 648
- - о непрерывных функционалах 3, 994
- - о функциях 2, 991
- - о приближении 1, 616; 4, 615
- - о рядах аналитических функций 1, 617
- - о сходимости на границе области 1, 617
- - о целых функциях 1, 265
- - об особых точках 5, 95
- - об эллиптических функциях 5, 987
- - подготовительная 1, 617; 5, 643
Вейерштрасса точка на алгебраической кривой 1, 619
Вейерштрасса условия экстремума 1, 619
- форма уравнения Ламе 3, 189
Вейерштрасса формула для приращения функционала 1, 620
- формулы для минимальных поверхностей 3, 685
Вейерштрасса $\mathcal{E}$-функция 1, 620
Вейерштрасса $\wp$-функция 1, 621, 622
Вейерштрасса ζ-функция 1, 621, 623
Вейерштрасса σ-функция 1, 621, 623
Вейерштрасса эллиптические функции 1, 621—624
Вейерштрасса — Сохоцкого — Казорати теорема об особых точках 5, 95
Вейерштрасса — Стоуна теорема в теории приближения 1, 624
Вейерштрасса — Эрдмана угловые условия 1, 624; 4, 853
Вейерштрассов элемент 4, 114, 116, 413
Вейерштрассова область существования 4, 413
Вейлевский спектр 5, 99
Вейля алгебраических классов гомологий кольцо 1, 181
- аффинная группа 3, 17
- гипотеза 2, 120
- - о числах Тамагавы 5, 320
Вейля группа 1, 625; 3, 16; 5, 354
- - алгебраической группы 1, 625
- - алгебры Ли 1, 625
- - компактной связной группы Ли 1, 626
- - конечномерной редуктивной алгебры Ли 1, 625
- - относительная 1, 626
- - симметрий корневой системы 1, 625
- дивизор 2, 130
- интеграл 2, 384; 5, 930
- камера 1, 626
Вейля когомологии 1, 626
Вейля критерий в теории чисел 1, 627
- - для многомерных распределений дробных долей 4, 876
Вейля метод в теории чисел 1, 627—629
- множитель 4, 103
Вейля область 1, 271, 629
- относительная группа 4, 144
Вейля почти периодические функции 1, 629
- предельная точка 5, 916
- предельный круг 5, 916
Вейля проблема в геометрии 1, 629
- промежуточный якобиан 4, 697
- разложение 1, 414
- расстояние 3, 1119
Вейля связность 1, 630
- символ 4, 1134
Вейля сумма 1, 630; 5, 436
- -, Виноградова оценка 1, 704
- тензор 3, 100
- теорема о компактных группах Ли 3, 264
- уравнение 2, 176
- формула 1, 414; 5, 767
- - для характера представления 4, 597
Вейля — Шатле группа 1, 631
Вейнгартена деривационные формулы 1, 631
Вейнгартена поверхность 1, 631
Вековое уравнение 1, 632; 5, 764, 766
Вековые возмущения 2, 870
- члены 4, 952
Вектор 1, 632, 642
- аксиальный 1, 102; 4, 106
- аналитический 1, 275, 447
- аффинного пространства 1, 362
-, базис 1, 633
- Бюргерса 3, 131
- в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
- вакуумный 5, 632
-, векторное произведение 1, 635
- винта 1, 706
- - Витта 1, 710
- волновой 1, 750
- времениподобный 3, 702; 4, 149
- геодезической нормали 4, 438
- Дарбу 2, 15
-, двойное векторное произведение 1, 635
- дифференцируемый 1, 447; 2, 359
-, длина 1, 632
- допустимый 1, 207
- единичный 1, 632; 4, 79
- изотропный 2, 522; 4, 739
- информационный 1, 207
- Киллинга 2, 856
- ковариантный 2, 899, 900
-, коллинеарность 1, 632; 2, 951
-, компланарность 1, 632; 2, 994
-, компоненты 1, 633; 2, 1013
- контравариантный 2, 899, 1070
-, координаты 1, 633
- корневой 3, 20
-, косое произведение 3, 41
- Лапласа 3, 192
-, левая тройка 1, 634
-, линейная зависимость 1, 633
-, линейная комбинация 1, 643
-, линейная независимость 1, 633
-, линейные операции 1, 632
-, модуль 1, 632
-, направляющие косинусы 1, 634
- направляющий смешанный 5, 51
- невязки 4, 420
- нулевой 1, 632
-, ортогональная система 4, 85
-, ортогональность 1, 980
-, ортонормированная система 4, 85, 105
- осевой 4, 106
- ошибок 5, 408
- порядковых статистик 4, 499
-, правая тройка 1, 634
-, проекция на оси 1, 634
-, произведение на число 1, 633
- пространственноподобный 4, 149
-, псевдоскалярное произведение 1, 635
-, равенство 1, 632
-, разность 1, 633
- рангов 4, 862
- светоподобный 4, 149
- свободный 1, 632; 4, 1087
- связанный 1, 632; 4, 1089
-, скалярное произведение 1, 634
- скользящий 1, 632; 4, 1204
- случайный 5, 10
-, смешанное произведение 1, 635; 5, 48
- старший 4, 590, 596
-, сумма 1, 632
- фазовой скорости 2, 144; 5, 588
- K-финитный 1, 448
- циклический 4, 590
- частичный 2, 831
- Шепли 5, 892
p-вектор 4, 402
r-вектор 1, 732; 3, 43
s-вектор разложимый 1, 732
Векторная алгебра 1, 632—636
Векторная группа 1, 636
- дифференциальная форма 2, 264
- интерпретация комплексных чисел 2, 1009
- линия 1, 636
Векторная решетка 1, 636; 2, 14; 4, 1037
- - дистрибутивная 4, 471
- плотность 5, 330
- структура 1, 636
- сумма 4, 1212
Векторная трубка 1, 636
- -, интенсивность 1, 636
Векторная функция 1, 636, 651
- часть кватерниона 2, 838
Векторное алгебраическое расслоение 1, 637
- - - стабильное 1, 638
Векторное аналитическое расслоение 1, 639
- дифференциальное уравнение 2, 284
Векторное исчисление 1, 640
Векторное кольцо 1, 640
- подпространство 1, 643; 3, 350
Векторное поле 1, 640; 4, 475
- - аналитическое 2, 278
- -, вращение 1, 765
- - гамильтоново 4, 1156
- -, Гельмгольца теорема 1, 650
- - голоморфное 2, 278
- -, источник 2, 681
- - Киллинга 2, 856
Векторное поле на многообразии 1, 641
- -, особая точка 4, 120
- - параллельное 4, 1005
- - потенциальное 3, 202
- -, поток 4, 340, 537
- -, сток 2, 682
- -, циркуляция 5, 826
- представление 5, 139
Векторное произведение 1, 635, 642; 4, 403
Векторное пространство 1, 642—646; 3, 291
- -, аналитическое семейство 1, 640
- -, базис 1, 374, 643
- -, вещественная форма 2, 1004
- -, Витта разложение 1, 713
- -, Витта теорема 1, 714
- -, внешняя алгебра 1, 732
- -, внешняя степень 1, 732
- - вполне изотропное 2, 522
- -, гиперплоскость 1, 1008
- - двойственное 1, 644
- -, Жордана разложение 2, 421
- -, изоморфизм 1, 645
- -, клин 2, 880
- -, комплексификация 2, 1003
- -, комплексная структура 2, 1005
- -, конус 2, 880, 1074
- -, конформная структура 2, 1089
- -, линейное преобразование 1, 644
- - n-мерное 1, 644
- - над телом 1, 643
- -, прямая сумма 1, 645
- -, прямое произведение 1, 645
- -, размерность 1, 643; 4, 858
- -, ранг 4, 858
- - сопряженное 1, 644
- -, тензорное произведение 1, 646

- - топологическое 1, 646; 5, 377
- - упорядоченное 4, 470
Векторное расслоение 1, 646—648
- -, кообраз 1, 646
- -, коядро 1, 646
- -, мономорфизм 1, 646
- -, обильное 3, 1097
- -, образ 1, 646
- -, Уитни сумма 1, 647
- -, эпиморфизм 1, 646
- -, ядро 1, 646
- уравнение Лапласа 3, 203
Векторной оптимизации задача 2, 677
Векторно-матричная алгебра 3, 161
Векторно-точечная аксиоматика 1, 648
Векторный анализ 1, 648—650
- потенциал 1, 650; 4, 520
- случайный процесс 5, 23
Вектор-функций алгебра 1, 650
Вектор-функция 1, 651
-, годограф 1, 1027
-, контингенция 5, 543
Векуа метод 1, 651
Великая теорема Ферма 5, 605
Величина 1, 651—653; см. также соответствующее название
Венгерский метод 5, 420
Венкова приведение квадратичных форм 2, 789
Венна диаграмма 1, 653
Веночное произведение 5, 147
Вентцеля — Крамера — Бриллюэна метод 1, 716
Вербальная конгруэнция 1, 654
Вербальная подгруппа 1, 654
Вербальное произведение групп 1, 654
Верзиера 1, 297
Верзор 1, 654
Верификация 1, 654
Верма модуль 4, 584
Верная значащая цифра 2, 465
Веронезе линейное пространство 3, 899
- многообразие 1, 655
Веронезе отображение 1, 654
Вероятное отклонение 1, 655
Вероятностей распределение 4, 873
Вероятностей теория 1, 655—665
Вероятности интеграл 2, 566
Вероятности переходные 4, 260
Вероятности полной формула 4, 426
Вероятностная бумага 1, 665
- - Вейбулла 1, 614
- зависимость 5, 238
- машина 3, 628
Вероятностная мера 1, 665
- сетевая модель 4, 1120
Вероятностное пространство 1, 666; 3, 638
- - совершенное 1, 666
- распределение 1, 665
Вероятностный автомат 1, 51
- алгоритм 5, 458
Вероятностный процесс 1, 667; 5, 22
Вероятность 1, 657, 665, 667
- апостериорная 1, 298
- априорная 1, 311
- безотказной работы 3, 854
- безусловная 3, 914
- вырождения 1, 803
- геометрическая 1, 932
- доверительная 2, 365, 366, 615
-, классическое определение 1, 657
- накрытия 2, 365
- отказа 3, 540
- перехода 4, 259
-, поле 1, 666
-, распределение 1, 660
-, сложения теорема 1, 658
-, умножения теорема 1, 658
- условная 1, 658; 5, 548
- a posteriori 1, 298
- a priori 1, 311
Версальная деформация 2, 103; 4, 129; 5, 361
- схема 2, 105
Версальное семейство 1, 498
Версор 1, 654
Вертикаль 2, 753
Вертикальные углы 5, 467
Вертор 1, 669
Верхнее десятичное приближение 2, 98
- производное число левое 4, 690
- - - правое 4, 690
Верхней релаксации метод 4, 966
Верхний аппроксимативный предел 1, 304
- доверительный предел 2, 616; 3, 923
Верхний и нижний пределы 1, 669
- интеграл Бёркиля 1, 415
- - Дарбу 2, 17
- конус 5, 834
- нильрадикал 4, 807
- оператор Привалова 4, 629
- особый показатель 4, 132
- предел 4, 558
- - последовательности 1, 669, 670
- - спектра 4, 686
- - топологический 4, 562
- - функции 1, 670
- радикал 4, 806
- центральный показатель 5, 809
- - ряд 5, 811
- - - подгрупп 4, 367
Верхних и нижних функций метод 1, 670
Верхняя асимптотическая плотность 1, 333
- граница множества 1, 673
- грань 1, 672
Верхняя грань семейства топологий 1, 671
- - функции 5, 715
Верхняя и нижняя грани 1, 672
- квартиль 2, 837
- полуплоскость 4, 462
- - Зигеля 2, 455
- субгармоническая функция 1, 671
- супергармоническая функция 1, 671
Вершина выпуклого многогранника 1, 801
- гиперграфа 1, 1006
- графа 1, 1105
- комплекса 2, 996
- конуса 2, 1033, 1073
- многогранника 3, 708
- многогранного угла 3, 712
- многоугольника 3, 749
- овала 3, 1152
- параболы 4, 191
- сети 4, 1121
- симплекса 2, 996; 4, 1151, 1152
- угла 5, 467
Вершинная связность графа 1, 1114, 1120
Вес (весовая функция) 1, 673, 674, 676; 2, 782
- автоморфной формы 1, 79
- базы 1, 371
- булевой алгебры 1, 552
- в топологии, аддиционная теорема 1, 95
- детерминированной функции 3, 1161
- дифференциальный 2, 435; 3, 1099; 4, 93
- доминантный 4, 584
- измерения 3, 877
- интегральный 3, 1099; 4, 93
- модулярной формы 3, 786
- на алгебре Неймана 3, 921
- полуинварианта 4, 457
- представления 4, 464
Вес представления алгебры Ли 1, 673
- равномерного пространства 4, 795
- сетевой 3, 836; 4, 1124
- старший 4, 590, 596
- статистический 1, 514, 956
- тета-ряда 5, 346
- тета-функции 5, 347
Вес топологического пространства 1, 673; 3, 834
- тригонометрический 4, 95
π-вес 3, 835
Весовая норма 1, 674
- полунорма 1, 674
Весовая функция 1, 674; 2, 793
- - нормы 1, 674
- - полунормы 1, 674
Весовое подпространство 1, 673
Весовое пространство 1, 673, 674—676
- разложение 1, 673
Весовой класс 1, 674
- модуль 1, 673
Ветвление решений нелинейных уравнений 1, 676—679
Ветвления индекс 1, 679
- - линии 3, 385
- кривая 2, 23
- правило 4, 589
- точка 3, 386; 4, 115
- - алгебраическая 1, 173
Ветвления точка аналитической функции 1, 679
- - бесконечного порядка 3, 407
- - логарифмическая 3, 407
Ветвления точка минимальной поверхности 1, 680
- - многообразия 2, 55
- - трансцендентная 5, 424
- уравнения точка 1, 677
- условие 1, 681
Ветвь аналитической функции 1, 268, 680
- формальная 3, 1035
Ветвящийся процесс 1, 681—684
- - без иммиграции 4, 1051
- -, вероятность вырождения 1, 803
- - Гальтона — Ватсона 1, 854
Ветвящийся процесс с диффузией 1, 684
Ветвящийся процесс с зависимостью от возраста 1, 684
Ветвящийся процесс с иммиграцией 1, 685
Ветвящийся процесс с конечным числом типов частиц 1, 686
Ветвящийся процесс со случайной средой 1, 687
Ветвящихся процессов регулярность 1, 688
Вечный адиабатический инвариант 1, 97
Вещественная ортогональная группа 4, 84
- ось 2, 1008
- форма алгебры Ли 2, 1003
- - векторного пространства 2, 1004
- - группы Ли 2, 1004
- K-теория 5, 335
- часть комплексного числа 2, 1007
Вещественное аналитическое многообразие 1, 278
Вещественное аналитическое пространство 1, 285, 689
- векторное пространство, кватернионная структура 2, 839
- квадратичное поле 2, 783
Вещественное нормирование 1, 689; 3, 1078
Вещественное число 1, 690; 2, 73
Взаимная корреляционная функция 3, 24
- независимость событий 3, 914
- энергия мер 5, 1002
Взаимно однозначное отображение 2, 665; 5, 714
Взаимно однозначное соответствие 1, 690; 3, 760
- полярные фигуры 4, 476
- простые многочлены 3, 754
Взаимно простые числа 1, 690
Взаимности закон Артина 1, 168
- - Гаусса 1, 896; 2, 787
- - для инвариантов Хассе 5, 776
- - квадратичный 2, 787; 3, 231
Взаимности законы в теории чисел 1, 690
Взаимные ядра 1, 692; 5, 653
Взаимный коммутант подгрупп 3, 839
Взаимодействия представление 1, 692
Взвешенная мажорантная игра 2, 1103
Взвешенное квадратичное отклонение 2, 782
- приближение 4, 605
Взвешенное среднее 1, 693
- - геометрическое 5, 161
- среднестепенное приближение 4, 603
Взятия внутренности оператор 4, 727
Вивиани кривая 1, 693
- окно 1, 693
- тело 1, 693
Вид в логике 1, 693
Видовая фаза 1, 520
Виета теорема о корнях 1, 693; 2, 793
- формула 1, 694
Виковский символ 4, 1134
Вилкоксона критерий 1, 694
Вилсона — Хилферти преобразование 5, 34
Вильсона теорема для простых чисел 1, 694
Вильчинского директриса 4, 668
Вивера интеграл 1, 694
- компактификация 4, 1030
- критерий регулярности граничной точки 4, 933
Винера мера 1, 666, 695
Винера тауберова теорема 1, 696
- теорема о разрешимых функциях 4, 275
Винера — Хопфа метод 1, 696
Винера — Хопфа уравнение 1, 697
Винеровская гармоническая граница 4, 1030
- емкость 2, 404, 405
- идеальная граница 4, 1030
- мера 1, 695
Винеровский процесс 1, 698—700
Винограда теорема об устойчивости 5, 810
Виноградова гипотезы 1, 700
Виноградова интеграл 1, 701
Виноградова метод в теории чисел 1, 701—704
- оценка суммы характеров 2, 193
Виноградова оценки 1, 704
- теорема о нечетных числах 1, 92
Виноградова теорема о среднем 1, 705
Виноградова — Гольдбаха теорема в теории чисел 1, 705
Винт 1, 706
Винтовая линия 1, 705
Винтовая поверхность 1, 706
Винтовое исчисление 1, 706
Вирзинга гипотеза в теории диофантовых приближений 3, 665
Вириала теорема в механике 1, 707
Вириальное разложение в механике 1, 708
Вириальный ряд 1, 708
Виртингера копредставление 2, 58; 5, 479, 487
Виртуально - асимптотическая сеть 1, 708
Виртуальное перемещение 1, 1033
Виртуальный арифметический род 1, 323
Виртуальных скоростей принцип 1, 741
Витали вариация 1, 708
- множество 3, 919
- покрытие 1, 709
Витали теорема о покрытии 1, 709
- - о равномерной сходимости 1, 709
Витали — Каратеодори теорема о полунепрерывных функциях 4, 460
Виток винтовой линии 1, 706
Витта вектор 1, 710
- группа 1, 711, 712, 714
- - кольца с инволюцией 1, 712
Витта кольцо 1, 711—713
Витта разложение 1, 713
- схема 1, 710
- теорема о векторном пространстве 1, 714

- - о сокращении 2, 778
- усеченная схема 1, 711
- формы индекс 1, 714
Витта — Гротендика группа 1, 715
- - кольцо 1, 715
Вихревая линия 1, 715
- нить 1, 715
- поверхность 1, 715
- точка 1, 716
- трубка 1, 715
- -, напряженность 1, 716
Вихревое кольцо 1, 715
Вихревой слой 1, 715
Вихрь 1, 715
- векторного поля 1, 649
ВКБ-метод 1, 716
Включение дифференциальное 2, 268
Включение методов суммирования 1, 717
- многозначных отображений 3, 720
Включения и исключения принцип 1, 718
- функция 3, 1107
Владимирова вариационный принцип 1, 719
Владимирова метод 1, 719
- функционал 4, 249
Власова кинетическое уравнение 1, 720
Власова — Ландау уравнение 3, 190
Влияния область 1, 721; 3, 48
Вложение 2, 665; 4, 358
- графа 1, 1115
- дикое 2, 138, 4, 1061
- заминутое 2, 433
- изометрическое 2, 506
- изотопное 5, 401
Вложение категорий 1, 721
Вложение кольца 1, 721
- локально плоское 3, 435; 5, 401
Вложение полугруппы в группу 1, 722
- правильное 2, 138
- равномерное 4, 795
- ручное 2, 138; 4, 1061, 5, 401
- свободное 3, 1096
- Сегре 4, 1101
- топологическое 5, 400, 401
Вложение функциональных пространств 1, 723
C^k-вложение 2, 356
Вложений топология 5, 400
Вложения оператор 1, 723
- размерность 1, 285
Вложения теоремы 1, 723—731
Вложенный простой идеал 4, 634
Вложенных форм метод 3, 155
Вложимая группа 2, 1022
Вмороженности интеграл 1, 731
Вневписанная кривая 1, 758
Внешне сопряженные автоморфизмы 5, 1012
Внешнее дифференцирование 2, 351
Внешнее произведение 1, 240, 731
- - форм 1, 731
- умножение дифференциалов 2, 238
Внешней информативности мера 3, 738
- плотности точка 4, 320
- устойчивости число графа 1, 1120
Внешние накрест лежащие углы 5, 468
- односторонние углы 5, 468
Внешний автоморфизм группы 1, 736
- асимптотический ряд 3, 503
- дифференциал 2, 262, 733
Внешних форм метод 1, 732
- - - Картана 2, 732
Внешняя алгебра 1, 732
- дифференциальная форма 2, 262, 733, 735
-емкость 2, 406
- задача Дирихле 4, 527
- - Неймана 4, 528
Внешняя и внутренняя краевые задачи 1, 732
- краевая задача 1, 732
- кривизна 3, 100; 5, 297
- - выпуклой поверхности 1, 789
Внешняя мера 1, 734; 3, 639
- - в смысле Каратеодори 1, 734
- - Жордана 2, 420
- - Каратеодори 2, 720
- - Лебега 1, 734; 3, 213
- - метрическая 1, 734
Внешняя нормаль 1, 734
- обратная задача теории потенциала 4, 521
- поперечная мера 5, 50
- степень векторного пространства 1, 732
- точка области 3, 1098
Внешняя форма 1, 735; 2, 732
- - группы 5, 635
Внутренне регулярная мера 4, 809
- свободная алгебра 4, 1079
Внутреннее дифференцирование 2, 351, 4, 640
- - алгебры Ли 3, 242
Внутреннее отображение 1, 735
- произведение 1, 979; 4, 1197
- размерностное ядро 2, 717
- состояние элемента 2, 850
- умножение 2, 263
Внутренней устойчивости число графа 1, 1120
Внутренние волны 1, 735
- накрест лежащие углы 5, 468
- односторонние углы 5, 468
Внутренний автоморфизм группы 1, 736
- - кольца 1, 736
- - моноида 1, 736
- асимптотический ряд 3, 503
Внутренний дифференциальный оператор 1, 736
- пограничный слой 2, 342
- радиус 2, 1099
- символ 4, 1135
- угол многоугольника 3, 749
Внутренних автоморфизмов группа 4, 639
Внутренних вариаций метод 1, 736
Внутренность многообразия 3, 743
Внутренность множества 1, 737
Внутренняя геометрия 1, 737
- гомологичность многообразий 1, 533
Внутренняя граница 1, 738
- емкость 2, 406
- задача Дирихле 4, 527
- - Неймана 4, 527
- краевая задача 1, 732
- кривизна 3, 100
- - выпуклой поверхности 1, 789
- мера 3, 640
- - Жордана 2, 420
- - Лебега 1, 734
Внутренняя метрика 1, 738, 790
- обратная задача теории потенциала 4, 521
- площадь 4, 331
- теорема единственности 2, 401
Внутренняя точка 1, 738; 4, 700
- - области 3, 1098
- форма группы 5, 635
Вогнутая функция 1, 738, 793
Вогнутый и выпуклый операторы 1, 738
- оператор 1, 738
- функционал 1, 803
Водородоподобный атом 1, 739
Возврата ребро 1, 740; 4, 811
Возврата точка 1, 740, 2, 25; 4, 124
- - обыкновенная 2, 759
Возвратная последовательность 1, 740
- рекурсия 4, 963
- цепь Маркова 3, 520
Возвратное уравнение 1, 740
Возвратной индукции аксиома 2, 558
Возвратный ряд 1, 740
Возвращения вероятность 1, 419
- теорема Пуанкаре 4, 749
Возможное перемещение 1, 1033
Возможных направлений метод 3, 603
Возможных перемещений принцип 1, 741
- - - вариационный 1, 597
Возмущение 2, 46
Возмущение линейной системы 1, 742
Возмущений теория 1, 742—748
Возмущения вековые 2, 870
Возмущенное уравнение 2, 288
Возраста теория 1, 748
Возрастающая геометрическая прогрессия 1, 932
Возрастающая последовательность 1, 749
- фильтрация 5, 616
Возрастающая функция 1, 749, 3, 814
Возрастающий идеальный ряд 2, 486
Возрастная функция 1, 749
Возрастное приближение 1, 749
- уравнение 1, 749
Волновое движение идеальной жидкости 3, 79
Волновое уравнение 1, 750, 2, 299
Волновой вектор 1, 750
- оператор 2, 9, 5, 128
- потенциал 3, 609
- фронт 5, 672
Волны 1, 750—752
- внутренние 1, 735
Вольтерра оператор 1, 752, 754
- - абстрактный 1, 754
- - линейный интегральный 1, 752
- - нелинейный интегральный 1, 752
- производная 5, 694
Вольтерра уравнение 1, 752—754
- - линейное интегральное 1, 754
- - нелинейное интегральное 1, 754
- - обобщенное 1, 754
- - однородное 1, 752
- - операторное 1, 754
- -, ядро 1, 752
- формула 2, 151
Вольтерра ядро 1, 754, 2, 591
Вольтерров оператор 3, 1007
Вольфовица неравенство 1, 755
Веста теорема о Ω-системах 1, 160
Воронка интегральная 2, 280, 570
Вороного метод суммирования 1, 755
- полуинвариант 2, 789
Вороного типы решеток 1, 755
Воспроизводящий клин 2, 880
- конус 2, 1075; 4, 470
- - положительный 4, 434
Восстановления марковский процесс 1, 757
- процесс 1, 756
Восстановления теория 1, 756
- уравнение 1, 757
- функция 1, 757
Вота теорема в теории моделей 3, 767
Вписанная кривая 1, 758
Вписанная ломаная 1, 757
Вписанное покрытие 3, 216
Вписанные и описанные фигуры 1, 757
Вписанный многоугольник 1, 757
Вписанный угол 1, 758; 4, 16
Вполне аддитивная функция 1, 758
- - - арифметическая 1, 89
Вполне геодезическое многообразие 1, 758, 931
- гиперболическая система 3, 326
Вполне дедекиндова решетка 1, 758
- дистрибутивная решетка 2, 230
Вполне замкнутое отображение 1, 758
- изолированный идеал 5, 748
- изотропное векторное пространство 2, 522
- изотропный подмодуль 1, 483
- интегрируемая система 2, 612
- - - гамильтонова 1, 859
- - структура Пфаффа 4, 774, 775
Вполне интегрируемое дифференциальное уравнение 1, 759
- конечная мера 3, 638, 4, 719
- σ-конечная мера 3, 638; 4, 719
- минимальный гомеоморфизм 2, 806
- мультипликативная арифметическая функция 3, 840
- наблюдаемая система 4, 44
- непрерывное отображение 1, 759
- - поле 3, 977
Вполне непрерывный оператор 1, 759; 2, 994; 3, 373, 960, 4, 19
- - - положительный 4, 435
Вполне неприводимое множество 1, 760
- несвязная компактная группа 2, 991
- - топологическая группа 5, 367
Вполне несвязное пространство 1, 760; 4, 1096
Вполне несовершенное пространство 1, 760
- неунитарная полугруппа сжатий 4, 1127
- неунитарное сжатие 4, 1124
- неустойчивая динамическая система 4, 417
Вполне нормальное пространство 1, 760
- ограниченное метрическое пространство 3, 672
Вполне ограниченное множество 1, 760
Вполне ограниченное пространство 1, 761; 4, 580
- отделимая алгебра 2, 916
- перечислимый класс 3, 1087
- положительная энтропия 4, 1195
- полупростая полугруппа 1, 1019
- порождающее множество 1, 552
- правильный конус 2, 1076
Вполне приводимая матричная группа 1, 761
Вполне приводимое множество 1, 761
- - представление 1, 761, 4, 592
Вполне приводимый модуль 1, 762
Вполне простая полугруппа 1, 762
- равносильные методы суммирования 4, 800
- разветвленное расширение 2, 203
- разложимая абелева группа 1, 19
- разложимый идеал 1, 167
- разрешимая алгебра Ли 3, 250
- - группа Ли 3, 251
- регулярная банахова алгебра с инволюцией 1, 383
Вполне регулярная полугруппа 1, 762, 2, 883
- регулярного роста функция 5, 799
- регулярное кольцо 1, 118
Вполне регулярное пространство 1, 762, 4, 140, 5, 392
- - -, Зайцева теорема 1, 763
- регулярный метод суммирования 4, 944
- - элемент 4, 945
- симметричная алгебра 4, 1148
- - банахова алгебра с инволюцией 1, 383
- совместные методы суммирования 5, 71
- суммирующий базис 1, 377
- треугольное разложение в группе 1, 900
- упорядочения принцип 1, 772
Вполне упорядоченное множество 1, 763
- - -, теорема о сравнении 1, 764
- - -, Цермело теорема 1, 764
Вполне характеристическая конгруэнция 1, 764

Вполне характеристическая подгруппа 1, 764
- эргодический автоморфизм 2, 805
Вращение 1, 764; 4, 81
Вращение векторного поля 1, 765
- вполне непрерывного поля 3, 977
- второго рода 1, 764
- несобственное 1, 764
-, ось 1, 764
- первого рода 1, 764
- собственное 1, 764
-, центр 1, 764
Вращений группа 4, 81
- диаграмма 1, 765
Вращений индикатриса 1, 765
Вращений метод 1, 766
- - барьерный 1, 766
- - с выбором оптимального элемента 1, 767
- - циклический 1, 766
Вращения гиперболоид 1, 1000
- параболоид 5, 993
Вращения поверхность 1, 767
- -, Клеро теорема 1, 767
Вращения теоремы о конформном отображении 1, 767
- эллипсоид 5, 978
Времениподобная линия 3, 702
Времениподобный вектор 3, 702; 4, 149
Временна́я сложность грамматики 1, 1092
Временно́го типа кривая 2, 814
- - направление 2, 814
Временно́е среднее 1, 495
Временно́й адиабатический инвариант 1, 97
Временно́й ряд 1, 663, 768; 5, 10, 23
- -, коррелограмма 3, 21
- -, спектральный анализ 5, 130
Время собственное 4, 150
Вронскиан 1, 768
-, Лиувилля формула 1, 769
Вроньского определитель 1, 768; 3, 339, 340
Всегда разрешимая формула 5, 619
Всемирного тяготения закон 1, 1078
Всеобщности квантор 1, 769; 2, 837
Вспомогательный алфавит 1, 1092
- вывод 1, 781
- предикат 1, 207
- символ 1, 1092
Вспомогательных функций метод 1, 427
Вставка буквы 2, 930
Встречная прогонка 4, 643
Всюду определенный оператор 4, 18
Всюду плотное множество 1, 769
Вторая аксиома счетности 1, 769
Вторая вариация 1, 769
Вторая квадратичная форма 1, 770; 2, 785; 4, 360
Вторая краевая задача 1, 771; 3, 83, 203, 349
- кривизна 3, 129
- основная квадратичная форма поверхности 1, 770
- подстановка Эйлера 5, 928
- симметрическая производная 4, 995; 5, 887
- смешанная задача 5, 37, 41
- теорема Абеля о степенных рядах 5, 219
- - Гарнака 1, 893
- - Гёделя о неполноте 1, 909
Вторичная когомологическая операция 2, 922
- спецификация 2, 978
Вторичного квантования метод 5, 518, 632
Второго порядка линия 3, 387
Второе касательное расслоение 2, 755
Второе сопряженное пространство 1, 388, 771
- уравнение Колмогорова 2, 958
Второй дифференциальный параметр 2, 350; 3, 205
Второй категории множество 2, 764
Второй метод Ляпунова 3, 471
- основной тензор поверхности 1, 771
- принцип отделимости 2, 95
- фундаментальный тензор 4, 360, 361
Ву класс 5, 904
- образующая 5, 762
- теорема о замкнутых многообразиях 5, 904
Вурф 1, 771
Вход схемы из функциональных элементов 5, 301
Входной алфавит 1, 53, 54
- оператор 4, 241
- полюс 4, 968
- поток 3, 542
- сигнал 2, 850
Входных данных погрешность 4, 357
Входящий поток вызовов 3, 541
Вхождение 1, 771
- переменной операторное 4, 1083
- - свободное 4, 578, 1083
- - связанное 4, 578, 1083, 1088
Выбор оптимального элемента в методе вращений 1, 767
Выбора аксиома 1, 106, 772; 5, 642
- - интуиционистская 2, 642
- -, принцип вполне упорядочения 1, 772
- -, принцип максимальности 1, 772
- принцип 5, 816
- - Больцано — Вейерштрасса 1, 516
- теорема Бляшке 1, 509
Выбора теоремы в комбинаторике 1, 773
- функция 1, 772
Выборка 1, 774, 776, 778, 917
- по важности 3, 817
- простая 1, 918
-, размах 4, 815
-, рассеивание 4, 892
- расслоенная 4, 895
- существенная 3, 817
Выборки распределение 5, 998
Выборочная гроздь 1, 774
Выборочная дисперсия 1, 774; 5, 999
Выборочная квантиль 1, 774
Выборочная медиана 1, 775
Выборочная точка 1, 775, 776
Выборочная функция 1, 775; 5, 11
Выборочная характеристика 1, 776
Выборочное пространство 1, 776
Выборочное среднее 1, 776; 5, 998
Выборочный блок 1, 776
- коэффициент корреляции 3, 28
- - регрессии 4, 925, 927
- - эксцесса 5, 969
Выборочный метод 1, 776—779
Выборочный момент 1, 779; 5, 998
- промежуток 1, 776
Вывод 1, 112, 1092
- в исчислении 2, 685
- вспомогательный 1, 781
-, Генцена теорема 1, 921
-, дерево 1, 1093
Вывод логический 1, 779
- полный 1, 1092
-, правило 1, 111
-, производное правило 4, 690
- результирующий 1, 781
ω-вывод 1, 321
Вывода дерево 1, 780
Вывода правило 1, 780; 3, 568
- -, заключение 1, 780
- -, посылка 1, 780
Выводимая формула 1, 779; 2, 368
Выводимое правило 1, 781
- формальное выражение 5, 640
Выводимости проблема 2, 686
Выводимость 1, 779, 781
-, Маркова правило 1, 912
Выводимый элемент 2, 685
Выводящая производная 1, 736
Выделение сигнала на фоне помех 1, 781
Выделения аксиома 1, 106
- базы гомологии метод 1, 816
- главной части метод 3, 817
Вызова процедуры оператор 1, 224
Выигрывающая коалиция 2, 1103
Выигрыш автомата 1, 58
- интегральный 2, 143
- терминальный 2, 143
Выигрыша функция 1, 781; 2, 471; 5, 529, 532
Выигрышная позиция 2, 475
Выметание для функции 1, 783
- меры 1, 781, 782
Выметания метод 1, 781—783
- проблема 1, 782
Вынуждения метод 1, 783—786
- отношение 1, 783
Вынужденные колебания 1, 786
Выпадение буквы 2, 930
Выпрямления теорема об интегральных кривых 4, 121
Выпуклая гиперповерхность 1, 799
Выпуклая игра 1, 787; 2, 1104
- кривая 1, 799
Выпуклая метрика 1, 787, 789, 790
Выпуклая область 1, 788
Выпуклая оболочка 1, 788
- -, Каратеодори теорема 1, 788
- -, Крейна — Мильмана теорема 1, 788
Выпуклая поверхность 1, 788—792, 799
- -, Александрова теорема 1, 788
- - бесконечная 1, 788
- -, внешняя нормаль 1, 734
- -, гауссова кривизна 1, 791
- - гладкая 1, 788
- - замкнутая 1, 788
- -, касательный конус 2, 756
- - коническая 1, 788
- -, кратчайшая 1, 789
- -, кривизна 1, 789
- - однозначно-определенная 1, 790
- -, площадь 1, 791
- - полная 1, 788
- -, полный угол в точке 1, 789
- -, предельный конус 4, 575
- -, расстояние между точками 1, 789
- - ребристая 1, 788
- - регулярная 1, 791
- -, свойство неналегания 1, 789
- -, склеивания теорема 1, 791
- -, удельная кривизна 1, 791
Выпуклая подгруппа 1, 792
Выпуклая последовательность 1, 792
- функция 3, 854
Выпуклая функция действительного аргумента 1, 793—795
Выпуклая функция комплексного переменного 1, 795
C-выпуклая оболочка, теорема 1, 511
k-выпуклая поверхность 4, 361
p-выпуклая функция 4, 728
Выпукло идеально простая полугруппа 5, 524
- компактнозначное многозначное отображение 3, 720
Выпукло-вогнутое пространство 4, 728
Выпуклое множество 1, 644, 796—798, 799
- -, Брунна — Минковского теорема 1, 549
- параметрическое программирование 4, 220
- по Робинсону множество 5, 781
Выпуклое подмножество 1, 798
Выпуклое программирование 1, 798; 2, 678; 3, 602
Выпуклое тело 1, 796, 799
- -, гипотеза об аномалии 1, 947
- -, грань 1, 797
- - двойственное 1, 797
- -, Минковского теорема 1, 944, 946, 947; 3, 703
- - полярное 1, 797
Выпуклости проблема для чебышевского множества 5, 851
Выпуклости радиус 1, 799
- теорема Рисса 4, 1039
Выпуклость 1, 799
- голоморфная 1, 800; 5, 899
Выпуклость логарифмическая 1, 800
- метрики 1, 800
- тригонометрическая 4, 1054
- функционала 1, 800
d-выпуклость 1, 800
H-выпуклость 1, 800
k-выпуклость 1, 800
R-выпуклость компакта 1, 800
Выпуклый анализ 1, 800
- -, двойственность 2, 45
- -, Фенхеля — Моро теорема 2, 46
Выпуклый конус 1, 801; 2, 1074
- - однородный 3, 1180
Выпуклый многогранник 1, 801; 4, 410
- -, Александрова теорема 1, 802
- -, вершина 1, 801
- -, грань 1, 801
- -, Коши теорема 1, 802
- -, Минковского теорема 1, 802
- - правильный 4, 552
- -, ребро 1, 801
- - с краем 1, 801
- -, Штейница теорема 1, 802
- -, Эйлера соотношение 1, 802
Выпуклый многоугольник 1, 802; 3, 750
Выпуклый оператор 1, 738, 802
Выпуклый функционал 1, 803
Выпуклых множеств пространство линейное 1, 803
Выпуклых множеств пространство метрическое 1, 803
Выражение 4, 977
- аналитическое 1, 277
- асимптотическое 1, 336
- в алгоритмическом языке 1, 224
- дифференциальное 2, 345
Выразимая формула 4, 695
Вырезание 2, 1000
Вырезанная аксиома 1, 1045
Вырождающаяся линия второго порядка 3, 389
- нераспадающаяся поверхность второго порядка 4, 344
Вырождения вероятность 1, 803
- оператор 4, 1161, 1167, 1169
- типа уравнения линия 5, 45
Вырожденная абелева функция 1, 22
Вырожденная гипергеометрическая функция 1, 804
- группа 2, 877
Вырожденна́я игра 1, 805
- квадратичная форма 2, 777
Вырожденная матрица 1, 806
- мера 3, 637
Вырожденная серия представлений 1, 806
Вырожденное билинейное отображение 1, 484
Вырожденное гиперболическое уравнение 1, 806
Вырожденное гипергеометрическое уравнение 1, 806
Вырожденное интегральное уравнение 1, 807
Вырожденное параболическое уравнение 1, 808
- подпространство 4, 718
Вырожденное положение равновесия 1, 808
Вырожденное распределение 1, 809
Вырожденное уравнение с частными производными 1, 809—811
Вырожденное эллиптическое уравнение 1, 811
Вырожденное ядро 1, 811
- - Фредгольма 5, 660
Вырожденные эллиптические координаты 5, 988
Вырожденный континуум 2, 1067
- параллелотоп 4, 205
- симплекс 4, 1163
- узел 5, 475

Вырожденных ядер метод 1, 811
Высказывание 1, 123; 5, 269
-, гейтинговское исчисление 1, 911
-, интуиционистское исчисление 1, 911
-, конструктивное исчисление 2, 1050
- модальное 3, 763
- устойчивое 3, 767
Высказываний исчисление 1, 812; 4, 699
- - классическое 3, 418
- - минимальное 3, 691
Высказывательная форма 4, 698; 5, 637
Высокочастотная асимптотика 2, 809
Высота в диофантовой геометрии 1, 812
Высота в элементарной геометрии 1, 812
Высота идеала 1, 813
- конуса 2, 1074
- крюка 5, 1028
- нормирования 3, 1080
Выступающий конус 2, 1074
Высшая когомологическая операция 2, 923
Высшие аксиомы бесконечности 1, 455
- инварианты Хопфа 4, 23, 34
Высший член многочлена 3, 753
Выход схемы из функциональных элементов 5, 301
Выходной алфавит 1, 53, 54
- полюс 4, 968
- сигнал 2, 850
Выходов функция 1, 53
Вычет 5, 151, 153
- аналитического дифференциала 1, 816
Вычет аналитической функции 1, 264, 814—817
- биквадратичный 1, 814; 5, 153, 217
Вычет в теории чисел 1, 814
- квадратичный 1, 814; 2, 785; 5, 153, 217
-, класс 5, 151
- кубический 1, 814; 3, 143; 5, 217
-, Лере теорема 1, 816
- логарифмический 1, 815; 3, 409
- норменный 3, 1077
- относительно базисного цикла 1, 817
-, полная система 4, 423; 5, 151
-, приведенная система 4, 631; 5, 152
- степени n 5, 217
- степенной 1, 814; 5, 217
-, теорема 1, 815
-, формула 1, 818
Вычет-класс 1, 818
Вычетов метод 3, 815
Вычет-форма 1, 817
Вычисление частичное 5, 418
Вычислений классы сложности 1, 211
- мера 1, 211
Вычисления функции проблема 1, 219
Вычислимая нумерация 3, 1087
Вычислимая функция 1, 227, 818—821
- - по Банаху — Мазуру 1, 380
Вычислимое действительное число 1, 821; 2, 1050, 1055
Вычислимый анализ 2, 1054
Вычислимый инвариант 1, 821
Вычислитель частичный 5, 418
Вычислительная математика 1, 822—825
Вычислительная машина абстрактная 1, 825
- модель 3, 770
- погрешность 4, 357
Вычислительного метода оптимизация 4, 61
Вычислительной работы минимизация 3, 695
Вычислительный алгоритм 1, 826—828
- - активный 4, 62
- -, замыкание 2, 437
- - пассивный 4, 62
- - стохастический 5, 241
Вычислительных алгоритмов оптимизация 4, 61
Вычитаемое 1, 828
Вычитание 1, 828; 4, 1212
- комплексных чисел 2, 1008
- степенных рядов 5, 219
Вьеториса гомологии 1, 828
- теорема о когомологиях 4, 769
Вьеторисиан 1, 1041
Вязкость аппроксимационная 5, 303
- схемная 5, 303
Вялый пучок 1, 830

Г

Габриеля — Попеску теорема об абелевых категориях 1, 21
Газовой динамики уравнения 1, 831—835
Газовой динамики численные методы 1, 835—840
Газовых струй теория 1, 840—842
Галеркина метод 1, 842; 4, 250, 684, 1042
Галеркина — Петрова метод 1, 842
Галилеева система координат 1, 843; 4, 149
- - отсчета 2, 562
Галилеево пространство 1, 843
Галилея группа 1, 844; 4, 148
Галилея преобразование 1, 844
Галилея принцип относительности 1, 844
Галилея спираль 1, 844
Галуа группа 1, 845, 850, 1139
- - дифференциальная 1, 845
- - многочлена 1, 845
- - расширения 4, 908
- - уравнения 1, 851
Галуа дифференциальная группа 1, 845
Галуа когомологии 1, 845—848
- модуль 3, 778
- основное соответствие 1, 164
Галуа поле 1, 848
Галуа расширение 1, 849, 850
- -, основная теорема 1, 845
- резольвента 4, 950
Галуа соответствие 1, 845, 849
Галуа теории обратная задача 1, 849
Галуа теория 1, 850—852
Галуа теория колец 1, 853
- -, основная теорема 1, 851
Галуа топологическая группа 1, 854
Гальтона — Ватсона процесс 1, 681, 854
Гамак в теории графов 4, 644
Гамбургера уравнение 4, 859
Гамеля базис 1, 374
- теорема о проективно метрических пространствах 4, 667
Гамильтона оператор 1, 854
Гамильтона уравнения 1, 855
Гамильтона функция 1, 855
Гамильтона — Кэли теорема о матрицах 3, 617
Гамильтона — Остроградского принцип 1, 600, 856
Гамильтона — Якоби теория 1, 857
- - уравнение 1, 585, 858; 2, 808, 809
Гамильтониан 1, 854, 855, 858; 4, 1156
Гамильтонов граф 1, 1113
- цикл 1, 1113, 1119; 2, 972
Гамильтонова алгебра Ли 3, 244
Гамильтонова группа 1, 858
- лупа 3, 462
- псевдогруппа 4, 731
Гамильтонова система 1, 858—861; 2, 808, 809; 4, 1156
- - вполне интегрируемая 1, 859
Гамильтонова система линейная 1, 861—865
- - -, осцилляторные свойства решений 1, 862
- - - с периодическими коэффициентами 1, 863
- -, Лиувилля теорема 1, 860
- -, Нётер теорема 1, 859
- структура 4, 1156
- форма 5, 519
- формация 5, 519
- цепь в графе 1, 1113
Гамильтоново векторное поле 4, 1156
Гамильтоново связный граф 1, 1113
Гамма-корреляция 1, 865
Гамма-распределение 1, 865
Гамма-функция 1, 866—870
- неполная 1, 866; 3, 979
Гаммерштейна оператор 3, 959
Гаммерштейна уравнение 1, 870
Ганкеля интегральное представление 1, 867, 869
- определитель 4, 187
- преобразование 2, 589
Ганкеля функции 1, 870
Гармонизуемая динамическая система 1, 871
Гармонизуемый случайный процесс 1, 871; 5, 124
Гармоника 1, 872; 4, 1085
- основная 1, 887
- сферическая 5, 289
- тороидальная 5, 407
- эллипсоидальная 5, 978
Гармоническая емкость 1, 872; 2, 404
- интерполяция 3, 880
- линеаризация 1, 887
Гармоническая мажоранта 1, 872; 5, 262
- - наилучшая 1, 872
- - наименьшая 1, 872
Гармоническая мера 1, 873; 4, 533
- миноранта 1, 872
- - наибольшая 1, 872
- поляра 3, 140
- сопряженность 1, 878
Гармоническая форма 1, 873—875
- - примитивная 1, 874
Гармоническая функция 1, 875—879; 2, 239; 3, 205
- -, Гарнака теорема 1, 877, 878, 893
- -, Гурса формула 1, 878
- -, Привалова теорема 1, 875
- -, принцип симметрии 1, 877
- -, принцип экстремума 1, 877
- - регулярная в бесконечности 1, 875
- -, свойство единственности 1, 877
- -, сопряженность 1, 878; 5, 86
- - телесная 5, 882
- -, теорема о среднем значении 1, 876
- -, теорема о стирании особенностей 1, 877
- -, условия сопряженности 3, 67
Гармоническая четверка 1, 878, 879
Гармонические координаты 1, 880
Гармонический анализ 1, 880; 3, 1115
Гармонический анализ абстрактный 1, 880—886
- - на группах 1, 881
- - функций 1, 450
- дифференциал 2, 239
Гармонический многочлен 1, 886
- осциллятор 4, 137, 1085
- пучок 1, 889; 4, 532
Гармонический ряд 1, 887
Гармонического баланса метод 1, 887
- синтеза множество 5, 119
Гармоническое деление 2, 466
Гармоническое колебание 1, 888; 4, 1085
- - простое 4, 1085
- - свободное 4, 1084
- отношение 2, 27
- поле 1, 650
Гармоническое пространство 1, 889, 4, 533
- -, аксиома мажоранты 1, 890
- -, аксиома положительности 1, 889
- -, аксиома разрешимости 1, 889
- -, аксиома сходимости 1, 889
- -, потенциал минимума 1, 890
- спинорное поле 5, 140
Гармоническое среднее 1, 890; 5, 161
Гармонической меры принцип 1, 890
Гарнака интеграл 1, 891
Гарнака неравенство 1, 891—893
- принцип 1, 893
- теорема для алгебраических кривых 2, 70
Гарнака теорема для гармонических функций 1, 877, 878, 893
Гартогса диаграмма 1, 893
Гартогса область 1, 893
- основная теорема о голоморфных функциях 1, 269
- радиус 1, 894
- ряд 1, 894
Гартогса теорема о голоморфных функциях 1, 893
- функция 4, 336
Гартогса — Лорана ряд 1, 894
Гато вариация 1, 894, 895
Гато градиент 1, 894
Гато дифференциал 1, 895
Гато производная 1, 895
- - оператора 3, 960
Гаусса вариационная задача 1, 895
- вариационный принцип 1, 598
Гаусса закон 1, 896
Гаусса закон взаимности 1, 896; 2, 787
- интеграл 2, 445
- - вероятности 2, 567
Гаусса интерполяционная формула 1, 897
Гаусса квадратурная формула 1, 897; 2, 624, 794
- лемма о примитивных многочленах 4, 638
Гаусса метод решения систем линейных уравнений 1, 898
- неравенство в теории вероятностей 5, 843
Гаусса преобразование 1, 899
Гаусса признак сходимости 1, 899
Гаусса принцип в механике 1, 900
Гаусса разложение 1, 900
- ряд 1, 1001, 1003
Гаусса сумма 1, 901
- - для характеров 2, 193
Гаусса теорема (theorema egregium) 1, 902
- - о кривизне 2, 253
- - - поверхности 4, 235
- - о правильных многоугольниках 3, 751
- - о простых числах 4, 707
- - о трех квадратах 2, 170
- тождество 5, 768
- уравнение 1, 1004; 2, 315
- - в теории поверхностей 1, 902
- уравнения для кривизны 4, 361
- формула для гипергеометрической функции 1, 1003
- - для объемного потенциала 4, 524
- - для потенциала двойного слоя 4, 526
- - умножения 1, 867
- ψ-функция 1, 869; 4, 744
Гаусса — Бонне теорема о кривизне 2, 56
Гаусса — Бонне теорема о римановых многообразиях 1, 903
Гаусса — Лапласа распределение 1, 904
Гаусса — Остроградского формула 4, 137
Гауссов случайный элемент 5, 33
Гауссова квадратичная форма 2, 777
Гауссова кривизна 1, 904; 2, 253, 785; 3, 98
- - выпуклой поверхности 1, 791
- матрица 2, 777
Гауссова полугруппа 1, 905
- предмера 3, 646

Гауссова типа квадратурная формула 2, 794; 3, 866
Гауссово кольцо 1, 906; 5, 590
- кручение 3, 130
- отображение 5, 297
Гауссово число 1, 197, 905
Гауссовская случайная величина 1, 907
Гауссовский белый шум 1, 407
- источник сообщений 2, 682
- канал 2, 701
Гауссовский процесс 1, 906
- - комплексный 1, 906
- - обобщенный 1, 906
Гауссовское распределение условное 2, 701
Гегенбауэра многочлены 1, 908; 2, 869; 5, 494
Гегенбауэра преобразование 1, 908
Гёделев номер 1, 314; 4, 960
Гёделя интерпретация 1, 908
- - негативная 4, 357
Гёделя теорема о неполноте 1, 909
Гёделя теорема о полноте 1, 910
Гёделя — Мальцева локальная теорема 1, 158
- - теорема о моделях 3, 766
Гёделя — Тарского перевод 4, 357
Гейзенберга представление 1, 911
- принцип 3, 965
Гейзера инволюция 3, 95
Гейла неравенство 2, 513
Гейне — Бореля лемма о покрытии 1, 540; 5, 395
Гейне — Бореля теорема о покрытии 1, 540, 911
Гейне — Бореля — Лебега лемма о покрытии 2, 991
Гейне — Кантора теорема о равномерно непрерывных функциях 2, 991
Гейтинга алгебра 4, 726
- исчисление 1, 911
Гейтинга формальная система 1, 911
Гейтинговская арифметика 1, 911
Гейтинговское исчисление высказываний 1, 911
- - предикатов 1, 911
Гекке оператор 3, 787
Гексасферические координаты 4, 234
Гексаэдр 1, 913; 3, 136
Геликоид 1, 913; 2, 1036
-, Демулена теорема 2, 90
Геллерстедта задача 1, 913
- условие 5, 39
Гёльдера коэффициент 1, 915
Гёльдера методы суммирования 1, 913
Гёльдера неравенство для сумм 1, 914
- - для интегралов 1, 914
- α-полунорма 1, 915
- теорема для линейно упорядоченных групп 1, 328
- - о гамма-функции 1, 869
- - о симметрических группах 4, 1141
Гёльдера условие 1, 915
Гёльдера функциональный класс 4, 1173
Гёльдерово пространство 1, 915
Гельмгольца теорема для векторных полей 1, 650
Гельмгольца уравнение 1, 916
Гельмгольца — Кирхгофа задача 2, 309
Гельфанда поперечник 4, 493
Гельфанда представление 1, 917
- преобразование 2, 985
- формула для спектрального радиуса 1, 383
Гельфанда — Гординга теорема о представлениях групп Ли 2, 359
Гельфанда — Мазура теорема о банаховых алгебрах 1, 382
- - - о спектре элемента 5, 100
Гельфанда — Наймарка теорема о C-алгебрах 1, 384
- - - о линейных операторах 3, 375
Гельфанда — Райкова теорема об унитарных представлениях 5, 509
Генеральная совокупность 1, 917
Генеральный показатель 2, 772; 3, 330; 4, 132
Генератор 1, 54; 4, 1126
- правого сдвига 3, 1113
Генератриса 1, 918; 4, 691
Генерический фильтр 1, 785
Генерическое относительно модели множество 1, 784
Гензелева A-алгебра 1, 918
Гензелево кольцо 1, 918
Гензеля лемма о p-адических числах 1, 918
Генки — Мизеса условия 4, 299
Генцена основная теорема о нормализации 4, 1105
- теорема о выводах 1, 921
Генцена формальная система 1, 919—921
Геодезии математические задачи 1, 921—923
Геодезическая в римановом пространстве 4, 1004
- замкнутая 2, 431
Геодезическая кривизна 1, 923; 4, 1006
- - интегральная 1, 924
Геодезическая линия 1, 924—926; 4, 673
- - в аффинной связности 1, 357
Геодезическая область 1, 927
Геодезическая окружность 1, 927; 4, 438
- - в смысле Дарбу 1, 928
- петля 2, 431
- полоса 4, 438
- проекция 2, 742
Геодезическая сеть 1, 928; 4, 1122
Геодезически выпуклая область 4, 1004
- полное риманово пространство 4, 1004
Геодезические координаты 1, 928
- - нормальные 4, 438
- - полярные 4, 438
Геодезический многоугольник 3, 751
Геодезический поток 1, 928
Геодезический треугольник 1, 929
Геодезических геометрия 1, 929
Геодезических гипотеза 1, 930
Геодезическое кручение 1, 931; 3, 129
Геодезическое многообразие 1, 931
Геодезическое отображение 1, 931
Геодезическое расстояние 1, 931
Геодезической нормали вектор 4, 438
Геокриологии математические задачи 1, 931
Геометрическая величина 5, 249
- голоэдрия 3, 108
- кратность собственного значения 5, 58
Геометрическая прогрессия 1, 932
- реализация комплекса 2, 997
- - симплициальной схемы 4, 1160
- решетка 2, 969; 4, 456
- статика 5, 169
- структура, расслоение 5, 249
- теория инвариантов 2, 543
- - чисел 1, 944
Геометрически линейчатая поверхность 3, 381
- неприводимое многообразие 3, 996
- редуктивная группа 4, 946
- эргодическая цепь Маркова 3, 522
Геометрические вероятности 1, 932
Геометрические построения 1, 933
- точки аффинного многообразия 1, 361
Геометрический вектор 1, 632
- дифференциальный инвариант 2, 344
Геометрический комплекс 1, 933; 4, 748
- объект 1, 934
- -, поле 4, 658; 5, 249
Геометрический род 1, 934; 4, 118, 1049
- - многообразия 2, 266
- ряд 1, 932
- симплекс 2, 996
- симплициальный комплекс 2, 996
- слой 2, 431; 5, 299
Геометрических объектов теория 1, 934—939
Геометрическое кольцо 1, 939
Геометрическое место точек 1, 939
- неравенство 2, 513
Геометрическое приближение 1, 939
Геометрическое распределение 1, 940
- расхождение 1, 940
Геометрическое среднее 1, 940; 5, 161
Геометрической оптики приближение 2, 809
Геометрия 1, 940—943
- абсолютная 1, 34
- алгебраическая 1, 134
- аналитическая 1, 243, 245
- аналлагматическая 1, 289
- аффинная 1, 352
- бипланарная 1, 492
- бирациональная 1, 493
Геометрия в целом 1, 943
- внутренняя 1, 737
- геодезических 1, 929
- Гильберта 1, 965
- гиперболическая 1, 988; 4, 668
- дезаргова 2, 67
- диофантова 2, 157
- дифференциальная 2, 247
- евклидова 2, 397; 4, 668
- инверсионная 2, 1087
- интегральная 2, 570
- комбинаторная 2, 968, 969
- конечная 2, 975
- конформная 2, 1083
- конформно-дифференциальная 2, 1090
- круговая 2, 1086
- Лобачевского 3, 397
- Мёбиуса 2, 1087
- Минковского 3, 700; 4, 668
- многомерная 3, 729
- начертательная 3, 895
- неархимедова 3, 898
- недезаргова 3, 908
- неевклидова 3, 910
- непаскалева 3, 975
- непрерывная 4, 104
- обратных радиусов 2, 1086
-, основания 4, 107
- паскалева 4, 223
- погруженных многообразий 4, 359
-, принцип двойственности 2, 33
- проективная 4, 664
- - дифференциальная 4, 666
- псевдориманова 4, 742, 1008
- релятивная 4, 973
- Римана 4, 987, 1003
- с коммутативным умножением 4, 224
- стохастическая 5, 236
- сферическая 5, 290
- тканей 5, 356
- финслерова 4, 1008; 5, 621
- центроаффинная 5, 811
- частичная 5, 831
Геометрия чисел 1, 944—950
- эквиаффинная 5, 942
- эллиптическая 4, 668, 987; 5, 979
Геометродинамика 1, 950
Геометро-оптическое приближение 1, 939
Геон 1, 950
Геотермики математические задачи 1, 951
Геофизики математические задачи 1, 951—954
Герглотца формула 1, 954; 2, 587
Герона треугольник 1, 954
Герона формула 1, 954
Герца вариационный принцип 1, 599
Герца принцип в механике 1, 954
Гессе матрица 3, 1153
- отображение 5, 223
Гессиан алгебраической кривой 1, 955
- формы 2, 896
Гессиан функции 1, 955
Гессиана 1, 955; 3, 140; 4, 310
Гетероклиническая точка 1, 955
Гетероклиническое решение 1, 955
Гетероморфизм 4, 515
Гетероскедастичность 1, 1061
Гжегорчика система 3, 764
Гиббса канонический ансамбль 5, 179
Гиббса распределение 1, 956—958
Гиббса статистический ансамбль 1, 958
Гиббса явление 1, 958
Гиббса — Аппеля уравнение 1, 301
Гиббсовское равновесное распределение 5, 200
- состояние 5, 203
Гидродинамики математические задачи 1, 959—964
- релятивистской математические задачи 4, 971
- уравнение 1, 421
Гидродинамическое приближение 1, 964
Гильберта геометрия 1, 965
- граничная задача 3, 323
Гильберта инвариантный интеграл 1, 966; 5, 956
- квадратичный символ 5, 776
- метрика 1, 965
Гильберта многочлен 1, 967
Гильберта неравенство 1, 967
Гильберта преобразование 1, 968
- проблема десятая 1, 218; 2, 158
- - пятая 1, 245; 3, 255; 5, 368
- - седьмая 5, 426
- - четырнадцатая 2, 543
- - шестнадцатая 2, 70
- символ 3, 1077
Гильберта сингулярный интеграл 1, 969
Гильберта система аксиом евклидовой геометрии 1, 969—971
Гильберта схема 1, 971
Гильберта теорема 1, 971—974
- - 90 1, 973
- - о базисе 1, 971
- - о неприводимости 1, 971
- - о нулях (корнях) 1, 972
- - о плоскости Лобачевского 1, 408
- - о поверхностях отрицательной кривизны 1, 973
- - о сизигиях 1, 973
- - о степенях натуральных чисел 1, 372
- - о циклических расширениях 1, 973
- - об абсолютном экстремуме 1, 974
- - об инвариантах 1, 974
Гильберта теория интегральных уравнений 1, 974
- трансфинитное пространство 3, 899
- финитизм 3, 570
Гильберта ядро 1, 969, 975
Гильберта — Бернайса теория 5, 641
Гильберта — Варинга проблема в теории чисел 1, 609
Гильберта — Камке проблема 1, 975
Гильберта — Привалова граничная задача 3, 323
Гильберта — Самюэля функция 3, 438
Гильберта — Шмидта интегральный оператор 1, 975; 2, 605
Гильберта — Шмидта норма 1, 977
Гильберта — Шмидта оператор 1, 977; 5, 116

Гильберта — Шмидта ряд 1, 977
- - теорема о сходимости 1, 977
Гильберта — Эйлера проблема в теории чисел 1, 977
Гильбертов кирпич 1, 978
Гильбертова алгебра 1, 978
- размерность 1, 981
- шкала 2, 630
Гильбертово многообразие 2, 357
- поле классов 4, 401
Гильбертово пространство 1, 978—985
- -, внутреннее произведение 1, 979
- -, изометрический изоморфизм 1, 979
- -, изоморфизм 1, 979
- -, линейная независимость 1, 982
- -, линейная размерность 1, 981
- -, ортогональное дополнение 1, 980
- -, ортогональные векторы 1, 980
- -, ортогональные линейные многообразия 1, 980
- - оснащенное 4, 106; 5, 130
- -, Пифагора теорема 1, 981
- -, полнота 1, 979
- -, прямая сумма 1, 982
- -, размерность 1, 981
Гильбертово пространство с индефинитной метрикой 1, 985—987; 4, 717
- -, скалярное произведение 1, 979
- -, тензорное произведение 1, 983
Гипералгебра 5, 790
Гипербола 1, 987; 2, 1034; 3, 383, 387
-, асимптота 1, 988
-, диаметр 1, 988
-, директриса 1, 988
-, ось 1, 988
- равнобочная (равносторонняя) 1, 988
-, фокальный параметр 1, 988
-, фокус 1, 987
-, фокусное расстояние 1, 987
-, центр 1, 987
-, эксцентриситет 1, 988
Гиперболическая геометрия 1, 988; 4, 668
- -, косинусов теорема 1, 990
- -, синусов теорема 1, 990
- гомология 1, 1060
- группа Кокстера 2, 945
- длина 1, 988
- емкость 5, 422
- инверсия 2, 545
- инволюция 2, 548
- лемниската Бута 1, 566
- мера 1, 988
Гиперболическая метрика 1, 988, 989
- плоскость 4, 746, 747; 5, 507
- плотность, метрика 1, 989
- площадь 1, 989
- поверхность 5, 515
- показательная функция 4, 27
- постоянная Чебышева 5, 422
- пространственная форма 4, 709
- прямая 2, 801, 3, 12; 4, 746, 747
- связка окружности 4, 1090
- - сфер 4, 1090
- сеть 4, 1123
- система в узком смысле 3, 326
- - симметрическая 3, 327
Гиперболическая спираль 1, 989
- точка 2, 252; 4, 746, 747
- - динамической системы 1, 990
Гиперболическая точка поверхности 1, 990
Гиперболическая тригонометрия 1, 990
- форма 1, 713
Гиперболические функции 1, 991
Гиперболический диаметр 5, 422
- дифференциальный оператор 2, 346
- интеграл 5, 991
- косинус 1, 991; 3, 38
- - интегральный 2, 601
- круг 1, 989
- линейный дифференциальный оператор 3, 366
- луч 2, 1014
Гиперболический параболоид 1, 992
- пучок 4, 772, 773
- сектор 4, 1106
- синус 1, 991; 4, 1191
- - интегральный 2, 601
- тангенс 1, 991, 5, 320
- тип римановой поверхности 4, 1019, 1028
- трансфинитный диаметр 5, 422
Гиперболический цилиндр 1, 992; 5, 819
Гиперболического типа уравнение 1, 992
Гиперболического типа уравнение, численные методы 1, 993—998
Гиперболическое дробно-линейное отображение 2, 386
Гиперболическое множество 1, 998
- пространство 1, 713
- псевдорасстояние 5, 422
- расстояние 1, 988, 989; 4, 283
- уравнение 2, 299, 300, 323
- - вырожденное 1, 806
- - линейное 3, 325
Гиперболической метрики принцип 1, 999
Гиперболичности область 5, 45
Гиперболоид 1, 1000
-, асимптотический конус 1, 1000
- вращения 1, 1000
- однополостный 3, 1172
-, полуоси 1, 1000
- правильный 1, 1000
Гиперболо-параболического типа уравнение 5, 45
Гипергармоническая функция 4, 403
Гипергармонический пучок 1, 889; 4, 532
Гипергеометрическая функция 1, 1001—1003
- - вырожденная 1, 804
- -, Гаусса формула 1, 1003
- - конфлюэнтная 2, 1083
Гипергеометрический ряд 1, 1003
Гипергеометрическое распределение 1, 1003
Гипергеометрическое уравнение 1, 1004
- - вырожденное 1, 806
- - обобщенное 4, 992
Гипергомологий функтор 1, 1005
Гиперграф 1, 1006
-, вершина 1, 1006
-, двойственность 1, 1006
-, инцидентность 1, 1006
-, ребро 1, 1006
-, смежные вершины 1, 1006
-, степень вершины 1, 1006
-, степень ребра 1, 1006
Гипергруппа 3, 1111
Гипериммунное множество 2, 523; 4, 724
Гиперкогомологий функтор 1, 1006
Гиперкомплексная система 1, 1008; 3, 1113
Гиперкомплексного переменного функция 1, 1007
Гиперкомплексное число 1, 1008
Гиперкуб 3, 208
Гипермаксимальный оператор 4, 1074
Гиперпараллельные прямые 4, 747
Гиперплоскость 1, 644, 981, 1008; 3, 345
- бесконечно удаленная 1, 443
- несобственная 4, 675
- опорная 1, 794, 797; 4, 29
-, полюс 4, 477
- пространственно ориентированная 3, 327
Гиперповерхность 1, 1009
- алгебраическая 1, 1009
- аналитическая 1, 1009
- выпуклая 1, 799
- детерминантная 2, 99
- кубическая 3, 140
-, степень (порядок) 1, 1009
Гиперполное локально выпуклое пространство 5, 383
Гиперпростое рекурсивно перечислимое множество 4, 959
Гиперпространство 1, 644, 981, 1009
Гиперфункция 3, 443; 5, 674
Гиперцентр 1, 1010
Гиперцикл 1, 1010; 5, 948
Гипершар 5, 881
Гиперэллиптическая кривая 1, 1010; 4, 312
- поверхность 4, 1032; 5, 985
- тета-функция 4, 999
Гиперэллиптический интеграл 1, 1010
Гиперэллиптическое поле 1, 1011
Гипотеза — см. соответствующее название
Гипотенуза 1, 1011
Гипотетическое распределение 4, 700
Гипотрохоида 1, 1012; 5, 448
Гипоциклоида 1, 1011
Гипоэллиптический линейный дифференциальный оператор 3, 366
Гира определение 2, 413
- процедура 2, 414
Гистограмма 1, 1012
Гиппара конгруэнция 1, 1012
- поверхность 1, 1012
Главная ветвь обратной тригонометрической функции 3, 1135
- вычислимая нумерация 3, 1087
- изотопия 2, 519
- категория 1, 1091
- конгруэнц-подгруппа 2, 1013; 3, 784
Главная кривизна 1, 1012; 2, 253; 3, 97
- норма элемента алгебры 2, 212
Главная нормаль 1, 1013; 2, 249
- нумерация 5, 418
- ось линии второго порядка 2, 1034
- парабола 5, 993
- поверхность комплекса 2, 1003
- - конгруэнции 5, 613
- полоса 4, 472
- поляризация 4, 477
- сеть отображения 4, 157
- теорема Гартогса 1, 893
Главная трансляция 1, 1013
Главная часть дифференциального оператора 1, 1013
- - ряда Лорана 1, 265
Главного типа оператор с частными производными 1, 1013
Главное аналитическое расслоение 1, 1013—1015
- значение аргумента комплексного числа 2, 1009
- - логарифма 3, 408
- - несобственного интеграла 3, 1019
Главное направление 1, 1015; 2, 252; 3, 97
- однородное G-множество 1, 1018
Главное однородное пространство 1, 1015
- основание изгибания 2, 493
- открытое множество 5, 102
Главное расслоение 1, 1015
Главное фундаментальное решение эллиптического уравнения 1, 1016
Главный дивизор 2, 129
- - Вейля 2, 130
Главный идеал 1, 813, 1017; 2, 482
- -, область 1, 1019
- идель 2, 486
- -, группа 4, 401
- коннекс 2, 1035
- масштаб 2, 741, 746
- минор системы линейных уравнений 3, 357
- многочлен алгебры 2, 212
- нормальный ряд группы 3, 1076
Главный G-объект в топологизированной категории 1, 1017
Главный ряд 1, 1018; 2, 485
- - подгрупп 4, 368
- символ линейного дифференциального оператора 3, 366
- - оператора 4, 1135
- скрещенный гомоморфизм 4, 1205
- след элемента алгебры 2, 212
Главный фактор полугруппы 1, 1019
- фильтр 5, 615
Главный характер 1, 1019; 2, 192
Главных идеалов кольцо 1, 1019
Гладкая выпуклая поверхность 1, 788
- динамическая система 2, 147
- - -, множество гиперболичности 1, 998
- коцепь 1, 411
- структура 2, 355
Гладкая схема 1, 1020
- точка поверхности 2, 756
Гладкая точка функции 1, 1021
Гладкая функция 1, 1021
τ-гладкая мера Бореля 1, 537
Гладкий гомеоморфизм 2, 234
- каскад 2, 757
Гладкий континуум 1, 1021
Гладкий морфизм 5, 300
Гладкий морфизм схем 1, 1021
- -, теорема о специализации 5, 1025
- поток 4, 538
σ-гладкий функционал 3, 643
τ-гладкий функционал 3, 643
Гладкое пространство 1, 1022
- - аналитическое 1, 285
- - банахово 1, 389
Гладкости класс 2, 357
Гладкости модуль 1, 1022
Гливенко — Кантелли теорема 5, 998
Гиссона доля 1, 133
Глобализуемая псевдогруппа преобразований 4, 731
Глобальная проблема Торелли 5, 406
Глобальная размерность аналитического пространства 1, 285
Глобальная структура траекторий 1, 1022—1024
Глобально выпрямляемая динамическая система 4, 417
Глобально симметрическое риманово пространство 1, 1024—1026
Глобального минимума точка 3, 602
Глобальное поле 1, 1026; 2, 157; 4, 400
Глобальные оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Глобальный анализ 3, 962
- индекс пересечения 4, 255
Глубина модуля 1, 1026
- схемы из функциональных элементов 5, 302
Годограф 1, 651, 1027
- Михайлова 3, 707
- скорости 2, 530
Годографа преобразование 1, 1027
Голди теорема о классически полупростых кольцах 2, 868
- - о кольцах 1, 341
Голоморф группы 1, 1028; 4, 913
Голоморфизм 1, 471
Голоморфная выпуклость 1, 800; 5, 899
- - слабая 5, 899
- кривая 1, 249
- матрица 1, 251
- отделимость 5, 899
- редукция пространства 1, 1029
Голоморфная форма 1, 1028
- -, Дольбо — Серра теорема 1, 1029
Голоморфная функция 1, 262, 268, 269, 1029; 4, 1014; 5, 690
- -, Адамара теорема о трех кругах 1, 87
- -, Блоха теорема 1, 506
- -, Бляшке теорема 1, 509
- -, Бюрмана теорема 1, 570
- -, Гартогса основная теорема 1, 269
- -, Гартогса теорема 1, 893
- -, Гурвица теорема 1, 1150

- -, компактное семейство 2, 993
- -, Кузена проблемы 1, 273
- -, Кузена теорема 1, 616
Голоморфно выпуклая область 1, 272, 1031
Голоморфно выпуклое комплексное пространство 1, 1029
- полное многообразие 5, 899
- - пространство 5, 899
Голоморфное векторное поле 2, 278
Голоморфное отображение 1, 268, 282, 285, 1030
- - локально обратимое 1, 1030
- - невырожденное 1, 1030
- представление 1, 283
- расслоение 1, 639
- число Лефшеца 3, 239
Голоморфности область 1, 272, 1030—1032; 4, 414
- -, Беенке — Штейна теорема 1, 396, 1031
- -, Картана — Туллена теорема 1, 1031
Голоморфности оболочка 1, 273, 1032
- полуплоскость 2, 184
- прямая 2, 184
Голоморфный автоморфизм области 1, 471
- дифференциал 2, 239
- изоморфизм 1, 471
- комплекс де Рама 1, 1029
Голономии группа 1, 1032
Голономная сеть 4, 1122
Голономная система 1, 1033
Голономные координаты 1, 1034
Голономный линейный дифференциальный оператор 3, 368
Голоэдрия арифметическая 3, 108
- геометрическая 3, 108
Голубева теорема о мероморфных функциях 4, 566
Голубева — Привалова теорема о комплексной суммируемой функции 1, 1034
- - - об интеграле типа Коши — Стилтьеса 3, 54
- - условие 1, 1034
Голузина теорема искажения 2, 669
Гольдбаха проблема в теории чисел 1, 1035
- - ослабленная 1, 94
Гольдбаха — Варинга проблема в теории чисел 1, 1035
Гольдбаха — Эйлера квазипроблема 1, 93
Гомеоморфизм 1, 1035—1038; 3, 152; 5, 390
- алгебр 2, 961
- вполне минимальный 2, 806
- гладкий 2, 234
- графов 1, 1116
- дифференцируемый 2, 234
- локальный 3, 444
pl-гомеоморфизм 4, 411
Г-гомеоморфизм 3, 743
Гомеоморфизмов группа 1, 1038
Гомеоморфное отображение 1, 1035
Гомеоморфные пространства 1, 1035; 5, 390
Гомеотопий группа 1, 1038; 3, 33
Гомографическое преобразование 1, 301
Гомогруппа 3, 692
Гомоклиническая точка 1, 1039
Гомоклинический контур 1, 956
Гомоклиническое решение 1, 1039
Гомологии Александрова — Чеха 1, 234; 5, 126
Гомологии база 1, 1040
- Вьеториса 1, 828
- групп 2, 911
- - кос 3, 34, 35
Гомологии группа 1, 1040—1042
Гомологии динамической системы 1, 1042
- и когомологии специальные 1, 234
Гомологии комплекса 1, 1042
- - группа 2, 998
- локальные 3, 441
- относительные 4, 151
Гомологии полиэдра 1, 1043
Гомологии с компактными носителями 1, 1044
- сингулярные 4, 1178
- спектральные 5, 126
Гомологии теория 1, 1044—1049
- -, гомоморфизм 1, 1047
- -, изоморфизм 1, 1047
- - обобщенная 1, 1046
- - частично полуточная 1, 1046
- Чеха 5, 126
Гомологий аксиоматическая теория 5, 231
- алгебраический класс 1, 180
- группа 4, 1163
- теория обобщенная 3, 1123
Гомологическая алгебра 1, 1049—1052
- - относительная 4, 143
- группа 1, 1140
Гомологическая классификация колец 1, 1052
- коразмерность 1, 1027
Гомологическая последовательность 1, 1045, 1052, 1058; 2, 1000, 1002
- - триад 1, 1047, 1048
- - троек 1, 1047
Гомологическая размерность 1, 1053—1055
Гомологическая размерность пространства 1, 1055
- - слабая 1, 1053
- сфера 4, 748
- теория размерности 1, 1055; 4, 823
Гомологически эквивалентные алгебраические циклы 1, 181
Гомологические умножения 1, 1056
Гомологический поперечник 1, 1060
Гомологический функтор 1, 1057
Гомологическое многообразие 1, 1058
Гомологическое опоясывание 1, 1060
Гомологичный нулю цикл 1, 1043; 2, 953
Гомология в проективной геометрии 1, 1060; 2, 951
- гиперболическая 1, 1060
- неособенная 1, 1060
- особенная 1, 1060
-, ось 1, 1060
- параболическая 1, 1060
- полярная 2, 1085
-, проекционная группа 2, 36
- сильная 4, 1130, 1206
- слабая 4, 1205
-, спектровая группа 2, 36
-, центр 1, 1060
Гомоморфизм 1, 1061
- автоматов 1, 68
- алгебраический алгебраической группы 1, 142
- Бокштейна 2, 923
- граничный 1, 1063
- групповых объектов 1, 1149
- Гуревича 1, 1066; 4, 1165
-, Гуревича теорема 1, 1066
- естественный 5, 592
- Левина 5, 482
- локальный 3, 267, 425
- метрический 3, 667
- надстройки 1, 1067
- неукорачивающий 5, 644
- операторный 4, 22, 25
- пополняющий 4, 1084
- порядковый 5, 522, 524
- пучков 4, 767
- связывающий 2, 999, 1000
- сильный 1, 1061
-, p-я симметрическая степень 4, 1141
- Ω-систем 1, 156
- скрещенный 2, 917; 4, 1205
- теории гомологии 1, 1047
- топологический 5, 384
- топологических колец 5, 386
- Уайтхеда 5, 463
-, ядро 2, 962; 3, 1073; 4, 372
J-гомоморфизм 5, 463
l'-гомоморфизм 5, 256
T-гомоморфизм 1, 722
y-гомоморфизм 5, 524
Гомоморфизма образ 2, 961
- теорема 5, 497
Гомоморфные автоматы 1, 68
Гомоскедастичность 1, 1061
Гомотетичные фигуры 1, 1061
Гомотетия 1, 1061
-, коэффициент 1, 1061
-, A-модули 4, 458
-, центр 1, 1061
Гомотопии аксиома 1, 1045; 5, 231
- оператор 4, 632
- теория 1, 1076
Гомотопическая группа 1, 1062—1068; 4, 1165
- - n-мерная 1, 1063
- - пары 1, 1063
- - пространства 1, 1063
- - стабильная 5, 163
- - сфер стабильная 1, 1067
- - - стационарная 1, 1067
- - схемы 1, 1075
- единица 4, 713
- последовательность расслоения 1, 1064
- резольвента 1, 1070, 1072; 4, 515, 516
- система 1, 1064
- трансгрессия 1, 1064
- эквивалентность 5, 397
S-гомотопическая группа 2, 48
Гомотопически ассоциативное отображение 4, 713
- инвариантный функтор 1, 1062
- мономорфное отображение 1, 1068
- обратный элемент 4, 713
- n-простое пространство 1, 1065
- устойчивое отображение 4, 128
- эквивалентные пространства 1, 1068
- эпиморфное отображение 1, 1068
Гомотопические группы сфер 5, 283
Гомотопический тип 1, 1068—1074
- -, проблема 1, 1068
- - простой 4, 707
Гомотопический тип топологизированной категории 1, 1074
Гомотопия 1, 1075; 2, 1002; 4, 1164
- клеточная 2, 878
- накрывающая 3, 887; 4, 1166
- отображений пар 1, 1076
- регулярная 4, 358
- свободная 1, 1075
- симплициальная 4, 1169
Гомотопность отображений 1, 1075
Гомотопные морфизмы 2, 1002
Гомотопные симплексы 4, 1165
Гомотопные симплициальные отображения 4, 1164
Гониометрия 1, 1076
Гоноэдр Эрмита — Минковского 2, 788
Гонсета парадокс 1, 295
Гончарова константа 1, 30
- полином 1, 30
- проблема 1, 29
Горбушка 4, 1102
Гординга неравенство 1, 1076
Гореншгейна кольцо 1, 1076
- схема 1, 1077
Гореншгейнова особенность 4, 915
Горизонтальная плоскость проекций 3, 895
Горизонтальное отображение 4, 154
- поднятие кривой 4, 1098
- подпространство 4, 154
Горизонтальное распределение 1, 1077
Горловой эллипс 1, 1000, 1078
Горнера схема 1, 1078
Гравитационная масса 3, 536
Гравитация 1, 1078—1080
Градиент 1, 895, 1080—1082
- скалярного поля 1, 648
- тензора 2, 898
- функционала 3, 960
Градиента метод 3, 603
Градиентная динамическая система 1, 1082
- система 5, 86
Градиентное поле 1, 1082; 4, 536
Градиентное преобразование 1, 1082—1084
Градиентной инвариантности свойство теории поля 1, 1083
Градиентный метод 1, 1084
- спуск 1, 593
Градуированная алгебра 1, 1084
- - Ли 3, 251
- проективная размерность 1, 1053
Градуированное кольцо 1, 1084
Градуированно - коммутативная супералгебра 5, 276
Градуированный модуль 1, 1084
- -, Гильберта многочлен 1, 967
- объект 2, 1001
Градус 1, 1084
Грама матрица 1, 1084
Грама определитель 1, 1085
Грама — Шарлье ряд 1, 1086
Грама — Шмидта процесс ортогонализации 1, 982; 4, 80
Грамматика 1, 1087
Грамматика автоматная 1, 1087
Грамматика бесконтекстная 1, 1087—1090
- - однозначная 1, 1088
-, временная сложность 1, 1092
Грамматика доминационная 1, 1090
-, емкость 1, 1092
- зависимостей 1, 1090
Грамматика категориальная 1, 1090
- конечно-автоматная 1, 1087
- контекстная 1, 1093
- контекстно-свободная 1, 1087
Грамматика линейная 1, 1091
- матричная 1, 1089
- обобщенная 1, 1092
Грамматика порождающая 1, 1092
- программированная 1, 1089
- с конечным числом состояний 1, 1087
- с порядком 1, 1089
Грамматика составляющих 1, 1093—1095
-, схема 1, 1092
Грамматика трансформационная 1, 1095
- Хомского 1, 1092
КС-грамматика 1, 1087
НС-грамматика 1, 1093
Гранди функция 2, 475
Граней оператор 4, 1161, 1167, 1169
Граница 1, 1095; 2, 260
- абсолютной погрешности 4, 356
- виперовская гармоническая 4, 1030
- - идеальная 4, 1030
- внутренняя 1, 738
- выпуклости функции 1, 799
- доверительная 2, 365, 367
- звездообразности 2, 450
- кольцевая 2, 965
- множества, площадь 4, 330
- области 3, 1097
- относительной погрешности 4, 356
- полуплоскости 4, 462
- функции аддитивная 1, 1042
- - мультипликативная 1, 1042
- Шилова 2, 965, 987
- Шоке 2, 966
- элемента комплекса 2, 995
Граничная задача Карлемана 2, 725
- мера 5, 264
- поверхность 2, 1015
- теорема единственности 4, 566
- - - Лузина — Привалова 2, 402, 403
- точка достижимая 2, 377
- - иррегулярная 2, 666; 4, 275, 533
- - луча 2, 1015
- - неособая 3, 968
- - регулярная 4, 275, 533, 933
Граничное значение по всем некасательным путям 5, 466
- - радиальное 2, 403; 4, 802
- - угловое 2, 402; 4, 566; 5, 466

- предельное множество 4, 567
- условие 3, 605
Граничные задачи теории аналитических функций 1, 1095—1098
Граничные свойства аналитических функций 1, 1098—1102
- - конформных отображений 2, 1099
Граничные условия 1, 1102; 3, 86
- - типа Штурма 5, 915
Граничные элементы области 1, 1102, 1103
Граничный гомоморфизм 1, 1063
- морфизм 1, 1053, 1057
- оператор 1, 1047, 1063; 2, 953, 998
- символ 4, 1135
- элемент, дополнительная точка 1, 1103
- -, Каратеодори теорема 1, 1103
- -, носитель 1, 1103
- - римановой поверхности 4, 1029
- -, смежная точка 1, 1103
- -, тело 1, 1103
Граничных вариаций метод 1, 1103
Грань аналитического полиэдра 1, 277
- верхняя 1, 672
- - точная 5, 834
- выпуклого многогранника 1, 801
- - тела 1, 797
Грань многогранника 1, 1104; 3, 708
- многогранного угла 3, 712
- нижняя 1, 672; 3, 1036
- - точная 5, 834
- области Вейля 1, 629
- симплекса 2, 996; 3, 151; 4, 681, 1152, 1159
- элемента комплекса 2, 995
Грассмана алгебра 1, 732; 2, 732, 735
Грассмана многообразие 1, 1104
Грассмановы координаты 1, 732; 4, 334, 681
Грауэрта теорема конечности 2, 1025
Граф 1, 1105—1108
-, автоморфизм 1, 1112
- асимметричный 1, 1112
-, базис циклов 1, 1110
- бихроматический 1, 1108
- булевой функции 1, 557
- вершина 1, 1105
-, вложение 1, 1115
- гамильтонов 1, 1113
-, гамильтонов цикл 1,1113,1119
-, гамильтонова цепь 1, 1113
- гамильтоново связный 1, 1113
-, гомеоморфизм 1, 1116
Граф двудольный 1, 1108
-, дерево 2, 91
-, диаметр 1, 557, 1106
-, добавление вершины 1, 1107
-, - ребра 1, 1107
- дополнительный 1, 1106
-, древесность 1, 1120
-, дуга 1, 1005, 1108
-, замкнутый маршрут 1, 1108
-, изолированная вершина 1, 1106
-, изоморфизм 1, 1105, 1116
- Кокстера 2, 944; 3, 17
-, компонента связности 1, 1114
-, контур 1, 1108
-, концевая вершина 1, 1106
- критический 1, 1111
-, крупность 1, 1120
-, маршрут 1, 1106, 1108
-, матрица инцидентности 1, 1105, 1108
-, - смежности 1, 1105, 1108
-, независимости число 1, 1120
- неориентированный 1, 1105
-, обход 1, 1112
Граф ориентированный 1, 1105, 1108
-, отклоненность вершины 1, 557
- Петерсена 1, 1112
-, петля 1, 1105
- планарный 1, 1109
Граф плоский 1, 1109, 1115
-, плотность 1, 1120
-, подразбиение ребра 1, 1107, 1116
- полный 1, 1106
-, полюс 4, 968
-, Понтрягина — Куратовского теорема (критерий) 1, 1109, 1119
-, правильная укладка 1, 1115
-, простая цепь 1, 1106
-, простой цикл 1, 1106
-, пустой 1, 1106
-, путь 1, 1108
-, радиус 1, 557, 1106
-, разрез 1, 1114
-, раскраска 1, 1113
-, расстояние 1, 1106
-, реберное хроматическое число 1, 1120
- реберный 1, 1106
-, ребро 1, 1105
- регулярный 1, 1106
-, род 1, 1115
- с выделенными полюсами 4, 1122
- связный 1, 1106, 1114
- - односторонне 1, 1109
- сильносвязный 1, 1109
- сильный 1, 1109
- слабосвязный 1, 1109
- слабый 1, 1109
-, сложение 1, 1107
Граф случайный 1, 1110
-, смежные вершины 1, 1105
-, - ребра 1, 1105
-, степень вершины 1, 1106
-, стягивание ребра 1, 1107
-, теория 1, 1117
-, толщина 1, 1115, 1120
- тотальный 1, 1106
-, удаление вершины 1, 1107
-, - ребра 1, 1107
-, укладка 1, 1115
- k-факторизуемый 5, 591
-, хроматический класс 1, 1114
-, - многочлен 1, 1114
-, хроматическое число 1, 1113, 1120
-, центр 1, 1106
-, цепь 1, 1106
-, цикл 1, 1106
-, цикломатическое число 1, 1120
-, число вершинной связности 1, 1114, 1120
-, - внешней устойчивости 1, 1120
-, - внутренней устойчивости 1, 1120
-, - реберной связности 1, 1114, 1120
-, - скрещиваний 1, 1115
-, числовые характеристики 1, 1120
-, Эйлера теорема 1, 1112
- эйлеров 1, 1113
-, эйлеров цикл 1, 1112
-, эйлерова цепь 1, 1112
Граф экстремальный 1, 1111
Графа автоморфизм 1, 1112
Графа обход 1, 1112
Графа раскраска 1, 1113
Графа связность 1, 1114
Графа укладка 1, 1115
График замкнутый 2, 436; 5, 384
- Куратовского 3, 150
- мероморфного отображения 3, 651
- многозначного отображения 3, 720
- оператора 4, 19
График отображения 1, 1115; 5, 384
- сетевой 4, 1119, 1121
-, усечение 4, 27
- функции 5, 713
Графический матроид 3, 623
- способ задания функции 5, 717
Графическое равенство 1, 1116
Графов гомеоморфизм 1, 1116
Графов изоморфизм 1, 1116
Графов теория 1, 1117—1120
Графов числовые характеристики 1, 1120
Грегори формула 1, 1121
Греда метод 5, 854
Греко-латинский квадрат 4, 90
Гретцера — Шмидта теорема о решетках Стоуна 5, 234
Грётша принцип для конформных отображений 1, 1121
Грётша теоремы о конформных отображениях 1, 1122
Греффе метод 3, 401
Грина интеграл 1, 876, 1126
Грина линии 1, 1122
- объемный потенциал 4, 529
Грина отношения эквивалентности на полугруппе 1, 1122
- потенциал двойного слоя 4, 529
Грина пространство 1, 1123
- ребро 4, 668
- теорема о голоморфном отображении 4, 286
Грина формула для потенциалов 4, 527
Грина формулы 1, 270, 876, 1123—1126; 5, 83
Грина функция 1, 1126—1132; 2, 178; 3, 75, 530
- -, Боголюбова неравенство 1, 510
- - в статистической механике 1, 1131
- - комплексная 1, 1131; 5, 889
- -, линия уровня 5, 544
- - обобщенная 4, 531
Грина — де Рама оператор 5, 789
Гринова емкость 2, 405
Грисса — Нельсона логика 2, 1041
Гриффитса гипотеза о компактификации 4, 155
- многообразие 4, 154
- промежуточный тор 4, 697
Гробмана — Хартмана теорема о динамических системах 3, 422
Гроздь выборочная 1, 774
Громола — Майера теорема о кривизне 3, 101
Гронуолла метод суммирования 1, 1132
Гротендика группа 1, 161, 1133
- дуализирующий пучок 2, 35
Гротендика категория 1, 1133
- когомологии 2, 907
- кольцо 4, 595
- лемма для дифференциальных форм 2, 264
- теорема жесткости 2, 989
- - о полных сепарабельных пространствах 2, 44
- - о пучках 4, 770
Гротендика топология 1, 1134; 5, 365
Гротендика функтор 1, 1134
Грубая ошибка 4, 181, 183
Грубая система 1, 1134; 2, 768
- схема 3, 772
Грубость локальная 3, 422
Груда 1, 1135
- обобщенная 1, 1136
Груды и полугруды 1, 1135
Групского неравенство 2, 669; 3, 1169
- теорема о конформном отображении 3, 727
Групп категория 1, 1136
- когомологии 2, 909, 916
Групп многообразие 1, 1136—1138
Группа 1, 1138—1141
- абелева 1, 17
- абсолютно неприводимая 3, 995
- автоморфизмов 1, 198
- - билинейной формы 1, 483
- аделей 1, 95
-, алгебра мер 1, 881
- алгебраическая 1, 142
- алгебраически компактная 5, 880
- аменабельная 2, 535; 5, 512
- аналитическая 1, 245
- анизотропная 1, 290; 3, 487
- арифметическая 1, 321
- артинова 1, 327
- архимедова 1, 328
-, ассоциированная с квазигруппой 2, 802
- аффинная 1, 352, 362
- Барсотти — Тейта 2, 82
Группа без кручения 1, 1142
- без малых подгрупп 5, 369
- без центра 5, 66, 802
- бесконечного порядка 4, 504
- Бетти 1, 464
- бинарная p-адическая 1, 486
- Брауэра 1, 544; 2, 911
- Брауэра — Гротендика 1, 546
- Брискорна 3, 36
- Вейля 1, 625; 3, 16
- - группы Ли 1, 626
- - системы Титса 5, 354
- Вейля — Шатле 1, 631
- векторная 1, 636
-, вербальное произведение 1, 654
- Витта 1, 711, 712, 714
- Витта — Гротендика 1, 715
- вложимая 2, 1022
-, внешний автоморфизм 1, 736
-, внутренний автоморфизм 1, 736
- внутренних автоморфизмов 4, 639
- вращений 4, 81
-, второй член нижнего центрального ряда 2, 981
- вырожденная 2, 877
- Галилея 1, 844; 4, 148
- Галуа 1, 845, 850, 1139
- гамильтонова 1, 858
-, главный ряд 1, 1018
- главных иделей 4, 401
-, голоморф 1, 1028
- голономии 1, 1032
- гомеоморфизмов 1, 1038
- гомеотопий 1, 1038; 3, 33
- гомологии 1, 1040
- - комплекса 2, 998
- - r-мерная 1, 1043
- - проекционная 2, 36
- - спектровая 2, 36
- гомологий 2, 911; 4, 1163
- - алгебры 2, 911
- - Александрова — Чеха 1, 234
- - Вьеториса 1, 830
- - группы 2, 911, 917
- гомологическая 1, 1140
-, гомологическая размерность 1, 1054
- гомотетических преобразований 4, 373
- гомотопическая 1, 1062; 4, 1165
- S-гомотопическая 2, 48
- Гротендика 1, 161, 1133
- движений 2, 22, 529
- - однородного пространства 3, 1175
-, действие 4, 382
- действующая свободно 4, 383
- делимая 4, 415
- p-делимая 2, 82
- диагональная 2, 123
- дивизоров Вейля 2, 130
- Диксона 2, 138
- дискретная 2, 195
- дифференциальная 2, 260
- диэдра 2, 363
- диэдральная 2, 363
- доупорядочиваемая 2, 378
- единиц Пелля 1, 164
- единица 1, 1138
-, Жордана — Гёльдера теорема 2, 424
- зависимости точки 4, 1184
- замкнутая в смысле Шура 5, 920
- знакопеременная 2, 464
- идеалов 2, 129
- иделей 1, 95; 2, 486
- изометрий 2, 529
- изотропии 2, 521; 4, 731; 5, 163
-, инвариантная компонента 2, 876
-, инвариантное подмножество 2, 534
-, инвариантный ряд 3, 1076
-, интеграл Фурье 1, 882
- иррегулярная 4, 383
- калибровочная 5, 1060
- квазидиэдральная 2, 806
- квазиразложимая 2, 820
- квазирасщепимая 2, 820
- квазифуксова 2, 876
- квазициклическая 2, 827; 4, 416
- кватернионов 2, 840
- классическая 2, 865
- классов в смысле Вебера 1, 168
- - дивизоров 2, 129

- - идеалов 2, 129
- - иделей 4, 401
- клейнова 2, 875
- Клиффорда 2, 882; 5, 138
- когомологий 2, 909, 919; 4, 1163
- когомологическая комплекса 2, 998
-, когомологическая размерность 1, 1054
- когомотопическая 2, 927
- S-когомотопическая 2, 48
- Кокстера 2, 944
-, коммутант 2, 981
- коммутативная 2, 989
- компактная 2, 991
- конечная 2, 1016
- конечно определенная 2, 1019; 4, 34
- - порожденная 2, 1019
-, конечный ранг 1, 1143
- конформных преобразований 2, 1084
-, конпредставление 3, 10
-, конпреобразование Фурье 1, 882
-, Коши теорема 3, 63
- коэффициентов теории гомологии 1, 1046
- кратно примитивная 4, 636
- кратно транзитивная 5, 411
- кремоновых преобразований 4, 917
- Кремоны 3, 94, 95
- кристаллографическая 3, 106
- критическая 1, 1137
- Куммера 3, 148
-, левое (правое) регулярное представление 2, 992
- Ли 1, 245; 3, 254
- линейная 3, 300
- - алгебраическая 3, 297
- - классическая 3, 303
- линейно упорядоченная 3, 322
- линейного комплекса 4, 1157
-, линейное представление 3, 292
- локально бикомпактная, групповая алгебра 1, 1145
- - конечная 3, 432
- - нильпотентная 3, 435
- - нормальная 3, 435
- - разрешимая 3, 436
- - свободная 3, 436
- - циклическая 1, 17
- Лоренца 3, 453; 4, 82, 147
- максимальная почти периодическая 2, 1022
- массивная 5, 511
- матричная 3, 619
- Матьё 3, 623
- метабелева 3, 652
- метанильпотентная 4, 408
- метациклическая 3, 653
- Милнора 1, 162
- минимальная простая 3, 690
- многогранника 3, 711
-, множество разрывности 2, 875
-, модуль 5, 741
- модулярная 3, 784, 788
- - Клейна 2, 195
- монодромии 1, 176; 3, 806
- мономиальная 2, 560; 3, 812
- мультиоператорная 3, 839
- мультипликативная 3, 840
- непрерывная 3, 982
- Нерона — Севери 1, 180; 2, 132; 3, 1005; 4, 283
- нётерова 3, 1025
- нехопфова 3, 1030
- нильпотентная 3, 1042
- норм 3, 1076
-, нормальный ряд 3, 1076
-, область транзитивности 4, 382
- обобщенная 3, 1103
- обобщенно нильпотентная 3, 1110
- - разрешимая 3, 1111
-, обратные элементы 1, 1138
-, общий ранг 4, 861
- односвязная 3, 1182; 5, 891
- операторная 4, 21
-, орбита 4, 382
- ортогональная 2, 866; 4, 81, 478
- π-отделимая 4, 139
- относительно свободная 4, 1082
- отражений 4, 158
-, период 4, 265
- периодическая 4, 266
- периодов 2, 50; 4, 268
- Пикара 4, 283
- подобных преобразований 4, 373
- подстановок 4, 382
- - примитивная 4, 635
- - унипримитивная 4, 635
-, показатель 4, 159, 265
- полинильпотентная 4, 408
- полициклическая 4, 410
- полная 4, 415
- - линейная 4, 416
-, положительный конус 5, 833
- полупростая 4, 465, 804
-, полупрямое произведение 4, 466
- полурегулярная 4, 383
- поляритета 4, 478
-, порядок 2, 1016
- правая 4, 550
- правоупорядоченная 4, 553
-, предельное множество 2, 875
-, предпучок 4, 581
-, представление 4, 382, 586
-, преобразование Фурье 1, 882
- преобразований 4, 599
- - алгебраическая 1, 143
- - дискретная 2, 195
- - однопараметрическая 3, 1170
- приведенная 2, 888
- приведенно свободная 4, 1082
- примарная 1, 1142
- примитивная 2, 524
- присоединенная 4, 639; 5, 891
- проективная 4, 666, 679
-, проективное представление 4, 678
- производная 2, 981
- проконечная 4, 694
- простая 4, 700
- просто транзитивная 4, 383
- прямоугольная 1, 762
- псевдовогнутая 1, 81
- псевдоортогональная 4, 83
- псевдоунитарная 5, 507
- Пуанкаре 3, 453; 4, 745; 5, 680
-, Пуанкаре гипотеза 2, 159
-, радикал 4, 804
-, разложение по нормальному делителю 5, 36
- -, по подгруппе 5, 36
- разложимая 4, 814
- разрешимая 4, 850
- π-разрешимая 4, 851
-, ранг 2, 737; 4, 861
- расщепимая 3, 487
- расщепляемая 4, 912
-, регулярное представление 4, 383
- редуктивная 4, 946
- редуцированная 1, 19
- решеточно упорядоченная 4, 984; 5, 255

Группа с однозначным извлечением корня 1, 1142
- с полугруппой операторов 4, 22

Группа с условием конечности 1, 1143

Группа с условием максимальности для подгрупп 1, 1144; 3, 1025

Группа с условием минимальности для подгрупп 1, 327, 1144
- сверхразрешимая 4, 1077
- свободная 4, 1082
- Σ-свободная 4, 22
-, связная компонента единицы 4, 1091
- семидиэдральная 2, 806
-, сжатие 4, 1125
- симметрии 4, 1150
- симметрий 1, 1140
- симметрическая 4, 382, 1141
- симплектическая 2, 866; 4, 478, 1154
- сингулярных гомологий 1, 1042
- скольжений 4, 1203
- скрученная 5, 891
- слойно конечная 1, 1144
-, смежный класс 5, 36
- смешанная 5, 36
- совершенная 5, 66
- спектральных гомологий 5, 126
- специальная линейная 5, 411
- проективная 4, 416
-, специальный ранг 4, 861
- спинорная 2, 882; 5, 138
-, сплетение 5, 147
- Стейнберга 1, 162
- строго транзитивная 5, 411
- структурная 4, 1034
- структурно упорядоченная 5, 255
-, субнормальный ряд 3, 1076; 5, 266
- Судзуки 5, 268
-, схема 1, 1146

Группа типа p^∞ 1, 1144; 2, 827
- топологическая 5, 367
- - векторная 5, 379
- транзитивная 5, 411
- треугольная 5, 428, 680
-, треугольное усечение 1, 900
- триангулируемая 5, 428
- Уайтхеда 1, 161; 5, 463
- универсальная 5, 891
- унимодулярная 1, 359; 2, 866; 3, 782; 5, 411, 504, 741
- унипотентная 5, 504, 505
- унитарная 2, 866; 5, 505, 1021
- Уолла 5, 519
- упорядоченная 5, 522
- упорядочиваемая 5, 528
- федоровская 5, 600
- финитно аппроксимируемая 5, 620
- формальная 5, 638
- фуксова 2, 876; 5, 678
- фундаментальная 5, 680
- функциональная 2, 876
-, характер 4, 547; 5, 747
- характеров 5, 766
- - алгебраического тора 1, 179
- хопфова 3, 1030; 5, 794
- Цассенхауза 5, 797
-, целая часть 5, 833
-, центр 5, 802
-, центральное произведение 5, 809
-, центральный ряд 5, 811
- циклическая 2, 1019; 5, 816
-, циклический индекс 2, 978
- частично упорядоченная 5, 833
- Шафаревича — Тейта 1, 847
- Шевалле 5, 890
- Шмидта 5, 894
- Шотки 2, 877; 5, 516
-, Шрейера теорема 2, 424
- эквиаффинная 1, 359
-, экспонента 5, 953
- элементарная 2, 876
- элементарных автоморфизмов 4, 192
- энгелева 5, 999

ИПП-группа 2, 1022
b-группа 2, 877
l-группа 5, 255
M-группа 3, 812
n-группа 1, 1141
O^*-группа 2, 378
p-группа 1, 1142
- регулярная 4, 934

R-группа 1, 1142
ZA-группа 3, 1049
Ω-группа 3, 839
- мультиоператорная 2, 981

Групповая алгебра 1, 1144
Групповая алгебра локально бикомпактной группы 1, 1145
- -, Капланского проблема 1, 1144
- Мальцева — Неймана теорема 1, 722, 1145
- -, Машке теорема 1, 1144

Групповая скорость 1, 1146
Групповая схема 1, 1146
- -, Картье теорема 1, 1147
- - коммутативная 2, 989

Групповое исчисление 1, 1147—1149
- кольцо 4, 1204
- - группы 1, 1144
- слово 1, 1136

Групповой автомат 1, 67
Групповой объект категории 1, 1149
- элемент 2, 883

Группоид 1, 1150
- Брандта 1, 544
- естественно упорядоченный 2, 407
- свободный 4, 1087
- строгий частично упорядоченный 5, 527
- упорядоченный 5, 527
- фундаментальный 5, 684

Группы классов, ведущий модуль 1, 167
- узлов и зацеплений 5, 476

Грэтцера — Шмидта теорема об алгебраической решетке 1, 155
Гудмена гипотеза о многолистных функциях 3, 726
Гука закон 1, 1150
Гурвица критерий 1, 1150; 4, 914
- - устойчивости 5, 558
- матрица 4, 914
- многочлен 4, 914
- соотношение 4, 1000

Гурвица теорема о голоморфных функциях 1, 1150
- - о квадратичных формах 2, 779
- условие 4, 914

Гурвица формула 1, 1150; 4, 1000
Гуревича гомоморфизм 1, 1066; 4, 1165
- изоморфизм 1, 1064; 4, 765
- расслоение 3, 887
- теорема для относительных групп 1, 1066
- - о гомоморфизме 1, 1066
- - об изоморфизмах 4, 1166
- формула для повышающих (понижающих) размерность отображений 4, 828

Гурса задача 1, 1150—1152
Гурса конгруэнция 1, 1152
- поверхность 5, 923
- формула 5, 86
- - для гармонических функций 1, 878

Густота дерева 1, 1089
Гюйгенса принцип 1, 1152

Д

Д'Аламбера вариационный принцип 1, 597
Д'Аламбера оператор 2, 9
Д'Аламбера признак сходимости 2, 9
Д'Аламбера принцип 2, 10
Д'Аламбера уравнение 2, 11; 3, 175
Д'Аламбера формула 2, 11; 3, 48; 4, 763
Д'Аламбера — Гаусса теорема о корнях многочлена 2, 1008
Д'Аламбера — Лагранжа принцип в механике 2, 11
- - - вариационный, 1, 597
Д'Аламбера — Эйлера условия 2, 12; 3, 67
Даламбертиан 2, 9
Далекие множества 1, 500
Дальности действия принцип 1, 1079
Данделена метод 3, 401
Данделена шары 2, 12
Данжуа интеграл 2, 12
- класс квазианалитических функций 2, 799

Данжуа теорема о производных числах 2, 13
Данжуа — Карлемана теорема о квазианалитичности 2, 799
Данжуа — Лузина теорема о тригонометрических рядах 2, 13
Данжуа — Степанова теорема об аппроксимативной непрерывности функции 1, 303
Данжуа — Хинчина интеграл 5, 786
- - теорема об аппроксимативной производной 1, 304

Даниеля интеграл 2, 14
- схема 2, 14

Данные Коши 3, 47
Дантово пространство 2, 15

Дарбу вектор 2, 15
- геодезическая окрестность 1, 928
- задача 1, 1151; 5, 39
- инвариант 2, 18
Дарбу инварианты сети 2, 15
- интеграл 2, 17
Дарбу квадрика 2, 15
- линия 2, 18
- направление 2, 16
Дарбу поверхности 2, 16, 18
- свойство сходимости 4, 532
Дарбу сумма 2, 16—18
Дарбу тензор 2, 18
Дарбу теорема о производной 2, 18
Дарбу трехгранник 2, 18
- триэдр 2, 18
Дарбу уравнение 2, 19
Дарбу — Зауэра теорема об изгибаниях 1, 436
Дарбу — Пикара задача 1, 1151
Дарвина — Фаулера метод 2, 20
Даукера теорема о размерности 4, 829
Дважды стохастическая матрица 4, 272; 5, 239
Дверное пространство 2, 20
Движение 2, 20—22
- в псевдоевклидовом пространстве 4, 740
- в римановом пространстве 4, 1004
- евклидово, подгруппа 1, 362
- инфинитезимальное 2, 856
- квазипериодическое 2, 819
- метрического пространства 5, 625
Движений группа 2, 22, 529
Двоеточие 2, 23
- связное 5, 391
Двоичная единица 2, 23
Двоичная система счисления 2, 23
Двоичный дисконтинуум 2, 23
- код 2, 932
Двойная плоскость 2, 23
Двойная последовательность 2, 24
- -, повторный предел 4, 350
- рациональная особенность 4, 119, 915
Двойная точка 2, 24; 3, 88; 4, 124
Двойного отрицания закон 2, 25
- слоя запаздывающий потенциал 2, 860
- - логарифмический потенциал 3, 411
- - ньютонов потенциал 3, 1095; 4, 524
Двойного слоя потенциал 2, 26; 4, 524
- - -, Гаусса формула 4, 526
- - - Грина 4, 529
- - - логарифмический 4, 524
- - -, прямое значение 4, 524
Двойное векторное произведение векторов 1, 635
Двойное отношение 2, 27
- число 2, 31
Двойной интеграл 2, 28; 3, 92
- комплекс 1, 481
Двойной модуль 1, 485; 2, 28
Двойной предел 2, 28
Двойной ряд 2, 29—31
- слой, плотность 3, 1107
- шестисторонник Шлефли 2, 1080
Двойные и дуальные числа 2, 31
Двойственная задача линейного программирования 3, 354
Двойственная категория 2, 32, 762
- конфигурация 2, 1077
Двойственное пространство 5, 510
- - векторное 1, 644
- частично упорядоченное множество 5, 834
Двойственно-инвариантные конфигурации 2, 1077
Двойственности принцип 1, 126; 2, 32—34
- - в проективной геометрии 4, 680
- теорема Атьи 5, 363
- - для топологических групп 5, 373
- - Макки — Аренса 2, 44
- - Понтрягина 4, 481
- - - о группе характеров 1, 882
- - Пуанкаре 2, 35
- - Танака — Крейна 4, 482
- - Фробениуса 2, 559
Двойственность 2, 34—47
- Александера 1, 230, 231
- Александера — Понтрягина 1, 231
- в алгебраической геометрии 2, 34
- - - топологии 2, 35
- в выпуклом анализе 2, 45
- в теории аналитических пространств 2, 39
- - - - функций 2, 41
- - - топологических векторных пространств 2, 43
- Колмогорова 2, 953
- конечных абелевых групп 2, 47
- Лефшеца 3, 236
- Лефшеца — Пуанкаре 3, 236; 4, 745
- локально выпуклых пространств 5, 383
- операций 1, 126
- Понтрягина 1, 231; 4, 481
- Пуанкаре 4, 745
- Ситникова 1, 1059; 5, 228
- Спеньера 2, 47
- стационарная 2, 47
- Стинрода 5, 228
***S*-двойственность** 2, 47—49
Двойственные выпуклые тела 1, 797
- гиперграфы 1, 1006
- проективные плоскости 4, 669
Двойственные функции 2, 49
Двойственный базис 2, 49
- код 2, 929
- линейный оператор 1, 645
- модуль 5, 88
- симплексный метод 3, 354
Дворецкого — Роджерса теорема о сходимости в банаховом пространстве 1, 391
Двоякокруговая область 2, 49
Двоякопериодическая функция 2, 50
Двояко-стохастическая матрица 3, 616
Двувершинное распределение 1, 485
Двугранный угол 2, 50
Двудольный граф 1, 1108
Двужидкостная модель плазмы 2, 50
Двузначная логика 2, 51
Двукратная рекурсия 4, 964
Двумерная вариационная задача 3, 728
Двумерная клетка 2, 51
- поверхность, хроматическое число 1, 1113
Двумерное кольцо 2, 51
Двумерное многообразие 2, 51—56
- -, Гаусса—Бонне теорема 2, 56
- - замкнутое ориентируемое 2, 51
- -, Кернса теорема 2, 56
- -, комбинаторная эквивалентность 2, 53
- - компактное ориентируемое 2, 52
Двумерное многообразие ограниченной кривизны 2, 56
- - открытое 2, 53
- -, Римана—Гурвица формула 2, 55
- -, Тейхмюллера теорема 2, 56
- -, Уайлдера теорема 2, 54
- проективное пространство 4, 668
Двумерный многоугольник 3, 749
Двумерный узел 2, 57
Двуместная операция 4, 18
Двуполостный гиперболоид 1, 1000; 2, 58
Двусвязная область 3, 748, 1098
Двусторонне инвариантная мера Хаара 5, 741
- инвариантный интеграл 2, 531
- образующее разбиение 5, 1004
Двустороннее борелевское множество 2, 58
- преобразование Лапласа 3, 196
Двусторонние методы 2, 59
- связи 1, 1034
Двусторонний идеал 2, 481
- - минимальный 3, 693
- нуль 3, 1082
Двусторонняя гипотеза 4, 1138
- квадратичная форма 2, 790
Двусторонняя оценка 2, 58
Двусторонняя поверхность 2, 59; 3, 1183
Двуугольник сферический 2, 59; 5, 290
Двух констант теорема 2, 59
Двух тел задача 2, 60
Двухступенчатый план 5, 183
Двухточечный тензор 2, 61
Двухфакторная схема 2, 219
Двучленное сравнение 2, 61
Двучленное уравнение 2, 62
Дебаевская длина 2, 62
Дебаевский радиус 2, 62
Дёблина условие для эргодической цепи Маркова 3, 522
Дебре теорема в математической экономике 3, 590
Девиатор 2, 63
- тензора деформаций 2, 102
- - напряжений 3, 891
Девяти точек окружность 2, 63
Дедекинда аксиома 2, 63
- - бесконечности 1, 455
- - непрерывности 3, 889
Дедекинда дзета-функция 2, 63, 117
- - класса дивизоров 2, 118
Дедекинда признак сходимости 2, 63
- принцип 2, 63
Дедекинда теорема о непрерывности 2, 63
Дедекинда—Адамара теорема о множителях суммируемости 5, 275
Дедекиндова решетка 2, 63
- - с дополнениями 2, 64
- структура 2, 63
Дедекиндово кольцо 2, 64
- полное упорядоченное векторное пространство 4, 470
- правило 4, 680
Дедекиндово сечение 2, 65; 3, 322, 986
Дедуктивная полнота 3, 413
- система 2, 685; 5, 639
Дедуктивно полная система равенств 1, 128
Дедукции теорема 2, 65
Дезарга конфигурация 2, 66, 1078
Дезарга предложение 2, 66
- теорема 2, 66
Дезаргова геометрия 2, 67
- проективная плоскость 4, 669
Дезаргово пространство 2, 67
Дезориентирующая цепочка симплексов 4, 71
Дезориентирующий путь 2, 68; 4, 70
Дейвиса гипотеза о диофантовых уравнениях 2, 174
Действие 2, 68
- в вариационном исчислении 1, 966
- в классической механике 1, 600
Действие группы 2, 68; 4, 382
- по Гамильтону 1, 600
Действительная коническая поверхность, 2, 1033
- ось 2, 1008
- - гиперболы 1, 988
Действительная функция 2, 70; 5, 716
- часть комплексного числа 2, 1007
Действительно замкнутое поле 5, 527
Действительное алгебраическое многообразие 2, 70—72
- векторное пространство 1, 642
- кручение Рейдемейстера 4, 953
- перемещение 1, 1033
Действительное число 2, 73—78
- - вычислимое 1, 821; 2, 1050, 1055
- -, десятичное приближение 2, 98
- -, Кантора теорема 2, 714
- - конструктивное 2, 1050, 1055
- -, мера иррациональности 2, 666
- -, модуль 1, 34
Действительнозначная функция 5, 715
Действительный характер Дирихле 2, 192
- эллипс 5, 977
- эллиптический цилиндр 5, 993
- эллипсоид 5, 978
Действия коалиция 2, 887
- функция 4, 43
Действующая свободно группа 4, 383
Декарта правило знаков 2, 78
Декарта теорема о корнях многочлена 2, 78
Декартов квадрат 2, 79; 4, 896
Декартов лист 2, 79
Декартов овал 2, 79
Декартова подгруппа 1, 654
Декартова прямоугольная система координат 1, 243; 2, 80
- форма записи комплексного числа 2, 1008
Декартово замкнутая категория 2, 433
Декартово произведение 2, 80; 4, 723
- - многозначных отображений 3, 720
- - Ω-систем 1, 157
Декартово разложение 2, 80
- сплетение групп 5, 147
Декартовы координаты 2, 80
- - прямоугольные 1, 634
Декодер 2, 933
Декодирование 2, 80, 649, 931, 938
- квантовое 2, 708
оптимальное 4, 41
Декодирования ошибочного вероятность 4, 185
Декомпозиция 3, 354, 715
Декремент подстановки 4, 382
Деламбра формулы 5, 292
Дележ 2, 80, 470
Деление 2, 81
- в крайнем и среднем отношении 2, 466
- гармоническое 2, 466
- комплексных чисел 2, 1008
- степенных рядов 5, 219
Деления круга многочлен 2, 81
Деления круга поле 2, 82; 3, 120
- - уравнение 2, 82
Делимая абелева группа 1, 19
- группа 4, 415
***p*-делимая группа** 2, 82
Делимое 2, 81
Делимости признак 2, 83—85
Делимость в кольце 2, 85
- неограниченная 3, 656
Делителей проблема аддитивная 1, 90
в арифметических прогрессиях 2, 87
- - Дирихле 2, 85
- - обобщенная 2, 86
Делителей проблемы 2, 85—88
Делителей число 2, 88
- -, Дирихле формула 2, 86
Делитель 2, 81, 85, 88
Делитель единицы 2, 88, 400
- идеальный 2, 128
- наибольший общий 3, 865
- нормальный 3, 1073; 5, 91
Делитель нуля 2, 88
-, Дирихле формула 2, 188
- элементарный 3, 1053; 5, 976
Дель Пеццо поверхность 4, 917; 5, 597
Дельсарта оператор обобщенного сдвига 3, 1111
Дельта амплитуды 2, 88
Дельта-функции метод 2, 89
Дельта-функция 2, 89; 3, 1105
- Дирака 2, 89, 175

Демидовича теорема об устойчивости 4, 69
Демиквадрика 2, 90
Демулена поверхность 2, 90
- прямая 2, 90
Демулена теорема о геликоидах 2, 90
- тетраэдр 2, 90
Демулена четырехугольник 2, 90
Дена лемма о трехмерном многообразии 2, 90
- копредставление 5, 479
Дендрит 2, 91
Денотат 2, 91, 525
Денотационная семантика 4, 651
Денумерант 2, 91
Де Рама голоморфный комплекс 1, 1029
Де Рама когомологии 2, 91; 4, 855
Де Рама кручение 2, 91; 4, 855
Де Рама теорема 2, 91; 4, 855
«Деревенский парикмахер» 1, 295
Дерево 2, 91
- вывода 1, 780, 1093
-, густота 1, 1089
- информационное 1, 73
- разбора 1, 223
- синтаксического подчинения 4, 1183
- случайное 1, 1111
- составляющих 4, 1182
- фундированное 5, 421
Деривационные формулы Вейнгартена 1, 631
Десингуляризация 4, 849
- алгебраического многообразия 4, 118
Дескриптивная теория множеств 2, 93—97
Десятисторонник 2, 1079
Десятичная дробь 2, 97, 389
- - бесконечная 1, 434
Десятичная система счисления 2, 98
Десятичное приближение 2, 98
Детальный поиск 3, 757
Детерминант 2, 99; 4, 30
- в программировании 4, 651
- эрмитова пространства 5, 1022
- эрмитовой формы 5, 1022
Детерминантная гиперповерхность 2, 99
- сумма матриц 1, 722
Детерминантное многообразие 2, 99
Детерминантный идеал 2, 99
Детерминированная задача 2, 677
- машина 3, 628
- сетевая модель 4, 1120
- функция 3, 1161
Детерминированный автомат 1, 48
Дефект 2, 99
- в смысле Валирона 4, 888
- - - Неванлинны 4, 888
- зацепления 5, 480
- массы 3, 536
- матрицы 3, 617
- подпространства 1, 981
- полуевклидова пространства 4, 467
- поляритета 4, 478
- сплайна 5, 143
Дефект треугольника 2, 100
- формы 2, 299
Дефектное значение 2, 100
Дефектное подпространство 2, 100; 4, 904
- число 4, 904
- - оператора 2, 99
Дефектов соотношение 2, 100; 4, 888
Дефинизации метод 1, 987
Дефинизирующий оператор 2, 101
Дефинитное подпространство 4, 718
Дефинитное ядро 2, 101
Деформаций тензор 2, 101
Деформационный ретракт 2, 102; 4, 976
Деформация 2, 102—108
-, алгебраизуемость 2, 106
- алгебраического многообразия 2, 105
- алгебры 2, 107
- аналитическая 2, 103
- аналитической структуры 2, 102
- версальная 2, 103; 4, 129; 5, 361
- изометрическая 2, 505
- инфинитезимальная 2, 103, 105
- истинного цикла 2, 681
- локально полная 2, 103
- многообразия 4, 118
- особенностей 4, 118
- подмножества 2, 108
- схемы 2, 105
- тривиальная 2, 108
- универсальная 2, 103
- формальная 2, 105, 107
- формально жесткая 2, 108
Деформируемых систем устойчивость 5, 578
Дециль 2, 108, 829
Дешифровка лингвистическая 3, 567
Джеймса теорема о гомотопических последовательностях 5, 284
- - о пространствах Фреше 2, 44
Джексобсона кольцо 2, 108
Джексобсона радикал 2, 109; 3, 485; 4, 807
- схема 2, 109
- теорема плотности 1, 341
Джексона неравенство 2, 109
- оператор 2, 110
Джексона сингулярный интеграл 2, 110
Джексона теорема в теории приближения 2, 110
- ядро 2, 110
Дженкинса теорема о коэффициентах 2, 110—112
Джет 2, 112; 5, 257
Дживера — Ху геометрическая реализация симплициального топологического пространства 4, 1164
Джини коэффициент рассеяния 2, 112
Джини средняя разность 2, 112
Джойн 2, 112; 3, 153; 5, 72
Дзета-функция 2, 112—122
- Артина — Шмидта 2, 119
- в алгебраической геометрии 2, 119
- в теории чисел 2, 112
- Вейерштрасса 1, 623
- Дедекинда 2, 63, 117
- - класса дивизоров 2, 118
-, нетривиальные нули 4, 878
- Римана 2, 112; 4, 992
- -, Линделёфа гипотеза 3, 285
-, функциональное уравнение 2, 1006
Диагонализируемая алгебраическая группа 2, 122
- групповая схема 2, 989
- линейная группа 2, 123
Диагонализируемое линейное пространство 3, 351
Диагональ 2, 123; 4, 664
- многоугольника 3, 750
- тихоновского произведения 1, 672
Диагональная группа 2, 123
Диагональная матрица 2, 123
Диагональная подгруппа 2, 123
- точка 4, 664; 5, 598
Диагональная цепная дробь 2, 123
Диагонально клеточный оператор 2, 123
Диагональное кольцо 2, 124
Диагональное произведение отображений 2, 124
Диагональный оператор 2, 124
Диагональный процесс 2, 125
Диаграмма 1, 1087
- автомата 1, 72
- алгебраической системы 3, 766
Диаграмма в категории 2, 125, 762
- Венна 1, 653
- вращений 1, 765
- Гартогса 1, 893
- коммутативная 1, 1050
- модели 3, 770
- Найквиста 3, 883
- Ньютона 3, 1090
- поворотов 4, 346
- Пюизё 3, 1090
- Фрезера 5, 661
- Хегора 5, 780
- элементарная 3, 770
- Юнга 5, 1027
Диаграммный язык 3, 770
Диаграммы узлов и зацеплений 5, 478
Диада 2, 126
Диадическая операция 4, 18
Диадический бикомпакт 1, 475; 2, 126
Диадическое пространство 2, 127
Диалоговый процессор 1, 225
Диаметр 2, 127
- гиперболический 5, 422
- гиперболы 1, 988
- графа 1, 557, 1106
- линии 2-го порядка 2, 127
- множества 2, 127
- окружности 4, 15
- параболы 4, 191
- трансфинитный 5, 422
- эллипса 5, 978
- эллиптический 5, 423
Дивергентного вида дифференциальный оператор 3, 959
Дивергенция 2, 127
- векторного поля 1, 649
Дивизор 2, 128—132
- абелева дифференциала 1, 15
- главный 2, 129
-, группа классов 1, 144; 2, 129, 871
- дифференциальной формы 2, 266
- дробный 2, 129
-, индекс специальности 1, 151
- исключительный 2, 675
- Картье 2, 130
-, Клиффорда теорема 2, 882
- нулей функции 2, 130
- положительный 1, 144; 2, 129
- полюсов функции 2, 130
- простой 2, 129
- Пуанкаре 4, 746
-, Римана — Роха теорема 1, 15
- специальный 1, 145
-, степень 1, 144; 2, 132; 3, 648
- целый 2, 128, 484
- эффективный 1, 144; 2, 131
Дивизориальный идеал 2, 132
- -, Нагата теорема 2, 871
Дигамма-функция 4, 744
Диезная норма 2, 133
- коцепь 2, 133, 134
Диезная форма 2, 134
- функция 2, 135
- цепь 2, 133
Дизъюнктивная база 1, 371
σ-дизъюнктивная база 1, 371
Дизъюнктивная нормальная форма 1, 126, 563; 2, 135
- - - тупиковая 5, 449
- промежуточная логика 4, 695
Дизъюнктная сумма 2, 135
Дизъюнктное дополнение 2, 135, 374
- множество 2, 136; 4, 471
Дизъюнктное семейство множеств 2, 135
Дизъюнктные представления 2, 136; 5, 147
Дизъюнктные элементы 2, 136; 4, 471
Дизъюнкция 1, 124; 2, 137
-, введения правило 1, 781
- разделительная 4, 811
-, реализация 2, 1047
- слагаемых 1, 125
-, удаления правило 1, 781
- элементарная 1, 563
Дикая сфера 2, 137
Дикий узел 2, 137
Дикого типа алгебра 4, 585
Дикритический узел 5, 475
Дикое вложение 2, 138; 4, 1061
Диксона группа 2, 138
Диксона инвариант 2, 138
Дилатация 2, 139, 810; 4, 1125
- минимальная 4, 1127
- степенная 5, 119
- унитарная 4, 1127
Диметрия 1, 113
Динамика 2, 139—141
- релятивистская 4, 969
- символическая 4, 1135
Динамика сорбции 2, 141
- топологическая 5, 369
Динамики общее уравнение 1, 597
- ряд 1, 768
Динамическая задача 2, 677
Динамическая игра 2, 143
- логика 4, 653
Динамическая система 1, 82; 2, 143—149
- - вполне неустойчивая 4, 417
- - гармонизуемая 1, 871
- -, гиперболическая точка 1, 990
- - гладкая 2, 147
- - глобально выпрямляемая 4, 417
- -, гомологии 1, 1042
- - градиентная 1, 1082
- - дистальная 2, 229
- -, интегральный инвариант 2, 601
- -, каскад 2, 757
- -, когомологии 1, 1042
- -, метрическая теория 5, 1010
- - минимальная 3, 691
- - Морса — Смейла 3, 830
- - нормальная 3, 1050
- -, периодическая точка 4, 267
- -, предельная точка 4, 563
- -, рекуррентная точка 4, 954
- - с дискретным временем 2, 147
- - с непрерывным временем 4, 538
- - сдвигов 4, 1100
- -, спектр 5, 101
- - топологическая 5, 371
- -, траекторная эквивалентность 5, 1011
- -, энтропийная теория 5, 1003
- -,эргодичность 5, 1013
Динамические задачи теории упругости 2, 149—154
Динамический пограничный слой 4, 356
- процесс 4, 37
Динамическое программирование 2, 154—156
Дини признак сходимости 2, 156
- производное число 4, 690
- теорема о поверхностях Лиувилля 3, 392
Дини теорема о равномерной сходимости 2, 156
Дини — Липшица признак сходимости 2, 156
- - условие 4, 96
Динк 4, 550
Диностратa квадратриса 2, 156
Диоклеса циссоида 5, 826
Диофантов анализ 2, 157
Диофантов предикат 2, 157
Диофантова геометрия 2, 157—161
- -, высота 1, 812
- -, логарифмическая высота 1, 813
Диофантово множество 2, 161
- уравнение Маркова 3, 515
- -, Виноградова гипотеза о количестве решений 1, 701
Диофантовы приближения 2, 162—167
- -, Дирихле теорема 2, 186
Диофантовы проблемы аддитивного типа 2, 167
Диофантовы уравнения 2, 168—171
Диофантовых приближений метрическая теория 2, 171—173
Диофантовых приближений проблемы эффективизации 2, 173
Диофантовых уравнений проблема разрешимости 2, 174
Дипольный момент 3, 843
Диполя потенциал 3, 843
Дирака дельта-функция 2, 89, 175
Дирака матрицы 2, 175
- оператор 5, 140
Дирака спинор 2, 175
Дирака уравнение 2, 175—177; 5, 898
- δ-функция 3, 1105

Директриса 2, 177, 1015; 5, 633
- Вильчинского 4, 668
гиперболы 1, 988
- параболы 4, 191
Дирихле алгебра 1, 133
Дирихле вариационная задача 2, 177
- главный характер 1, 1019
- данные 4, 236
Дирихле задача 2, 178—180; 3, 83, 203, 4, 236
--, Валле Пуссена формула 1, 782
- - внешняя 4, 527
- - внутренняя 4, 527
- -, выметания метод 1, 781
- -, обобщенное решение 1, 671
- -, - - в смысле Перрона — Винера 4, 530
Дирихле интеграл 2, 181; 3, 205
- норма 5, 1003
- область 1, 755; 2, 196
Дирихле признак сходимости 2, 181
Дирихле принцип 2, 181
Дирихле принцип «ящиков» 2, 182
- проблема делителей 2, 85
Дирихле разрывной множитель 2, 182
Дирихле распределение 2, 183
Дирихле ряд 2, 183—186
- -, Абеля теорема 1, 29
Дирихле ряд для аналитической почти периодической функции 2, 186
- L-ряд 2, 188
- сингулярный интеграл 2, 194
Дирихле теорема 2, 186—188
- - о диофантовых приближениях 2, 186
- - о единицах поля алгебраических чисел 1, 165; 2, 187
- - о рядах Фурье 2, 188
- - об арифметических прогрессиях 2, 187
- условия 2, 188
Дирихле формула числа делителей 2, 86, 188
Дирихле функция 2, 188
Дирихле L-функция 2, 188—191
- -, Пейджа теорема 4, 231
Дирихле характер 2, 191—193
Дирихле ядро 2, 193; 5, 1043
Дирихле — Вороного разбиение 4, 810
Дирихле — Дугласа функционал 4, 218
Диск 2, 194
-, раздвижка 5, 403
- секущий 4, 1058
- срединный 4, 1058
-, сильная теорема 3, 990
Дисконтинуум двоичный 2, 23
- канторов 2, 715, 718
Дискрепанс 2, 194
Дискретная алгебра Неймана 3, 921
- аффинная схема 1, 358
- база 1, 371
Дискретная группа преобразований 2, 195—198
- математика 2, 207, 1018
Дискретная мера 2, 198
- метрика 3, 658
- оптимизация 5, 800
- плоскость 4, 319
Дискретная подгруппа 2, 198—202
- подкатегория 4, 371
- проективная прямая 4, 671
Дискретная серия представлений 2, 202, 4, 1117
Дискретная сходимость 5, 311
Дискретная топология 2, 202
σ-дискретная база 1, 371
Дискретно компактная последовательность 5, 311
- нормированное кольцо 2, 203
- сходящаяся последовательность 5, 311
Дискретного нормирования кольцо 2, 203
Дискретное нормирование 2, 204
- преобразование Фурье 5, 730
Дискретное программирование 2, 204, 678; 5, 800
Дискретное пространство 2, 205, 953
Дискретное пространство-время 2, 205
- прямое произведение 4, 722
Дискретное распределение вероятностей 2, 206; 5, 9
Дискретное семейство множеств 2, 207; 3, 433
- сплетение групп 5, 147
- частично упорядоченное множество 5, 834
Дискретные системы 2, 207
Дискретный анализ 2, 207—209
- преобразователь 4, 654
- принцип максимума 3, 496
- спектр 5, 101
- эргодический метод Линника 3, 389
Дискриминант 2, 209—212
- алгебры 2, 211
- базиса 2, 210
- бинарной квадратичной формы 1, 486
- в теории эллиптических функций 3, 788
- идеала 2, 211
- многочлена 2, 209
- модуля 2, 211
- полуторалинейной формы 2, 210
- поля 2, 211
- системы элементов поля 2, 210
- $\wp$-функции 1, 622
Дискриминантная кривая 2, 212
Дискриминантная функция 2, 213
Дискриминантное подмножество 4, 118
Дискриминантный анализ 2, 213—217
Дискриминантный информант 2, 217
Дискриминантный тензор 2, 217
Дискриминации правило 2, 213
Дискриминация информационная 2, 331
Дисперсии точка 2, 217
Дисперсионное отношение 2, 217, 222; 5, 627
Дисперсионное соотношение 2, 217
Дисперсионное уравнение 2, 218
Дисперсионный анализ 2, 218—223; 4, 181
Дисперсионный метод 1, 260; 2, 223—225
Дисперсия 2, 225
- выборочная 1, 774; 5, 999
- эмпирическая 2, 661
Дисперсное пространство 2, 226, 4, 1096
Диссипативная система 2, 227, 768
Диссипативная функция 2, 227
Диссипативное расширение 4, 905
Диссипативный оператор 2, 228; 4, 905
Дистальная динамическая система 2, 229
Дистрибутивная квазигруппа 2, 229, 803
- операция 2, 231
Дистрибутивная решетка 2, 230
- - векторная 4, 471
- структура 2, 230
Дистрибутивно порождаемое почтикольцо 4, 550
Дистрибутивности закон 1, 125
Дистрибутивность 2, 230
Дистрибутивный кольцоид 2, 968
Дифракции математическая теория 2, 231—234
Дифункциональное соответствие 5, 78
Диффеоморфизм 2, 234, 356
- Морса — Смейла 3, 830
U-диффеоморфизм 2, 234; 4, 1195
C^r-диффеоморфизм 3, 743
Дифференциал 2, 234—237, 260, 273
- абелев 1, 13, 2, 240
- аналитический 1, 276; 2, 239
- аппроксимативный 1, 302
- билинейный 1, 485
- внешний 2, 262, 733
- гармонический 2, 239
- Гато 1, 895
- - оператора 3, 960
- голоморфный 2, 239
- замкнутый 2, 238
- квадратичный 2, 241, 786
- ковариантный 2, 897, 900
- козамкнутый 2, 238
- коточный 2, 238
- Ли 3, 261
- линейный 2, 241
- меромофный 2, 239
Дифференциал на римановой поверхности 2, 237—241
- - - - первого рода 1, 1029
- обратный 2, 241
- отображения 2, 352
-, период 2, 238
- повторный 2, 274
- полный 2, 236, 275; 4, 428
- представления 1, 447
-, размерность 2, 241
- регулярный 2, 239
- - аналитический 2, 239
- слабый 1, 895
- стохастический 5, 241
-, тип 2, 241
- точный 2, 238
- Фреше 1, 274, 5, 664
- - оператора 3, 960
- частный 2, 236, 274; 5, 837
- Шварца 5, 885
Дифференциалов модуль 2, 241
Дифференциальная алгебра 2, 242
Дифференциальная алгебра (наука) 2, 242—247
Дифференциальная геометрия 2, 247—254
- - аффинная 1, 352
- - локальная 3, 423
Дифференциальная геометрия многообразий 2, 254—260
Дифференциальная группа 2, 260
- квадратичная форма, Кристоффеля символ 3, 110
Дифференциальная окрестность 2, 260, 3, 423
- подстановка 5, 677
- размерность 4, 825
- - множества 2, 243
- сепарабельность 4, 825
- система 2, 547
- - жесткая 2, 410
- специализация точки 2, 245
- структура 2, 355
Дифференциальная топология 2, 260—262
Дифференциальная форма 2, 262—266
- - внешняя 2, 733, 735
- - каноническая левая 3, 625
- - леммы Шварца 5, 887
- функция 4, 901
Дифференциальная энтропия 2, 267
Дифференциально алгебраическое расширение 4, 901
- сепарабельное расширение 4, 901
Дифференциально - геометрическая структура 2, 267
Дифференциально - геометрический объект 1, 938
Дифференциальное включение 2, 268
- выражение 2, 345
Дифференциальное исчисление 2, 269—277
Дифференциальное исчисление на аналитических пространствах 2, 277—279
Дифференциальное кольцо 2, 279
Дифференциальное неравенство 2, 279; 5, 158
Дифференциальное поле 2, 280
- -, расширение 4, 900
- - стесненно замкнутое 4, 901
- - частных 4, 901
Дифференциальное уравнение Абеля 1, 25
Дифференциальное уравнение абстрактное 2, 280
- -, аналитическая теория 1, 251
- -, аппроксимация разностным 1, 307
- - бесконечного порядка 1, 444
Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах 2, 282
- вполне интегрируемое 1, 759
- -, замкнутая система 4, 422
- -, интеграл 2, 567
- -, интегрирование в замкнутой форме 2, 610
- -, качественная теория 2, 765
- - Колмогорова 3, 519, 526
- -, Коши задача 3, 45
- -, линейная система 2, 765
- - линейное в банаховом пространстве 3, 329
- - - с постоянными коэффициентами 3, 343
- - малого параметра метод 3, 498, 502
- - матричное 3, 620
- - многозначное 2, 268
- -, нелинейная система 2, 766
- - нелинейное 3, 943
- -, нормальная форма системы 3, 1058
- -, обобщенное решение 3, 1116
- -, общее решение 3, 1146
- -, общий интеграл 3, 1148
Дифференциальное уравнение обыкновенное 2, 282—290
- - -, Грина функция 1, 1127
- - - линейное 3, 339
- - - второго порядка 3, 337
- - -, краевая задача 3, 74
Дифференциальное уравнение обыкновенное, приближенные методы решения 2, 290—294, 626
- -, особая точка 4, 120
- -, особое решение 4, 131
- - осцилляционное 4, 138
- - Пирсона 4, 94
- -, полная система 4, 422
- -, порядок 4, 504
- - Римана 4, 992
Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом 2, 294
- - с многозначной правой частью 2, 268
Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом 2, 294—298
- - с периодическими коэффициентами 3, 312
- - с почти периодическими коэффициентами 3, 317
Дифференциальное уравнение с частными производными 2, 298—302
Дифференциальное уравнение с частными производными, вариационные методы решения 2, 302—304
Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка 2, 323
- - - - вырожденное 1, 809
- - - - гиперболического типа 1, 992
- - - -, Грина функция 1, 1129
Дифференциальное уравнение с частными производными, задача с данными на характеристиках 2, 304
Дифференциальное уравнение с частными производными, задача с косой (наклонной) производной 2, 304—306
Дифференциальное уравнение с частными производными, задача с разрывными коэффициентами 2, 306
Дифференциальное уравнение с частными производными, задача с разрывными начальными (краевыми) условиями 2, 307—309
Дифференциальное уравнение с частными производными, задача со свободными границами 2, 309
- - - -, краевая задача 3, 76—78
- - - - линейное 3, 344

Дифференциальное уравнение с частными производными, метод уравнений Фишера — Рисса, метод Пиконе 2, 309—311
Дифференциальное уравнение с частными производными; методы комплексного переменного 2, 311—318
- - - - нелинейное 3, 950
Дифференциальное уравнение с частными производными; функциональные методы решения 2, 318—323
Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка 2, 324—328
Дифференциальное уравнение с частными производными с особенностями в коэффициентах 2, 328
- - самосопряженное 4, 1072
- - сопряженное 5, 83
- - стохастическое 2, 362; 5, 243
- -, Фукса класс 1, 252
- -, частное решение 3, 1146
Дифференциально - разностное уравнение 2, 294, 329
Дифференциально-функциональное уравнение 2, 329
Дифференциальные игры 2, 329—336, 472
Дифференциальные уравнения на торе 2, 338—340
Дифференциальные уравнения с малым параметром при производных 2, 340—343
Дифференциальные уравнения; системы бесконечного порядка 2, 336—338
Дифференциальный бином 2, 343
- вес 2, 435, 3, 1099; 4, 93
- -, Чебышева теорема 5, 845
- идеал, Ритта — Рауденбаха теорема 2, 242
- - совершенный 2, 242
Дифференциальный инвариант 2, 343
Дифференциальный комитант 2, 344
- многочлен, кольцо 1, 1019; 4, 901
Дифференциальный оператор 2, 345—348; 4, 900
- -, аппроксимация разностным 1, 305
- - внутренний 1, 736
- -, главная часть 1, 1013
- - дивергентного вида 3, 959
- - инвариантный 2, 537
- - линейный 2, 278, 3, 364
- - максимальный 5, 108
- - минимальный 5, 108
Дифференциальный оператор модуля 2, 348
- -, расширение 4, 905
- - симметрический 5, 108
- -, спектральная теория 5, 108
- - существенно самосопряженный 5, 108
- - формально самосопряженный 5, 108
- -, фундаментальное решение 3, 1109
- -, численные методы нахождения собственных значений 5, 59
Дифференциальный параметр 2, 349
- - Бельтрами 2, 350, 3, 205, 206
- - Ламе 2, 350
- - Шварца 5, 885
- пучок 4, 769
- росток 2, 278
- тип множества 2, 243
- - расширения 4, 825
Дифференциатор 2, 349
Дифференцирование 2, 270, 350, 4, 689
- абсолютное 2, 896
Дифференцирование в силу системы 2, 351
- в среднем квадратичном 5, 27
- внешнее 2, 351
- внутреннее 2, 351; 4, 640
- дробное 2, 383
- ковариантное 2, 896
Дифференцирование кольца 2, 350
- Ли 3, 261
Дифференцирование отображения 2, 351—353
Дифференцирование по сети 2, 353
- рядов почленное 4, 1069
- с вероятностью 1 5, 27
- сильное 4, 1131
Дифференцирование численное 2, 353, 629
Дифференцирования метод 3, 175
- оператор 4, 20, 26
- по параметру метод 3, 947
Дифференцируемая функция 2, 235, 270, 273, 275, 354; 4, 689
- - в смысле комплексного анализа 1, 262, 268
- - по Гато 1, 274
- - по Фреше 1, 274
- эквивалентность автономных систем 1, 84
Дифференцируемое многообразие 2, 354—357
- -, атлас 2, 755
- -, касательное расслоение 2, 755
- -, кватернионная структура 2, 839
- -, кокасательное расслоение 2, 755
- -, нормальное расслоение 2, 755
- - оснащенное 1, 938
- -, поток 4, 538
- отображение 2, 352
- -, особая точка 4, 123
- -, особенность 4, 125
- -, росток 4, 126
- по Фреше отображение 5, 666
- подмногообразие 4, 371
- представление 1, 446
Дифференцируемости класс 2, 357
Дифференцируемость аппроксимативная 1, 302
- по Гато 1, 895, 2, 352
- по Фреше 2, 352
Дифференцируемость решения 2, 357—359
- - по начальному значению 3, 60
Дифференцируемый вектор 1, 447, 2, 359
- гомеоморфизм 2, 234
- по Гато оператор 3, 960
- по Фреше оператор 3, 960
- случайный процесс 5, 27
Диффузии коэффициент 2, 361, 692
- процесс 1, 420
Диффузии уравнение 2, 359
Диффузионного типа процесс 2, 692
- - - управляемый 5, 531
Диффузионное приближение 2, 360
Диффузионные методы 2, 360
Диффузионный пограничный слой 4, 356
Диффузионный процесс 2, 361—363
Дихотомии метод 4, 429
Дихотомия 2, 363
- экспоненциальная 2, 771, 773; 3, 342
Диэдра группа 2, 363
Диэдральная группа 2, 363
Длина 2, 363
- аффинная 1, 364
- вектора 1, 632
- вывода 1, 1092
- гиперболическая 1, 988
- когомологическая 2, 763
- кода 2, 929
- кривой 2, 364; 5, 149
- - в римановом пространстве 4, 1003
- крюка 5, 1028
- пути 4, 1121
- разрешимости группы 4, 850
- слова 4, 1082
- собственная 4, 148
- субнормального ряда 5, 266
- - - подгрупп 4, 367
- цепи в схеме из функциональных элементов 5, 302
Длина частично упорядоченного множества 2, 364
- экстремальная 5, 959
Длинная гомологическая последовательность 2, 1002
Длины и объема принцип 2, 365
Длины и площади принцип 2, 364
Длительность передачи 2, 935
Дно оврага 3, 1153
Добавление вершины графа 1, 1107
- ребра графа 1, 1107
Доверительная вероятность 2, 365, 366, 615
Доверительная граница 2, 365, 367
- зона 2, 616; 4, 180
- оценка 3, 923
Доверительное множество 2, 365, 366, 615; 5, 198
Доверительное оценивание 2, 365—367
Доверительный интервал 2, 367, 615; 3, 923; 4, 178
- -, Неймана метод 3, 922
- коэффициент 5, 198
- предел 2, 367, 615; 3, 923
Доверительный уровень 2, 366, 367
Доверия коэффициент 2, 366, 615, 616, 3, 923; 4, 178, 5, 359
Додекаэдр 2, 367
Додекаэдра пространство 2, 367
Доказательств теория 2, 367—372; 3, 571
Доказательство 2, **367**, **372**; 5, 334
- индукцией 2, 557
- от противного 2, 25; 3, 1019
- финитное 1, 112
Доказуемая формула 2, 368, 3, 417
Докритический ветвящийся процесс 1, 681, 684, 685, 687, 688
Долговечность 3, 854
Долгота 5, 291
Дольбо теорема для дифференциальных форм 2, 265
Дольбо — Серра теорема о голоморфных формах 1, 1029
Доля Глиссона 1, 133
Доминанта 2, 372
Доминантная линейная форма 4, 590
Доминантный вес 4, 584
Доминационная грамматика 1, 1090
Доминирование 2, 372
Доминирования отношение 2, 1103
- принцип Картана 2, 373
Доминированное семейство распределений 4, 324
Доплера эффект 2, 373
Дополнение 2, 373
- алгебраическое 1, 188
- аналитическое 1, 278
- билинейное ортогональное 1, 484
- дизъюнктное 2, 135
-, Колмогорова теорема 2, 94
- множества 3, 759
- ортогональное 1, 980
- G-ортогональное 4, 718
- элемента 4, 983
Дополнения метод 4, 782
- формула Эйлера 1, 867
Дополнительная серия представлений 2, 374, 4, 1117
- - - унитарных 5, 512
- тактическая конфигурация 5, 319
- точка граничного элемента 1, 1103
Дополнительное подмножество 2, 373
Дополнительности условия 3, 79
Дополнительный граф 1, 1106
- модуль 3, 783; 5, 990
Допускающее след представление 5, 512
Допустимая подгруппа 4, 22
- подстановка 2, 804
- решетка 1, 945
Допустимое множество 5, 638
- - в математическом программировании 3, 602
- подпространство 2, 534
Допустимое правило 2, 375
- решающее правило 4, 6, 68
- решение 2, 676
- управление 1, 60; 4, 48, 488; 5, 536
π-допустимое проективное преобразование 4, 478
Допустимый вектор 1, 207
- кортеж 4, 538
- нормальный делитель 4, 22
- проективный объект 4, 683
- факторобъект 5, 596
- эпиморфизм 1, 471
Достаточная σ-подалгебра 2, 377
Достаточная статистика 2, 375—377, 661, 4, 176
- - минимальная 3, 683
- - необходимая 3, 683
Достаточное множество функционалов 2, 377
- условие экстремума Вейерштрасса 1, 619
Достижимая граничная точка 2, 377
Достижимая дуга границы 2, 377
Достижимая подгруппа 2, 377; 5, 266
- точка границы области 3, 1098
Достижимое пространство 2, 378
Достижимости область 4, 50
Достоверное событие 2, 378
Достоверность 2, 378
Доступная точка границы 2, 446
Доупорядочиваемая группа 2, 378
Древесность 5, 592
- графа 1, 1120
Древовидное многообразие 2, 379—381
- понятие вывода 3, 791
Дрейфовая система 2, 381
Дрейфовые уравнения 2, 381
Дробная доля числа 2, 382
Дробная конгруэнция 2, 382
- производная 1, 727, 2, 383
Дробная степень линейного оператора 2, 382
- часть числа 1, 297
Дробное интегрирование и дифференцирование 2, 383
Дробно-линейная функция 2, 384
Дробно-линейное отображение 2, 384—387
- преобразование 2, 384
Дробно-рациональная функция 2, 387; 4, 917
Дробный дивизор 2, 129
Дробный идеал 2, 387
- интеграл 2, 383
Дробных долей распределение 4, 875
Дробных шагов метод 2, 387—389
Дробовой эффект 2, 389
Дробь 2, 389
- аликвотная 1, 235, 315
- бесконечная десятичная 1, 434
- десятичная 2, 97, 389
-, знаменатель 2, 389, 464
- конструктивная 2, 1056
- неправильная 2, 389
- непрерывная 3, 982; 5, 812
- периодическая 1, 434, 2, 98
- подходящая 4, 384, 5, 812
- правильная 2, 389
- рациональная 4, 922
- цепная 5, 812
-, числитель 2, 389
Дружественные числа 2, 390
Дуализирующий пучок Гротендика 2, 35
Дуальная алгебра 2, 390
- категория 2, 32, 762
- корневая система 3, 16
- кривая 4, 310
Дуальная пара 2, 44, 391
- - подпространств 1, 986
- предсказуемая проекция 4, 1200

Дуально метрическое пространство 5, 1034
- ядерное пространство 5, 1034
Дуальное отображение 4, 310
- преобразование 3, 29
- соответствие 5, 78
- частично упорядоченное множество 5, 834
- число 2, 31
Дуальности принцип 4, 44
Дуальные интегральные уравнения 2, 600
- проективные плоскости 4, 669
Дуальный базис 2, 49
- идеал 2, 483, 5, 615
- модуль 5, 88
Дуба неравенства для мартингалов 3, 533
- теорема о сходимости субмартингалов 3, 534
Дублет 2, 391
Дубль римановой поверхности 2, 391
Дуга 2, 391
- аналитическая 1, 246
Дуга без контакта 2, 391, 4, 505
- графа 1, 1105, 1108
- жорданова 2, 391, 424
- окружности 4, 15
- простая 2, 391, 424, 3, 386, 4, 700
- Фату 5, 598
- Фока — Артина 2, 138
- эквиаффинная 1, 353
Дугласа задача 2, 392; 4, 302
Дугунджи теорема о продолжении метрики 3, 673
Дуффина — Кеммера матрица 2, 176
Дуффинга уравнение 2, 392
Дуэль 2, 392
Дыра черная 5, 461
Дьёдонне модуль 2, 393
- определитель 4, 31
Дэвиса неравенства для мартингалов 3, 534
Дюамеля интеграл 2, 393
- принцип 2, 394, 439
Дюбуа-Реймона лемма в вариационном исчислении 2, 394
- - о производных 4, 999
Дюбуа-Реймона признак 2, 394
Дюбуа-Реймона теорема о тригонометрических рядах 2, 394
Дю Валя особенность 4, 915
Дюпена индикатриса 2, 395, 3, 97
Дюпена теорема для поверхностей 2, 396
- - о триортогональных системах поверхностей 5, 446
Дюпена циклоида 2, 396

E

e 2, 397
Евдокса аксиома 1, 328, 652
Евклида аксиома параллельности 4, 778
Евклида алгоритм 2, 397
- «Начала» 3, 893
Евклида теорема о простых числах 2, 397, 4, 877
Евклидов симплекс 2, 996
Евклидова геометрия 2, 397; 4, 668
- -, Гильберта система аксиом 1, 969
- пространственная форма 4, 709
- реализация комплекса 2, 997
Евклидова связность 2, 398
Евклидово движение, подгруппа 1, 363
Евклидово кольцо 2, 398
Евклидово поле 2, 398, 1037
Евклидово пространство 2, 398
- -, движение 2, 20
- расслоение 2, 398
Егорова ряд 2, 399
- сеть 4, 536
Егорова система поверхностей 2, 399
Егорова теорема о сходимости 2, 400
Единица 2, 73, 400
- *p*-адическая 1, 100
- алгебраическая 1, 196
- гомотопическая 4, 713
- группы 1, 1138
- двоичная 2, 23
- кольца 2, 961
- круговая 3, 121
- левая 3, 790
- мнимая 2, 1007, 3, 708
- правая 3, 790
-, разложение 5, 118
- решетки (структуры) 2, 400
- сильная 1, 384, 4, 471
- слабая 4, 471
- сопряжения 5, 90
- частично упорядоченного множества 5, 834
Единичная подгруппа 4, 369
- Ω-система 1, 160
Единичное бинарное отношение 1, 488
Единичное представление 2, 401
Единичный вектор 1, 632, 4, 79
- - в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
- морфизм 2, 761
- оператор 4, 20
- поликруг 4, 405
Единственности множество 2, 401
Единственности свойства аналитических функций 1, 264, 2, 401—403
- свойство гармонических функций 1, 877
- - степенного ряда 5, 218
- теорема граничная 4, 566
- - для комплексных чисел 2, 1009
- - для почти периодических функций 4, 544
- - Привалова 4, 630
- - Ф. и М. Риссов 4, 566
- условия для конформных отображений 2, 1094
Единственность примарного разложения 4, 634
Единые теории поля 2, 403
Емкости сигнализирующая функция 1, 211
Емкостная мера 2, 405, 4, 1047
- - экстремальная 5, 1003
Емкостный потенциал 2, 403, 404
Емкость активная 1, 1089
- аналитическая 1, 246
- гармоническая 1, 872
- гиперболическая 5, 422
- грамматики 1, 1092
- логарифмическая 3, 406
Емкость множества 2, 403—407
- эллиптическая 5, 423
ε-емкость 4, 396
Ермакова признак 2, 407
Еругина критерий для приведенных линейных систем 4, 633
Ершова метод пополнения 4, 497
- теорема о ядре 2, 1060
Естественная граница функции 4, 414
- двойственность 2, 44
- метрика 2, 57
- нормальная форма матрицы 3, 1053
- область существования 4, 414
- параметризация 2, 248
- - кривой 3, 892
- регулярная полугруппа 4, 936
- связность без кручения 4, 947
- стратегия 5, 531
Естественно редуктивное пространство 4, 948
Естественно упорядоченный группоид 2, 407
Естественного вывода система 1, 919
Естественное преобразование функторов 5, 688
Естественный гомоморфизм 5, 592
Естественный логический вывод 2, 407
- трехгранник 2, 250; 3, 892; 5, 662
- частичный порядок 4, 936
Ефимовское отображение 5, 298

Ж

Жане теорема о римановых многообразиях 2, 409
Жане — Картана теорема о римановых пространствах 2, 863
Жанр кривой 4, 311
- фигуры 5, 614
Жегалкина алгебра 2, 409
- полином 2, 409
Жезл 2, 409
Желоб 2, 409
Жергонна задача о минимальных поверхностях 3, 686
Жергонна точка 2, 410
Жесткая алгебра 2, 107
Жесткая дифференциальная система 2, 410—417
- задача Коши 3, 49
- особенность 4, 118
- система дифференциальных уравнений 3, 49
- универсальная алгебра 5, 497
Жестко устойчивый метод 2, 413
Жесткое аналитическое пространство 2, 417
- бесконечно малое изгибание 1, 436
- многообразие 2, 103
Жесткости теорема 2, 107
- - об отображении периодов 4, 155
- - сильная 2, 201
- - Фрёлихера — Нейенхёйса 2, 103
Жесткость 2, 417—419
-, Гротендика теорема 2, 989
Жиро условия 2, 419
Жонкьера преобразование 3, 95
Жордана кривая 2, 420
Жордана лемма об аналитических функциях 2, 420
Жордана мера 2, 420, 3, 641
- метод обращения матриц 3, 1136
Жордана признак 2, 421
Жордана разложение 2, 421—423
- - функции ограниченной вариации 2, 421
- - эндоморфизма 2, 421
Жордана теорема о замкнутой кривой 2, 423
- - о линейных группах 3, 302
- - о многоугольниках 3, 749
- - о разбиении плоскости 1, 231
Жордана — Брауэра теорема о разбиении 2, 423
Жордана — Гёльдера теорема для групп 2, 424
Жордана — Дедекинда условие для цепей 4, 456
Жорданова дуга 2, 391, 424
- клетка 2, 425, 3, 372, 1054
- кривая 3, 384
Жорданова матрица 2, 424, 3, 372
Жорданова нормальная форма матрицы 2, 425; 3, 1054
- область 2, 240, 3, 1099
- форма матрицы 2, 425
Жукова теорема о неассоциативных алгебрах 3, 902
Жуковского профиль (крыло) 2, 426
Жуковского теорема в гидромеханике 2, 425
- условия 2, 426
Жуковского функция 2, 426
Журдена вариационный принцип 1, 600
Журдена принцип в механике 2, 426
Жюлиа луч 2, 427
- отрезок (хорда) 2, 427
Жюлиа теорема для аналитических функций 2, 426
- точка 2, 428

З

Зависимая переменная 5, 713
Зависимости область 3, 48
Зависимость алгебраическая 1, 148
- вероятностная 5, 238
- линейная 3, 303, 307
- статистическая 5, 238
- стохастическая 5, 238
Зависимые функции 5, 719
Зависимых испытаний метод 3, 818
Зависящий от параметров интеграл 2, 429
Задача — см. соответствующее название
Задерживающий барьер 5, 12
Задержка 1, 55
- схемы из функциональных элементов 5, 302
Зайцева теорема о вполне регулярных пространствах 1, 763
- - о спектрах 4, 687
Заключительная формула 3, 1072
Заключительное состояние конечного автомата 1, 54
Закон логический 3, 420
Закругленное множество 5, 378
Залгаллера теорема об окружности на выпуклой поверхности 4, 16
Замена базы 2, 430; 5, 66
- переменного в интеграле 2, 579, 583, 611
Замкнутая аналитическая кривая 1, 246
- база 1, 371
- выпуклая оболочка 1, 788
- - поверхность 1, 788
Замкнутая геодезическая 2, 431—433
- звезда 5, 434
Замкнутая категория 2, 433
- кибернетическая система 2, 852
- коса 3, 35
- кривая, Жордана теорема 2, 423
- область 3, 1098
- поверхность 2, 51
Замкнутая подсхема 2, 433
- полуплоскость 4, 462
- полупрямая 4, 466
- риманова поверхность 4, 1015
Замкнутая система 2, 327, 434
- - дифференциальных уравнений 4, 422
- - функций 2, 434, 4, 100
- топология 5, 374
- траектория 4, 267
- форма 2, 263
Замкнутая формула 1, 158, 320; 2, 435; 4, 580, 5, 637
- - истинная 1, 555
- функция 3, 854
- цепь 1, 557
Замкнуто конечный комплекс 2, 995
Замкнутое вложение 2, 433
- - аффинных схем 1, 359
Замкнутое многообразие 2, 435; 3, 87, 743
Замкнутое множество 2, 435; 4, 563
- неограниченное подмножество 5, 279
- ориентируемое двумерное многообразие 2, 51
Замкнутое отображение 2, 435; 4, 155
- покрытие 4, 393
- псевдомногообразие 4, 741
- эрмитово ядро 5, 1023
H-**замкнутое пространство** 2, 436
Замкнутости условие Ляпунова — Стеклова 4, 100
- - Парсеваля — Стеклова 2, 434
Замкнутость абсолютная 4, 425
Замкнутый график 2, 436; 5, 384
- -, теорема 1, 390
- дифференциал 2, 238
- маршрут графа 1, 1108
Замкнутый оператор 2, 437; 4, 19
- подкомплекс 2, 995
- терм 5, 637
- угловой сектор 4, 1106
- шар 5, 881
- элемент 2, 438
Замкнутых классов система 2, 437

Замыкание алгебраическое 1, 188
Замыкание вычислительного алгоритма 2, 437
- кольца целое 5, 799
- линейное 3, 345
Замыкание множества 2, 438; 3, 670; 4, 634; 5, 389
- оператора 2, 437
- пифагорово 1, 712
- поля совершенное 5, 70
- сепарабельное 4, 1114
- элемента комплекса 2, 995
Замыкания аксиомы 5, 389
- оператор 1, 373
Замыкания отношение 2, 438
Замыкания условие 2, 439
Замыкающий контакт 2, 1061
Заострения точка 1, 740, 2, 439
Заостренный конус 2, 1074
Запаздывающего типа уравнение 2, 295
Запаздывающий потенциал 2, 441, 860
Запаздывающих потенциалов метод 2, 439—442
Заполненное пространство 2, 442
Запятая 2, 442
Зарисского касательное пространство 2, 443
- теорема о базисном множестве 1, 379
- - о бирациональных отображениях 4, 920
Зарисского теорема о связности 2, 443
Зарисского топология 2, 444
Заряд 2, 444, 5, 312
-, плотность 4, 810
Затухание переходного процесса 1, 65
Заузленная сфера 2, 445
Захватывание частоты 1, 578
Зацепление 5, 484
- альтернирующее 1, 241
- брунново 5, 484
-, группа 5, 476, 487
-, дефект 5, 480
-, диаграмма 5, 478
-, квадратичная форма 5, 480
-, кратность 5, 484
- локальное 3, 437
-Нейвирта 5, 478
-, тип 5, 484
Зацепления коэффициент 2, 445
- матрица Александера 1, 232
- модуль Александера 1, 232
Звезда замкнутая 5, 434
- Миттаг-Леффлера 2, 445, 3, 705
- множества 4, 394
- открытая 5, 434
- симплекса 3, 153
- точки 2, 496, 4, 270, 394
- элемента комплекса 2, 995
Звезда элемента функции 2, 445
Звездная конечность покрытия 4, 393
- нормальность 3, 656
- область 2, 449
Звездно вписанное покрытие 4, 794
- - семейство множеств 4, 394
- конечный комплекс 2, 995
Звездного сопряжения оператор 2, 238
Звездное множество 2, 446
- подразделение 3, 153, 4, 379, 413
- покрытие 4, 203
Звездное тело 2, 446
Звездной астрономии математические задачи 2, 447—449
Звездообразная область 2, 449
Звездообразная функция 2, 449
Звездообразности граница 2, 450
- критерий 2, 450
- радиус 2, 450
Звездчато-правильный многоугольник 3, 750
Звездчатый многоугольник 3, 750
-правильный многогранник 4, 553
Зейделя метод 2, 450
- - итерационный 4, 251
- теорема о цепных дробях 5, 813
Зейферта инвариант 2, 452
Зейферта матрица 2, 451
Зейферта многообразие 2, 451
- окружность 5, 479
- поверхность 5, 479, 486
Зейферта расслоение 2, 452—454
- спаривание 2, 451
Зейферта — Ван Кампена теорема о фундаментальных группах 5, 681
Зелинга приведение квадратичных форм 2, 789
Зенона апория 1, 293
Зенона парадокс 2, 454
Зеркало отображения 4, 157
Зигелево среднее 2, 780
Зигеля верхняя полуплоскость 2, 445
Зигеля метод 2, 454
Зигеля область 2, 455
Зигеля теорема 2, 456
- - о бинарных квадратичных формах 1, 487
- - о среднем 1, 947
- - о L-функциях Дирихле 2, 456
- - о целых точках 2, 456
- - об алгебраически независимых функциях 3, 650
- формула 2, 780
Зигмунда класс 2, 457
- условие в теории приближений 4, 613
Зимана — Столлингса теорема об изотопии 2, 520
Зингера разностное множество 4, 838
Змеевидный континуум 2, 457
Знак Вейерштрасса 1, 622
Знаки математические 2, 457—463
Знаков критерий 2, 463
y-знакоопределенная функция 5, 574
Знакопеременная билинейная форма 1, 482
Знакопеременная группа 2, 464
- подстановка 4, 381
Знакопеременное полилинейное отображение 4, 407
Знакопеременный многочлен 4, 1145
- ряд 2, 464
Знакочередующийся ряд 2, 464
- -, Лейбница признак 3, 233
Знаменатель 2, 389, 464
- геометрической прогрессии 1, 932
- малый 3, 505
Знаменитая теорема Ферма 5, 605
Значащая цифра 2, 465
Значимости критерий 2, 465, 466
Значимости уровень 2, 222, 366, 465, 3, 834
Золотое сечение 2, 466
Зоммерфельда интеграл 2, 468
Зоммерфельда условия излучения 2, 468, 494
Зона в теории графов 4, 644
- доверительная 2, 616; 4, 180
Зональная сферическая гармоника 5, 289
Зональные сферические функции 2, 468, 5, 294
Зоноиды 2, 468
Зонотопы 2, 468
Зоноэдры 2, 468

И

Ивасавы инвариант 5, 325
Ивасавы разложение 2, 469
Иверсена теорема об особых точках 2, 469
Игнорируемая координата 1, 859
Игольчатая вариация 1, 604; 4, 488
Игр теория 2, 469—475
- -, доминирование 2, 372
- -, функция выигрыша 1, 781
Игра 2, 470
- азартная 1, 102
- антагонистическая 1, 290, 2, 471
- без побочных платежей 2, 470, 1104
- бескоалиционная 1, 433, 2, 471
- бесконечная 1, 434
- биматричная 1, 485, 2, 471
- Блотто 1, 506
- в форме функции разбиения 2, 1104
- взвешенная мажорантная 2, 1103
- выпуклая 1, 787, 2, 1104
- вырожденная 1, 805
- двух лиц с нулевой суммой 1, 291
- динамическая 2, 143
- дифференциальная 2, 329, 472
-, дуэль 2, 392
-, значение 1, 291
-, информационное множество 2, 656
-, Какутани теорема 2, 699
- коалиционная 2, 886
- колоколообразная 2, 960
- конечная 2, 471
- кооперативная 2, 471, 1103
- матричная 2, 471; 3, 619
Игра на выживание 2, 475
Игра на графе 2, 475
Игра на единичном квадрате 2, 471, 475
- неатомическая 3, 903
- нестратегическая 2, 470
- обобщенно-выпуклая 1, 787
-, партия 2, 143
-, плата 2, 329
- позиционная 2, 471; 4, 386
- полиномиальная 1, 805
- преследования 4, 602
- преследования — уклонения 2, 330
- простая 2, 1103
-, разрешимость по Нэшу 1, 433
- рекурсивная 4, 956
- рынка 2, 1104
Игра с выбором момента времени 2, 476
Игра с иерархической структурой 2, 477—481
- с квотой 2, 1104
- с полной информацией 4, 387
- салонная 4, 1071
- сбалансированная 2, 1103
- статистическая 5, 170
- стохастическая 5, 238
- стратегическая 2, 470
- строго разрешимая 1, 433
-, характеристическая функция 2, 1103
- Шепли 5, 238
-, ядро 2, 472
Игровая ситуация 2, 481
Игрок 2, 470, 481, 1103
Игузы неравенство о размерностях 4, 284
Идеал 2, 481—483
- абсолютно неразветвленный 3, 1001
-, аддитивная теория 1, 90
- Александера 1, 232
- аффинного алгебраического множества 1, 359
- вполне изолированный 5, 748
- - разложимый 1, 167
-, высота 1, 813
- главный 1, 1017; 2, 482
- Ω-группы 3, 839
- двусторонний 2, 481
- детерминантный 2, 99
- дивизориальный 2, 132
-, дискриминант 2, 211
- дробный 2, 387
- дуальный 2, 483; 5, 615
-, индекс ветвления 3, 114
- квадратичный 2, 694
-, Кона теорема 1, 342
- конечно представимый 2, 903
- критический 3, 114
-, Крулля теорема 1, 813
-, Куммера разложение 1, 166
-, - формула 1, 166
левый 2, 481
- максимальный 2, 483, 3, 485
- минимальный 3, 692
- модулярный 3, 790
- неразветвленный 3, 1001
несмешанный 3, 69, 1011
- нильпотентный 3, 1043
- нормирования 3, 1078
- обратимый 2, 387
- определения топологии 1, 98
- первичный 4, 237
- плотно вложенный 4, 908
- правый 2, 481
- примарный 1, 91, 132; 4, 635
- примитивный 4, 638
- простой 3, 485, 4, 707
-, радикал 4, 804
- разветвленный 3, 114
- регулярный 3, 790, 4, 944
- свободный 1, 342
- составной 5, 92
- стандартный 2, 483
- терциарный 4, 635; 5, 341
- целый 5, 801
- ядерный 2, 483
-якобиев 4, 119
l-идеал 5, 256, 526
p-идеал 3, 249
r-идеал 4, 805
Т-идеал 2, 483
Идеальная граница римановой поверхности 4, 1029
- конгруэнция 4, 444
Идеальная точка 2, 484; 4, 746
Идеально наследственный радикал 4, 806
- простая полугруппа 4, 701
Идеальное банахово пространство 2, 629
- расширение 4, 908
Идеальное число 1, 166; 2, 484
Идеальный делитель 2, 128
Идеальный ряд 2, 485
- фактор 1, 1019; 2, 482
Идель 1, 95; 2, 486
Идемпотент 2, 486
- абелев 4, 941
- конечный 4, 941
- примитивный 1, 762
Идемпотентная медиальная квазигруппа 2, 229
- полугруппа 2, 486
Идемпотентности закон 1, 125
Идемпотентный элемент 2, 486
Идемпотентов полугруппа 2, 486
Идентификатор 1, 224
Идентификации задача 4, 47
Идентификация 1, 223
Иенсена неравенство 2, 487, 489
Иенсена принцип 5, 279
Иенсена формула для мероморфных функций 2, 488
Иерархизованная система составляющих 4, 1184
Иерархия 2, 489—491
- проективная 4, 677
- типов 5, 351
Избыток геодезического треугольника 1, 929
- сферический 2, 491; 5, 291
Избыток треугольника 2, 491
Избыточность 2, 491, 940
Избыточные координаты 3, 10
Извивание кривой 2, 491
Изгибание 2, 491—493, 505
- бесконечно малое 1, 435
Изгибание на главном основании 2, 493
- на кинематическом основании 2, 494
-, основание 4, 106
- проективное 4, 674
Излома точка 2, 494; 5, 424
Излучения условия 2, 232, 494—496
Измельчающееся семейство множеств 2, 496
Измельчение 2, 496
- барицентрическое 4, 1160
Изменение функции 4, 161
- - положительное 4, 430
Измерение, порядок 4, 505
Y-измерение 2, 708
Измеримая сильно функция 1, 541
Измеримая функция 2, 497
- -, Лузина критерий 3, 455
B-измеримая функция 1, 535
Измеримое множество 2, 498; 3, 638
- -, Лузина теорема 2, 498

- -, периметр 4, 265
- -, Шоке теорема 2, 406
Измеримое отображение 2, 498, 3, 638
- по Жордану множество 2, 420, 3, 641
- по Лебегу множество 3, 640
- поле алгебры Неймана 3, 922
Измеримое пространство 2, 498; 3, 638
Измеримое разбиение 2, 498
- -, энтропия 5, 1006
B-измеримое множество 1, 536
- отображение 1, 535
C-измеримое множество 2, 406
Измеримый каскад 2, 757
Измеримый поток 2, 499
- прямоугольник 3, 642
Изображение 3, 1110
- алгоритма 1, 210
- логарифмическое 4, 945
- по Лапласу 3, 197
- сферическое 5, 296
Изображений метод 2, 499—501
Изогения 2, 501
Изогенные схемы 2, 501
Изогональная траектория 2, 502
Изогоны и изоэдры 2, 502
Изоклин метод 2, 502, 3, 890
Изоклина 2, 502
Изокола 2, 753
Изолированная вершина графа 1, 1106
Изолированная особая точка 2, 503, 4, 115
Изолированная подгруппа 2, 504
Изолированная точка 2, 24, 504; 4, 124, 125
Изолированное множество 5, 370
Изолированный простой идеал 4, 634
Изоль 2, 504, 523; 4, 959
Изолятор множества 2, 504
Изоляции явление 1, 948
Изомеры 1, 936
Изометрий группа 2, 529
- полугруппа 4, 1127
Изометрическая деформация 2, 505
- структура 5, 482
Изометрически изоморфные гильбертовы пространства 1, 979
Изометрические билинейные формы 1, 482
- римановы пространства 4, 1004
Изометрический оператор 2, 505
Изометрическое вложение 2, 506
- линейное преобразование 3, 352
Изометрическое отображение 2, 505
Изометрическое погружение 2, 506—511
- преобразование 1, 790; 2, 505
- соответствие 2, 505
Изометричные поверхности 2, 253, 511
Изометрия 1, 113; 2, 505
- билинейных форм 1, 482
Изоморфизм 2, 511; 3, 370
- алгебр 2, 961
- алгебраический алгебраической группы 1, 143
- алгебраических систем 1, 156
- ассоциативных исчислений 1, 339
- аффинный 1, 362
- бирациональный 1, 494
- борелевский 1, 535
- векторных пространств 1, 645
- голоморфный 1, 471
- графов 1, 1116
- группа подстановок 4, 382
- Гуревича 1, 1064; 4, 765
- контрагредиентный 2, 1071
- локальный 3, 426
- метрический 3, 667
- операторный 4, 22
- решеточный 4, 981
- симплициальный 3, 152
- структурный 5, 256
- теорий гомологии 1, 1047
- типовой 2, 867
- Тома 5, 360
- формаций 5, 519
B-изоморфизм 1, 535
C^n-изоморфизм 2, 356
δ-изоморфизм 1, 502
Изоморфизма проблема 1, 216; 2, 512
Изоморфное отображение 2, 512
Изоморфные автоматы 1, 68
- гильбертовы пространства 1, 979
- графы 1, 1105
- идеальные ряды 2, 485
- комплексы 2, 995
- резольвенты 1, 1072
- топологические векторные пространства 5, 377
Изооптическая кривая 2, 512
Изопериметрическая задача 2, 512
Изопериметрическое неравенство 2, 513—516
Изопериметрическое неравенство классическое 2, 517
Изотерма адсорбции 1, 101
Изотермическая поверхность 2, 518
Изотермическая сеть 2, 518
Изотермические координаты 2, 518
- - сопряженные 5, 87
Изотонное отображение 2, 518; 4, 153
Изотонный оператор 3, 960
Изотопия 1, 1150; 2, 519—521
- накрывающая 2, 519
Изотопные вложения 2, 519; 5, 401
- группоиды 2, 519
- зацепления 5, 486
Изотропии группа 2, 521; 4, 731; 5, 163
- подгруппа 3, 260
Изотропии представление 3, 521
- характер 1, 936
Изотропная квадратичная форма 2, 778
Изотропная конгруэнция 2, 522, 1015
- линейная алгебраическая группа 3, 298
- линия 3, 703
- прямая 2, 801; 3, 12, 124
- система координат 2, 518
Изотропное направление 4, 739
- подпространство 4, 718
- условие Гельдера 1, 915
Изотропный вектор 2, 522; 4, 739
- конус 2, 522, 4, 739
- подмодуль 1, 482
Изохронная кривая 5, 817
Изоэдры 2, 502
Икосаэдр 2, 522
Икосаэдра пространство 2, 522
Именная форма 2, 525; 5, 637
Имитационная модель 2, 854
Иммерсия 2, 523, 4, 357
Иммунное множество 2, 523
Импликанта 5, 73
Импликативная нормальная форма 2, 523
Импликативное пропозициональное исчисление 2, 523
Импликация 1, 124, 2, 524, 4, 726
- релевантная 2, 66
- строгая 5, 247
Импримитивная группа 2, 524
- псевдогруппа преобразований 4, 730
Импримитивное линейное представление 2, 524
Импримитивности область 2,524
- система 2, 560
Импульсов метод 2, 440
Имя 2, 525
Инвариант 1, 937; 2, 525—527; 4, 457
- абсолютный 1, 30, 27
- адиабатический 1, 96; 2, 381
- Александера 1, 231
- Арфа 2, 527
- базисный 2, 542
- бирациональный 1, 493
- вычислимый 1, 821
-, Гильберта теорема 1, 974
- Дарбу 2, 18
- Диксона 2, 138
- дифференциальный 2, 343
- Зейферта 2, 452
- Ивасавы 5, 325
- интегральный 2, 601
- кардинальнозначный 5, 388
- кардинальный 3, 834
- Кервера 2, 847
- Кервера — Милнора 2, 849
- кривизны 4, 1045
- линии второго порядка 3, 388
- максимальный 3, 486
- поверхности второго порядка 4, 344
- Понтрягина 4, 483
- представления группы 2, 541
- размерностный 4, 824
- Римана 4, 170
- симплектический 4, 1157
- топологический 5, 375, 376
- Уолла 5, 520
- формы 2, 540
- ρ-функции 1, 622
- Хассе 5, 775
- Хассе — Минковского 5, 776
- Хопфа 2, 923; 5, 791
- Хопфа — Адамса 5, 792
- Хопфа — Адамса — Стинрода 5, 792
- Хопфа — Новикова 5, 793
- Хопфа — Стинрода 5, 792
- Хопфа — Уафтхеда 5, 792
- Хопфа — Хилтона 5, 792
- числовой 5, 376
Arf-инвариант 2, 527
Инвариантная компонента группы 2, 876
- кривая 2, 533
Инвариантная мера 2, 528
Инвариантная метрика 2, 529—531, 5, 374
- поверхность 2, 533
Инвариантная подгруппа 2, 531, 534; 3, 1073
Инвариантная статистика 2, 531
- точка 2, 533
- форма леммы Шварца 4, 282; 5, 886
- функция 4, 535
Инвариантного погружения метод 4, 218
Инвариантное интегрирование 2, 531
- многообразие 2, 145, 523
Инвариантное множество 2, 532—534, 767
- - модуля 1, 1020
Инвариантное подмножество 2, 534; 4, 153
Инвариантное подпространство векторного пространства 2, 534; 3, 351, 371
Инвариантное подпространство представления группы 2, 534
Инвариантное среднее 2, 534
Инвариантности принцип в теории вероятностей 2, 535
- теорема 5, 377
- уравнение геометрического объекта 1, 935
Инвариантность области, Брауэра теорема 1, 546
- релятивистская 4, 147, 970
Инвариантность статистической процедуры 2, 536
- топологическая 1, 1036; 2, 96
Инвариантный дифференциальный оператор 2, 537
- интеграл 2, 531
- - Гильберта 1, 966; 5, 956
Инвариантный критерий 2, 538
- множитель матрицы 3, 616, 1052
Инвариантный объект 2, 538—540; 3, 1176
- ряд группы 3, 1076
- - подгрупп 4, 367
- элемент группы 5, 802
Инвариантов теория 2, 540—544
Инварианты алгебраической поверхности 1, 150
Инверсии метод 2, 501
Инверсий число 4, 381
Инверсионная геометрия 2, 1087
Инверсионно инвариантная мера Хаара 5, 741
Инверсия в геометрии 2, 544
Инверсия в комбинаторике 2, 545
-, полюс 2, 544; 4, 474
-, степень 2, 544
-, центр 2, 544
Инверсная плоскость 3, 630
Инверсная полугруппа 2, 545—547
- сумма 4, 1213
Инверсно инвариантный интеграл 2, 532
Инверсное исчисление 1, 1148
Инвертирующий алгоритм 1, 1147
Инволютивное распределение 2, 547
Инволютивный инверсный автоморфизм 4, 477
Инволюционная система 2, 547
Инволюция 2, 548, 764; 4, 21
- Бертини 3, 95
- в алгебре 1, 383
- в проективной геометрии 2, 548
- Гейзера 3, 95
- на многообразии 2, 549
Ингредиент 3, 584
Индекс алгебраической точки ветвления 1, 176
- ветвления 1, 679
- - идеала 3, 114
- - линии 3, 385
- - расширения 2, 203
- дефекта оператора 2, 101
- задачи 1, 1096
- - линейного сопряжения 1, 1097; 3, 323, 325
- инерции 2, 299, 778
- - билинейной формы 2, 563
- интегрального сингулярного уравнения 4, 1174
- комплекса линейного дифференциального оператора 3, 367
- краевой задачи 3, 76, 81, 82
- Кронекера 3, 238
- локального алгоритма 1, 209
- Маслова 5, 723
- многообразия Фано 5, 597
- многочлена 4, 1114
Индекс оператора 2, 550, 4, 1174
- особой точки 4, 132
- пересечения 4, 255
- поверхности Дель Пеццо 4, 917
- подгруппы 4, 369, 5, 36
- полусевдоевклидова пространства 4, 467
- поляритета 4, 478
- псевдоевклидова пространства 4, 739
- Пуанкаре 4, 122
- специальности дивизора 1, 151
- топологический 5, 868
- уравнения Бесселя 1, 460
- формы Витта 1, 714
- функции 4, 1173
Индекс числа 2, 549; 5, 152
- энгелевости 5, 999
Индекса формулы 2, 550—555
Индексное множество 3, 1087
Индефинитная метрика 2, 555
- - в гильбертовом пространстве 1, 985; 4, 717
- -, пространство 4, 717
- тёплицева форма 5, 337
Индефинитное скалярное произведение 1, 861
Индивидная константа 2, 555
Индивидная переменная 2, 555
Индивидуальная константа 2, 1036
Индивидуальная эргодическая теорема 1, 495; 2, 556; 3, 927; 4, 24; 5, 1007
Индивидуально рациональная конфигурация 5, 561

Индивидуальное высказывание 1, 124
Индикатор целой функции 4, 1054
Индикаторные переменные 2, 901
Индикатриса 5, 622
- Банаха 1, 379, 606
- вращений 1, 765
- Дюпена 2, 395; 3, 97
- касательных 2, 757
- кривизны 2, 395
- роста 4, 1054
- сферическая 5, 291
Индуктивная размерность 2, 556; 4, 821
- топология 3, 428, 5, 381, 383
- характеризация слова 4, 1209
Индуктивно нульмерное пространство 4, 143
Индуктивное определение 2, 556
- предположение 2, 558, 3, 564
- размерностное ядро 2, 717
- топологическое тензорное произведение 5, 393
Индуктивный предел 2, 557; 3, 428; 5, 381
- - семейства топологий 1, 672
Индукции аксиома 2, 558, 3, 892, 4, 228
- параметр 3, 564
- принцип 2, 558
Индукционная переменная 2, 558
- формула 1, 319
Индукционное предложение 2, 558
Индукционный переход 3, 564
- предикат 2, 558
- шаг 2, 558
Индукция, базис 2, 558
- бесконечная 1, 434
- математическая 3, 564
- нётерова 3, 1026
- трансфинитная 5, 421
Индуцированная алгебра 3, 920
- топология 4, 145
Индуцированное представление 2, 558—561
Индуцированное расслоение 2, 561, 4, 894
Индуцирующая фигура 5, 614
Инертная масса 3, 536
Инертное простое число 2, 560
Инерциальная система отсчёта 2, 562
Инерции закон квадратичных форм 2, 562, 4, 739
- - механики 1, 1078
- индекс 2, 299, 778
- подгруппа 2, 561
Инициально компактное пространство 2, 994
Инициальное множество континуума 2, 563
Инициальный конечный автомат 1, 54
- объект 5, 616
Инстантон 5, 1060
Инструкция 4, 645
Интеграл 2, 563—566
- абелев 1, 15
-, абсолютная непрерывность 1, 34
- алгебраический 1, 15
- альтернированный 2, 335
- Бергмана — Вейля 1, 414
- Бёркиля 1, 415
- Бёркиля — Колмогорова 1, 416
- Бернулли 1, 421
- Бокса 1, 515
-, Бонне теорема о среднем значении 1, 531
- Бохнера 1, 541
- Вейля 2, 384, 5, 930
Интеграл вероятностей 2, 566
- Винера 1, 694
- Виноградова 1, 701
- вморожённости 1, 731
- Гарнака 1, 891
- Гаусса 2, 445
- гиперболический 5, 991
- гиперэллиптический 1, 1010
- Грина 1, 876, 1126
- Данжуа 2, 12
- Данжуа — Хинчина 5, 786
- Даниеля 2, 14
- Дарбу 2, 17
- двойной 3, 92
- Дирихле 2, 181; 3, 205
Интеграл дифференциального уравнения 2, 567
- дрейфовой системы 2, 381
- дробный 2, 383
- Дюамеля 2, 393
-, зависящий от параметров 2, 429
-, замена переменного 2, 579, 583, 611
- Зоммерфельда 2, 268
- инвариантный 2, 531
- Кирхгофа 2, 860
- Колмогорова 2, 955
- континуальный 2, 568, 1067
- Коши 3, 51
- Коши — Зальцюца 1, 867
- Коши — Лагранжа 1, 421
- кратный 3, 91
- криволинейный 3, 103
- Кристоффеля — Шварца 3, 111
- Лапласа 3, 193, 196
- Лебега 3, 209
- Лебега — Стилтьеса 3, 218
- Лере 3, 236
- мультипликативный 3, 841
- неопределенный 2, 564, 579
- несобственный 3, 1016
- общий 2, 327, 567, 568; 3, 1148
- определенный 2, 564, 581; 4, 29
- особый 2, 327; 3, 52
- от дифференциальной формы 2, 263
- ошибок 2, 566
- первый 2, 568; 4, 238
- Перрона 4, 274
- Перрона — Стилтьеса 4, 276
- Петтиса 4, 281
- по площади поверхности 4, 339
Интеграл по траекториям 2, 568
- поверхностный 4, 338
- повторный 4, 348
- полный 2, 327, 568, 4, 428
- промежуточный 2, 568
- псевдоэллиптический 4, 744
- Пуассона 4, 754
- Пуассона — Лебега 4, 755
- Пуассона — Стилтьеса 4, 755
- равномерно сингулярный 4, 1180
- Радона 4, 809
- расходящийся 4, 896
- Римана 4, 992
- Римана — Лиувилля 2, 383; 5, 226
- Римана — Стилтьеса 4, 1002; 5, 226
- сильный 4, 1131
- сингулярный 2, 605; 3, 52; 4, 1180, 5, 96
- Сонина 5, 75
- состояний 5, 171
- статистический 5, 171
- Стилтьеса 2, 565, 5, 226
- стохастический 5, 242
-, суммирование 5, 274
- типа Бохнера — Мартинелли 1, 543
- - Коши 3, 52
- - Коши — Лебега 3, 53
- - - -, Привалова теорема 4, 631
- - Коши — Стилтьеса 3, 53
- - потенциала 2, 384
- тройной 3, 92
- ультраэллиптический 1, 1011
- Фейнмана 5, 601
- Френеля 5, 663
- функциональный 2, 568
- Фурье 5, 720
- - на группе 1, 882
- Фурье — Бесселя 5, 738
- Хеллингера 5, 781
- Хинчина 5, 786
- циркулярный 5, 991
- частный 2, 563, 567
- Шварца 5, 885
- Шлефли 5, 894
- Эйлера 1, 464, 2, 586
- эйлеров 5, 937
- элементарный 2, 14
- эллиптический 5, 988
- энергии 2, 145, 531, 5, 1002
- Якоби 5, 432
A-**интеграл** 2, 566
B-интеграл 1, 515
Интегралы в инволюции 2, 569
Интегральная воронка 2, 280, 570
- геодезическая кривизна 1, 924
Интегральная геометрия 2, 570—576
Интегральная кривая 2, 283, 576
- метрика 3, 658
Интегральная поверхность 2, 325, 577
- подстановка 5, 677
Интегральная показательная функция 2, 577
Интегральная сумма 2, 578, 4, 992
- - Лебега 2, 564
- - Римана 3, 91
- - Стилтьеса 5, 226
- теорема Коши 1, 263; 3, 55
- - Коши — Пуанкаре 1, 270
- форма билинейная 1, 482
- - квадратичная 1, 482
- - остаточного члена 5, 324
- формула Коши 1, 263; 3, 51, 55
- - Мартинелли — Бохнера 1, 270
- - Фурье 5, 720
- - Шварца 5, 886
Интегрально геометрическая площадь 4, 330
Интегральное исчисление 2, 578—584
Интегральное многообразие 2, 584; 4, 773
- неравенство Пенсена 2, 487
Интегральное представление аналитической функции 2, 585—589
- - Бесселя 5, 822
- - Ганкеля 1, 867, 869
- - Пуассона 5, 822
Интегральное преобразование 2, 589, 604
- - Эйлера 5, 929
Интегральное уравнение 2, 590—593
- - Абеля 1, 26
- - Вольтерра 1, 752, 754
- - вырожденное 1, 807
- -, Гильберта теория 1, 974
- - Лалеско — Пикара 3, 1030
- - линейное 3, 345
- - нагруженное 3, 853
- - Некрасова 3, 938
- - нелинейное 3, 944
- - нётерово 3, 1026
- - нефредгольмово 3, 1030
- -, нормальная разрешимость 3, 1051
- - особое 3, 1030
- - Пайерлса 4, 249
- -, резольвента 4, 950
Интегральное уравнение с симметричным ядром 2, 595—598
- - сингулярное 4, 1172
- - союзное 4, 1172
Интегральное уравнение типа свертки 2, 598—600
- - Фишера — Рисса 2, 310
- - Фредгольма 3, 1027
- - Фурье 3, 1030
Интегральное уравнение; численные методы решения 2, 593—595, 625
Интегральной разделенности условие 2, 600
Интегральный автоморфизм 2, 601
- вес 3, 1099; 4, 93
- выигрыш 2, 143
Интегральный гиперболический косинус 2, 601
Интегральный гиперболический синус 2, 601
Интегральный инвариант 2, 601
- - Пуанкаре 1, 860
- - Пуанкаре — Картана 1, 860
Интегральный косинус 2, 602
Интегральный логарифм 2, 603
Интегральный объект категории 2, 604
Интегральный оператор 2, 604—606, 4, 20
- - Вольтерра 1, 752
- - Гильберта — Шмидта 1, 975
- - с полярной особенностью 4, 1206
- - со слабой особенностью 4, 1206
- - Фредгольма 5, 660
- - Фурье 5, 722
- -, численные методы нахождения собственных значений 5, 62
- -, ядро 5, 1042
- признак Коши 3, 61
- - Коши — Маклорена 3, 61
- - сходимости рядов 4, 1065
- принцип максимума 4, 49
Интегральный синус 2, 606
- элемент 4, 774
Интегральных преобразований метод 2, 607
Интегральных соотношений метод 2, 607—610
Интегрант 3, 181
Интегрирование 2, 579, 610
Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме 2, 610
- - - в квадратурах 2, 610
- дробное 2, 383
- инвариантное 2, 531
Интегрирование по частям 2, 579, 583, 611
Интегрирование подстановкой 2, 611
- рядов почленное 4, 1069
Интегрирование численное 2, 612, 624
Интегрирования оператор 4, 26
Интегрируемая в смысле Лебега функция 2, 564
- - - Римана функция 4, 992
- по Риману функция 3, 91
- по функции функция 5, 226
Интегрируемая почти комплексная структура 4, 542
- почти симплектическая структура 4, 548
Интегрируемая система 2, 612
- структура 3, 745
Интегрируемая флаговая структура 5, 628
Интегрируемая функция 2, 612
A-интегрируемая функция 2, 566
R-интегрируемая функция 3, 91
Интегрируемое представление 1, 448, 2, 612
Интегрируемость по Бохнеру 1, 541
Интегрирующая функция 5, 226
Интегрирующий множитель 2, 612
Интегро - дифференциальное уравнение 2, 613
Интегро-дифференциальный оператор 3, 959
Интегро-интерполяционный метод 4, 845, 5, 59
Интегро-степенная форма 2, 614
Интегро-степенной ряд 2, 614; 3, 474, 945
- член 2, 614
Интенсивностей мера 5, 31
Интенсивности отказа функция 3, 854
Интенсивность векторной трубки 1, 636
- источника 2, 682
- потока 3, 542
- пуассоновского процесса 4, 763
Интенсиональная логика 4, 1110
- модель 1, 912
Интервал 2, 614, 615; 4, 695; 5, 834
- в частично упорядоченном множестве 2, 615
- доверительный 2, 367, 615; 3, 923, 4, 178
Интервал и сегмент 2, 615
- простой 4, 708
- пространства-времени 2, 614
- смежный 2, 718
- стохастический 5, 243
Интервал сходимости 2, 615; 5, 221
- толерантный 5, 358

Интервальная оценка 2, 615, 4, 178
- функция 2, 617
Интервальный анализ 2, 616
Интердецильная широта 2, 108, 617
Интересов коалиция 2, 887
Интерквантильная широта 2, 617
Интерполирование 2, 617—622, 631
- алгебраическое 2, 622
Интерполирование в вычислительной математике 2, 624—628
- квадратичное 2, 622
- кратное 2, 633
- линейное 2, 622, 631
Интерполирование операторов 2, 628—631
- по методу наименьших квадратов 2, 623
- с кратными узлами 4, 606
- тригонометрическое 5, 444
Интерполяционная квадратурная формула 3, 137
- последовательность 2, 621
- - универсальная 3, 906
- проблема Неванлинны — Пика 2, 621
Интерполяционная формула 2, 631, 794
- - Бесселя 1, 459
- - Гаусса 1, 897
- - Лагранжа 3, 170
- - Ньютона 3, 1091
- - Рисса 4, 1035
- - Стеффенсена 5, 225
- - Стирлинга 5, 232
- - Эверетта 5, 921
- - Эрмита 5, 1015
Интерполяционное пространство 2, 629
Интерполяционный метод 2, 292
- - приближения 4, 606, 609
- многочлен Лагранжа 2, 632, 3, 170
- - функциональный 2, 627
- полином 2, 622, 631
Интерполяционный процесс 2, 632—635
- - Бернштейна 1, 426
- -, Лебега константы 3, 212
- ряд 2, 633
- - Абеля — Гончарова 1, 30
- - Ньютона 2, 634
- - Стирлинга 2, 634
Интерполяционный сплайн 2, 635
- функтор 2, 629
Интерполяция 2, 617—622, 631, 635
- гармоническая 3, 880
- линейная 3, 303
- параболическая 3, 880
- случайных процессов 5, 34
Интерпретатор 5, 419
Интерпретаций метод 1, 110
- поле 1, 110
Интерпретация 2, 635—637
- Бельтрами 1, 408
- Бельтрами — Клейна 3, 403
- в программировании 4, 650
- Гёделя 1, 908
- Клейна 2, 873
- Котельникова 3, 43, 404
- Кэли — Клейна 3, 402
- неправильная 4, 551
- Плюккера 4, 331
- правильная 4, 551
- Пуанкаре 3, 404, 4, 746
- Фубини 5, 674
- языка 5, 636
Интерпретирующего типа семантика 1, 224
Интерсекстильная широта 2, 617
Интранзитивная группа 5, 411
Интранзитивная группа движений 2, 22
Интуиционизм 2, 637—643
Интуиционистская аксиома выбора 2, 642
- арифметика 1, 911
Интуиционистская логика 2, 643
- семантика 1, 909
Интуиционистский анализ 2, 642
- - формальный математический 5, 642
Интуиционистское арифметическое исчисление 2, 641, 644
- исчисление 3, 419
Интуиционистское исчисление высказываний 1, 911, 2, 644
Интуиционистское исчисление предикатов 1, 911, 2, 643, 645, 4, 579
- - пропозициональное 4, 699
Инфиксная операция 4, 18
Инфинитезимальная деформация 2, 103, 105
- карта 2, 730
- образующая 3, 1171
Инфинитезимальная связность 2, 645
Инфинитезимальная структура 2, 267, 645
Инфинитезимально неприводимое рациональное представление 4, 921
- однородная структура 5, 250
- однородное поле 4, 208
- устойчивое отображение 4, 128
- эквивалентные представления 5, 943
Инфинитезимальное движение 2, 856
- преобразование 2, 645
Инфинитезимальный автоморфизм 2, 857
- метод 1, 447
Инфинитезимальный оператор 2, 645, 3, 1113, 4, 262, 451, 692
- - Ли 1, 447
- - полугруппы 4, 448
- характер 2, 819
Инфлекционный центр 2, 1002
Информант 2, 645
- дискриминантный 2, 217
Информативность эксперимента 2, 656
Информации количество 2, 646; 4, 175
- - алгоритмическое 1, 222
- - в индивидуальном объекте 1, 222
- неравенство в математической статистике 4, 867
Информации передача 2, 647—653
Информации скорость передачи 2, 653
Информации теория 2, 653—655
- - алгоритмическая 1, 219
- -, выделение сигнала на фоне помех 1, 781
- -, Шеннона теорема 2, 941
Информационная дискриминация 2, 331
Информационная матрица 2, 646, 655
- статистика 2, 658
- часть оператора программирования 4, 18
Информационное дерево 1, 73
- количество Фишера 4, 867, 5, 626
Информационное множество 1, 207, 2, 656, 4, 386
Информационное расстояние 2, 656—658
- уклонение 2, 657
Информационно-устойчивая последовательность каналов 2, 650
Информационный вектор 1, 207
Информационный коэффициент корреляции 2, 658
Информация 2, 658—661
- по Фишеру 2, 655
-, преобразователь 2, 852
- различения 2, 657
- управляющей системы 5, 534
Инфрабочечное пространство 2, 661
Инфраинвариантная система 3, 322
- упорядоченная группа 5, 522
Инцидентности алгебра 4, 263
- гиперграфа матрица 1, 1006
Инцидентности коэффициент 2, 662, 995, 5, 614
- матрица 1, 505, 506, 2, 663
Инцидентности система 2, 663
Инцидентность 2, 663
Инъективная оболочка 2, 664
- размерность 2, 664
- - модуля 1, 1053
- резольвента 2, 664, 665; 4, 951
Инъективное отображение 2, 665
Инъективный модуль 2, 663
Инъективный объект 2, 665
- - категории 4, 683
ω-инъективный модуль 5, 880
Инъекция 2, 665
Иоахимсталя поверхность 2, 665
Ионеда лемма о вложении категорий 1, 1134
Иордана критерий 2, 744
Иордана — Каврайского критерий 2, 744
Иосиды оператор 3, 333
Иоста решение 3, 1008
Иррациональная обмотка тора 2, 338
Иррациональное число 2, 75, 666
- -, Александрова — Урысона теорема 2, 96
Иррациональности мера 2, 666
Иррациональность алгебраическая 1, 144
- квадратическая 2, 776
Иррациональный инвариант ℘-функции 1, 622
Иррегулярная граничная точка 2, 666, 4, 275, 533
- группа 4, 383
Иррегулярная особая точка 1, 251, 2, 667
Иррегулярное многообразие 2, 668
Иррегулярное простое число 2, 667, 4, 942
Иррегулярность 2, 668
- алгебраической поверхности 1, 150
- многообразия 1, 236, 4, 284
Искажение длины 2, 746
-, Кёбе теорема 2, 841
- угла 2, 741
Искажения мера 5, 1006
Искажения показатель 1, 113
Искажения теоремы при конформных отображениях 2, 668—671
- хорд теорема 2, 669
Исключения метод 3, 816
Исключения теория 2, 671—673
Исключенного третьего закон 1, 125, 2, 673
Исключительная кривая 2, 675
- простая компактная алгебра Ли 3, 265
Исключительное аналитическое множество 1, 288, 2, 673
Исключительное значение 2, 674
- - в смысле Бореля 2, 674
- - в смысле Валирона 2, 675
- - в смысле Неванлинны 2, 675
- - в смысле Пикара 2, 674
- направление 2, 769
Исключительное подмногообразие 2, 675
Исключительный дивизор 2, 675
- нуль L-функции Дирихле 2, 190
Испытание 2, 676
Испытания Бернулли 1, 421
Исследование операций 2, 676—680
Истинная грань элемента комплекса 2, 995
- замкнутая формула 1, 555
- ошибка 4, 183
- подгруппа 4, 369
Истинностная таблица 1, 125; 2, 680
- функциональная система 5, 695
Истинностное значение 2, 681
Истинностных моделей множество 1, 555
Истинность логическая 5, 357
- тождественная 5, 357
Истинный цикл 1, 829; 2, 681
Источник векторного поля 2, 681
Источник сообщений 2, 682
Источник-изображение 2, 500
Исчезающий цикл 3, 807
Исчезающих когомологий пространство 3, 808
Исчерпание области 2, 683
Исчерпывания метод 2, 683
Исчерпывающая статистика 4, 176
- фильтрация 5, 616
Исчисление 2, 685; см. также соответствующее название
Итеративная сеть 1, 50
Итерации процесс 3, 294
Итераций минимальных метод 3, 693
Итерационная последовательность 2, 690
Итерационные методы 2, 686—689; 3, 948
Итерационный алгоритм 2, 689—691
- метод Зейделя 4, 251
- - чебышевский 5, 848
- - численный 3, 293
- процесс, непрерывный аналог 3, 991
Итерация 2, 690, 691; 4, 942
- простая 4, 250
- формальных языков 5, 644
Итерирование 2, 691
Итерированное преобразование Стилтьеса 5, 227
Итерированное ядро 2, 691
Ито процесс 2, 691
- стохастическое дифференциальное уравнение 2, 363
- теорема об управляемых случайных процессах 5, 531
Ито формула 2, 692, 4, 1112, 5, 241
Ито — Сигала — Вика отображение 5, 633
Йетса поправка 2, 693
Йорданова алгебра 2, 693—696
- - компактная 3, 1180
Йорданово умножение 2, 693

К

Кабельтово зацепление 5, 485
Кавагути пространство 2, 697
Кавальери принцип 2, 698, 3, 1149
Казимира оператор 2, 698
Казимира элемент 2, 698
Кактоид 2, 699
Какутани теорема в теории игр 2, 699
- эквивалентность 5, 1011
Календарное планирование 4, 871
Калибр топологического пространства 2, 699
Калибровки условие 1, 1083
Калибровочная группа 5, 1060
Калибровочное поле 5, 1088
- преобразование 1, 1083
Калмана — Бьюси метод 5, 35
- - фильтр 4, 46
Кальдерона — Зигмунда оператор 2, 699
Кальдерона — Лионса комплексный метод 2, 630
Камера 2, 700
- Вейля 1, 626
- корневой системы 3, 16
Кана расслоение 4, 1166
- условие 4, 1165
Канал 2, 648, 941
Канал без памяти 2, 701
Канал гауссовский 2, 701
-, информационно-устойчивая последовательность 2, 650
Канал многосторонний 2, 702
-, множество состояний 2, 704
- обратной связи 2, 853
-, пропускная способность 2, 709
- прямой связи 2, 853
Канал с конечной памятью 2, 704
Канал с конечным числом состояний 2, 704
Канал с обратной связью 2, 705
Канал связи 2, 706
Канал связи квантовый 2, 707—709

Канал симметричный 2, 709
-, функция надежности 4, 186
Канала пропускная способность 2, 709
Каналовая поверхность 2, 710
Каноническая алгебраическая кривая 1, 146
- гамильтонова система 1, 858
- замена переменных 1, 860
Каноническая корреляция 2, 710
Каноническая кривая 2, 711
- левая дифференциальная форма 3, 625
- линейная гипотеза 3, 300
- нормальная форма матрицы 3, 1054
- особенность 4, 916
- связность 4, 947
- - эрмитова 5, 1020
- сетевая модель 4, 1120
- система линейная 1, 861
- - Поста 4, 513
- топология 5, 366
- форма матрицы 3, 1052
Канонически полиномиальная матрица 3, 616
Канонические коэффициенты корреляции 2, 711
- образующие 2, 738
Канонические разрезы 2, 712
- сечения 2, 712
Канонический абелев интеграл 1, 16
- ансамбль Гиббса 5, 179
- - - статистический 1, 958
- атлас 5, 722
- вид матрицы 3, 1052
Канонический класс 2, 712
- - многообразия 2, 266
- оператор Маслова 5, 722
- разрез многообразия 2, 54
- репер 4, 365
- сдвиг 4, 1161
- формализм 1, 860
- элемент аналитического продолжения 1, 283
- эллиптический интеграл 5, 989
- эпиморфизм 5, 589
Каноническое гауссово отображение 5, 298
- конформное отображение 2, 1093
Каноническое множество замкнутое 2, 713
- - открытое 2, 713
- нормирование 3, 1078
Каноническое погружение 2, 713
- представление Леви 1, 398, 3, 218
- - Леви — Хинчина 1, 397, 3, 225
- - оператора 3, 1056
- - семимартингала 4, 1113
- - числа 4, 876
Каноническое преобразование 1, 860
Каноническое произведение 2, 713
Каноническое распределение Гиббса 1, 957
- уравнение Фредгольма 3, 1027
Кантелли условие 1, 528
Кантора аксиома 1, 970; 2, 714
- - непрерывности 3, 989
- антиномия 1, 295
- множество 2, 718
Кантора парадокс 2, 714
- принцип вложенных отрезков 2, 74, 991
Кантора теорема 2, 714
- - о множестве действительных чисел 2, 714
- - о мощности 2, 714, 723, 3, 838
- - о порядковых типах 4, 503
- - о последовательности множеств 2, 714
- - о равномерной непрерывности 2, 715, 3, 984
- - о тригонометрических рядах 2, 715
- - об эквивалентности множеств 2, 715
Кантора — Бендиксона теорема 2, 714
Кантора — Бернштейна теорема 2, 715, 723, 3, 838
Кантора — Гейне теорема 2, 715
Кантора — Лебега теорема о тригонометрических рядах 5, 440
Канторов диагональный процесс 2, 125
Канторов дисконтинуум 2, 715, 718
Канторова кривая 2, 715, 3, 384
Канторова лестница 2, 718
Канторовича пространство 4, 471, 713
Канторовича процесс 2, 715
Канторовича — Банаха пространство 4, 472
Канторово многообразие 2, 716
Канторово множество 2, 717
- распределение 4, 1178
- совершенное множество 2, 715, 718
Капелли тождество 1, 120
Капланского проблема для групповых алгебр 1, 1144
- теорема о проективных модулях 4, 682
Каппа 2, 718
Каратеодори внешняя мера 1, 734
Каратеодори класс регулярных функций 2, 718—720
Каратеодори мера 2, 720
Каратеодори область 2, 720
- расширение 5, 79
- теорема для граничных элементов 1, 1103
- - о выпуклой оболочке 1, 788
Каратеодори теорема о конформном отображении 2, 720
- - об интегральных представлениях 4, 215
- - об односвязных областях 2, 720
Каратеодори — Теплица теорема 2, 719
Каратеодори — Фейера задача 2, 721
Кардано формула 2, 722
Кардинал множества 2, 723
Кардинальная сумма 5, 525
Кардинальное число 2, 723, 3, 837
- -, Бернштейна формула 1, 235
Кардинальнозначный инвариант 5, 388
Кардинальный инвариант 3, 834
Кардиоида 2, 724
Карлемана граничная задача 2, 725
- квазианалитический класс функций 2, 726
- континуум 2, 726
Карлемана неравенство 1, 977; 2, 725
- полиномы 2, 727
- принцип 4, 909
Карлемана теорема 2, 725—727
- - о квазианалитических классах 2, 725
- - о моментах 2, 726
- - о приближении 2, 726
- - о равномерном приближении 2, 726
- условие 2, 725, 799
- - для моментов 3, 792
Карлемана ядро 2, 727
Карлемана — Мийю проблема о гармонических мерах 4, 910
Карлесона множество 2, 727
Карлесона теорема о рядах Фурье 2, 727
- - об интерполировании 2, 621
Карлсона метод 2, 727
Карлсона неравенство 2, 728
Карнапа правило 1, 434; 2, 728
Карно теорема в геометрии 2, 729
Карсона преобразование 2, 729
Карта 2, 729, 3, 437, 743, 5, 722
- локальная 2, 355
- плоская 1, 1109
-, Эйлера формула 1, 1109
Картана базис 3, 273
- критерий о полупростых алгебрах Ли 3, 272
- - о разрешимости алгебр Ли 3, 279
- - полупростоты 2, 858
- - разрешимости 2, 858
Картана лемма о внешнем произведении 2, 731
Картана матрица 2, 731, 732; 3, 17
Картана метод внешних форм 2, 732—736
Картана подалгебра 2, 736, 3, 1041
Картана подгруппа 2, 737
- принцип доминирования 2, 373
Картана разложение 2, 738
- связность 4, 1093
- структурные уравнения 2, 736
Картана теорема 2, 738—740
- - о геодезических 4, 673
- - о группах Ли 3, 256
- - о дифференцируемых многообразиях 4, 732
- - о когомологиях 4, 769
- - о римановых пространствах 2, 863
- - о старшем векторе 2, 738
- - о тонком пределе 5, 365
- - о функциях многих комплексных переменных 2, 739
- - об аналитических группах 1, 245
- - об интегральных многообразиях 4, 774
- формула 5, 229, 231
- число 2, 734
Картана — Вейля базис 2, 740
Картана — Кэлера теорема об интегральных многообразиях 4, 774
Картана — Лаптева теорема о связности 4, 1095
Картана — Серра базис 5, 228
- - система 4, 517
- - теорема конечности 2, 1025
Картана — Туллена теорема об областях голоморфности 1, 1031
Картановская композиция 4, 921
Картановский коэффициент связности 5, 622
- тензор кручения 5, 622
Картера подгруппа 2, 740
Картографии математические задачи 2, 740—746
Картографическая проекция 2, 746—754
- сетка 2, 746
Картье дивизор 2, 130
- теорема для групповых схем 1, 1147
Карунена теорема о спектральном разложении 5, 121
Карунена — Лоэва разложение 5, 124
Касание 2, 754
Касательная 2, 249, 754
Касательная алгебра 3, 462
Касательная плоскость 2, 251, 755
- размерность 1, 285
Касательное отображение 2, 352, 755
- поле 4, 1210
- представление 5, 297
Касательное преобразование 2, 755, 4, 634
- пространство 1, 285
- - Зарисского 2, 443
Касательное расслоение 2, 443, 755
- риманово пространство 5, 623
Касательный конус 1, 788, 2, 756
Касательный поток 2, 756
Касательный пучок 2, 443, 757
Касательных индикатриса 2, 757
- метод 3, 1092
Каскад 2, 757; 3, 422; 5, 371
K-каскад 4, 1194
Каскадный код 2, 933
Каскадный метод 2, 758
Касп 2, 759
Кассини овал 2, 759
Кастельнуово критерий рациональности 4, 916
Кастельнуово — Энрикеса критерий 2, 675
Каталана поверхность 2, 759
Катастрофа элементарная 1, 498
Катастрофы Тома 5, 360
Категориальная грамматика 1, 1090
Категоричная в мощности элементарная теория 5, 972
Категоричная система аксиом 2, 759
Категоричность в мощности 2, 760
Категоричный в мощности класс моделей 1, 103
- класс Ω-систем 1, 160
Категория 2, 761—763
- абелева 1, 20
- аддитивная 1, 89
- в грамматике 1, 1091
- Гротендика 1, 1133
- групп 1, 1136
- двойственная 2, 32
- диаграмм со схемой 5, 688
-, диаграмма 2, 125
- дуальная 2, 32
- замкнутая 2, 433
-, идеал 2, 483
-, интегральный объект 2, 604
-, инъективный объект 4, 683
- комплексов 1, 20
- конкретная 3, 758
-, левый нуль 5, 616
-, локализация 3, 420
- локально связная 1, 1074
- малая 3, 497
- множеств 3, 758
Категория множества 2, 764
- модулей 3, 770
- моноидальная 3, 810
- мотивов 3, 833
- надстроечная 2, 47
-, нулевой объект 3, 1082
-, образ морфизма 3, 1129
-, образующий объект 3, 1130
-, объект 3, 1148
- последовательностей 4, 506
-, правый нуль 5, 616
- предабелева 1, 89
-, проективный объект 4, 682
Категория с инволюцией 2, 764
-, скелет 4, 1200
- топологизированная 5, 365
- -, главный *G*-объект 1, 1017
Категория топологического пространства (в смысле Люстерника — Шнирельмана) 2, 763
- функторов 5, 688
-, эквивалентность 5, 943
- эффективных мотивов 3, 833
S-категория 2, 47
Катеноид 2, 765
Катет 2, 765
Катетова равенство для размерностей 4, 829
- теорема о метрических пространствах 3, 1084
- формула для размерностей 4, 822
Каустика 2, 765
Качества задача 2, 330
Качественная теория дифференциальных уравнений 2, 765—771
Качественная теория дифференциальных уравнений в банаховом пространстве 2, 771—776
- - спектра дифференциального оператора 5, 110
Качественные методы вариационного исчисления 1, 585
Квадрант 2, 80, 776
Квадрат 2, 776
- греко-латинский 4, 90
- декартов 2, 79, 4, 896
- интервала 4, 149
- кольца 2, 981
- коуниверсальный 2, 79
- латинский 2, 971, 3, 206
- магический 2, 971; 3, 475
- Понтрягина 4, 483
- Постникова 4, 515
- скалярный 4, 1197
- универсальный 4, 896
- эйлеров 4, 90
Квадрата критерий 3, 207
Квадратическая иррациональность 2, 776

Квадратичная матрица неполная 1, 722
Квадратичная ошибка 2, 776, 783
Квадратичная форма 2, 776—782, 5, 634
- - бинарная 1, 486
- -, группа типов 1, 711
- -, закон инерции 2, 562
- -, кольцо типов 1, 711
- - линии второго порядка 3, 388
- - первая 4, 234
- - поверхности 1, 770; 2, 252
- -, ранг 4, 859
- -, сигнатура 4, 1128
- -, Сильвестра теорема 2, 562
- - третья 5, 296
Квадратичное интерполирование 2, 622
Квадратичное отклонение 2, 782; 3, 877
- отображение 2, 777
Квадратичное поле 2, 783
Квадратичное программирование 2, 678, 784
- симплектическое пространство 4, 714
Квадратичное среднее 2, 784
-уклонение 2, 782
Квадратичные формы поверхности 2, 784
- - узлов и зацеплений 5, 480
Квадратичный вычет 1, 814; 2, 785; 5, 153, 217
Квадратичный дифференциал 2, 241, 786
- -, глобальная структура траекторий 1, 1022
- -, локальная структура траекторий 3, 424
Квадратичный закон взаимности 2, 787; 3, 231
- идеал 2, 694
- критерий абсолютной устойчивости 5, 564
- модуль 2, 777
- невычет 2, 785; 5, 217
- символ Гильберта 5, 776
- характер Дирихле 2, 192
Квадратичных форм приведение 2, 788—791
Квадратная диаграмма 2, 126
- матрица 3, 613
- -, порядок 4, 504
- -, след 4, 1208
- -, собственное значение 5, 59
Квадратного корня метод 2, 791
Квадратное уравнение 2, 792
Квадратриса 2, 793
- Диностpата 2, 156
Квадратура 2, 610, 793
Квадратура круга 2, 793
- оптимальная 4, 34
-, погрешность 4, 35
Квадратурная сумма 2, 793
Квадратурная формула 2, 793—795; 3, 136
- - Гаусса 1, 897; 2, 624
- - гауссова типа 3, 866
- - Лобатто 3, 397
- - Маркова 3, 513, 867
- - Мелера 3, 633
- - наивысшей алгебраической степени точности 3, 866
- - наилучшая 3, 867; 4, 35
- - Ньютона — Котеса 3, 1093
- - оптимальная 3, 867
- - Радо 4, 809
- - Симпсона 2, 625
- - случайная 3, 817
- - «трех восьмых» 3, 1093
- - Чебышева 5, 839
- - экстремальная 4, 35
- - Эрмита 3, 634
Квадратурных сумм метод 2, 795
Квадраты ортогональные латинские 4, 90
- - попарно 4, 90
Квадрика 2, 796—798
- Дарбу 2, 15
- Ли 3, 263
- соприкасающаяся 5, 79
Квадрируемая фигура 4, 327
Квадрируемое множество 3, 92
Квадрируемость 2, 798
Квадрупольный момент 3, 843
Квадруполя потенциал 3, 843
Квазиабелева функция 2, 798
Квазианалитическая k-алгебра 1, 278
Квазианалитический класс функций 2, 798—800
- - - в смысле Адамара 2, 725
- - - в смысле Карлемана 2, 726
- - -, Карлемана теорема 2, 725
Квазиаффинная схема 2, 800
Квазиаффинный морфизм 2, 800
Квазигеодезическая 2, 800
Квазигеодезическая линия 2, 800
Квазигиперболическое пространство 2, 800—802
Квазиглобальный способ решения многоэкстремальной задачи 3, 756
Квазигруппа 2, 802—805
- дистрибутивная 2, 229
- идемпотентная медиальная 2, 229
F-квазигруппа 2, 803
n-квазигруппа 2, 803
TS-квазигруппа 2, 802
Квазидискретный спектр 2, 805
Квазидиффузии метод 4, 251
Квазидиэдральная группа 2, 806
Квазидуальное пространство 5, 510
Квазиевклидово пространство 2, 806
Квазиестественная нормальная форма матрицы 3, 1054
Квазиинвариантная мера 2, 806
Квазиинтеграл 1, 695
Квазиинформационное расширение 2, 807
Квазиинъективный модуль 2, 664
Квазиклассическое приближение 1, 717; 2, 807—809
Квазикогерентный пучок 2, 809
Квазикомпактная аффинная схема 1, 358
Квазикомпактное пространство 2, 809, 993
Квазикомпонента точки 4, 1096
Квазиконформное отображение 2, 810—813
k-квазиконформное отображение 2, 810
Квазиконформности коэффициент 2, 810
Квазикоординаты 1, 1034
Квазилинеаризация 2, 813
Квазилинейная система 3, 956
Квазилинейное уравнение 2, 326, 814, 3, 951
Квазилинейные гиперболические уравнения и системы 2, 814—818
Квазилинейный дифференциальный оператор 2, 345
Квазилокальные оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Квазимера 4, 580, 5, 818
Квазимногообразие 2, 818
- алгебраических систем 1, 183
- конечно определимое 1, 183
- минимальное 1, 184
Квазимногочлен 3, 343
Квазинорма 2, 818
Квазинормальное пространство 2, 818; 3, 1065
Квазинормированное пространство 2, 818
Квазиобратный элемент 2, 820
Квазиоперация 1, 826
Квазиотражение 5, 506
Квазипериод 5, 347
Квазипериодическая полугруппа 4, 267
Квазипериодическая функция 2, 818
Квазипериодический режим 1, 786
Квазипериодическое движение 2, 819
Квазипорядок 4, 505, 581
Квазипроективная схема 2, 819
Квазипроективный морфизм 2, 819
Квазипростое представление 2, 819
Квазипростое число 2, 819, 4, 883
Квазиравномерная сходимость 2, 819
Квазиразложимая группа 2, 820
Квазирасщепимая группа 2, 820
Квазирегулярная точка 5, 1013
Квазирегулярное кольцо 2, 109, 820
- отображение 2, 810
Квазирегулярный радикал 2, 820
- функционал 1, 621
Квазирефлексивное банахово пространство 1, 388
Квазирешение 2, 821; 3, 932
Квазиримано пространство 4, 467, 468
Квазисимплектическое преобразование 2, 822
Квазисимплектическое пространство 2, 822
Квазисобственная функция 2, 805
Квазисобственное значение 2, 805
Квазисредние 2, 823
Квазисредних метод 2, 823—825
Квазитело 2, 967
Квазитензорный объект 1, 937
Квазитождество 1, 159, 183, 2, 760, 825
Квазиуниверсальный класс Ω-систем 1, 185
Квазиунипотентное действие 3, 807
Квазиунипотентный элемент 4, 155
Квазиупорядоченность 4, 581
Квазифробениусово кольцо 2, 825
Квазифуксова группа 2, 876
Квазихарактер 2, 826
Квазихопфова алгебра 5, 790
Квазициклическая группа 2, 827; 4, 416
Квазиэквивалентность базисов 1, 377
Квазиэквивалентные представления 2, 827
Квазиэллиптическое пространство 2, 828
Квантиль 2, 829
- выборочная 1, 774
Квантование источника сообщений 2, 683
- сообщений 5, 76
Квантования вторичного метод 5, 518
Квантованное поле 4, 475
Квантовая мера 2, 1037
Квантовая теория поля 2, 829—837
- - - конструктивная 2, 1036
Квантовое декодирование 2, 708
- кодирование 2, 707
- поле 4, 475
Квантовый канал связи 2, 707
Квантор 2, 837
- всеобщности 1, 769, 3, 1148
- ограниченный 3, 1162, 4, 637
- существования 4, 93
Квартиль 2, 829, 837
Кватернарная квадратичная форма 2, 837
Кватернарная форма 2, 838
Кватернион 2, 838
-, векторная часть 2, 838
-, норма 2, 838
-, скалярная часть 2, 838
- сопряженный 2, 838
-, тело 5, 326
Кватернионная структура 2, 839
Кватернионное колерово многообразие 2, 839
- риманово многообразие 2, 839
Кватернионов группа 2, 840
Кёбе теорема 2, 841
- - искажения 2, 841
- - о разрезах 5, 516
- - об 1/4 2, 669
- - об отображении областей 2, 841
- - покрытия 2, 841
Кёбе униформизация 2, 877
Кёбе функция 1, 466; 2, 669, 842
Келдыша теорема 2, 842; 5, 117
- - в теории потенциала 2, 842
- - о несамосопряженных дифференциальных операторах 5, 112
- - о приближении 2, 842
- - об иррегулярных граничных точках 4, 275
Келдыша — Лаврентьева пример 2, 843
Келдыша — Лаврентьева теорема о равномерном приближении 2, 843
Келлога лемма 2, 844
Келлога теорема о конформном отображении 2, 844
Келлога — Эванса теорема 2, 844
Кельвина преобразование 2, 844
Кельвина функции 2, 845
Кеммера — Дуффина матрица 2, 875
Кендалла коэффициент ранговой корреляции 2, 846, 4, 863
Кёнига теорема о (0,1)-матрицах 1, 773; 2, 846
- - о порядковых числах 2, 723
Кеплера уравнение 2, 846
Кервера инвариант 2, 847—849
- многообразие 2, 380, 848
- сфера 2, 380
Кервера — Милнора инвариант 2, 849
Кернса теорема о двумерных многообразиях 2, 56
Керн функция 2, 849
- Бергмана 1, 412
Керра метрика 2, 849; 5, 890
Кёте проблема о нильидеалах 3, 1039
- - о циклических модулях 5, 816
- пространство 5, 1034
- радикал 4, 807
Кибернетика 2, 850—856
Кибернетическая система 2, 850
Киллинга вектор 2, 856
- поле объекта 2, 857
- тензорное поле 2, 857
- уравнение 2, 857
Киллинга форма 2, 858
Киллинга — Кокстера элемент 2, 946
Кинематическая мера 2, 571
- теория газов, Больцмана уравнение 1, 521
Кинетическое уравнение 2, 858; 4, 245
- - Власова 1, 720
- - Ландау 3, 190
- - переноса, Владимирова метод 1, 719
Кинк 5, 75
Кирпич гильбертов 1, 978
Кирхгофа интеграл 2, 860
Кирхгофа метод 2, 859
Кирхгофа формула 2, 860—862; 3, 48
Кирхгофа — Лява гипотеза в теории оболочек 3, 1127
Кирхгофа — Соболева формула 2, 862
Китайская теорема об остатках 2, 65, 862
Кифера — Вольфовица процедура стохастической аппроксимации 5, 235
Класс 2, 862—864, см. также соответствующее название
Класс-вычет 1, 818
Классификационный признак 3, 733
Классификация Бэра 1, 567
- Клини — Мостовского 2, 881
Классифицирующее пространство 2, 864
Классическая группа 2, 865—868
- - линейная 3, 303
- -, представление 4, 595
- постановка краевой задачи 3, 607
- простая компактная алгебра Ли 3, 265
- размерность 4, 824
- форма леммы Шварца 5, 886
Классически общезначимая формула 4, 579

Классически полупростое кольцо 2, 868, 4, 805
Классические ортогональные многочлены 2, 868
Классическое вариационное исчисление 1, 580
- изопериметрическое неравенство 2, 517
- исчисление высказываний 3, 418
- - предикатов 3, 417, 418, 4, 578
- - пропозициональное 4, 699
- равенство Парсеваля 4, 223
Классической механики вариационные принципы 1, 596
Классической небесной механики математические задачи 2, 869—871
Классов дивизоров группа 2, 871
Классов исчисление 2, 872
Классы сложности вычислений 1, 211
Кластер 3, 712
Кластера задача 4, 872
Клебша коннекс 2, 1035
Клебша условие 2, 872
Клейна бутылка 2, 873
Клейна интерпретация 2, 873
Клейна координаты 2, 873, 4, 334
- модулярная группа 2, 195; 5, 680
- особенность 4, 915
Клейна поверхность 2, 52, 873
Клейна пространство 2, 874
- четверная группа 4, 1141
Клейна — Гордона уравнение 2, 874; 5, 898
Клейна — Пуанкаре теорема униформизации 2, 876, 5, 515
Клейнова группа 2, 875—878
Клейсли конструкция 5, 447
Клеро теорема о поверхностях вращения 1, 767
Клеро уравнение 2, 878
Клетка двумерная 2, 51
- жорданова 2, 425, 3, 372
- p-мерная 2, 880
-, Уайтхеда теорема 1, 1064
Клеточная гомотопия 2, 878
- коцепь 3, 44
- матрица 3, 614
- система Постникова 4, 516
Клеточно-диагональная матрица 3, 614
Клеточное отображение 2, 878
Клеточное пространство 2, 879
Клеточное разбиение 2, 879
- -, Уайтхеда теорема 1, 1069
Клеточный комплекс 2, 880, 996
Кли задача 5, 1014
Клин в векторном пространстве 2, 880, 1074
Клини аналитическая иерархия 2, 490
- нумерация 3, 1086
- теорема о рекурсивных функциях 3, 1057
Клини — Мостовского арифметическая иерархия 2, 490
Клини — Мостовского классификация 2, 881
Клини — Нельсона теорема в программировании 4, 646
Клини — Россера парадокс 2, 970
Клиффорда алгебра 2, 881
- группа 2, 882, 5, 138
Клиффорда параллель 2, 882, 4, 991
- поверхность 2, 882, 4, 991, 5, 405
Клиффорда теорема о дивизорах 2, 882
- - о полугруппах 4, 1091
- числа 1, 240
Клиффорда — Липшица числа 1, 1008
Клиффорда — Клейна проблема пространственных форм 4, 709
Клиффордова полугруппа 2, 883
Клон операции 2, 884
Клотоида 2, 884, 3, 21
Клофоида 3, 21
Кнастера континуум 2, 884; 3, 892
Кнастера—Куратовского веер 1, 760
Кнезера теорема для главных однородных пространств 1, 1015
Кнезера теорема о слоениях 2, 884
Кнезера — Брюа — Титса теорема об алгебраических группах 1, 847
Кнезера — Титса гипотеза 2, 885
Кноппа метод суммирования 2, 886
Кноппа — Лоренца теорема о методах суммирования 1, 37
Коалгебра 2, 886
Коалиционная игра 2, 886
- структура 5, 561
Коалиционно рациональная конфигурация 5, 561
Коалиция 2, 887, 1103
- действия 2, 469
- интересов 2, 470
-, угроза 5, 562
Кобазис 2, 887
Кобол 2, 887
Кобордизм 1, 533, 2, 888—894 5, 487
- узлов 3, 739, 5, 482
h-кобордизм 2, 894
s-кобордизм 2, 894
Ковариант 2, 344, 980
Ковариант тензора 2, 895
Ковариантная валентность 5, 326
Ковариантная производная 2, 735, 896, 897
Ковариантно постоянное поле 4, 208
Ковариантное дифференцирование 2, 896—899
Ковариантный вектор 2, 899,900
Ковариантный дифференциал 2, 897, 900
Ковариантный тензор 2, 900; 5, 326
- функтор 2, 762
Ковариационная матрица 2, 900
- функция 5, 105
Ковариационное окно 5, 125
Ковариационный анализ 2, 901
Ковариация 2, 226, 902
Ковариация числа решений 2, 902
Ковер Серпиньского 3, 384, 4, 1118
Ковырождения оператор 4, 1169
Ковысота простого идеала 1, 813
Когенератор 4, 1127
Когерентная когомологическая размерность 2, 926
Когерентное вещественное аналитическое пространство 1, 689
Когерентное кольцо 2, 903
Когерентность, Ока теорема 4, 9
- ориентации 2, 662
Когерентные числа 2, 903
Когерентный алгебраический пучок 2, 903
Когерентный аналитический пучок 2, 739, 904
Когерентный пучок 2, 905
Когомологии 2, 905—909
- l-адические 1, 99
Когомологии алгебр 2, 909—915
Когомологии алгебр Ли 2, 912—915
- Александера — Спеньера 5, 861
- Александрова — Чеха 1, 234, 5, 861
Когомологии банаховых алгебр 2, 915
- Вейля 1, 626
- Галуа 1, 845
Когомологии групп 2, 916—919
- де Рама 4, 855
- динамической системы 1, 1042
Когомологии комплекса 2, 919
- локальные 3, 442
- неабелевы 3, 896
- относительные 4, 151
- примитивные 3, 237
- сингулярные 4, 1179
- спектральные 5, 861
Когомологии теория 1, 1046
Когомологии Чеха 5, 861
- эквивариантные 5, 947
- этальные 5, 1024
Когомологий алгебраический класс 1, 180
Когомологий группа 2, 919, 4, 1163
Когомологий кольцо 2, 906, 908, 920
- обобщенные теории 3, 1120
- функтор 5, 1024
- экстраординарные теории 3, 1120
Когомологическая группа комплекса 2, 998
- длина 2, 763
- надстройка 2, 921
Когомологическая операция 2, 921—925
Когомологическая последовательность 1, 1046, 1053, 2, 925, 1001
Когомологическая размерность 1, 846, 1055; 2, 925
Когомологически тривиальный модуль 2, 918
Когомологический функтор 1, 1058, 2, 926
Когомологическое многообразие 1, 1059; 2, 926
Когомологичные коциклы 3, 45
Когомологичный нулю коцикл 2, 954
Когомотопическая группа 2, 927
S-когомотопическая группа 2, 48
Кограней оператор 4, 1169
Кограница 3, 44, 4, 1179
Когранично отображение 3, 44
Когранично оператор 2, 954
Код 1, 220; 2, 649, 928, 939
- арифметический 2, 933
- блоковый 2, 931
- Боуза — Чоудхури — Хоквингема 2, 932
- двоичный 2, 932
- двойственный 2, 929
-, длина 2, 929
- каскадный 2, 933
- линейный 2, 932
- оптимальный 2, 937
- плотно упакованный 4, 396
- префиксный 2, 937
- Рида — Маллера 2, 932
- Рида — Соломона 2, 932
Код с исправлением арифметических ошибок 2, 928—930
Код с исправлением выпадений и вставок 2, 930
Код с исправлением ошибок 2, 930—934, 941
- современный 2, 932, 4, 396
- циклический 2, 933
A-код 2, 929
БЧХ-код 2, 932
РМ-код 2, 932
РС-код 2, 932
Кодаиры размерность 2, 934
- теорема о проективном вложении 3, 156, 5, 788
Кодаиры теорема об исчезновении 2, 935
Кодвижение 2, 801, 829
Кодирование 2, 649, 682, 931,937
- автоматное 2, 938
Кодирование алфавитное 2, 935—937
Кодирование и декодирование 2, 937—942
- источника сообщений 2, 683
- квантовое 2, 707
- неравномерное 2, 935
- случайное 2, 649, 5, 15
-, теорема 2, 652
-, Шеннона теорема 2, 650
Кодовое расстояние 2, 931
- слово 2, 649
Коевклидово пространство 2, 942—944
Коединица сопряжения 5, 90
Козамкнутый дифференциал 2, 238
Коиндуцированный модуль 2,917
Кока алгоритм 1, 1090
Докасательное пространство 1, 285; 2, 755
- расслоение 2, 755
Коконус морфизмов 2, 1074
Кокстера граф 2, 944; 3, 17
Кокстера группа 2, 944—946
- матрица 2, 944
- число 4, 159
Колебание гармоническое 1, 888; 4, 1085
- разрывное 4, 967
- релаксационное 4, 966
- свободное 5, 64
- синусоидальное 1, 888
- собственное 5, 64
Колебание функции 2, 946
Колебаний маятника уравнение 3, 629
Колебаний теория 2, 947—950
Колебания вынужденные 1, 786
- квазилинейные 3, 956
- субгармонические 1, 786
Колебательное уравнение 1, 862
Колеблющееся решение 2, 950
Колец многообразие 2, 950
Количественная эквивалентность 3, 760
Количественный признак 3, 732
Количество информации 2, 646
- - алгоритмическое 1, 222
Коллектив автоматов 1, 58
Коллизия переменных 4, 382,579
Коллингвуда теорема максимальности 4, 569
Коллинеарность 4, 664
Коллинеарные векторы 1, 632; 2, 951
Коллинеация 2, 951, 4, 669, 680
Коллокации метод 2, 951
Колмогорова аксиома 2, 952, 4, 140, 5, 391
Колмогорова двойственность 2, 953—955
- дифференциальное уравнение 3, 519, 526
Колмогорова интеграл 2, 955
Колмогорова критерий 2, 955
- - для систем независимых функций 3, 919
Колмогорова неравенство 2, 956
- обратное уравнение 2, 361
- поперечник 4, 492
- поток 4, 1195
Колмогорова пространство 2, 952, 958
- прямое уравнение 2, 362
- распределение 4, 180
- система 4, 1195
- теорема о дополнениях 2, 94
- - о законе повторного логарифма 4, 347
- - о композиции (суперкомпозиции) функций 4, 1216
- - о локально выпуклых пространствах 3, 428
- - о непустоте классов 2, 94
- - о нормируемости пространств 3, 1047
- - о применимости усиленного закона больших чисел 1, 528
- - о согласованных распределениях 1, 666
- - о топологических векторных пространствах 5, 379
Колмогорова уравнение 2, 958; 4, 1199
- условие для случайных процессов 5, 24
- функция распределения 2, 955
Колмогорова — Александера произведение 2, 906
Колмогорова — Селиверстова теорема 2, 959
Колмогорова — Смирнова критерий 2, 959
Колмогорова — Чепмена уравнение 2, 960, 4, 259, 5, 960
Колоколообразная игра 2, 960
Колчина теорема о нильпотентных группах Ли 3, 271
- - об унипотентных группах 5, 505

Колчина — Мальцева теорема о группах Ли 3, 285
Кольца и алгебры 2, 960—965
Кольцевая граница 2, 965—967
- норма 3, 1048
Кольцевая область 1, 1023, 2, 967
Кольцевой алгоритм 1, 562
- объект категории 1, 1149
- спектр пространств 5, 103
Кольцо 2, 960, 967
- абелево 4, 941
- абсолютно плоское 1, 39
-, аддитивная группа 1, 89, 2, 967
- аделей 1, 95
- Алберта 3, 901
- алгебраических степенных рядов 1, 918
- алгебро-геометрическое 1, 939
- альтернативное 1, 237
-, аналитическая нормальность 1, 939
-, - приведенность 1, 939
- аналитическое 1, 278
-, Артина — Риса лемма 1, 98
- артиново 1, 327
- архимедово 1, 329
- ассоциативное 1, 340; 2, 961
- ассоциативно-коммутативное 1, 239
- атомарное 1, 351
- Безу 1, 400
- бирегулярное 4, 940
- булево 1, 554
- бэровское 4, 940
- Вейерштрасса 1, 614
- векторное 1, 640
- векторов Витта 1, 710
- Витта 1, 711
- Витта — Гротендика 1, 715
- вихревое 1, 715
-, вложение 1, 721
-, внутренний автоморфизм 1, 736
- вполне регулярное 1, 118
- вычетов 5, 592
-, Галуа теория 1, 853
- гауссово 1, 906, 5, 590
- гензелево 1, 918
- геометрическое 1, 939
- главных идеалов 1, 1019
-, Голди теорема 1, 341
-, гомологическая классификация 1, 1052
- Гореншейна 1, 1076
- градуированное 1, 1084
- Гротендика 4, 595
- групповое 4, 1204
- двумерное 2, 51
- дедекиндово 2, 64
-, делимость 2, 85
- Джекобсона 2, 108
-, Джекобсона радикал 2, 109
- диагональное 2, 124
- дискретно нормированное 2, 203
- дискретного нормирования 2, 203
- дифференциальное 2, 279
- дифференциальных многочленов 1, 1019, 4, 901
- - операторов 2, 349
-, дифференцирование 2, 350
- евклидово 2, 398
-, единица 2, 961
- квазирегулярное 2, 109, 820
-, квазирегулярный радикал 2, 820
- квазифробениусово 2, 825
- классически полупростое 2, 868; 4, 805
- когерентное 2, 903
- когомологий 2, 906, 908, 920
-, коммутант 2, 981
- коммутативное 2, 961, 989
- конечного дискретного главного порядка (кольцо Крулля) 3, 124
- конечное по Дедекинду 4, 941
- косых многочленов 1, 1019
- Коэна — Маколея 3, 68
-, кронекерово произведение 3, 118
- Крулля 3, 124
-, Крулля теорема 1, 98
- Ласкера 3, 206
-, левая глобальная размерность 1, 1054
- Ли 3, 263
- линейно упорядоченное 5, 526
- локально факториальное 2, 871
- локальное 3, 437
- - регулярное 1, 1055
- маколесво 3, 68
- матриц 3, 612
- многочленов 3, 755. 4, 309
- множеств 3, 637
-, Мори теорема 2, 871
-, мультипликативный группоид 2, 967
- неассоциативное 3, 899
- непрерывное слева 4, 940
- нормальное 3, 1051
- нормирования 3, 1078; 5, 815
- нормированное 3, 1081
-, нуль 3, 1082
- однорядное 3, 1182
- оперативное 2, 961
- операторное 4, 24
-, Оре теорема 1, 341
- первичное 3, 901; 4, 237
- полулокальное 3, 439
- полунаследственное 4, 459
- полупервичное 4, 237
- полупростое 4, 465
- J-полупростое 2, 820
- полусовершенное 4, 469
- полуцепное 4, 473
-, правый порядок 4, 505
- превосходное 4, 554
-, предпучок 4, 581
-, представление 3, 778; 5, 1001
- представлений 4, 594
- примарное 4, 634
- примитивное 4, 637
- присоединенное 3, 438
-, проективный спектр 4, 684
- простое 4, 705
-, простой элемент 2, 85
- псевдогеометрическое 1, 939
- псевдофробениусово 2, 826
-, радикал 4, 804
-, T-расширение свободное 1, 722
- регулярное 4, 939
- *-регулярное 4, 941
- решеточно упорядоченное 5, 526
- риккартово 4, 985
- рядное 3, 1182
Кольцо с делением 2, 967
- с областью операторов 4, 24
- самоинъективное 4, 1071
- сбалансированное 4, 1075
- свободное 4, 1079
- - некоммутативное аффинное 1, 123
- символов 2, 349
- скрещенное групповое 4, 1204
-, слабая глобальная размерность 1, 1054
- совершенное 5, 68
-, спектр 5, 101
-, стабильный ранг 5, 166
- строго гензелево 1, 918
- - регулярное 4, 940
- структурно упорядоченное 5, 526
-, структурное пространство 5, 256
- топологическое 5, 385
- упорядоченное 5, 526
- факториальное 5, 590
-, целое замыкание 2, 64, 5, 799
-, целое расширение 5, 799
- целостное 3, 1099, 5, 800
-, центр 5, 802
- цепное 4, 555; 5, 815
- частично упорядоченное 5, 526
- частных 1, 341, 5, 838
- - полное 3, 422
- Чжоу 1, 181, 5, 862
- эндоморфизмов 5, 1000
- японское 1, 939
PF-кольцо 2, 826
QF-кольцо 2, 825
QF-3-кольцо 2, 826
σ-кольцо 3, 637
* -кольцо бэровское 4, 986
- риккартово 4, 986
Кольцоид 2, 968
Команда 4, 645
- машины Тьюринга 5, 456
Комасса 3, 536
Комбескюра соответствие 4, 280
Комбинатор 2, 970
Комбинаторика 2, 968, 974
Комбинаторная геометрия 2, 968, 969
- конфигурация 2, 974, 975
Комбинаторная логика 2, 969
Комбинаторная математика 2, 970, 974
- полугруппа 4, 934, 935
Комбинаторная топология 2, 970
- -, основная гипотеза 3, 152, 4, 486
Комбинаторное многообразие 3, 154
Комбинаторные задачи классические 2, 971—974
Комбинаторный анализ 2, 974—980
Комбинационный резонанс 4, 217
Комитант 2, 980
- дифференциальный 2, 344
Коммивояжера задача 2, 972
Коммутант 2, 981, 989
Коммутативная алгебра 2, 981—984
- - Ли 3, 242
- -, локализация 3, 421
Коммутативная банахова алгебра 1, 381; 2, 984—989
Коммутативная группа 2, 989
Коммутативная групповая схема 2, 989
- диаграмма 1, 1050. 2, 125
- связка полугрупп 4, 1091
- супералгебра 5, 276
Коммутативное кольцо 2, 961, 989
Коммутативности закон 1, 125
- тождество 1, 120
Коммутативность 2, 989
Коммутативный групповой объект 1, 1149
- центр альтернативного кольца 1, 238
Коммутатор 2, 989
- базисный 1, 379
- правильный 1, 379
Коммутации соотношение 5, 518
Коммутационные соотношения 4, 257
Коммутационных и антикоммутационных соотношений представление 2, 990
Коммутирования операция 5, 277
Компакт 1, 474; 2, 990; 5, 392
-, Аренса — Ройдена теорема 2, 985
- Бора 1, 531
-, Брушлинского — Эйленберга теорема 2, 985
-, R-выпуклость 1, 800
-, емкость 2, 404, 405
- привилегированный 4, 632
-, размерность 4, 821
-, теорема о мешках 1, 1060
-, теорема о поясах 1, 1060
- Эберлейна 4, 717
Компактификация 1, 477
- Александрова 1, 233
- Винера 4, 1030
- Мартина 3, 531
Компактная алгебра Ли 3, 264
Компактная группа 2, 991; 3, 264
- -, представление 4, 586
- йорданова алгебра 3, 1180
- топологическая группа 5, 367
Компактно открытая топология 4, 716, 1100
- порожденная решетка 1, 154
-сходящаяся последовательность 5, 311
Компактное в себе множество 2, 992
- вложение функциональных пространств 1, 723
Компактное множество 2, 992
- неориентируемое двумерное многообразие 2, 52
- ориентируемое двумерное многообразие 2, 52
Компактное пространство 1, 473, 2, 993
- семейство голоморфных функций 2, 993
-σ-компактное пространство 2, 993
Компактной сходимости топология 2, 993
Компактности принцип 2, 993
- - Бляшке 1, 509
- - для голоморфных функций 3, 820
- теорема 1, 158
- - в теории моделей 3, 766
- условие 5, 392
Компактность 2, 993
- аппроксимативная 1, 303
- логики первого порядка 2, 371
- метрического пространства 3, 671
- счетная 5, 392
- финальная 5, 392
Компактный класс подмножеств 5, 67
- носитель 2, 681
Компактный оператор 2, 994; 3, 373, 960, 4, 19; 5, 128
- полиэдр 4, 410
Компактный элемент решетки 2, 994
Компаньон 3, 461
Компенсатор 4, 1200
Компилятор 1, 225. 5, 418
Компиляция программ 5, 417
Компланарные векторы 1, 632, 2, 994
Комплекс 2, 995—1001, 5, 612
Комплекс 2, 1001—1002
- абсолютный линейный 4, 1157
- абстрактный 3, 151
- - симплициальный 2, 995
- бесконечномерный 2, 995
- геометрический 1, 933; 4, 748
- - симплициальный 2, 996
-, гомологии 1, 1042
-, группа когомологий 2, 919
- двойной 1, 481
- де Рама 2, 263, 278
- - неабелев 3, 897
-, джойн 3, 153
- замкнуто конечный 2, 995
- звездно конечный 2, 995
- клеточный 2, 880, 996
- конечномерный 2, 995
- конечный 2, 995
- - геометрический 2, 997
- коцепной 2, 1001
-, коцикл 2, 998
- линейного дифференциального оператора 3, 367
- локально конечный 2, 995
- неабелев коцепной 3, 896
-, подразделение 3, 152
- полиэдральный 2, 996; 4, 412
- полусимплициальный 4, 469, 1161
Комплекс прямых 2, 1002
- Пуанкаре 4, 747
- симплициальный 3, 151; 4, 1159, 1168
-, спектр 4, 393
- цепей 4, 1163
- цепной 1, 1042; 2, 998, 1001, 4, 1163
-, цепь 1, 1043, 2, 998
-, цикл 1, 1043, 2, 998
- Чеха 2, 906, 3, 896
- эллиптический 2, 553
a-комплекс 3, 151
CW-комплекс 2, 879
Комплекс-группа 4, 1157
Комплексификация алгебры Ли 2, 1003
Комплексификация векторного пространства 2, 1003
Комплексификация группы Ли 2, 1004
- многообразия 2, 70
- ростка 1, 689
Комплексная гиперповерхность, особая точка 4, 119
- компактная группа Ли 3, 265
- коразмерность 1, 249
- оболочка алгебры Ли 2, 1003
- плоскость 2, 1008
- - бесконечно удаленная 1, 443
- - расширенная 1, 443, 4, 910
- прямая 1, 249
- размерность 1, 249

Комплексная структура 2, 355, 1005
- суммируемая функция, Привалова — Голубева теорема 1, 1034
- K-теория 5, 335
функция Грина 1, 1131; 5, 889
- - почти периодическая 1, 382
- характеристика отображения 2, 810
Комплексно евклидово пространство 5, 1019
Комплексно-аналитическая кривая 1, 249
- плоскость 1, 249
- поверхность 1, 249
- структура 2, 355
Комплексно-аналитическое слоение 4, 1210
Комплексного дифференцирования оператор 3, 67
Комплексного интегрирования метод 1, 259, 2, 1005—1007
- переменного методы решения краевых задач 3, 80
- - пространство 1, 285, 2, 1007
- векторное пространство 1, 642
Комплексное многообразие 1, 273, 278, 2, 355, 1007
- -, аналитическая деформация 2, 103
- - аналитическое 1, 278; 2, 1007
- -, аналитическое семейство 2, 102
- -, голоморфная форма 1, 1028
- - однородное 3, 1173, 1176
- - Штифеля 5, 759
- отражение 4, 158
Комплексное пространство 1, 285, 2, 1007
- - голоморфно выпуклое 1, 1029
- - конечного типа 1, 1030
- -, мероморфное отображение 3, 650
- - расширенное 1, 443
- -, стягивание 2, 674
Комплексное число 2, 1007—1011
- -, абсолютная величина 2, 1008
- -, амплитуда 2, 1009
- -, аргумент 1, 313, 2, 1009
- -, аффикс 1, 352
- -, векторная интерпретация 2, 1009
- - гиперболического типа 2, 31
- -, действительная (вещественная) часть 2, 1007
- -, матричная интерпретация 2, 1009
- -, мнимая часть 2, 1007
- -, модуль 1, 34, 2, 1008
- -, Муавра формула 2, 1010
- - параболического типа 2, 31
- -, показательная форма 2, 1009
- -, поле 2, 1008
- -, полярная форма 2, 1009
- - расщепляемое 2, 32
- -, тригонометрическая форма 2, 1009
- -, фаза 2, 1009
- - эллиптического типа 2, 31
Комплексный гауссовский процесс 1, 906
- метод Кальдерона — Лионса 2, 630
- модуль винта 1, 706
Комплексный тор 1, 22, 250; 2, 1011
- характер Дирихле 2, 192
- чертеж 3, 895
Комплексных умножений алгебра 5, 1001
Композит 2, 1012
- полей 4, 398
Композиции теорема для нормальных алгорифмов 1, 226
Композиционное умножение 5, 284
Композиционный нормальный ряд группы 3, 1076
Композиционный ряд 2, 485, 1012; 5, 266
- - подгрупп 4, 368
- фактор 5, 266
Композиция 2, 1013; 3, 714
- автоматов 1, 68
- адамаровская 1, 88
- картановская 4, 921
- операций 2, 884
- отображений 4, 153
- соответствий 5, 78
- функций 2, 1013, 4, 1214, 5, 278
Компонента вектора 1, 633, 2, 1013
Компонента пространства 2, 1013
- размерностная 2, 716
- связности графа 1, 1114
- симплициального объекта 4, 1168
- тензора 2, 1070
- точки 4, 1096
Компоненты абсолютные 1, 935
- базиса 1, 374
- разложения по базису 1, 375
Кона теорема об идеалах 1, 342
Конвея группы 5, 149
Конвея многочлен 5, 489
Конгруэнтность 2, 1013
- отрезков 4, 675
Конгруэнтные углы 5, 467
- фигуры 2, 1013
Конгруэнц дзета-функция 2, 119
Конгруэнция 1, 1123; 2, 1014, 4, 405, 1148; 5, 612
- абсолютная 1, 492
- Бианки 1, 465
- вербальная 1, 654
- вполне характеристическая 1, 764
- Г 1, 1012
- Гишара 1, 1012
-, главная поверхность 5, 613
- Гурса 1, 1152
- дробная 2, 382
- идеальная 4, 444
- изотропная 2, 522
- криволинейная 5, 613
- нормальная 2, 802
Конгруэнция прямых 2, 1014
- Рибокура 4, 985
- рисовская 4, 444
- Ω-систем 1, 157
-, фокальная сеть 5, 633
- ядерная 5, 1030
y-конгруэнция 5, 524
W-конгруэнция 2, 1015
Конгруэнц-многообразие 5, 502
Конгруэнц-подгруппа 2, 1013
- главная 3, 784
Конгруэнц-проблема 2, 1013
Конгруэнц-простая универсальная алгебра 5, 497
Конденсатор 2, 403, 404
Конденсации отрезок 2, 22, 3, 184
Конденсации точка 2, 1015
Кондуктор характера 2, 1015
Кондуктор целого замыкания 2, 1016
Конечная абелева группа, двойственность 2, 47
- алгебра Неймана 3, 921
- алгебраическая система 1, 155
- вариация 1, 606
- - Витали 1, 709
- - Фреше 5, 664
- выпуклая игра 1, 787
- геометрия 2, 975
Конечная группа 2, 1016—1018
- - Коксетера 2, 945
- - подстановок 4, 382
- -,порядок 4, 504
- - простая 4, 700
Конечная групповая схема 2, 1018
- игра 2, 471
Конечная математика 2, 208, 1018
- мера 4, 719
- область 3, 1098
- плоскость 4, 319
- - Мебиуса 3, 631
- последовательность 4, 507
- проективная плоскость 4, 669
- - прямая 4, 671
Конечная разность 2, 1019, 1026
Конечная риманова поверхность 2, 1019, 4, 1015
- ядерная норма 5, 1031
σ-конечная мера 4, 719
Конечно аддитивная мера 3, 637
- - функция 1, 94, 3, 636
- аксиоматизируемый класс моделей 1, 103
- базируемое многообразие групп 1, 1137
- базируемые тривиальные многообразия 1, 186
- определенная алгебра 4, 34
Конечно определенная группа 2, 1019, 4, 34
- определенное банахово аналитическое множество 1, 386
- определенный росток 4, 128
- определимое квазимногообразие 1, 183
Конечно порожденная группа 2, 1019
- - - абелева 1, 18
- - модель 3, 714
- порожденное поле 4, 398
- - расширение 4, 900, 909
- порожденный модуль 3, 780
- представимый идеал 2, 903
- - модуль 3, 780
Конечно-автоматная грамматика 1, 1087
Конечного порядка оператор 3, 1006
- - точка ветвления 1, 679
- - целая функция 5, 798
- типа алгебра 4, 585
- - алгебраическая система 1, 155
- - множество 1, 945
- - расширение 4, 909
- - G-структура 5, 253
- - целая функция 5, 798
Конечное интегральное преобразование 2, 589
- отображение 2, 1021
- по Дедекинду кольцо 4, 941
- - - множество 2, 504
- покрытие 3, 216
Конечное поле 1, 848; 2, 1019
- расширение 4, 909
- - поля 1, 850
Конечнозонный потенциал 3, 31
Конечной группы представление 2, 1019—1021
- площади локальный принцип 3, 458
- суммы аксиома в теории размерности 4, 824
Конечнократное отображение 2, 1021; 4, 156
Конечномерная алгебра 2, 961
Конечномерная ассоциативная алгебра 2, 1021
Конечномерное банахово пространство 1, 391
- векторное пространство 1, 643
Конечномерное представление 2, 1022—1024, 4, 595
- пространство 4, 826
- - с индефинитной метрикой 4, 717
- распределение 1, 663
- - случайного процесса 5, 70
Конечномерный комплекс 2, 995
Конечноразностный метод 4, 195, 761
Конечно-свободная грамматика 1, 1087
Конечносвязная область 3, 748, 1098
Конечности теоремы 2, 1024; 5, 65
- условие 4, 454
- - в теории групп 1, 1143
Конечносточный метод суммирования 2, 1025
Конечный автомат 1, 52
- алфавит 1, 819
- геометрический комплекс 1, 933; 2, 997
- градуированный объект 2, 1001
- идемпотент 4, 941
- комплекс 2, 995
- преобразователь 1, 54
- проекционный спектр 4, 686
- ранг группы 1, 1143
- распознаватель 1, 54
- след 4, 1209
- характер C^*-алгебры 5, 746
Конечных приращений формула 2, 1025
Конечных разностей исчисление 2, 1026—1032
- элементов метод 3, 307; 4, 250, 831; 5, 145
Коника 2, 1032
Коническая винтовая линия 1, 705
- выпуклая поверхность 1, 788
Коническая конструкция 2, 1033
Коническая поверхность 2, 1033
- поляра 3, 140
- проекции 2, 744, 754; 4, 688
Коническая сеть 2, 1033
- точка 4, 125
- - поверхности 2, 756
Конические сечения 2, 1034
Конический слой 2, 1074
Конкатенация 1, 73, 223; 4, 942; 5, 55, 644
Конкомитант 2, 980
Конкордантность 5, 487
Конкордантные слоения 4, 1211
- структуры Хефлигера 5, 783
Конкретизация 4, 977
Конкретная категория 2, 762; 3, 758
Коннекс 2, 1035
- Клебша 2, 1035
Коноид 2, 1035
Конормаль 2, 1036
Конормальный пучок 3, 1075
Консеквент 4, 1105
Консервативная система 1, 82, 859
Консервативное замкнутое покрытие 4, 203
- семейство множеств 4, 393
Консервативность разностной схемы 4, 845
Консервативные методы суммирования 4, 944
Константа 2, 1036; 5, 637; см. также соответствующее название
Константинеску — Корня теорема в теории потенциала 3, 531
Конституента 1, 223
Конструктивизированная модель 2, 1060
Конструктивная алгебраическая система 3, 1088
- арифметика 2, 1040
- m-ичная дробь 2, 1056
Конструктивная квантовая теория поля 2, 1036—1039
Конструктивная логика 2, 1039—1042
Конструктивная математика 2, 1042—1046
- модель 2, 1059
- последовательность натуральных чисел 2, 1055
- - рациональных чисел 2, 1055
Конструктивная семантика 2, 1046—1049; 4, 696
Конструктивная теория функций 2, 1049
- форма теоремы Гёделя о полноте 1, 910
- функция 2, 1049, 1056
Конструктивная функция действительного переменного 2, 1049
Конструктивного подбора принцип 2, 643, 1049
Конструктивное действительное число 2, 1050, 1055
- исчисление 3, 419
Конструктивное исчисление высказываний 2, 1050
Конструктивное метрическое пространство 2, 1051—1053
- множество 2, 671, 1053
- направление в математике 2, 1042
- отображение 2, 1054
Конструктивное по Гёделю множество 2, 1053
Конструктивное подмножество 2, 1054
- правило бесконечной индукции 1, 435
- правило Карнапа 2, 728
- пропозициональное исчисление 4, 699
Конструктивности аксиома 2, 1053
Конструктивный анализ 2, 1054—1057

- - формальный математический 5, 642
Конструктивный объект 2, 1043, 1057
- процесс 2, 1057
- пучок 5, 1024
Конструктивных моделей теория 2, 1058—1060
Конструкция — см. соответствующее название
Контакт 2, 1061
-, проводимость 4, 969
- основного реле 4, 968
- основной 4, 968
- промежуточного реле 4, 968
Контактная алгебра Ли 3, 244
- псевдогруппа 4, 731
Контактная структура 2, 1060
Контактная схема 2, 1061
- форма 2, 1060
- многообразие 2, 1063; 3, 232
Контактное преобразование 2, 1063, 4, 634
- - инфинитезимальное 2, 1063
Контактные задачи теории теплопроводности 2, 1063
Контактные задачи теории упругости 2, 1064—1067
Контактный полюсник 2, 1061
Контекстная грамматика 1, 1093
Континенция 2, 1067
- вектор-функции 5, 543
Континуальный аналог леммы Шура 5, 919
Континуальный интеграл 2, 568, 1067
Континуум 2, 1067, 4, 1096
- арифметический 1, 323
- ациклический 1, 364
- гладкий 1, 1021
- змеевидный 2, 457
-, инициальное множество 2, 563
- Карлемана 2, 726
- Кнастера 2, 884; 3, 892
- кубовидный 3, 144
- локально связный 3, 437
- наследственно неразложимый 2, 884; 3, 892
- неприводимый 3, 997
- неразложимый 3, 1002; 5, 892
- Суслина 5, 280
-, Тейхмюллера теорема 2, 56
Континуума мощность 2, 1068, 3, 838
- проблема 2, 1068
Континуум-гипотеза 2, 1068
- обобщенная 1, 235, 2, 1053, 1068
Конторовича — Лебедева преобразование 2, 1069
Контравариант 2, 344, 980
- тензора 2, 896
Контравариантная валентность 5, 326
Контравариантный вектор 2, 899, 1070
Контравариантный тензор 2, 1070, 5, 326
- - метрический 5, 329
- функтор 2, 762
Контрградиентная матрица 2, 1072
Контрградиентное представление 2, 1070, 4, 583, 591
Контрградиентный автоморфизм 2, 1071
- изоморфизм 2, 1071
Контрапозиции закон 2, 1072
Контраст 2, 1072
Контрмодель 1, 910
Контрстратегия 2, 332
Контругроза 5, 562
Контур в графе 1, 1108
- гомоклинический 1, 956
- нормальный 5, 46
- перевальный 4, 239
Контурного интегрирования метод 2, 1005, 1072
Контурное свойство 2, 1072
Конус 2, 1033, 1073—1076, 4, 811
- асимптотический гиперболоида 1, 1000
-, боковая поверхность 2, 1074
- в банаховом пространстве 1, 586, 2, 1075
- в векторном пространстве 2, 880
- в евклидовом пространстве 2, 1073
-, вершина 2, 1073
- воспроизводящий 2, 1075; 4, 470
- вполне правильный 2, 1076
- выпуклый 1, 801, 2, 1074
-, высота 2, 1074
- выступающий 2, 1074
- заостренный 2, 1074
- изотропный 2, 522, 4, 739
- касательный 1, 788, 2, 756
- кратчайших 4, 1025
- круговой 2, 1074
- миниэдральный 4, 470
- Монжа 2, 325, 3, 799
- морфизма цепных комплексов 2, 1002
- морфизмов 2, 1074
- над топологическим пространством 2, 1074
- направляющий 3, 799
- несплющенный 2, 1075
- нормалей 2, 814
- нормальный 2, 1075
-, образующая 2, 1073
-, основание 2, 1074
-, ось 2, 1074
- отображения 2, 1033, 1074
- оштукатуриваемый 2, 1076
- положительности 2, 781
- положительный 2, 1075, 4, 433, 470, 5, 526
- правильный 2, 1076
- предельный 4, 575
- прямой 2, 1074
- световой 2, 522
- теневой 2, 1075
- усеченный 2, 1074
- характеристический 3, 327
Конуса условие 2, 1076
Конфигураций пространство 3, 32
Конфигурационное многообразие 1, 928
- предложение 2, 1080
- пространство 2, 145
Конфигурация 1, 51; 2, 1076—1083, 5, 561, см. также соответствующее название
(v, k, λ)-конфигурация 1, 506
Конфинальный характер 2, 724
Конфликт 2, 469
Конфликтное управление 4, 46
Конфлюэнтная гипергеометрическая функция 2, 1083
Конфлюэнтное уравнение 1, 806
Конфлюэнтный анализ 2, 1083
Конфокальные кривые 2, 1083; 5, 95
Конформная геометрия 2, 1083—1087
- емкость 2, 404
- кривизна, тензор 3, 100
- проекция 2, 742, 753
Конформная связность 2, 1087—1089
Конформная структура 2, 1089
Конформно плоская почти симплектическая структура 4, 549
Конформно эквивалентные римановы поверхности 3, 775, 4, 1018
Конформно-геодезическая сеть 2, 1090
Конформно - дифференциальная геометрия 2, 1090
Конформное отображение 1, 266; 2, 1091—1097, 1099—1101
- -, вращения теоремы 1, 767
- - второго рода 1, 292
- -, Грётша принцип 1, 1121
- -, Грётша теоремы 1, 1122
- -, инвариантная форма леммы Шварца 1, 1000
- -, искажения теоремы 2, 668
- -, Каратеодори теорема 2, 720
- -, Келлога теорема 2, 844
- -, Римана теорема 1, 266
Конформное преобразование 2, 1097
- -, группа 2, 1084
Конформное пространство 2, 1084, 1090, 1097
Конформно-евклидово пространство 2, 1098
Конформно-инвариантная метрика 2, 1098
Конформно-чебышевская сеть 4, 1053
Конформные классы римановых поверхностей 4, 1030
Конформный радиус области 2, 1098
Конформных отображений граничные свойства 2, 1099—1101
Кон-Фоссена неравенство 1, 904
Кон-Фоссена преобразование 2, 1101
Конхоида 2, 1101
- Никомеда 3, 1039
Концевая вершина графа 1, 1106
- область 1, 1023
- точка 4, 700
- - линии 3, 386
Концентрации функция 2, 1101
Концентрационный пограничный слой 4, 356
Концентрические окружности 4, 15
Конциденция 2, 1035
Конъюнктивная нормальная форма 1, 126, 563, 2, 1102
Конъюнктивный член 2, 1102
Конъюнкция 1, 124, 2, 1102
-, реализация 2, 1047
- сомножителей 1, 125
- элементарная 1, 560, 563
- ядровая 1, 560
Кообраз векторного расслоения 1, 646
Кооперативная игра 2, 471, 1103
- неатомическая 3, 903
Координат метод 3, 9
Координата вектора 1, 633
z-координата особой точки 4, 114
Координатизация решетки 4, 982
Координатная квазигруппа сети 2, 804
- линия 2, 51
- плоскость 1, 358; 2, 80
Координатное кольцо аффинного алгебраического множества 1, 360
- пространство 1, 325
Координаты 3, 9
- абсолютные 1, 935
- асимптотические 5, 87
-, аффинная система 1, 358
- аффинные 1, 358
- базиса 1, 374
- барицентрические 1, 393, 2, 996; 4, 1152, 1160
- Бельтрами 1, 409
- бивектора 1, 469
- биполярные 1, 492
- бисферические 1, 492
- бицилиндрические 1, 500
- в карте 2, 355
- Вейерштрасса 1, 615
-, галилеева система 1, 843
- гармонические 1, 880
- гексасферические 4, 234
- геодезические 1, 918
- - нормальные 4, 438
- голономные 1, 1034
- грассмановы 1, 732, 4, 334, 681
-, декартова прямоугольная система 2, 80
- декартовы 2, 80
- - прямоугольные 1, 244, 634
- избыточные 3, 10
- изотермические 2, 518
-, изотропная система 2, 518
- Клейна 2, 873, 4, 334
-, криволинейная система 2, 729
- криволинейные 3, 9
- лагранжевы 1, 1034
- линейные 3, 9
-, начало 1, 358; 2, 80
- неголономные 1, 1034
- нормальные 4, 1006
- обобщенные 1, 1034
- однородные 3, 1180, 4, 681
-, ортогональная система 4, 85
-, ось 1, 358; 2, 80
- параболические 4, 194
- параболоидальные 4, 201
- пентасферические 4, 234
- плюккеровы 1, 732, 4, 334
- полисферические 4, 234
- полугеодезические 4, 438
-, полюс 4, 474
- полярные 4, 480
- - геодезические 4, 438
- - обобщенные 4, 481
- проективные 4, 680
- римановы 1, 928, 4, 1028
-, система 3, 9
- сферические 5, 293
- тангенциальные 5, 321
- тензора 2, 1070, 5, 327
тетрациклические 2, 1084, 4, 234; 5, 349
- тетраэдральные 5, 350
- тороидальные 5, 408
- точечные 3, 9
- фазовые 5, 536
- Ферми 5, 608
- фигуры 5, 613
- циклические 1, 859, 5, 816
- цилиндрические 5, 819
- Чжоу 5, 863
- эллипсоидальные 5, 979
- эллиптические 5, 95, 988
- - в пространстве 5, 979
Коостов симплициального множества 4, 1167
Копредел функтора 2, 557
Копредставление Виртингера 2, 58; 5, 479, 487
Копредставление группы 3, 10
- Дена 5, 479
Копреобразование Фурье на группе 1, 882
Коприсоединенное представление 3, 10
Копроизведение семейства объектов категории 3, 11
Ко-H-пространство 3, 12
Копсевдогалилеево пространство 3, 12; 4, 439
Копсевдоевклидово пространство 3, 12—14
Коразмерность 3, 14
- гомологическая 1, 1027
- комплексная 1, 249
- особенности 5, 361
- подмногообразия 4, 371
- подпространства 1, 981
- слоения 4, 1210
- структуры Пфаффа 4, 774
Корасслоение 3, 14
Корауса теорема сравнения для ортогональных многочленов 4, 96
Корень 3, 15
- алгебраического уравнения 1, 192
-, алгебраическое значение 1, 323
- алгебры 3, 273
-, арифметическое значение 1, 323
- из единицы 3, 15
- корневой системы 3, 16
- кратный 3, 15
- многочлена 1, 192; 3, 753
- -, Гильберта теорема 1, 972
- -, Декарта теорема 2, 78
- первообразный 3, 15, 4, 237, 5, 152
- примитивный 4, 237
- уравнения 5, 539
- устойчивый 2, 340
- характеристический 5, 764
Корепер, расслоение 5, 249
Корефлексивная подкатегория 4, 978
Корна неравенство 3, 16
Корневая система 3, 16—20
- - алгебры 3, 273
- -, группа симметрий Вейля 1, 625
Корневое дерево 2, 91
- подпространство 1, 674; 3, 20
- разложение алгебры 3, 273
Корневой вектор 3, 20
Корниша — Фишера разложение 3, 20
Корню спираль 3, 21
«Короны проблема» 5, 789
Коротковолновое приближение 2, 809
Короткое погружение 2, 506
Корректирование ошибки 2, 930
Корректная задача 3, 21, 930
- - разностная 3, 84
- - сеточная 3, 306

Корректно поставленная задача 3, 930
- - - краевая 3, 608
Корректности класс 3, 608
Корректность определения 2,851
- по Тихонову 3, 932
- условная 3, 932
Корректор 2, 414
Коррекции метод 2, 292
Корреллограмма 3, 21
Корреляции коэффициент 3, 22
- - выборочный 3, 28
- - информационный 2, 658
- - максимальный 3, 486
- - множественный 3, 761
- - сериальный 4, 1117
- - частный 5, 837
Корреляционная матрица 3, 23
- таблица 3, 28
Корреляционная теория стационарных случайных процессов 5, 210
Корреляционная функция в статистической механике 3, 25
- - - -, Боголюбова неравенство 1, 510
Корреляционная функция случайного процесса 1, 47, 3, 23—25
Корреляционное окно 5, 120
Корреляционное отношение 3, 26
Корреляционное поле 3, 28
Корреляционный анализ 3, 28
- функционал 5, 214
Корреляция 3, 26—29, 29; 4, 669, 680
- каноническая 2, 710
- нормальная 2, 1002
- отрицательная 4, 161
- положительная 4, 430
- симплектическая 4, 477
Г-корреляция 1, 865
Кортевега — де Фриса уравнение 3, 30
Кортеж 2, 642; 3, 31
- допустимый 4, 538
Кос теория 3, 31—36
Коса 3, 32
Косая астроида 1, 343
- проекция 2, 753
Косая производная 3, 37
Косеканс 3, 37
Косимплициальный объект категории 4, 1168
Косинус 3, 37
Косинус амплитуды 3, 38
Косинус гиперболический 1, 991; 3, 38
- интегральный 2, 602
- эллиптический 3, 38
Косинусов теорема 3, 38
- - в гиперболической геометрии 1, 990
- - в сферической тригонометрии 5, 292
Косинусоида 4, 1193
Косинус-преобразование Фурье 3, 38
Кослой 3, 14; 4, 1169
Космологическая постоянная 3, 38
Космологические модели 3, 39—41
Косовой автоморфизм 3, 33
Косое произведение 3, 41; 4, 743
Косой геликоид 1, 913
- крюк 5, 1028
- многочлен, кольцо 1, 1019
Косопряжение 5, 90
Кососимметризованное полилинейное отображение 4, 408
Кососимметрирование 1, 240
Кососимметрическая билинейная форма 1, 482, 3, 41
Кососимметрическая матрица 3, 42, 616
Кососимметрический многочлен 4, 1145
Кососимметрический тензор 1, 240; 3, 42
Кососимметрическое полилинейное отображение 4, 407
Косоугольная аксонометрия 1, 113
- декартова система координат 2, 80
Косоэрмитова форма 5, 1021
Коссера уравнения 2, 494
Костанта формула 3, 90
Кострикина радикал 5, 999
- теорема об алгебрах Ли 3, 901
Косущественный подмодуль 4, 372
Котангенс 3, 43
Котельникова интерпретация 3, 43, 404
Котеса коэффициенты 3, 43
Котеса формулы 3, 43
Коточный дифференциал 2, 238
Коуниверсальный квадрат 2, 79
Кохлеоида 3, 44
Коцепной комплекс 2, 1001
Коцепь 2, 954, 3, 44; 4, 1179
- бемольная 1, 410, 2, 133
- гладкая 1, 411
- диезная 2, 133, 134
- различающая 4, 812
Коцикл 2, 954, 3, 44, 4, 1179
- комплекса 2, 998
- фундаментальный 5, 685
- хефлигеровский 5, 782
1-коцикл 4, 1205
Коциклический матроид 3, 623
Коши данные 3, 47, 895
Коши задача 2, 285, 326; 3, 45—49
- -, Д'Аламбера формула 2, 11
- -, Коши — Ковалевской теорема 3, 65
- - обобщенная 3, 607
Коши задача; численные методы решения 3, 49—51
Коши интеграл 3, 51—55
Коши интегральная теорема 3, 55
- - формула 3, 51, 55
Коши критерий 1, 39; 3, 56—58, 4, 559
Коши матрица 3, 58, 618
- направленность 5, 682
Коши неравенство 3, 58
Коши оператор 3, 59—61
Коши последовательность 3, 61; 5, 682
Коши признак 3, 61
Коши распределение 3, 61
- сингулярный интеграл, Привалова теорема 4, 630
- - оператор 2, 605
Коши теорема 3, 62
- - в аналитической теории дифференциальных уравнений 1, 252
- - интегральная 1, 263
- - о выпуклых многогранниках 1, 802
- - о промежуточных значениях непрерывных функций 3, 984
- - о сходимости рядов 4, 1065
- условие 5, 390
Коши фильтр 1, 502; 3, 63
- форма остаточного члена 5,324
- формула для длины овала 3, 1152
- - для решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений 4, 693
- - интегральная 1, 263
- - обобщенная 2, 316
- функциональное уравнение 5, 699
Коши характеристическая задача 3, 63—65
Коши ядро 1, 263, 2, 586; 3, 51, 65
- - сингулярного интегрального оператора 4, 1172
Коши — Адамара неравенство 3, 59
Коши — Адамара теорема о сходимости степенного ряда 3, 65; 5, 218
- - формула 3, 65; 5, 218, 220
Коши — Грина формула 3, 55
Коши — Дирихле задача 3, 348
Коши — Зальшюца интеграл 1, 867
Коши — Ковалевской теорема о существовании решения задачи Коши 3, 65—67
Коши — Лагранжа интеграл 1, 421
Коши — Маклорена интегральный признак 3, 61
Коши — Пуанкаре интегральная теорема 1, 270; 3, 56
Коши — Римана оператор 3, 361
- - система 1, 268
- - теорема об устранимой особенности 5, 582
- - уравнения 1, 262
Коши — Римана условия 3, 67
- - - обобщенные 5, 771
Коши — Стилтьеса сингулярный интеграл 4, 630
Коши — Фантапье формула 3, 55, 235
Коши — Штольца критерий 3, 58
Коэна структурная теорема о регулярных кольцах 4, 939
Коэна — Маколея арифметическое многообразие 3, 69
Коэна — Маколея кольцо 3, 68
Коэна — Маколея модуль 3, 69
Коэна — Маколея схема 3, 69
Коэрцитивная краевая задача 3, 69—71
- форма 3, 71
Коэрцитивности неравенство 3, 71
- условие 5, 992
Коэффициент 3, 72; см. также соответствующее название
Коэффициентов проблема 3, 72
Коядро 3, 74
- векторного расслоения 1, 646
- линейного оператора 3, 370
Кравчука многочлены 3, 74
Краевая задача 1, 771, 2, 301; 3, 74—78, 349, 605
- - внешняя 1, 732
- - внутренняя 1, 732
- - дифференциальная, аппроксимация разностной 1, 308
Краевая задача для эллиптического уравнения 3, 78—80
- -, классическая постановка 3, 607
- -, корректно поставленная 3, 608
- - коэрцитивная 3, 69
- - линейная 3, 303, 338
Краевая задача; методы комплексного переменного 3, 80—83
- - нелинейная 3, 938
- -, обобщенная постановка 3, 607
- -, обобщенное решение 3, 607
- - первая 4, 236
- - самосопряженная 4, 1073
- - смешанная 5, 36
- - сопряженная 5, 84
Краевая задача теории потенциала 3, 83
- - третья 5, 428
Краевая задача, численные методы решения 3, 83—86
- - эллиптическая 3, 69
- особенность 4, 130
- точка 3, 87
Краевые условия 2, 285, 3, 86, 605
- - сопряженные 5, 84
Край 3, 87
- многообразия 2, 51; 3, 743
Крайзеля принцип 2, 642
Крамера правило 3, 87
Крамера теорема в теории вероятностей 3, 87
- - о нормальных распределениях 3, 1067
- условие 3, 87
- формулы 3, 87
Крамера — Мизеса критерий в математической статистике 3, 87
Крамера — Мизеса — Смирнова критерий в математической статистике 3, 88
Крамера — Рао неравенство 5, 178, 196
Кратная замкнутая геодезическая 2, 431
Кратная последовательность 3, 88
- сумма Вейля 5, 436
Кратная точка 3, 88, 4, 124
- характеристика 3, 326
Кратно круговая область 3, 88
- примитивная группа 4, 636
- транзитивная группа 5, 411
Кратногармоническая функция 3, 89
Кратное 2, 85; 3, 89
Кратное интегральное преобразование 2, 590
- интерполирование 2, 633
- наименьшее общее 3, 876
- - перемешивание 4, 243
Кратности точка 4, 310
- функция 1, 379
Кратность веса 3, 89
- ветвления многообразия 2, 55
Кратность особой точки 3, 90
- пересечения 4, 255
- полюса 4, 475
- предельного цикла 4, 576
- слоя эллиптической поверхности 5, 984
Кратный интеграл 3, 91—93
- - Коши 3, 55
- корень 3, 15
- - многочлена 1, 192
Кратный ряд 3, 93
- - степенной 5, 220
- тета-ряд 5, 348
- узел интерполяции 2, 633
s-кратный ряд 3, 93
Кратчайшая 3, 93
- в римановом пространстве 4, 1004
-, конус 4, 1025
- на выпуклой поверхности 1, 789
-, угол 1, 789
Кратчайшее покрытие 4, 395
Крашеная коса 3, 32
Креативное множество 3, 94; 4, 663, 957
Крейга теорема о промежуточных логиках 4, 695
Крейна критерий 2, 228
- теорема о клине 2, 1075
- - о локально выпуклых пространствах 5, 384
- - об индикатрисе касательных 2, 757
Крейна — Мильмана теорема о выпуклой оболочке 1, 788; 3, 429
- - - о конусах 2, 1075
Крейна — Рутмана теорема о собственных значениях 4, 435
Крейна — Шмульяна пространство 5, 383
Крейна — Шмульяна теорема о локально выпуклых пространствах 5, 383
- - - о метризуемых пространствах 2, 44
Кремоново отображение 4, 309
Кремоново преобразование 3, 94
- -, группа 4, 917
Кремоны группа 3, 94, 95
Крендельное зацепление 5, 485
Кривая 3, 96, 382
- алгебраическая 1, 444
- аналитическая 1, 246
- ветвления 2, 23
- вневписанная 1, 758
- вписанная 1, 758
- выпуклая 1, 799
- гиперэллиптическая 1, 1010; 4, 312
- голоморфная 1, 249
-, горизонтальное поднятие 4, 1098
- дискриминантная 2, 212
-, длина 5, 149
- дуальная 4, 310
-, жанр 4, 311
-, извивание 2, 491
- изооптическая 2, 512
- изохронная 5, 817
- инвариантная 2, 533
- интегральная 2, 283, 576
- исключительная 2, 675
- каноническая 2, 711
- комплексно-аналитическая 1, 249
- кубическая 3, 140
- модулярная 3, 785
- Монжа 3, 799
- направляющая 3, 380
- неприводимая 4, 309
- описанная 1, 757

- ортооптическая 2, 512
-, особая точка 4, 119, 124
- паналгебраическая 5, 424
- Персея 4, 277
- плоская 2, 250
-, поворот 1, 790, 924
-, подера 4, 370
-, порядок 4, 309
- постоянной кривизны 4, 519
- постоянной ширины, Барбье теорема 1, 392
- приводимая 4, 309
-, развертка 1, 356, 4, 1093
- рациональная 4, 311, 914
- регрессии 4, 926, 929
- регулярная 2, 248
- Рибокура 4, 985
-, род 4, 311, 1048
- Серпиньского 4, 1118
- соприкасающаяся 5, 81
- спирическая 4, 277
- спрямляемая 2, 364; 5, 149
- таутохронная 5, 817
- трансцендентная 5, 424
-, угол 1, 790
- уникурсальная 4, 311; 5, 502
- фокальная 2, 325, 3, 799
- Фреше 5, 665
- характеристическая 2, 325
- циклоидальная 5, 817
- циссоидальная 5, 826
- Чезаро 5, 862
- Штейнера 5, 900
- Штурма 5, 906
- экспоненциальная 4, 390
- эллиптическая 5, 979
M-кривая 2, 70
Кривизна 2, 249; 3, 96—102
- аффинная 1, 354
- внешняя 3, 100, 5, 297
- внутренняя 3, 100
- вторая 3, 129
- выпуклой поверхности 1, 789, 791
-, Гаусса уравнение 4, 361
-, Гаусса — Бонне теорема 2, 56
- гауссова 1, 904; 2, 253, 785; 3, 98
- геодезическая 1, 923, 4, 1006
- главная 1, 1012, 2, 253, 3, 97
-, индикатриса 2, 395
- конформная 3, 100
- кривой 3, 96
- кронекерова 5, 297
- нормальная 2, 253; 3, 97, 1050
- поверхности 3, 96
- подмногообразия 3, 100
- полная 1, 904, 3, 98; 4, 416; 5, 297
- проективная 3, 101
- пространства Римана 4, 989
-, радиус 2, 250
- риманова 4, 1013
- риманова пространства 3, 98
- Риччи 3, 99, 4, 1044
- секционная 3, 99, 4, 1007, 1109
- скалярная 3, 99, 4, 1007, 1045, 1197
- средняя 2, 253, 785; 3, 97, 5, 163
-, тензорное поле 2, 736
-, центр 2, 250
- эквиаффинная 1, 353
Кривизны инвариант 4, 1045
- круг 3, 118
Кривизны линий сеть 3, 102
Кривизны линия 3, 97, 102
- направлений тензор 1, 630
- область 3, 1072
- объект 4, 1095
Кривизны преобразование 3, 102; 4, 1007
Кривизны тензор 3, 102; 4, 1006
Кривизны форма 3, 102, 311
- функция 5, 50
Кривой полиэдр 4, 412
Криволинейная конгруэнция 2, 1015; 5, 613
- пространственная ткань 5, 356
- регрессия 4, 931
- система координат 2, 720
- триангуляция 4, 412; 5, 434
Криволинейные координаты 3, 9
Криволинейный интеграл 3, 103—105
- многоугольник 3, 751
Кривые Пирсона 4, 288
- софокусные 5, 95
Кривых теории 2, 248
Крипке модели 3, 105
- семантика 4, 696
- структура 3, 765
- схема 2, 643
Криптоуниверсальная формула 1, 185
Кристаллографическая группа 3, 106—108
Кристаллография математическая 3, 109
Кристоффеля коэффициенты 3, 110
Кристоффеля символ 3, 110
Кристоффеля числа 3, 110
Кристоффеля — Дарбу формула 3, 110; 4, 93
Кристоффеля — Шварца интеграл 3, 111
Кристоффеля — Шварца формула 3, 111
Критериальная система подалгебр 3, 715
Критерий — см. соответствующее название
Критическая группа 1, 1137
Критическая область 3, 112
- полоса 2, 113, 189
- решетка 1, 945
Критическая точка 3, 112—114
- - квадратичного дифференциала 2, 786
Критическая функция 3, 114
- частота 1, 864
Критические значения алгебраической функции 1, 175
Критический ветвящийся процесс 1, 681, 684, 685, 687, 688
- граф 1, 1111
Критический идеал 3, 114
- определитель множества 1, 945
- подграф 1, 1112
- путь 4, 1121
Критический уровень 3, 115
Критического пути метод 4, 1121
Критическое значение 3, 115
- - статистического критерия 5, 182
- множество 3, 113
- - статистического критерия 4, 376; 5, 182
Кронекера индекс 3, 238
Кронекера метод 3, 115
- множество 1, 884
Кронекера символ 3, 116
Кронекера теорема в теории чисел 3, 116
- - о диофантовых приближениях 2, 164
- - о равномерно распределенных последовательностях 4, 876
Кронекера формула 3, 117
Кронекера — Вебера теорема о круговых полях 3, 120
- - - об алгебраических уравнениях 1, 852
Кронекера — Капелли теорема 3, 118, 357
Кронекерова кривизна 5, 297
- матрица 2, 777
Кронекерово произведение 3, 118
- - матриц 5, 332
Кросса многообразие 3, 241
Кроссово многообразие групп 1, 1137
Крофтона формула для овалов 2, 572
Круг 3, 118; 4, 16, 5, 881
- большой 4, 667, 5, 290
- гиперболический 1, 989
- квадратура 2, 793
Круг кривизны 3, 118
- отмеченный 3, 445
- параметрический 3, 445
- соприкасающийся 5, 80
Круг сходимости 1, 29; 3, 118; 5, 918
Круга проблема 3, 119
Круглая коническая поверхность 2, 1033
Круговая геометрия 2, 1086
- единица 3, 121
- коническая поверхность 2, 1033
- мера угла 5, 467
- область 1, 1023; 3, 88
- ограниченная задача трех тел 5, 432
- плоскость 3, 630
Круговая симметризация 3, 120, 4, 1137
- точка 3, 914; 4, 15
- функция 3, 1135
- частичная сумма 2, 31
- частота 4, 1085
Круговое поле 3, 120—122
Круговое преобразование 3, 122
Круговое расширение 3, 122
Круговой конус 2, 1074
- критерий 5, 564
Круговой метод 1, 259; 3, 123
- многочлен 2, 81
- сегмент 4, 1101
- сектор 4, 1105
- цилиндр 5, 818
- элемент 5, 971
Круговые точки 3, 124
Крулля кольцо 3, 124
- теорема о кольцах 1, 98
- - о локальных кольцах 3, 438
- - об идеалах 1, 813
- топология 1, 854
Крулля — Ремака — Шмидта теорема в теории групп и колец 3, 124
Крупность графа 1, 1115, 1120
Крупных частиц метод 3, 125—129
Кручение 2, 249; 3, 129—131
- абелевой группы 3, 131
- абсолютное 3, 129
- аффинное 1, 360
- аффинной связности 3, 130
- в классе алгебр 4, 806
- гауссово 3, 130
- геодезическое 1, 931, 3, 129
- де Рама 4, 855, 953
- *h*-кобордизма 3, 131
- кривой 3, 129
- отображения 3, 131
- подмногообразия 3, 129
- пространства 3, 131
- Рейдемейстера 4, 953
- риманово 3, 130
-, тензор 3, 130; 4, 542
-, тензорное поле 2, 736
- Уайтхеда 2, 894; 5, 464
-, форма 3, 130
- Франца 4, 953
- эквиаффинное 1, 353
Кручения класс 4, 266
Кручения тензор 3, 131
- - картановский 5, 622
Кручения форма 3, 132
- функция 5, 252
Крыла теория 3, 132—134
Крыло Жуковского 2, 426
- слова 1, 772
Крылова — Боголюбова метод усреднения 3, 134—136
Крюк 5, 1028
Кси-функция Римана 2, 113
Куайна алгоритм 1, 560
Куб 3, 136; 4, 204
- перестановочный 3, 208
- тихоновский 5, 355
Кубатурная формула 3, 136—139
Кубика 3, 139
Кубируемое множество 3, 92
Кубическая гиперповерхность 3, 140—142
- кривая 3, 140
Кубическая парабола 3, 142
- поверхность 3, 141
Кубическая форма 3, 142
- - Фубини — Пика 1, 354
Кубический вычет 1, 814, 3, 143; 5, 153, 217
- невычет 3, 143, 5, 153, 217
- сплайн 4, 604; 5, 145
Кубическое уравнение 3, 143
- -, Кардано формула 2, 722
Кубичная форма 5, 634
Кубовидный континуум 3, 144
Куги многообразие 3, 786
Кузена проблемы 1, 273; 3, 144—147
- теорема о голоморфных функциях 1, 616
Куликова критерий об абелевых группах 1, 18
Куммера гипотеза 3, 147
- группа 3, 148
Куммера поверхность 3, 147
Куммера преобразование 3, 147
- признак регулярности простых чисел 2, 667
Куммера признак сходимости числового ряда 3, 147
- разложение для идеалов 1, 166
Куммера расширение 3, 148
- ряд 1, 804
- спаривание 3, 148
Куммера теорема о разложении идеала 3, 149
- теория 3, 149
- формула для идеалов 1, 166
- функция 1, 804
Кумулянт 3, 149; 4, 1111
Куна теорема в теории игр 4, 387
Куна — Такера теорема в математическом программировании 3, 602
Куранисси пространство 5, 406
Курант 3, 149
Куранта теорема о конформном отображении 3, 149
- условие для устойчивости разностной схемы 1, 995
Куранта — Фридрихса — Леви условие 3, 150
Куратовского аксиомы 5, 389
Куратовского график 3, 150
Куратовского полиэдр 3, 150
- теорема о *CA*-множествах 3, 763
Куратовского — Дугунджи теорема о локально *h*-связных пространствах 3, 434
Куратовского — Кнастера веер 3, 151
Куратовского — Понтрягина теорема о полиэдрах 3, 151
Куроша проблема об алгебраических алгебрах 3, 901
- теорема о неассоциативных алгебрах 3, 902
- о свободных произведениях 4, 1087
Куроша — Черникова классы групп 4, 368
Кусочно линейная топология 3, 151—154
- - форма 2, 264
- линейное микрорасслоение 3, 676
- - отображение 3, 151, 4, 410
- - подмногообразие 4, 371
- - слоение 4, 1210
- линейный кобордизм 2, 892
Кусочное склеивание обобщенной функции 3, 1105
Кутта — Мерсона метод 3, 154
Куфарева — Левнера уравнение 3, 227; 4, 219
Кэлера метрика 3, 155
Кэлерова метрика 3, 155
Кэлерова форма 3, 155
Кэлерово многообразие 3, 156
- - однородное 3, 1174
Кэлеровых дифференциалов модуль 2, 241
Кэли алгебра 3, 157, 160
Кэли поверхность 3, 157
Кэли преобразование 2, 505, 3, 157
Кэли таблица 3, 158
- теорема о подстановках 4, 383
- - о симметрических группах 4, 1141
Кэли форма 3, 158—160, 5, 863
Кэли число 3, 160
Кэли — Дарбу уравнение 3, 160
Кэли — Диксона алгебра 3, 160—162
- - процесс 3, 160
Кэли — Клейна интерпретация 3, 402
Кэли — Клейна параметры 3, 162
Кэли — Нетера формула постулации 1, 150
Кэлиана 3, 140
Кэмпбелла — Хаусдорфа формула 3, 163
Кюннета формула 1, 627, 3, 164—166

Л

Лаврентьева теорема 3, 167
- - в дескриптивной теории множеств 3, 167
- - в теории конформных отображений 3, 167
- - в теории приближений 3, 167
- - склеивания 4, 1201
Лаврентьева — Бицадзе уравнение 2, 328; 5, 45
Лагерра многочлены 2, 869, 3, 167
Лагерра преобразование 3, 168
Лагерра уравнение 3, 167, 169
Лагерра формула 3, 169
Лагерра функции 3, 169
Лагранжа вариационный принцип стационарного действия 1, 602
Лагранжа задача 3, 169
- - в вариационном исчислении 1, 582
Лагранжа интерполяционная формула 3, 170
- интерполяционный многочлен 2, 632; 3, 170
- коэффициенты 3, 171
Лагранжа метод 3, 171, 172
Лагранжа множители 3, 172, 5, 414
- постоянная 3, 515
Лагранжа принцип 3, 173
- резольвента 4, 950
Лагранжа решение задачи трех тел 5, 431
Лагранжа ряд 1, 570; 3, 174, 1139, 5, 219
Лагранжа скобки 3, 174
Лагранжа спектр 3, 174, 515
Лагранжа теорема 3, 174
- - в дифференциальном исчислении 3, 174
- - в теории групп 3, 174
- - о подгруппах 4, 370
- - о подходящих дробях 3, 515
- - о сравнениях 3, 174; 5, 154, 156
- - о сумме четырех квадратов 1, 372; 3, 174
- - о цепных дробях 3, 174
- - о четырех квадратах 2, 170
- тождество 5, 83
Лагранжа уравнение 2, 11; 3, 175; 5, 932
Лагранжа уравнения механики 3, 175—177
- форма остаточного члена 5, 324
- формула для самосопряженных операторов 4, 906
- - конечных приращений 2, 1025
Лагранжа функция 3, 177—181
Лагранжа — Гаусса условия приведения 2, 789
Лагранжа — Гурвица проблема в теории чисел 3, 515
Лагранжева луна 3, 460
- плоскость 5, 519
Лагранжево многообразие 3, 181
Лагранжевы координаты 1, 1034
Лагранжиан 3, 181
Лайонса группа 5, 149
Лакса представление 4, 1191
Лакуна 3, 182
-, Адамара теорема 1, 86
- в геометрии 2, 22
Лакунарная последовательность 3, 183
Лакунарная система 3, 183
Лакунарное пространство 2, 22, 3, 184
Лакунарный пучок 3, 443
Лакунарный ряд 3, 185
Лакунарный степенной ряд 3, 185
Лакунарный тригонометрический ряд 3, 186
Лалеско — Пикара интегральное уравнение 3, 1030
Ламберта метод суммирования 3, 186
Ламберта преобразование 3, 187
Ламберта ряд 3, 187
Ламберта четырехугольник 3, 187
Ламе дифференциальный параметр 2, 350
Ламе коэффициенты 3, 188; 4, 85
Ламе кривая 3, 188
Ламе постоянные 3, 189
Ламе уравнение 2, 149, 3, 189
Ламе функция 3, 189, 5, 446
Ландау кинетическое уравнение 3, 190
- теорема о радиусе однолистности 3, 727
- - об аналитических функциях 5, 895
Ландау теоремы о регулярных функциях 3, 191
Ландау — Каратеодори теорема 3, 191
Ландвебера — Новикова алгебра 5, 865
Ландшафт аналитический 1, 276
Ланцоша метод 2, 689, 5, 92
Лапласа вектор 3, 192
Лапласа интеграл 3, 193, 196
Лапласа метод асимптотических оценок 3, 194
- - каскадный 2, 758
Лапласа оператор 3, 194—196
Лапласа последовательность 3, 196
- предельная формула 1, 904
Лапласа преобразование 3, 194—200
Лапласа преобразование в геометрии 3, 200
Лапласа распределение 3, 201
Лапласа теорема 3, 201
- - в теории вероятностей 3, 201
- - об определителях 1, 188, 3, 201
- трансформация 3, 196
Лапласа уравнение 2, 299, 3, 202
Лапласа уравнение, численные методы решения 3, 203—205
- формула 1, 420
Лапласа — Бельтрами оператор 3, 194
Лапласа — Бельтрами уравнение 3, 205
Лапласа — Фурье ядро 2, 586
Лапласиан 3, 194
Лаппо — Данилевского условие для матриц 3, 618
Ларжа радиус 3, 206
Ларморовская частота 2, 381
Ларморовский радиус 2, 381, 3, 206
Ласкера кольцо 3, 206
- модуль 3, 206
Латинские квадраты ортогональные 4, 90
Латинский квадрат 2, 971; 3, 206—208
- подквадрат 3, 207
Латинский прямоугольник 3, 208
Лебега барьер 1, 394
- внешняя мера 1, 734
- внутренняя мера 1, 734
Лебега интеграл 3, 209—211
- - кратный 3, 93
- - определенный 2, 565
- интегральная сумма 2, 564
Лебега константы 3, 211—213
- критерий барьера 4, 933
Лебега мера 2, 93; 3, 213, 640
Лебега метод суммирования 3, 213
Лебега множество 2, 93, 3, 214, 217
Лебега неравенство 3, 214
- острие 2, 667, 4, 530
Лебега признак 3, 214
- пример иррегулярной граничной точки 4, 275
- - разреженного множества 4, 848
Лебега пространство 3, 214, 5, 309
Лебега разложение 3, 215; 4, 1178
Лебега размерность 3, 215
Лебега теорема 3, 216
- - в теории размерности 3, 216
- - о классах Бэра 1, 535
- - о «мостовых» 4, 826
- - о предельном переходе под знаком интеграла 3, 216
- - о тригонометрических рядах 2, 715
- - об абсолютной непрерывности функции множеств 1, 36
Лебега точка 3, 217
Лебега функции 3, 217
Лебега число 3, 217
Лебега — Стилтьеса интеграл 3, 217
- - мера 3, 641
Лебегова размерность 4, 826
- цепь 1, 411
Лебегово пространство функций 5, 718
Лебеговский спектр 3, 218
Лебедева преобразование 3, 218
Левая геодезическая кривизна 1, 924
- глобальная размерность кольца 1, 1054
- единица 2, 400; 3, 790
- *F*-квазигруппа 2, 803
- конгруэнция 1, 1123
- мера Хаара 3, 644
- полуплоскость 4, 462
- почти периодическая функция на группе 4, 546
- прогонка 4, 643
- производная 2, 272; 3, 1184
- - функтора 1, 1050
- трансляция 2, 802
- тройка векторов 1, 634
Левенберга — Марквардта метод 3, 490
Лёвенхейма — Сколема теорема в математической логике 1, 910; 3, 218
Лёвенхейма — Сколема — Мальцева теорема о моделях 3, 766
Леви канодическое представление 1, 398, 3, 218—221
Леви метрика 3, 220
Леви неравенство 3, 221
- область псевдовыпуклая 1, 1031
- определитель 3, 223
- подгруппа 4, 193
Леви проблема в теории аналитических пространств 3, 222
- - о псевдовыпуклых областях 1, 1031
- разложение 4, 193
- теорема о непрерывности условных математических ожиданий 3, 534
- - о псевдовыпуклых областях 1, 1031
- - о характеристических функциях 5, 757
- - об алгебрах Ли 4, 898
Леви условие в теории аналитических пространств 3, 222
- форма 1, 272
- функция 4, 213
Леви — Крамера теорема в теории вероятностей 3, 223
Леви — Мальцева разложение 3, 224
- - теорема о группах Ли 3, 257
- - - об алгебрах Ли 3, 244
Леви — Прохорова метрика 3, 224
Леви — Хинчина каноническое представление 1, 397, 3, 225
Левина гомоморфизм 5, 482
Левитана почти периодическая функция 3, 1120
Левицкого радикал 3, 434, 4, 807
Леви-Чивита параллельное перенесение 4, 1005
Леви-Чивита связность 3, 225, 4, 209
Лёвнера метод 3, 226
- теорема о граничном искажении 2, 670
Лёвнера уравнение 1, 595, 3, 227
Левнера — Куфарева уравнение 3, 1169
Левого сдвига оператор 3, 1111
Левое деление формальных языков 5, 644
Левое *PF*-кольцо 2, 826
- *QF*-3-кольцо 2, 826
- крыло слова 1, 772
- обратное отображение 3, 1133
- примитивное кольцо 4, 637
- псевдофробениусово кольцо 2, 826
- **совершенное кольцо** 5, 68
- топологическое векторное пространство 5, 377
- цепное кольцо 5, 815
- ядро 3, 460
- - билинейного отображения 1, 484
- - билинейной формы 1, 483
Левозакрученная винтовая линия 1, 706
Левоинвариантная мера Хаара 5, 741
- метрика 5, 625
Левоинвариантное среднее 2, 534
Левоинвариантный интеграл 2, 531
Левоконтекстная грамматика 1, 1094
Левопримитивный идеал 4, 638
Леворегулярная функция гиперкомплексного переменного 1, 1007
Левосингулярная полугруппа 1, 487
Левый аппроксимативный предел 1, 305
- идеал 2, 481
- интеграл Хаара 2, 532
- минимальный идеал 3, 693
- модуль, ранг 4, 861
- *A*-модуль 3, 777
- нуль 3, 1082
- - категории 5, 616
- обратный линейный оператор 3, 370
- σ-объект категории 1, 1018
- поворот кривой 1, 790
- регуляризатор оператора 4, 1175
- символ оператора 4, 1134
- смежный класс 5, 96
- топологический модуль 5, 377
- цоколь 3, 693
- частный элемент 1, 1138, 5, 525
Лежандра многочлены 2, 869; 3, 228
- нормальная форма эллиптического интеграла 5, 990
Лежандра преобразование 3, 229
- присоединенные функции 3, 232, 5, 293
Лежандра символ 3, 230
- соотношение для ζ-функции Вейерштрасса 1, 623
Лежандра теорема 3, 231
Лежандра уравнение 3, 228, 231, 232
Лежандра условие 3, 231
- формула удвоения 1, 867
Лежандра функции 3, 232
Лежандра — Клебша обобщенное условие 4, 57
Лежандров модуль 3, 783; 5, 990
Лежандрово многообразие 3, 232
Лейбница признак сходимости ряда 3, 233
Лейбница ряд 3, 233; 4, 282
- теорема о знакочередующихся рядах 2, 464
Лейбница формула 3, 233
Лейна — Эмдена уравнение 5, 997
Лексема 1, 223
Лексикографический порядок 3, 233
Лексикографическое произведение 3, 233, 4, 504
- расположение членов многочлена 3, 753
Лексическая функция 3, 507
Лемана — Шеффе теорема в теории статистического оценивания 5, 196
Лемма — см. соответствующее название
Лемниската Бернулли 1, 422
- Бута 1, 566
Лемнискатические функции 3, 234
Лемнискатные функции 3, 234
Лемнискаты 3, 234
Ленга теорема для главных однородных пространств 1, 1015
Ленгмюра уравнение 1, 101

Лента 5, 456
Ленточное зацепление 5, 487
Ленточный узел 2, 57
Ленца — Бортоллоти классификация проективных плоскостей 4, 670
Леонтьева модель в математической экономике 3, 586
Лере интеграл 3, 236
Лере спектральная последовательность 3, 235, 5, 106
- теорема о вычетах 1, 816
- - о когомологиях 4, 769
Лере формула 3, 235
Лере — Серра спектральная последовательность 5, 106
Лере — Шаудера принцип 3, 977
Лес 2, 92
Лестница канторова 2, 718
Лефшеца голоморфное число 3, 239
Лефшеца двойственность 3, 236
- пучок 3, 808
- разложение 3, 237
Лефшеца теорема 3, 236—238
Лефшеца формула 3, 238—240
- - для когомологий Вейля 1, 627
Лефшеца число 2, 554, 3, 240
Лефшеца — Пуанкаре двойственность 3, 236
Лжеца парадокс 1, 296, 3, 240
Ли p-адическая группа 3, 240
Ли алгебр многообразие 3, 241
Ли алгебра 3, 242—245
Ли алгебра алгебраической группы 3, 245—247
Ли алгебра аналитической группы 3, 247
- -, Биркгофа — Витта теорема 1, 495
- -, вес представления 1, 673
- -, вещественная форма 2, 1003
- -, группа гомологий 2, 911
- -, группа когомологий 2, 909, 912
- - группы Ли 3, 247
- - евклидова типа 1, 1025
- -, Картана подалгебра 2, 736
- - компактного типа 1, 1025
- -, комплексификация 2, 1003
- -, комплексная оболочка 2, 1003
- -, корень представления 1, 674
- -, корневое подпространство 1, 674
- - локальной группы Ли 3, 268
- - некомпактного типа 1, 1025
- - неприводимая 1, 1025
- - ортогональная симметрическая 1, 1025
- -, полупростой ранг 4, 861
- - почти алгебраическая 3, 250
- -, представление 4, 583
- -, Пуанкаре — Биркгофа — Витта теорема 1, 495
- -, ранг 4, 861
- -, расширение 4, 898
- -, сжатие 4, 1125
- - сильно вырожденная 5, 999
- - специальная 3, 270
- -, стягивание 4, 1125
- -, универсальная обертывающая алгебра 5, 498
- -, Фиттинга разложение 1, 674
Ли p-алгебра 3, 248
Ли алгебраическая алгебра 3, 249
- - -, Жордана разложение 2, 422
Ли банахова группа 3, 250
Ли вполне разрешимая алгебра 3, 250
Ли вполне разрешимая группа 3, 251
Ли градуированная алгебра 3, 251—254
Ли группа 1, 245; 3, 254—259
- -, бесконечномерное представление 1, 446
- -, Бибербаха свойство 2, 201
- -, Вейля группа 1, 626
- -, вещественная форма 2, 1004
- -, комплексификация 2, 1004
- -, представления уравнение 1, 935
Ли группа преобразований 3, 259—261
- -, пространство представлений 1, 934
- -, ранг 4, 861
- -, решетка 4, 980
- -, структурная форма представления 1, 935
- - типа (E) 3, 284
- - формальная 5, 638
Ли дифференциал 3, 261
Ли дифференцирование 3, 261—263
- инфинитезимальный оператор 1, 447
Ли квадрика 3, 263
Ли кольцо 3, 263
- -, Якоби тождество 3, 263
Ли компактная группа 3, 264
Ли линейная алгебра 3, 265
- - группа 3, 266
Ли локальная алгебра 3, 266
Ли локальная группа 3, 267—269
Ли нильалгебра 3, 269
Ли нильпотентная алгебра 1, 121; 3, 269—271
Ли нильпотентная группа 3, 271
- оператор 2, 857
Ли особая алгебра 3, 272
- - группа 3, 272
- подалгебра 3, 244
- подгруппа 3, 255
Ли полупростая алгебра 3, 272—276
- - -, Картана матрица 2, 731
Ли полупростая группа 3, 276—278
- произведение 2, 990
Ли производная 3, 261, 278
Ли производная группа 3, 278
Ли разрешимая алгебра 3, 278
- - -, Картана критерий 3, 279
- - -, Ли теорема 3, 279
- - -, Мальцева расщепление 3, 279
- - - расщепляемая 3, 279
- - - треугольная 3, 279
Ли разрешимая группа 3, 280
Ли редуктивная алгебра 3, 281
- - группа 3, 281
Ли свободная алгебра 3, 281
- - -, Ширшова теорема 3, 282
Ли скобка 3, 256, 282
- специальная группа 3, 271
- супералгебра 5, 277
- супергруппа 5, 277
Ли теорема 3, 282
- - о группах Ли (3-я) 3, 163
- - о разрешимых алгебрах Ли 3, 279
- - о сетях переноса 4, 247
- треугольная алгебра 3, 250
- - группа 3, 251
Ли тройная система 3, 284
- формальная группа 5, 638
Ли экспоненциальная алгебра 3, 284
Ли экспоненциальная группа 3, 284
Ли — Киллинга уравнение 2, 857
Ли — Колчина теорема 3, 285
Либрации точка 5, 432
Лившица критерий 2, 228
Лиева алгебра 3, 242
Лиево кольцо 3, 263
Лиевости критерий 5, 369
Лиевского типа многообразие групп 1, 1137
Лингвистика алгебраическая 1, 249
- математическая 3, 565
- структурная 5, 254
Лингвистическая дешифровка 3, 567
Линдеберга условие 3, 285
Линдеберга — Феллера теорема 3, 285
Линделёфа гипотеза 3, 285
Линделёфа конструкция 3, 286
Линделёфа метод суммирования 3, 286
Линделёфа принцип 3, 287
Линделёфа пространство 3, 288
Линделёфа теорема 3, 288
- - о голоморфных функциях 4, 568
- - о метрических пространствах 2, 715
Линделёфа число 3, 834
Линдемана теорема о показательной функции 3, 289
***K*-линеал** 4, 1037
***KB*-линеал** 1, 384
***KN*-линеал** 1, 384
Линеаризации методы 3, 289—291
Линеаризация гармоническая 1, 887
Линеаризированное уравнение Больцмана 1, 517
Линеаризированный оператор столкновений 1, 518
Линейная алгебра 3, 291
Линейная алгебра 3, 291—293
- - Ли 3, 265
- - - эллиптическая 4, 731
Линейная алгебра; численные методы 3, 293—297
Линейная алгебраическая группа 1, 143, 3, 297—300
- вариация множества 1, 604
- гамильтонова система 1, 861
- - - с периодическими коэффициентами 1, 863
Линейная гипотеза 3, 300
- грамматика 1, 1091
Линейная группа 3, 300—303
- - диагонализируемая 2, 123
- - изотропии 2, 521, 4, 731
- - Ли 3, 266
- - полная 2, 866, 3, 612, 615; 4, 416
- - специальная 2, 866; 5, 135
- дифференциальная игра 2, 333
Линейная зависимость 3, 303, 307
- - векторов 1, 633
Линейная интерполяция 3, 303
- каноническая система 1, 861
Линейная классическая группа 3, 303
- комбинация векторов 1, 643
- конгруэнция 2, 1015
Линейная краевая задача 3, 74, 76, 303, 338
- - - самосопряженная 4, 1073
Линейная краевая задача; численные методы решения 3, 303—307
- мера Хаусдорфа 5, 778
Линейная независимость 3, 307
- - векторов 1, 633, 982
Линейная оболочка 3, 308
- - множества 1, 643
- однородная форма, Минковского теорема 1, 946
Линейная оценка 3, 308
- размерность гильбертова пространства 1, 981
- ранговая статистика 4, 864
Линейная регрессия 3, 308, 4, 930
Линейная связность 3, 309—311, 4, 1096
Линейная система 3, 311
- - дифференциальных уравнений 2, 765
Линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами 3, 312—317
Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами 3, 317
- средняя квадратическая регрессия 4, 930
- структура 5, 249
Линейная топология 3, 318
Линейная форма 2, 732, 3, 318, 319, 320, 377, 5, 634
- - доминантная 4, 590
Линейная форма от логарифмов 3, 318
Линейная функция 3, 319
n-линейная форма 4, 406
- функция 4, 406
Линейно компактный модуль 3, 318, 320
- независимое множество 1, 643
Линейно разделенные расширения поля 3, 320
Линейно регулярный случайный процесс 3, 320
- **редуктивная группа** 4, 946
Линейно связное пространство 3, 321
- сингулярный случайный процесс 3, 321
Линейно упорядоченная группа 1, 328, 3, 322
- упорядоченная лупа 3, 462
- - полугруппа 5, 523
- упорядоченное кольцо 5, 526
Линейно упорядоченное множество 3, 322
- эквивалентные дивизоры 2, 131
Линейного представления инвариант 3, 323
Линейного сопряжения задача 1, 1097; 3, 77, 323—325, 4, 1177
Линейное векторное расслоение 1, 637
Линейное гиперболическое уравнение и система 3, 325—329
- диофантово приближение 2, 162
Линейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве 3, 329—337
Линейное дифференциальное уравнение второго порядка обыкновенное 3, 337—339
Линейное дифференциальное уравнение обыкновенное 3, 339—343
- - - -, ранг 4, 859
Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 3, 343
Линейное дифференциальное уравнение с частными производными 2, 298, 3, 344
Линейное замыкание 3, 345
Линейное интегральное уравнение 2, 590; 3, 345
- - - Вольтерра 1, 752
- интегро-дифференциальное уравнение 2, 613
- интерполирование 2, 622, 631
Линейное многообразие 1, 362, 3, 345, 358
- -, ортогональность 1, 980
- -, ортонормированный базис 1, 981
- -, раствор 1, 981
Линейное неравенство 3, 345—347
- -, граничных решений принцип 3, 345
- -, Минковского теорема 3, 703
- -, Минковского — Фаркаша теорема 3, 346
- операторное уравнение 1, 754
- отображение векторного пространства 1, 644
- -, ранг 4, 859
- - симплексов 4, 1152
- отражение 4, 157
Линейное параболическое уравнение и система 3, 348—350
- параметрическое программирование 4, 220
Линейное подпространство 3, 350
Линейное представление 3, 350, 4, 595
- - группы 3, 292; 4, 586
- - импримитивное 2, 524
- - кристаллографической группы 3, 108
Линейное преобразование 3, 291, 350—353, 369
- - векторного пространства 1, 644
- - диагонализируемое 3, 351
- - изометрическое 3, 352
- -, корневой вектор 3, 20
- - полупростое 4, 466
- -, полярное разложение 4, 479
- - самосопряженное 3, 352, 4, 1074
- - сопряженное 5, 85
- -, спектр 5, 58
- - унитарное 3, 352
- - эрмитово 3, 352
Линейное программирование 3, 353—355
- - целочисленное 5, 800
Линейное пространство 1, 640, 642; 3, 291, 355
- - выпуклых множеств 1, 803

Линейное топологическое пространство 3, 355
- - -, Банаха — Штейнгауза теорема 1, 380
Линейное уравнение 3, 355
Линейное уравнение алгебраическое 3, 356—360
- -, критерий совместности системы 3, 118
- -, Кронекера — Капелли теорема 3, 118
Линейное эллиптическое уравнение и система 3, 360—363
n-линейное множество 1, 121
- отображение 4, 407
Линейной независимости мера числа 3, 364
Линейные координаты 3, 9
- операции над векторами 1, 632
Линейный автомат 1, 68
- дифференциал 2, 241
Линейный дифференциальный оператор 2, 278, 345, 3, 364—369
- - - гиперболический 3, 366
- - - гипоэллиптический 3, 366
- - - голономный 3, 368
- - - , инвариантность 3, 366
- - -, максимально переопределенный 3, 368
- - -, недоопределенность 3, 368
- - - параболический 3, 366
- - -, переопределенность 3, 368
- - -, резольвента 3, 368
- - -, символический модуль 3, 367
- - - универсальный 3, 366
- - -, характеристика 3, 366
- - -, характеристическое многообразие 3, 367
- - -, эллиптический 3, 366
- интегральный оператор 2, 604
- - - Вольтерра 1, 752
- код 2, 932
- комплекс, группа 4, 1157
- метод приближения 4, 605, 609; 5, 144
Линейный метод суммирования 3, 369
- объект 1, 937
- - однородный 1, 937
Линейный оператор 1, 644, 3, 291, 369—377; 4, 19
- -, Банаха — Штейнхауза теорема 1, 389
- - двойственный 1, 645
- -, дробная степень 2, 382
- - положительный 4, 470
- - сопряженный 1, 645
- -, спектральная теория 5, 114
- -, спектральное разложение 5, 120
- -, ядерный 5, 1037
- -, ядро 5, 1043
- поперечник 4, 493
- порядок 4, 505
- род алгебраической поверхности 1, 150
Линейный угол 2, 50, 3, 377
Линейный функционал 1, 644, 3, 320, 370, 377
- - положительный 1, 119, 4, 1149
- - эрмитов 4, 1149
- элемент, поле 2, 885
- язык 1, 1091
Линейных алгебраических групп арифметическая теория 3, 378—380
Линейчатая поверхность 3, 380—382
- -, Бельтрами теорема 3, 380
- -, Бонне теорема 3, 380
- -, стрикционная линия 3, 380
- -, стрикционная точка 3, 380
Линзовое пространство 3, 382
Линии Грина 1, 1121
- параллельные 4, 209
Линия 3, 382—387
- асимптотическая 1, 332; 2, 252
- в матрице 1, 773
- векторная 1, 636
- винтовая 1, 705
- вихревая 1, 715
- времениподобная 3, 702
Линия второго порядка 2, 1034; 3, 387—389
- - -, диаметр 2, 127
- вырождения типа уравнения 5, 45
- геодезическая 1, 924; 4, 673
- Дарбу 2, 18
- изотропная 3, 703
-, касательная 2, 754
- квазигеодезическая 2, 800
- координатная 2, 251
- кривизны 3, 97, 102
- мировая 3, 703, 704, 4, 149
- направляющая 2, 1033
- образующая 2, 1033
- особая 4, 125
- откоса 4, 141
- погони 4, 351
- предельная 3, 399, 4, 73
- прикосновения 2, 1003
- простая замкнутая 3, 386
- пространственноподобная 3, 703
- прямая 1, 643
- равных расстояний 3, 398
- регрессии 3, 27, 4, 929
- сжатия 3, 380
- скедастическая 4, 929
- средняя 5, 163
- Стокса 1, 717; 5, 941
- стрикционная 3, 380
- уровня 5, 544
- характеристическая 3, 799, 5, 753
- цепная 5, 815
Линк симплекса 3, 153
Линника дискретный эргодический метод 3, 389
- дисперсионный метод 2, 223
Липпмана — Швингера уравнение 5, 898
Липшица константа 1, 915; 3, 390
Липшица условие 1, 915; 3, 49, 390
Липшица условие интегральное 3, 390
Липшицева граница 5, 57
Лисп 3, 390
Лист декартов 2, 79
- Мебиуса 2, 52; 3, 630
Листинга узел 3, 391
p-листная звездообразная область 2, 449
- функция 3, 723
Литерал 1, 224
Литлвуда проблема 3, 391
- теорема о дзета-функции 2, 117
Лиувилля нормальная форма 3, 392
Лиувилля поверхность 3, 392
- преобразование 3, 392
Лиувилля сеть 3, 392
Лиувилля теорема 3, 393
- - для автономных систем 1, 83
- - о гамильтоновых системах 1, 860
- - о конформных отображениях 2, 1094; 3, 393
- - - - преобразованиях 2, 1084
- - о приближении алгебраических чисел 3, 393
- - о сохранении фазового объема 3, 394, 397
- - об аналитических функциях 3, 393
- - об эллиптических функциях 5, 986
Лиувилля уравнение 3, 394
- форма 4, 1156
- формула 3, 396
- - для вронскиана 1, 769
- - для линейных дифференциальных уравнений 3, 341
Лиувилля функция 3, 395
Лиувилля число 3, 395
Лиувилля — Грина приближение 1, 717
Лиувилля — Неймана ряд 5, 652
Лиувилля — Остроградского формула 3, 396
Лифт полный 3, 262
Лихтенбаума теорема о когомологической размерности 2, 926
Лобатто квадратурная формула 3, 397
Лобачевского геометрия 3, 397—401
- -, Клейна интерпретация 2, 873
- -, Пуанкаре интерпретация 4, 746
Лобачевского метод 3, 401
- плоскость 3, 784
- -, Гильберта теорема 1, 408
- -, Пуанкаре модель 2, 197
- -, радиус кривизны 3, 911
Лобачевского признак сходимости 3, 402
Лобачевского пространство 3, 402—404
- -, Бельтрами — Клейна интерпретация 3, 403
- -, Кэли — Клейна интерпретация 3, 402
- -, радиус кривизны 3, 398, 911
Лобачевского функция 3, 404
Логарифм 3, 405
- интегральный 2, 603
- - обращенный 1, 292
Логарифмика 3, 407
Логарифмическая бумага 3, 405
- выпуклость 1, 800
- высота в диофантовой геометрии 1, 813
Логарифмическая емкость 2, 404; 3, 406
Логарифмическая производная 3, 406
Логарифмическая спираль 3, 406
Логарифмическая точка ветвления 3, 407
Логарифмическая функция 3, 407
- - правдоподобия 2, 645
Логарифмически выпуклая кратно круговая область 3, 89
Логарифмически нормальное распределение 3, 408
- оптимальный по порядку метод 3, 695
-плюрисубгармоническая функция 4, 336
Логарифмически субгармоническая функция 3, 409
Логарифмический вычет 1, 815, 3, 409
Логарифмический метод суммирования 3, 410
- период 5, 989
Логарифмический потенциал 3, 410
- - двойного слоя 4, 524
- - масс 4, 524
- - простого слоя 4, 524
Логарифмический признак сходимости числового ряда 3, 411
Логарифмическое изображение 4, 945
- нормирование поля 3, 1078
- среднее 3, 410
- уравнение 5, 540
- ядро 3, 410
Логика алгоритмическая 4, 653
- Гриса — Нельсона 2, 1041
- двузначная 2, 51
- динамическая 4, 653
- m-значная 3, 714
- интенсиональная 4, 1110
- интуиционистская 2, 643
- комбинаторная 2, 969
- конструктивная 2, 1039
- математическая 3, 568
- Медведева 5, 619
- многозначная 3, 713
- модальная 3, 763
- промежуточная 4, 695
- символическая 3, 568
- теоретическая 3, 568
- Хоара 4, 653
Логико-математические исчисления 3, 411—414
Логико-математический язык 4, 578
Логико-термальная история 4, 652
Логистика 1, 315, 3, 414
Логистическая система вывода 1, 919
Логистическое распределение 3, 414
Логицизм 3, 415
Логическая аксиома 3, 415, 5, 353
- антиномия 1, 294
- истинность 5, 357
Логическая матрица 3, 415
Логическая операция 3, 416
- сеть 1, 55
Логическая формула 3, 416
Логическая функция 3, 416
- часть оператора программирования 4, 18
Логические исчисления 3, 416—420
Логический вывод 1, 779
Логический закон 3, 420
Логическое следствие 3, 420
Логнормальное распределение 3, 420
Лодато близость 1, 501
Ложного положения метод 4, 1109
Лози аттрактор 5, 247
Локализации принцип 3, 420
Локализация в категориях 3, 420
Локализация в коммутативной алгебре 3, 421
Локальная алгебра Ли 3, 266
- база 1, 371
- гипотеза Бибербаха 1, 466
Локальная грубость 3, 422
- -, Гробмана — Хартмана теорема 3, 422
- группа Ли 3, 267
- - - преобразований 3, 260
Локальная дифференциальная геометрия 3, 423
- карта 2, 355, 730
- конечность 4, 410
- - покрытия 4, 393
- кратность пересечений 4, 254
- лоренц-инвариантность 4, 970
- малость категории 4, 1119
- монодромия 3, 807
- однопараметрическая группа 3, 1171
- параметризация 3, 743
- подгруппа 3, 426
- проблема Торелли 5, 406
Локальная размерность 3, 428
- k-связность 3, 434
- симметрия 3, 454
- степень 5, 222
Локальная структура траекторий 3, 424
- теорема Геделя — Мальцева 1, 158
- - Лапласа в теории вероятностей 3, 201
- - Мальцева 3, 510
Локальная топологическая группа 3, 425
Локальная униформизация 3, 426
- униформизирующая 3, 445
- униформизующая 1, 177
- эргодическая теорема 4, 23
m-локальная база 1, 371
n-m-локальная база 1, 371
Локально аналитическая функция 2, 42
Локально бикомпактное пространство 3, 246, 5, 392
- вложимая Ω-система 1, 159
Локально выпуклая решетка 3, 427, 4, 472
- - структура 3, 427
Локально выпуклая топология 3, 427, 5, 378
- выпуклое множество 1, 799
Локально выпуклое пространство 3, 428—430, 4, 462
- - K-пространство 4, 472
- - тензорное произведение 5, 383
- - топологическое векторное пространство 5, 378
- гауссово отображение 5, 298
- евклидова топологическая группа 1, 245, 5, 369
- евклидово пространство 2, 355
- замкнутое подмножество 2, 1054
- изоморфные группы Ли 3, 255
Локально интегрируемая функция 3, 430

- компактная топологическая группа 5, 367
Локально компактное тело 3, 430
Локально конечная алгебра 3, 431
- - база 1, 371
Локально конечная группа 3, 432
Локально конечная полугруппа 3, 432
- - симплициальная схема 4, 1159
- конечное малое многообразие полугрупп 4, 441
Локально конечное покрытие 3, 433
Локально конечное семейство 3, 434
- - - множеств 4, 202; 5, 393
- конечный комплекс 2, 995
- - радикал 3, 432
Локально линейно связное пространство 3, 434
Локально нильпотентная алгебра 3, 434
Локально нильпотентная группа 3, 435
- - полугруппа 3, 1041
Локально нормальная группа 3, 435
- обратимое голоморфное отображение 1, 1030
- одномерная схема 4, 911
- окольцованное пространство 4, 14
- ориентируемый пучок 1, 1058
- плоская конформная структура 2, 1089
- - связность 3, 103
- - флаговая структура 5, 628
Локально плоское вложение 3, 435; 5, 401
- полная деформация 2, 103
- постоянный пучок 4, 766; 5, 1024
- псевдоевклидово пространство 4, 740
- равномерно выпуклое банахово пространство 1, 389
Локально разрешимая алгебра 3, 435
Локально разрешимая группа 3, 436
Локально свободная группа 3, 436
Локально свободный пучок 2, 904; 3, 436
- связная категория 1, 1074
- - компактная группа 2, 991
Локально связное пространство 3, 436; 4, 1097
Локально связный континуум 3, 437
- счетная база 1, 371
Локально тривиальное расслоение 3, 437
- факториальное кольцо 2, 871
- циклическая группа 1, 17
- эквинепрерывная полугруппа 4, 452, 453
σ-локально конечная база 1, 371
- конечное открытое покрытие 4, 203
Локального кодирования принцип 4, 1189
- максимума точка 3, 494
- минимума точка 3, 494
Локальное зацепление 3, 437
- исчисление 4, 513
Локальное кольцо 3, 437—439
- - регулярное 1, 1055; 3, 439
- -, топология 1, 98
Локальное поле 3, 439; 4, 400
- - круговое 3, 120
- правило 5, 944
- преобразование 4, 730
Локальное приближение функций 3, 440
Локальное разбиение 3, 440
Локальное свойство в коммутативной алгебре 3, 440
Локальности принцип в теории дифференциальных уравнений 3, 441
Локальные гомологии 3, 441
Локальные и резидуальные свойства алгебраических систем 3, 441
Локальные когомологии 3, 442
- оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Локальные предельные теоремы теории вероятностей 3, 443
Локальный алгоритм 1, 207
- - упрощения 1, 560
Локальный гомеоморфизм 3, 444
- гомоморфизм 3, 267, 425
- дендрит 2, 91
- изоморфизм 3, 426
- инвариант Хассе 5, 775, 776
- индекс пересечения 4, 255
- мартингал 3, 534
- модуль, число 2, 106
- параметр 3, 445
- принцип конечной площади 3, 458
- - максимума модуля 2, 965
- слой 4, 1210
- спектр 5, 114
- сплайн 4, 606
Локальный униформизирующий параметр 3, 445
Локальных вариаций метод 3, 446
Локон Аньези 1, 297
Локсодрома 3, 447
Локсодромическое дробно-линейное отображение 2, 386
Локсодромия 3, 447
Ломаная вариация 1, 604
- вписанная 1, 757
- экстремаль 4, 853; 5, 932, 958
Ломмеля многочлен 3, 447
Ломмеля функция 3, 447
Лонгмана метод 3, 448
Лопиталя правило 3, 449
Лорана ряд 1, 264, 265; 3, 450
- - обобщенный 1, 679
- теорема в теории аналитических функций 3, 450
Лоренца аттрактор 3, 451
- группа 3, 453; 4, 82, 147
Лоренца преобразование 3, 453
Лоренца сила 3, 454
Лоренцево пространство-время 4, 719
Лоренц-инвариантность 4, 147, 970
Лоса симметрическое пространство 4, 1147
Лотерея 1, 102
Лузина гипотеза в теории множеств 3, 455
- - - тригонометрических рядов 3, 456
- - - функций комплексного переменного 3, 459
- критерий для борелевских множеств 1, 535
Лузина критерий измеримости функций 3, 455
Лузина множество 3, 455
Лузина примеры в теории функций комплексного переменного 3, 456
Лузина принципы отделимости 3, 456
- проблема в теории множеств 3, 457
Лузина проблема в теории тригонометрических рядов 3, 456
- - функций комплексного переменного 3, 459
Лузина пространство 3, 457
Лузина решето 3, 457
Лузина *C*-свойство 3, 458
Лузина *N*-свойство 3, 458
Лузина теорема 3, 458
- - в дескриптивной теории множеств 3, 459
- - в теории функций комплексного переменного 3, 458
- - о *CA*-множествах 3, 763
- - об измеримых множествах 2, 498
- точка 3, 459
Лузина — Валле Пуссена классификация 2, 95
Лузина — Данжуа теорема 3, 459
Лузина — Привалова граничная теорема единственности 2, 402, 403
Лузина — Привалова теоремы в теории функций комплексного переменного 3, 459
Лукасевича трехзначная логика 3, 719
Лумиса — Уитни неравенство 2, 513
Лунца — Локуциевского пример в теории размерности 4, 822
Лупа 2, 802, 3, 460—462
-, Алберта теорема 2, 519
Лупа аналитическая 3, 462
- Муфанг 3, 844
-, ядро 5, 1043
Лурье уравнение 5, 839
Луч 1, 498, 3, 463, 4, 466
- в программировании 4, 644
- Жюлиа 2, 427
- конгруэнции 2, 1014
G-луч 1, 927
Лучевая функция 3, 463
- -, аномалия 1, 947
- -, минимум в решетке 1, 945
- -, последовательный минимум 1, 947
- -, Эрмита постоянная 1, 945
Лучевой метод 3, 463—465
Лучистости свойство 2, 446
Льенара уравнение 3, 465
Льенара — Шипара критерий 3, 465
- - - устойчивости 5, 558
Люксембурга норма 3, 466
Люрота проблема 3, 466
- теорема о дифференциальных полях 4, 901
- - о полях рациональных функций 3, 466
Люстерника метод 4, 250
Люстерника —Шнирельмана категория 2, 763
Ляпунова второй метод 3, 471
- коэффициент неправильности 3, 980
- критерий о правильных линейных системах 4, 551
- лемма об устойчивости 3, 471
- оптимальная функция 1, 66
Ляпунова поверхности и кривые 3, 467
Ляпунова преобразование 2, 766; 3, 468
- система с демпфированием 3, 957
Ляпунова стохастическая функция 3, 468
- сфера 3, 467
Ляпунова теорема 3, 469
- - в теории вероятностей 3, 469
- - в теории потенциала 3, 469
- - о показателях 3, 471
- - о правильных линейных системах 4, 552
- - о приводимых линейных системах 3, 313, 4, 633
- - о приводимых системах 2, 766
- - об устойчивости 2, 771, 3, 61; 5, 552
- - - по первому приближению 5, 570
Ляпунова теория устойчивости 3, 470
- условие 3, 467, 470
Ляпунова функция 3, 471
- - оптимальная 1, 66
Ляпунова характеристический показатель 3, 471—473
Ляпунова — Перрона фундаментальный результат 2, 769
Ляпунова — Пуанкаре теорема о симплектических матрицах 1, 862
Ляпунова — Стеклова условие замкнутости 4, 100
Ляпунова — Шмидта уравнение 3, 473

M

Магазинный автомат 3, 628
Магарам — Колмогорова теорема о мерах 3, 645
Магистраль 3, 586
Магический квадрат 2, 971; 3, 475
Магнитной гидродинамики математические задачи 3, 475
Мажоранта гармоническая 1, 872, 5, 262
- - наибольшая 1, 872
- - наименьшая 1, 872
Мажоранта и миноранта 3, 476
Мажорантная многошаговая игра 2, 331
- схема 1, 996
- функция 3, 476
Мажорирующее отображение 4, 1025
Мазера теорема 5, 361
Мазура — Орлича — Брудно теорема о методах суммирования 1, 718
Мазуркевича теорема о континуумах 4, 230
- - о локально связном континууме 3, 384
Мазуркевича — Мура — Менгера теорема о локально связных пространствах 3, 437
Мазуркевича — Янишевского теорема о континууме 4, 1097
Майера задача 3, 476
- метод 5, 206
- скобки 5, 1052
- функция 5, 206
Майера — Вьеториса точная последовательность 1, 162
Макдональда функция 1, 458, 3, 476
Макки борелевская структура 3, 477
Макки пространство 3, 478
Макки топология 2, 44; 3, 478
Макки — Аренса теорема двойственности 2, 44
Маклафлина группа 5, 149
Маклорена ряд 3, 478
Маклорена формула 3, 479
Макмиллана теорема в теории передачи информации 5, 76
Мак-Нейла пополнение 4, 496
Маколеево кольцо 3, 68
Макроассемблер 3, 596
Макроподход в теории автоматов 1, 48, 53, 72
Максвелла закон 5, 750
Максвелла распределение 3, 479
Максвелла уравнения 3, 479—482
Максвелла — Больцмана распределение 1, 519
Максимальная дуальная пара подпространств 1, 986
Максимальная компактная подгруппа 3, 482
- нить 1, 33, 4, 686
- подалгебра 2, 987
Максимальная подгруппа 3, 482
- почти периодическая группа 2, 1022
Максимальная эргодическая теорема 3, 483
Максимально переопределенный линейный дифференциальный оператор 3, 368
Максимального правдоподобия метод 3, 483
- - оценка 3, 483; 4, 551
- типа целая функция 5, 798
Максимальное аналитическое продолжение 1, 283
- бикомпактное расширение 1, 477
Максимальное и минимальное расширения симметрического оператора 3, 484
- покрытие 1, 560
- расширение *K*-пространства 4, 472
- рекурсивно перечислимое множество 4, 959
Максимальности принцип 1, 772
- - для частично упорядоченных множеств 5, 828
- теорема Вана 2, 201
- - Коллингвуда 4, 569
Максимальный диссипативный оператор 2, 228, 4, 905
- дифференциальный оператор 5, 108
Максимальный и минимальный операторы 3, 484
Максимальный идеал 2, 483; 3, 495

- -, пространство 2, 985
- -, Шилова теорема 2, 985
Максимальный инвариант 3, 486
Максимальный коэффициент корреляции 3, 486
- монотонный оператор 3, 814
- поток 4, 539
- спектр 5, 102
Максимальный спектральный тип 3, 486
Максимальный тор 3, 486—488
Максимальный член ряда 3, 488
- элемент 5, 834
Максимизация и минимизация функций 3, 489—491
Максимизирующая последовательность 3, 489
Максимин 2, 678; 3, 491
Максимин; численные методы 3, 492—494
Максимина принцип 3, 494
Максиминный критерий 3, 494
Максимум абсолютный 3, 494
Максимум и минимум функции 3, 494
Максимума и минимума точки 3, 494
Максимума модуля принцип 3, 495
- - - локальный 2, 965
Максимума принцип дискретный 3, 496
- - для субгармонических функций 5, 262
- - интегральный 4, 49
Максимума принцип Понтрягина 3, 497, 4, 487
- -, усиление 2, 406
- работы вариационный принцип 1, 600
Малая индуктивная размерность 2, 556; 4, 821
Малая категория 3, 497
- ось эллипса 5, 978
- посылка 3, 790
- статистическая сумма 5, 179
- теорема Пикара о целых функциях 4, 285
- - Ферма 5, 152, 156, 604
Малера гипотеза о диофантовых приближениях 2, 172
- неравенство 3, 701
Малера проблема в теории диофантовых приближений 3, 498
Мало схема 2, 724
Малого параметра метод 3, 498—505
Малое многообразие полугрупп 4, 440
Малоинъективный модуль 2, 664
Малые знаменатели 3, 505—507
Малый канонический ансамбль 5, 200
- - - Гиббса 5, 179
Малый образ 3, 507
Малый объект категории 3, 508
- подмодуль 4, 372
Малых колебаний маятника уравнение 5, 541
Мальцева алгебра 3, 463, 508—510
Мальцева локальные теоремы 3, 510
- проблема о вложимости ассоциативного кольца 1, 721
- - о мальцевском произведении 3, 510
- расщепление 3, 279
- теорема о Ω-системах 1, 160, 185
Мальцева — Неймана теорема о групповой алгебре 1, 722, 1145
- - - о свободных алгебрах 4, 1081
Мальцевское пополнение 3, 435
Мальцевское произведение 1, 186; 3, 510
Мамфорда гипотеза 3, 510—512
Мангольдта функция 3, 512
Манна теорема в теории чисел 3, 512
Манна — Дайсона неравенство 4, 325
Манна — Уитни критерий в математической статистике 3, 512
Мантисса 3, 405
- числа 2, 443
Маргинальное распределение 3, 513
Маркированный случайный точечный процесс 5, 32
Маркова диофантово уравнение 3, 515
Маркова квадратурная формула 3, 513, 867
Маркова критерий в теории приближений 3, 513
- неравенство в теории вероятностей 5, 842
Маркова неравенство для производной многочлена 3, 514
- нормальный алгорифм 1, 820
- постоянная 3, 514
- правило выводимости 1, 912
- пример динамической системы 4, 954, 1100
- принцип 2, 1049
- - конструктивного подбора 2, 643
Маркова проблема спектра 3, 514—516
Маркова система функций 3, 516
Маркова спектр 1, 948, 3, 514, 516
- тезис 1, 821
- теорема о комплексах 3, 153
- тройка 3, 515
Маркова форма 1, 948; 3, 516
Маркова цепи нулевой класс состояний 3, 516, 519
Маркова цепи положительный класс состояний 3, 517, 519
- цепочка 1, 948
Маркова цепь 1, 660, 3, 517—520
Маркова цепь возвратная 3, 520
- - непериодическая 3, 519; 5, 239
Маркова цепь неразложимая 3, 519, 521
- - нерегулярная 4, 260
- -, переход с запрещениями 4, 258
Маркова цепь периодическая 3, 521
Маркова цепь разложимая 3, 519, 521
- - регулярная 4, 260
- - с непрерывным временем 3, 523
Маркова цепь сложная 3, 521
- - топологическая 4, 1136
Маркова цепь эргодическая 3, 521
- число 3, 515
- эргодическая теорема 1, 525
Маркова — Какутани теорема о неподвижной точке 5, 385
Марковская переходная функция 4, 259
- стратегия 5, 529, 531
Марковский источник сообщений 2, 682
Марковский момент 3, 522; 4, 508
Марковский процесс 1, 663; 3, 523—528
- - восстановления 1, 757
- -, эксцессивная функция 5, 970
Марковский стационарный процесс 3, 529
Марковское свойство 3, 523, 529, 4, 391
- случайное поле 5, 16
Мартина аксиома о частично упорядоченных множествах 5, 280
Мартина граница в теории марковских процессов 3, 529—531
Мартина граница в теории потенциала 3, 531
- компактификация 3, 531
- представление 3, 532
- пространство 3, 531
- теорема в теории потенциала 3, 532
- топология 3, 532
- ядро 3, 530
Мартина-Лёфа теорема о сложности двоичных последовательностей 1, 220
Мартингал 3, 532—535
Мартингальное преобразование 3, 534
Мартинелли — Бохнера представление 1, 542
- - формула 1, 543
- - - интегральная 1, 270
Марцинкевича пространство 3, 535
- теорема об интерполяции 4, 1040
- - об операторах 2, 630
Маршо формула 2, 383
Маршрут в графе 1, 1106, 1108
Маскита теорема об униформизации 5, 516
Маслова индекс 5, 723
- канонический оператор 5, 722
Масс логарифмический потенциал 4, 524
Масса 3, 536
Масса движения 3, 536; 4, 146
Масса и комасса 3, 536
- покоя 3, 536, 4, 146
Массив ортогональный 4, 87
Массивная группа 5, 511
- подгруппа 1, 448
Массивное множество 3, 537
Массовая проблема 1, 214; 3, 537, 1004
Массового обслуживания система 3, 537—541
Массового обслуживания системе; входящий поток вызовов 3, 541—543
Массового обслуживания система с ожиданием и одним каналом обслуживания 3, 543—550
Массового обслуживания система с ожиданием многоканальная 3, 550—554
Массового обслуживания система с отказами 3, 554—557
Массового обслуживания теория 3, 557—559
Массовый оператор 3, 559
Массы оператор 3, 559
Масштаб главный (общий) 2, 741, 746
- относительный 2, 746
- площади 2, 741
- частный 2, 746
Масштабный параметр 3, 560
Математика 3, 560—564
- вычислительная 1, 822
- дискретная 2, 207, 1018
- комбинаторная 2, 970, 974
- конечная 2, 208, 1018
- конструктивная 2, 1042
- финитная 2, 368
Математическая абстракция 1, 43
Математическая индукция 3, 564
- кристаллография 3, 109
Математическая лингвистика 3, 565—568
Математическая логика 3, 568—574
- -, принцип двойственности 2, 32
Математическая модель 3, 574
- - объекта управления 1, 60
- -, погрешность 4, 357
Математическая статистика 3, 576—581
- структура 5, 249
- теория дифракции 2, 231
Математическая физика 3, 581—584
Математическая экономика 3, 584—591
Математические задачи астрометрии 1, 343
- - астрономии 1, 344
- - астрофизики 1, 346
- - аэродинамики 1, 364
- - геодезии 1, 921
- - геокриологии 1, 931
- - геотермики 1, 951
- - геофизики 1, 951
- - гидродинамики 1, 959
- - звездной астрономии 2, 447
- - картографии 2, 740
- - классической небесной механики 2, 869
- знаки 2, 457
Математический анализ 3, 591—595
- - формальный 5, 641
Математическое моделирование 3, 574
Математическое обеспечение 3, 595—600
Математическое ожидание 3, 600
- - условное 5, 553
Математическое программирование 2, 677; 3, 601—604; 4, 647
Математической индукции принцип 2, 558, 3, 564
- физики уравнение нелинейное эволюционное 5, 912
Математической физики уравнения 3, 604—611
Материальные уравнения среды 3, 480
Матриц алгебра 3, 611
Матриц кольцо 3, 612
Матрица 3, 613—618
- Адамара 1, 85
- адекватная 3, 765
- Александера 5, 488
- билинейного отображения 1, 484
- булева 1, 554
- вырожденная 1, 806
- гауссова 2, 777
- Гессе 3, 1153
- голоморфная 1, 251
- Грама 1, 1084
- Гурвица 4, 914
- дважды стохастическая 4, 272; 5, 239
-, детерминантная сумма 1, 722
- диагональная 2, 123
- Дирака 2, 175
- Дуффина — Кеммера 2, 176
- жорданова 2, 424; 3, 372
-, жорданова нормальная форма 2, 425, 3, 352
-, жорданова форма 2, 425
- зацепления Александера 1, 232
- Зейферта 3, 451
- информационная 2, 646, 655
- инцидентности 1, 505, 506, 1105, 1108, 2, 663
- - гиперграфа 1, 1006
, каноническая форма 3, 1052
-, канонический вид 3, 1052
- Картана 3, 17
- квадратичной формы 2, 777
- квадратная неполная 1, 722
- Кеммера — Дуффина 2, 875
-, Кёнига теорема 1, 773; 2, 846
- ковариационная 2, 900
- Кокстера 2, 944
- контрагредиентная 2, 1072
- корреляционная 3, 23
- кососимметрическая 3, 42
- Коши 3, 58, 618
- кронекерова 2, 777
-, кронекерово произведение 5, 332
- линейного оператора 3, 371
- преобразования 3, 291
-, линия 1, 773
- логическая 3, 415
- мероморфная 1, 251
- монодромии 1, 863, 3, 312, 806
- мономиальная 3, 811
- нагрузок 5, 594
- накрытия Александера 1, 232
- невырожденная 3, 906
- неособенная 3, 906
- неразложимая 4, 276
- нормальная 3, 1050
-, нормальная жорданова форма 2, 425, 3, 352
-, нормальная форма 3, 1052
- обратная 3, 1132
-, обращение 3, 1136
- ортогональная 4, 84
- особая 1, 806
- осцилляционная 4, 138
- переходных вероятностей 3, 518, 4, 261
- периодов 4, 1032; 5, 405
- - абелева интеграла 1, 16
- - абелевой функции 1, 23
- - комплексного тора 2, 1011
- - римановой поверхности 5, 1046
-, перманент 2, 976; 4, 1140
- плотности 3, 26, 4, 319

- - состояний 5, 178, 203
-, подобие 4, 377
- показательная 3, 312
- положительно определенная 4, 431
- полунепрерывная 4, 461
- полупростая 4, 465
- полустохастическая 4, 261
-, полюс 1, 251
-, представимости проблема 4, 582
- проверочная 2, 932
- разреженная 4, 848
-, ранг 4, 858
- рассеяния 4, 893
- регрессии 4, 925
- Римана 4, 993
- риманова 1, 23
- Риса 4, 1034
- самосопряженная 5, 1019
- симметрическая 4, 1142
- симплектическая 1, 862, 4, 1154, 1157
- сингулярная 1, 806
- смежности графа 1, 1105, 1108
-, собственное значение (число) 5, 764
- сопряженная 5, 81
-, спектр 5, 102
- стохастическая 4, 261, 5, 238
-, тензорное произведение 5, 332
- Тёплица 4, 943
- транспонированная 5, 419
- треугольная 5, 428
- унимодулярная 5, 504
- унипотентная 5, 505
- унитарная 5, 507
- J-унитарная 1, 861
- управляемости 1, 61
- фундаментальная 2, 766, 3, 340
- характеристическая 3, 326, 765, 1053
-, характеристический корень 5, 764
-, - многочлен 3, 616, 1053, 5, 764
-, характеристическое значение (число) 5, 764
- Хаусдорфа 5, 778
-, Хессенберга форма 2, 687
-, Шура форма 2, 689
- эволюционная 3, 312
- эрмитова 5, 1019
- эрмитовой формы 5, 1021
- эрмитово-симметрическая 5, 1019
- эрмитово-сопряженная 5, 81, 1019
- Якоби 5, 1044

Маурера — Картана форма 3, 624
Маха принцип 3, 625
Маха число 3, 625
Махаланобиса расстояние 3, 626
Мацумото теорема о функторах 1, 164
Мацусимы критерий для однородных пространств 3, 626
Машина 3, 626—629
- абстрактная 1, 825
- Поста 4, 505
- Тьюринга 1, 819, 5, 456
Машинная номография 3, 1047
Машинно-зависимые оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Машинно-ориентированный язык 1, 223, 3, 629
Машинный перевод 1, 59
- эксперимент 2, 850
- язык 1, 223
Машины сложность 1, 213
Машке теорема для групповых алгебр 1, 1144
Маятника колебаний уравнение 3, 629
Мгновенная фаза 4, 1085
Мгновенное состояние 3, 630
Мёбиуса геометрия 2, 1087
- конфигурация 2, 1079
Мёбиуса лист 2, 52; 3, 630
Мёбиуса плоскость 3, 630
- преобразование 3, 122
Мёбиуса ряд 3, 631
- теорема обращения в комбинаторике 4, 264
Мёбиуса функция 3, 631
Мёбиусово отображение 2, 1094
Медведева логика 5, 619
Медиальная квазигруппа 2, 803
Медиальный закон 2, 230
Медиана в теории вероятностей 3, 632
- выборочная 1, 775
Медиана треугольника 3, 632
Медианта 3, 632
Медленное движение 3, 500
Межотраслевой баланс 3, 586
Мейера преобразование 3, 632
Мейера K-преобразование 3, 633
- свойство 3, 633
Мейера теорема о мероморфных функциях 3, 633
- точка 3, 633, 4, 567
Мейера — Бесселя преобразование 3, 633
Мейера — Вьеториса последовательность 1, 1048
Мелера квадратурная формула 2, 794, 3, 633
Мелера — Фока преобразование 3, 634
Мелкость разбиения 2, 17, 3, 91
Меллина преобразование 3, 635
- формула 2, 86
- ядро 2, 586
Мембранная теория оболочек 3, 1128
Менгера кривая 2, 715, 3, 635
- теорема о линиях в смысле Урысона 3, 385
- - об индуктивной размерности 2, 717
- универсальная кривая 3, 385
Менгера — Урысона формула для размерностей 4, 820
Менгера — Урысона — Чеха теорема о размерности 4, 827
Менгерова алгебра 2, 968
Менелая теорема для треугольника 3, 635
Мёнье теорема о кривизне 2, 253, 3, 636
Меньшова пример нуль-ряда 3, 636
- теорема о тригонометрических рядах 5, 440
Меньшова — Радемахера теорема для ортогональных рядов 3, 636
Мер алгебра 1, 129
Мера 3, 636—645, 5, 720
- абсолютная непрерывность 1, 34
- автоинформативности 3, 738
- алгебраической независимости 1, 198
- аналитическая 1, 246
- - Альфорса 1, 246
- ассоциированная 4, 1039
- Бэра 1, 537
- бэровская 3, 643

Мера в топологическом векторном пространстве 3, 645
- вероятностная 1, 665
- Винера 1, 666, 695
- винеровская 1, 695
- внешней информативности 3, 738
- внешняя 1, 734
- - поперечная 5, 50
- внутренне регулярная 4, 809
- вполне конечная 4, 719
- вполне σ-конечная 4, 719
-, выметание 1, 781, 782
- вычислений 1, 211
- гармоническая 1, 873, 4, 533
- гиперболическая 1, 988
- граничная 5, 264
- дискретная 2, 198
- емкостная 2, 405; 4, 1047
- Жордана 2, 420, 3, 641
- инвариантная 2, 528
- интенсивностей 5, 31
- иррациональности 2, 666
- искажения 5, 1006
- Каратеодори 2, 720
- квазиинвариантная 2, 806
- квантовая 2, 1037
- кинематическая 2, 571
- конечная 4, 719
- σ-конечная 4, 719
- Лебега 2, 93, 3, 213, 640
- Лебега — Стилтьеса 3, 641
- неатомическая 3, 904
- некомпактности 3, 977
-, носитель 3, 1081
- обобщенная 2, 444
- общая 5, 73
- Планшереля 5, 512
- погрешности 4, 604
- полная 4, 417
- представляющая 2, 966
- приближения функций 4, 628
-, проективная система распределений 5, 72
- равновесная 2, 405, 4, 1046, 1047
- Радона 4, 809
- регулярная 4, 934, 938
- Рисса 4, 1039; 5, 263
- сложности машин 1, 213
- совершенная 5, 66
-, согласованности 1, 882
- спектральная 3, 496, 5, 103, 124
-, спектральный тип 5, 134
- стационарная 5, 208
- Тамагавы 5, 319
- точности 4, 183
- трансцендентности 2, 165, 5, 427
- тривектора 5, 435
- Фавара 5, 585
- Фейнмана 5, 602, 603
- финитная 3, 1081
- Хаара 5, 741
- Хаусдорфа 5, 777
- цилиндрическая 4, 580, 5, 778, 818
- элементарная 2, 571
-, энергия 5, 1002

α-мера Хаусдорфа 5, 778
Мергеляна теорема об аппроксимации функций комплексного переменного 3, 646
Меридиан 1, 767, 4, 949, 5, 291
- тора 5, 405
Мероморфная матрица 1, 251
Мероморфная функция 1, 265; 3, 647—650
- -, дефектное значение 2, 100
- -, Иенсена формула 2, 488
- -, Миттаг-Леффлера теорема 1, 265; 3, 705
- -, нормальное семейство 3, 1069
- -, Пуассона — Иенсена формула 2, 488
- -, росток 4, 1054
- -, Шварца — Иенсена формула 2, 488

Мероморфное отображение 3, 650
Мероморфности точка 4, 117; 5, 282
Мероморфный дифференциал 2, 239
Мероопределение проективное 4, 675
Мерсенна число 3, 651
Мерсера теорема об интегральном операторе 3, 651
Мертвая зона 3, 756
Мертенса теорема об умножении рядов 4, 1066
Меры потенциал 4, 529
n-местное отношение 4, 151
Местность операции 4, 18
n-местный предикат 4, 151
n-местный функтор 3, 741, 5, 685
Место 4, 280
Метабелева алгебра 3, 241
Метабелева группа 3, 652
Метагармоническая функция 4, 403
Металогика 3, 652
Метаматематика 3, 571, 652
Метаматеатория 3, 653
Метанильпотентная группа 4, 408
Метатеорема 3, 652
Метатеория 3, 652
Метациклическая группа 3, 653
Метаязык 3, 653
Метеорологии математические задачи 3, 654—656
Метка 1, 224
- в математической логике 4, 1182
Метод—см. соответствующее название
Методическая ошибка 3, 880
Метризационная теорема Урысона 5, 546
Метризуемая структура 4, 795
Метризуемое пространство 3, 656—658
- - близости 1, 501
- -, Крейна — Шмульяна теорема 2, 44
- - топологическое 5, 389
- - - векторное 5, 379

Метрика 3, 658
- Бергмана 1, 413, 3, 1172
- биинвариантная 5, 625
- внутренняя 1, 738, 790
- выпуклая 1, 787, 789, 790
- Гильберта 1, 965
- гиперболическая 1, 988, 989
- естественная 2, 57
- инвариантная 2, 529; 5, 374
- индефинитная 2, 555
- Керра 2, 849; 5, 890
- конформно-инвариантная 2, 1098
- Крускала 5, 890
- Кэлера 3, 155
- кэлерова 3, 155
- Леви 3, 220
- Леви — Прохорова 3, 224
- левоинвариантная 5, 625
- Минковского 3, 700
- многогранная 3, 708
- относительная 4, 144
- правоинвариантная 5, 625
- проективная 4, 667
- риманова 2, 1089, 4, 1013
- сферическая 4, 910
- финслерова 5, 624
- Фубини — Штуди 5, 675
- Хаусдорфа 3, 674
- хаусдорфова 5, 779
- Ходжа 3, 155, 5, 788
- хордальная 4, 910
- Шварцшильда 5, 889
- экстремальная 5, 959
- эрмитова 5, 1019

G-метрика 1, 985, 4, 717
J-метрика 1, 985
Q-метрика 2, 786
Метрическая мера внешняя 1, 734
- непрерывность 3, 994
- неразложимость 3, 667
- плотность 3, 460

Метрическая проекция 3, 659
- прямая 4, 667

Метрическая размерность 3, 659
Метрическая связность 3, 660
- секунда 4, 1108
- теория алгоритмов 1, 228
- - булевых функций 1, 556

Метрическая теория динамических систем 3, 660, 5, 1010
- - диофантовых приближений 2, 171
- - поверхностей 4, 338
Метрическая теория функций 3, 660—662
Метрическая теория чисел 3, 662—666
- топологическая полугруппа 5, 374
Метрическая транзитивность 3, 666
- форма 3, 668, 4, 234
- функция финслерова 5, 621
- энтропия 5, 1006
Метрически правильный многоугольник 3, 750
- равные операторы 2, 505
- транзитивный стационарный случайный процесс 5, 211
- эквивалентные гильбертовы пространства с индефинитной метрикой 1, 986
Метрический автоморфизм 3, 668
- - модуля 1, 482
- алгоритм 2, 1051
- гомоморфизм 3, 667
Метрический изоморфизм 3, 667
- порядок 3, 659
Метрический тензор 3, 668; 4, 235, 1003. 5, 328
- - основной 4, 1013
- - финслеров 5, 622
- тип 3, 668
- эндоморфизм 3, 668
Метрическое пространство 3, 658, 669—675
- - выпуклых множеств 1, 803
- -, движение 5, 625
- -, истинный цикл 2, 681
- - конструктивное 2, 1051
- - полное 4, 423
- -, симметрия 5, 625
Механики законы Ньютона 3, 1091
Механических квадратур метод 3, 675
Мешающий параметр 3, 676
Мешок вокруг компакта 1, 1060
Микроканонический ансамбль 5, 200
- - Гиббса статистический 1, 958; 5, 179
Микроканоническое распределение 5, 200
- - Гиббса 1, 956
Микроподход в теории автоматов 1, 50, 55, 75
Микрорасслоение 3, 676
Мили автомат 1, 53
Милна метод 3, 676
Милна проблема 3, 677—679
- уравнение 3, 677
Милнора геометрическая реализация симплициального множества 4, 1163
- группа 1, 162
- конструкция 1, 1016, 2, 865
- многообразие 2, 380
Милнора сфера 2, 380, 3, 679
- теорема о характеристических классах 5, 764
- форма 5, 489
- число 4, 119, 129
Милнора — Хирцебруха задача 5, 867
Минимакс 2, 678, 3, 680
Минимакса принцип 3, 680
Минимаксная оценка 3, 681; 5, 195
- фильтрация 4, 46
Минимаксное решающее правило 2, 214, 5, 192
Минимаксное свойство собственных значений 3, 681
Минимаксность статистической процедуры 3, 682
Минимальная дизъюнктивная нормальная форма 1, 127
- дилатация 4, 1127
- динамическая система 3, 691
Минимальная достаточная статистика 2, 376, 3, 683
Минимальная модель 3, 683
- - алгебраической поверхности 1, 152
- нить 4, 686
Минимальная нормальная подгруппа 3, 684
Минимальная поверхность 2, 253, 3, 684—690
- - аффинная 1, 355
- -, Бернштейна проблема 4, 306
- -, Бернштейна теорема 1, 430
- -, Бьерлинга задача 1, 567
- -, Вейерштрасса критерий 1, 615
- -, ветвления точка 1, 680
Минимальная простая группа 3, 690
- устойчивость 5, 563
- функция 4, 1125
Минимального типа целая функция 5, 798
Минимальное исчисление высказываний 3, 691
- - предикатов 3, 692
- квазимногообразие 1, 184
- логическое исчисление 3, 418
- многообразие 1, 186
Минимальное множество 2, 767; 3, 690
- покрытие 1, 560
- поле 1, 64
Минимальное пропозициональное исчисление 3, 691
Минимальное свойство 3, 691
- - частных сумм рядов Фурье 5, 733
- симплициальное множество 4, 1166
Минимальное функциональное исчисление 3, 692
Минимальной стоимости поток 4, 540
Минимальности критерий Сегре 3, 142
Минимальный автомат 1, 69
- геликоид 1, 913
- дифференциальный оператор 5, 108
Минимальный идеал 3, 692
- многочлен 3, 617
- - алгебры 2, 212
- период 4, 269
- разрез 4, 540
- тест 3, 861; 5, 344
Минимальный центр притяжения 5, 802
- элемент 5, 834
Минимальных итераций метод 3, 693
Минимальных невязок метод 3, 694
Минимизации задача 3, 716
- оператор 3, 875; 4, 960
- - ограниченный 4, 637
Минимизация автоматов 1, 69
- булевых функций 1, 558
Минимизация вычислительной работы 3, 695—699
Минимизация площади 3, 699
- функций 3, 489
- - алгебры логики 1, 127
Минимизирующая последовательность 1, 303, 3, 489, 699
Минимум 3, 700
- абсолютный 3, 494; 4, 1132
- лучевой функции 1, 945
- сильный относительный 4, 1132
- слабый относительный 4, 1132, 1207
- функции 3, 494
Минимума потенциал для гармонических пространств 1, 890
- точка 3, 494
Миниэдральный конус 4, 434,470
Минковского геометрия 3, 700, 4, 668
Минковского гипотеза 1, 949, 3, 700
- единица 5, 480
- метрика 3, 700
- неоднородная проблема 1, 949
Минковского неравенство 1, 946, 3, 700, 5, 50
- область приведения 2, 788
Минковского проблема 3, 701
Минковского пространство 3, 702; 4, 148, 5, 621
- пространство-время 4, 719
- сигнатура 5, 480
- сумма 4, 1212
- - многогранников 4, 783
Минковского теорема о выпуклом теле 1, 944, 946, 947, 3, 703
- - о выпуклых многогранниках 1, 802
- - о критическом идеале 3, 114
- - о линейных неравенствах 3, 703
- - о формах 1, 946
- формула 2, 780
Минковского — Фаркаша теорема о линейных неравенствах 3, 346
Минковского — Хассе теорема о диофантовых уравнениях 2, 170
- - - о квадратичных формах 2, 778
Минор 3, 703, 4, 371
Миноранта 3, 476, 704
Минорантная многошаговая игра 2, 331
- функция 3, 476
Минского машина 3, 627
Минута 3, 704
Мировая линия 3, 703, 704, 4, 149
- точка 3, 703, 4, 149
Мировая функция 3, 704
Миттаг-Леффлера звезда 2, 445, 3, 705
Миттаг-Леффлера метод суммирования 3, 705
- разложение 2, 446, 3, 706
Миттаг-Леффлера теорема 3, 705—707
- - о мероморфных функциях 1, 265; 3, 648
Миттаг-Леффлера функция 3, 707, 5, 160
Митчелла теорема об абелевых категориях 1, 20
Михайлова критерий 3, 707
Мищенко ряд 5, 866
Мнимая единица 2, 1007, 3, 708
- коническая поверхность 2, 1033
- линия второго порядка 3, 387
- ось 2, 1008
- - гиперболы 1, 988
- часть комплексного числа 2, 1007
Мнимое квадратичное поле 2, 783
Мнимое число 2, 1007, 3, 708
Мнимоединичный вектор в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
Мнимые прямые параллельные 3, 388
- - пересекающиеся 3, 388
Мнимый эллипс 3, 387; 5, 978
- эллипсоид 5, 978
- эллиптический цилиндр 5, 994
Многих масштабов метод 3, 501
- тел задача 2, 870
Многовариантный перевод 1, 59
Многовершинное распределение 3, 839
Многогранная метрика 3, 708
Многогранник 3, 708—711
- абстрактный 5, 902
- выпуклый 1, 801, 4, 410
-, грань 1, 1104
-, Коши теорема 3, 62
- полуправильный 4, 463
- правильный 4, 552
-, равновеликость 4, 783
-, равносоставленность 4, 783
-, ребро 4, 925
Многогранника группа 3, 711
Многогранный угол 3, 712
Многогрупповое приближение 3, 712
Многозначная логика 3, 713—720
Многозначная функция 3, 720
- - аналитическая 1, 266
Многозначного характера особая точка 4, 115
Многозначное дифференциальное уравнение 2, 268
Многозначное отображение 3, 720, 4, 154
Многозначное представление 3, 721
Многозначной логики функции 3, 721
Многозначный оператор 4, 19
Многоиндексная транспортная задача 5, 420
Многократная рекурсия 3, 721
Многокритериальная задача 2, 677; 3, 722
Многоленточная машина Тьюринга 5, 457
Многолистная область 3, 723
Многолистная функция 3, 723—728
Многомерная вариационная задача 3, 728
Многомерная геометрия 3, 729—731
- задача Плато 4, 303
- сетевая модель 4, 1120
- ткань 5, 357
Многомерное нормальное распределение 3, 1066
Многомерное распределение 3, 731
- - дробных долей 4, 875
Многомерные задачи вариационного исчисления 1, 593
Многомерный диффузионный процесс 2, 362
- параллелепипед 1, 325
- признак 3, 732
- сингулярный интегральный оператор 2, 605
- случайный процесс 5, 23
Многомерный статистический анализ 3, 732—738
- тор 5, 405
Многомерный узел 3, 738—740
Многоместная операция 4, 18
Многоместный функтор 3, 740
Многообразие 3, 742—748
- абелево 1, 24, 143, 2, 1012
- алгебр 1, 121
- алгебр Ли 3, 241
- алгебраических систем 1, 185
- алгебраическое 1, 188, 5, 299
- Альбанезе 1, 236
- аналитическое 1, 278
- асимметричное 1, 331
- аффинное 1, 360
- - алгебраическое 1, 360
- банахово 2, 357
- - аналитическое 1, 385
- бернсайдово 1, 1137
-, бордантность 1, 533
- Брауэра — Севери 1, 546
- бушующее 1, 566
-, векторное поле 1, 641
- Веронезе 1, 655
-, ветвления точка 2, 55
-, внутренняя гомологичность 1, 533
- вполне геодезическое 1, 758,931
- геодезическое 1, 931
- геометрически неприводимое 3, 996
-, геометрический род 2, 266
- гильбертово 2, 357
- голоморфно полное 5, 899
- гомологическое 1, 1058
- Грассмана 1, 1104
- Гриффитса 4, 154
- групп 1, 1136
- - конечно базируемое 1, 1137
- - кроссово 1, 1137
- - лиевского типа 1, 1137
- - почти кроссово 1, 1137
- двумерное 2, 51
-, Дена лемма 2, 90
- детерминантное 2, 99
-, дифференциальная геометрия 2, 254
- дифференцируемое 2, 354
- древовидное 2, 379
- жесткое 2, 103
- замкнутое 2, 435, 3, 87
- Зейферта 2, 451
- инвариантное 2, 145, 533
- интегральное 2, 584, 4, 773
-, иррегулярное 2, 668
-, иррегулярность 1, 236
-, канонический класс 2, 266
-, канонический разрез 2, 54
- канторово 2, 716

Многообразие категорий **3**, 747
- Кервера 2, 380, 848
- когомологическое **1**, 1059, **2**, 926
- колец 2, 950
- комбинаторное **3**, 154
-, комплексификация **2**, 70
- комплексное **1**, 273, 278; **2**, 355, 1007
- - аналитическое **2**, 1007
- конечного индекса **4**, 440
- контактное **2**, 1063, **3**, 232
- конфигурационное **1**, 928
-, конформная структура 2, 1089
-, край **2**, 51
- Кросса **3**, 241
- Куги **3**, 786
- кэлерово **3**, 156
- - кватернионное **2**, 839
- лагранжево **3**, 181
- лежандрово **3**, 232
- линейное **1**, 362, **3**, 345, 358
- Милнора **2**, 380
- минимальное **1**, 186
- неориентируемое **3**, 968
- неприводимое **3**, 996
- несглаживаемое **3**, 1010
- нефокальное **5**, 612
- обобщенное **1**, 1058
- одномерное **3**, 1170
-, ориентация **4**, 70
-, ориентированная бордантность **1**, 533
- ориентируемое **4**, 70
- оснащенное **4**, 107; **5**, 284
- открытое **4**, 141
- параллелизуемое **4**, 205
- Пикара **4**, 283
-, погружение **4**, 358
- погруженное **4**, 358
- полугрупп **4**, 440
- проективное **4**, 674
- - алгебраическое **1**, 360
-, разложение на ручки **4**, 1059
- разрешимое **4**, 851, **5**, 73
-, ранг **5**, 613
- рациональное **3**, 466; **4**, 910
- регулярное **2**, 668
- риманово **4**, 1022
- Рохлина **2**, 380
- с краем **3**, 87
- с рациональными особенностями **4**, 118
-, связности число **2**, 54
- Сегре **4**, 1101
- сепаратрисное **4**, 1116
-, сечение **2**, 54
-, сигнатура **4**, 1128; **5**, 860
- симплектическое **4**, 1156
-, слоение **4**, 1210
- спектральное **5**, 114
- специальное **2**, 839
- топологическое **2**, 355
- тороидальное **2**, 584
- трехмерное **5**, 432
- универсальных алгебр **5**, 501
- унилинейчатое **5**, 787
- унирациональное **3**, 466; **5**, 506
- Фано **5**, 596
- фигур **5**, 612
- финслерово **5**, 624
- флаговое **5**, 628
- фокальное **5**, 612
- формальное **3**, 154
-- характеристическое **5**, 753, 766
- Ходжа **3**, 156; **5**, 788
- Цассенхауза **4**, 584
- четырехмерное **5**, 860
- Чжоу **5**, 863
- Штейна **5**, 899
- Штифеля **5**, 903
- Шуберта **1**, 1104, **5**, 918
- эрмитово **5**, 1020
- языков **5**, 644
- Якоби **5**, 1046
C^k-многообразие **2**, 355
pl-многообразие **3**, 154; **4**, 411
(B, φ)-многообразие **5**, 253
Многообразий топология **5**, 402
Многосвязная область **3**, 748, 1098
- риманова поверхность **4**, 1018
Многоскоростные уравнения **4**, 248
Многосортный язык **5**, 637
Многосторонний канал **2**, 702
Многосторонник **3**, 751
Многоточечная задача Валле Пуссена **1**, 573
Многоугольная фигура **3**, 749
Многоугольник **3**, 749—752
- вписанный **1**, 757
- выпуклый **1**, 802
- Ньютона **3**, 1090
- описанный **1**, 758
- правильный **4**, 553
-, равнодополняемость **4**, 782
-, равносоставленность **4**, 783
Многоугольное число **1**, 324, **3**, 752
Многоугольный путь **3**, 750
Многочлен **3**, 752—755; **5**, 797
- абсолютно неприводимый **3**, 997
- алгебраический **5**, 797
- Александера **1**, 232, **5**, 488
- Аппеля **1**, 299
-, Виета теорема о корнях **1**, 693
-, Галуа группа **1**, 845
- гармонический **1**, 886
-, Горнера схема **1**, 1078
- Гурвица **4**, 914
-, Декарта теорема **2**, 78
- деления круга **2**, 81
-, дискриминант **2**, 209
- знакопеременный **4**, 1145
-, индекс **4**, 1114
-, кольцо **4**, 309
- Конвея **5**, 489
-, корень **1**, 192
- кососимметрический **4**, 1145
- круговой **2**, 81
- минимальный **3**, 617
- наилучшего приближения **3**, 868
-, наименее уклоняющийся от нуля **3**, 874
- Неймана **3**, 925
- неприводимый **3**, 997
-, поле разложения **1**, 192; **4**, 398
- примитивный **4**, 638
-, производная **2**, 210
- Пуассона — Шарлье **5**, 882
- размерностный **4**, 825
-, редуцированная степень **4**, 1114
- результант **4**, 952
- сепарабельный **4**, 1114
- симметрический **4**, 1145
-, содержание **4**, 638
- Тейлора **5**, 322
- устойчивый **4**, 914
- характеристический **3**, 616, 1053; **5**, 764
Многочленов кольцо **3**, 755
Многочлены Бернулли **1**, 423
- Бернштейна **1**, 429
- Бибербаха **1**, 467
- Гегенбауэра **1**, 908; **2**, 869; **5**, 494
- Гильберта **1**, 967
- Кравчука **3**, 74
- Лагерра **2**, 869
- Лежандра **2**, 869
- ортогональные **4**, 92
- - в комплексной области **4**, 97
- сферические (Лежандра) **3**, 228
- ультрасферические **2**, 869; **5**, 494
- Фабера **5**, 583
- Чебышева **2**, 869, **5**, 840, 843
- Чебышева — Эрмита **5**, 1016
- Шарлье **5**, 882
- Эйлера **5**, 927
- Эрмита **2**, 869; **5**, 1016
- Якоби **2**, 869; **5**, 1048
Многошаговость **2**, 154
Многоэкстремальная задача **3**, 756—758
Многоэлементная кибернетическая система **2**, 851
Множеств алгебра **1**, 129
Множеств категория **3**, 758
Множеств теория **3**, 758—760
- - аксиоматическая **1**, 104
- - алгоритмическая **1**, 222
- - дескриптивная **2**, 93
- - рекурсивная **4**, 957
Множественная регрессия **4**, 931
Множественное сравнение **3**, 760
Множественный коэффициент корреляции **3**, 761
Множество **3**, 762
- абсолютно выпуклое **1**, 799, **4**, 1010
-, аксиоматическая теория **1**, 104
-, σ-алгебра **1**, 130
- алгебраическое **2**, 671
- аналитическое **1**, 279, **2**, 93; **3**, 455, 762
- K-аналитическое **2**, 406
-, аннулятор **1**, 644
- аппроксимативно компактное **1**, 304
- асимптотическое **4**, 565
-, атлас **2**, 730
-, базис **1**, 372
- базисное **1**, 378
- банахово аналитическое **1**, 385
- бесконечного типа **1**, 945
- бипорядоченное **4**, 935
- бифуркационное **5**, 361
- блуждающее **1**, 507
- борелевское **1**, 130, 536, **2**, 93
- Бэра **1**, 568
-, Бэра свойство **1**, 568
- бюджетное **3**, 587
-, вариация **1**, 604
-, верхняя граница **1**, 673
-, внутренность **1**, 737
- вполне неприводимое **1**, 760
- вполне ограниченное **1**, 760
- вполне порождающее **1**, 552
- вполне приводимое **1**, 761
- вполне упорядоченное **1**, 763
- всюду плотное **1**, 769
-, выпуклая оболочка **1**, 788
- выпуклое **1**, 644, 796, 799
- - по Робинсону **5**, 781
- гиперболическое **1**, 998
- гипериммунное **2**, 523; **4**, 724
- гиперпростое **2**, 523
- главное открытое **5**, 102
-, диаметр **2**, 127
- дизъюнктное **4**, 471
-, дизъюнктное семейство **2**, 135
- диофантово **2**, 161
-, дискретное семейство **2**, 207
-, дифференциальная размерность **2**, 243
-, дифференциальный тип **2**, 243
- доверительное **2**, 365, 366, 615, **5**, 198
-, дополнение **2**, 373
- допустимое **5**, 638
- единственности **2**, 401
-, емкость **2**, 403
- закругленное **5**, 378
- замкнутое **2**, 435; **4**, 563
-, замыкание **2**, 438, **4**, 634, **5**, 389
- звездное **2**, 446
- значений отображения **4**, 152
- - функции **3**, 1099
-, измельчающееся семейство **2**, 496
- измеримое **2**, 498; **3**, 638
- - по Жордану **2**, 420
- - по Лебегу **3**, 640
- C-измеримое **2**, 406
- иммунное **2**, 523
- инвариантное **2**, 532, 767
- индексное **3**, 1087
- информационное **1**, 207; **2**, 656; **4**, 386
- истинностных моделей **1**, 555
- каноническое замкнутое **2**, 713
- - открытое **2**, 713
- Кантора **2**, 718
- канторово **2**, 717
-, кардинал **2**, 723
- Карлесона **2**, 727
-, карта **2**, 729
- катастроф **5**, 362
-, категория **2**, 764
- квадрируемое **3**, 92
- компактное **2**, 992
- конечного типа **1**, 945
- конечное по Дедекинду **2**, 505
- конструктивное **2**, 671, 1053
- конструктивное по Гёделю **2**, 1053
- креативное **3**, 94, **4**, 663, 957
- критическое **3**, 113
- Кронекера **1**, 884
- кубируемое **3**, 92
- Лебега **2**, 93; **3**, 214, 217
-, линейная оболочка **1**, 643
- линейно независимое **1**, 643
- линейно упорядоченное **3**, 322
- локально выпуклое **1**, 799
- Лузина **3**, 455
- массивное **3**, 537
-, мера **3**, 636
- минимальное **2**, 767; **3**, 690
- моногенности **3**, 805
- мультипликативное **3**, 422
- направленное **3**, 890
- несдинственности **2**, 401
- независимое **1**, 552, 884
- неизмеримое **3**, 919
- неопределенности **3**, 649, 651
-, непрерывная сумма элементов **1**, 376
- непрерывное **3**, 986
- непротиворечивое **1**, 910
- неразличимых элементов **5**, 165
- несчетное **3**, 1020
- нигде не плотное **3**, 1036
-, нижняя граница **1**, 673
- номерное **3**, 1087
- нулевое **3**, 639
- нулевой гармонической меры **1**, 873
- - - абсолютной **1**, 873
- нумерованное **3**, 1086
- общерекурсивное **4**, 852
-, объединение **3**, 1148
-, объем **3**, 1149
- ограниченно компактное **3**, 1159
- ограниченное **3**, 1161
-, определимое в модели **2**, 1053
-, ортогональное дополнение **1**, 644
- ортонормированное **1**, 980
- - полное **1**, 980
- остаточное **2**, 764
- открытое **4**, 141
- открыто-замкнутое **4**, 143
- относительно бикомпактное **4**, 145
- - открытое (замкнутое) **4**, 145
-, отношение зависимости **1**, 373
-, параметризация **2**, 729
- партнеров **5**, 562
- Пенлеве **4**, 233
-, пересечение **4**, 253
- перечислимое **1**, 227; **4**, 265
- пика **1**, 133
- планов **3**, 602
- плоское **1**, 643
- плотное **1**, 769; **4**, 319; **5**, 280
-, плотность **4**, 324
- поглощающее **1**, 544, **5**, 378
-, поглощение **5**, 378
-, подобие **4**, 377
- показательно-диофантово **2**, 174
- покрываемое **4**, 395
- покрывающее **4**, 395
-, покрытие **1**, 559, **4**, 392
- полное **4**, 423; **5**, 378
- полусимплициальное **4**, 1161
- полярное **4**, 478
-, поперечник **4**, 492
-, пополнение **4**, 422
- пористое **4**, 497, 569
-, порция **4**, 497
-, предельная точка **4**, 563
- предельное **4**, 565
-, предпучок **4**, 581; **5**, 1024
- приближающее **4**, 603
- продуктивное **4**, 662
- проективное **2**, 94; **3**, 455; **4**, 677
- - алгебраическое **4**, 674
-, произведение **5**, 713
- производное **4**, 563, 690
- простое **4**, 705
- пустое **4**, 765
-, пучок **5**, 366
-, равномощность **2**, 723
- раздела **4**, 848
- разностное **4**, 837
-, разность **4**, 847
- разреженное **4**, 848
- разреза **4**, 848
- разрешимое **1**, 227; **4**, 532, 852
- разрешимости **4**, 220
- разрывности группы **2**, 875
-, ранг **1**, 373, **2**, 969
- резидуальное **2**, 764
- резольвентное **4**, 449, 951, **5**, 99

- рекурсивно перечислимое 3, 1003, 4, 957
- рекурсивное 4, 852, 957
- свободное 4, 1086
- связное 4, 1092
- Сидона 1, 885
-, симметрическая разность 4, 1144
- симплициальное 4, 1161
- слабо блуждающее 4, 1206
- слабо выпуклое 1, 799
-, сложение 4, 1212
- совершенное 5, 68
- сопряженное 1, 644, 5, 91
- состояний 1, 53
- - канала 2, 704
- спектрального синтеза 5, 119
- спектральное 5, 119
-, стабилизатор 4, 383
- стационарное 5, 279
- суслинское 2, 93; 3, 455
- сходимости 5, 218
- счетное 3, 837
- творческое 3, 94

Множество типа F_σ (G_δ) 3, 762
- тонкое 5, 365
- топологически свободное 4, 1086
- тотальное 4, 424, 5, 408
- транзитивное 1, 783
- универсальное 5, 500
-, униформизация 5, 514
- упорядоченное 5, 527
- уравновешенное 1, 544, 5, 378
- уровня 5, 545
- устранимое 5, 582
-, фиксатор 4, 383
-, функциональная отделимость 5, 391
- Хельсона 1, 884
- цилиндрическое 4, 580, 5, 818, 825
- частично упорядоченное 5, 833
- чебышевское 5, 850
- эргодическое 5, 1013
-, ядро 1, 567; 5, 1044

A-множество 2, 93; 3, 455, 762; 4, 1194
-, накрытие 2, 95
A_n-множество 4, 677
B-множество 1, 535, 536
-, расщепление 2, 95
CA-множество 2, 94; 3, 763
CA_n-множество 4, 677
F_σ-множество 3, 762
G_δ-множество 3, 762
-, Александрова — Хаусдорфа теорема 2, 96
M-множество 5, 441
n-множество 2, 974
U-множество 2, 401, 5, 441
$\varkappa a$-множество 2, 713
$\varkappa o$-множество 2, 713
π-множество 2, 713; 3, 1065
Множимое 5, 496
Множителей правило 3, 177
Множители Лагранжа 3, 172
- суммируемости 5, 275
Множитель 5, 496
- Бляшке 1, 508
- дробно-линейного отображения 2, 386
- интегрирующий 2, 612
- понижающий 5, 442
- разрывный 4, 854
Мода 3, 763
Модальная логика 3, 763—765
Модальное высказывание 3, 763
Модальность 3, 765
- точки 4, 130
Модальный оператор 3, 764
Моделей теория 3, 766—769
- - неклассическая 3, 928
Моделирование математическое 3, 574
- статистическое 5, 193
Модель 3, 769; см также соответствующее название
Модель вычислительная 3, 770
Модель математическая 3, 574, 770
Модельно полная элементарная теория 5, 973
Модификация аналитического пространства 3, 770
Модифицированная функция Струве 5, 248
- цилиндрическая функция 1, 461, 3, 476; 5, 821
Модифицированный метод Ньютона 3, 1092
Модулей категория 3, 770
Модулей проблема 3, 771
- - для алгебраических поверхностей 1, 153
- римановых поверхностей проблема 4, 1019, 1031
Модулей теория 3, 772—775
Модули римановой поверхности 3, 775
- скрещенные 4, 1205
Модуль 3, 772, 776, 777—782
Модуль автомор изма 3, 782
- Александера 5, 488
- альтерниона 1, 240
- артинов 1, 327
-, базис 1, 374
- банахов 1, 381
Модуль без кручения 3, 783
- - - в смысле Басса 5, 88
- ведущий 2, 192
- вектора 1, 632
- - в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
- Верма 4, 584
- весовой 1, 673
- вполне приводимый 1, 762
- гладкости 1, 1022
-, глубина 1, 1026
- гомологий Александрова — Чеха 1, 234
- градуированный 1, 1084
- группы 5, 741
- двойной 1, 485, 2, 28
- двойственный 5, 88
- действительного числа 1, 34
-, дискриминант 2, 211
- дифференциалов 2, 241
-, дифференциальный оператор 2, 348
- дифференциальных форм 2, 242
- дополнительный 5, 990
- дуальный 5, 88
- Дьедонне 2, 393
- зацепления Александера 1, 232
-, инвариантное множество 1, 1020
-, инъективная размерность 1, 1053
- инъективности 2, 663
- ω-инъективный 5, 880
- квадратичный 2, 777
- квазиинъективный 2, 664
- когомологически тривиальный 2, 918
- коиндуцированный 2, 917
Модуль кольца 3, 783
- комплексного числа 1, 34; 2, 1008
- Косна — Маколея 3, 69
- келеровых дифференциалов 2, 241
- Ласкера 3, 206
- лежандров 5, 990
- линейно компактный 3, 318, 320
- малоинъективный 2, 664
-, метрический автоморфизм 1, 482
- накрытий Александера 1, 232
- непрерывности 3, 990, 4, 616
- неприводимый 3, 998
- нётеров 3, 1025
-, носитель 3, 1081
- обратимый 3, 1130
- основной 2, 192
- перехода 3, 405
- периодичности эллиптического интеграла 5, 989
- периодов 2, 50
- - абелевой функции 1, 22
- плоский 4, 317
- полупростой 4, 465
- полуцепной 4, 473
-, предпучок 4, 581
- представления 4, 595
-, проективная резольвента 1, 1050
- проективный 4, 682
- простой 3, 998
- псевдоинъективный 2, 664
-, ранг 4, 861
-, расширение 4, 903
-, резольвента 4, 950
- сбалансированный 4, 1075
-, свободное семейство элементов 1, 374
- свободный 4, 1087
Модуль семейства кривых 3, 783; 5, 959
- сизигии 1, 973
-, p-я симметрическая степень 4, 1140
- сопряженный 5, 88
- сравнения 5, 151
- Тейта 1, 99, 5, 324, 325
- тета-функции 5, 348
- топологический 5, 377
- трохоиды 5, 448
- унитарный 5, 514
- фильтрованный 5, 616
- цепной 5, 815
- циклический 5, 816
-, цоколь 5, 828
- числа 1, 41
- элемента 5, 255
-, элементарный делитель 1, 1020
Модуль эллиптического интеграла 3, 783; 5, 990
- эллиптической функции 5, 1056
G-модуль рациональный 4, 920
- топологический 5, 151
Модуля поверхность 1, 276
- проблема 5, 959
Модулярная группа 3, 784, 788
- - Клейна 2, 195; 5, 680
Модулярная кривая 3, 785
- пара 4, 456
Модулярная решетка 2, 63; 3, 786; 4, 456
- структура 2, 63; 3, 786
Модулярная форма 3, 786—788
Модулярная функция 3, 788—790
Модулярное представление 2, 1021
- пространство 5, 406
Модулярности отношение 4, 456
Модулярный закон 2, 63
Модулярный идеал 3, 790
- угол 3, 783
Модус поненс 3, 790
Мозаичная структура 1, 50
Момент 3, 791
- винта 1, 706
- выборочный 1, 776; 5, 998
- дипольный 3, 843
- квадрупольный 3, 843
- марковский 3, 522; 4, 508
- мультипольный 3, 843
- случайной величины абсолютный 1, 42
- тактовый 1, 52
-, Шеппарда поправки 5, 892
Моментальная теория оболочек 3, 1128
Моментов метод 3, 792, 793
- - Галеркина 1, 842
- неравенство 2, 382
Моментов проблема 3, 793—799
Монада 5, 167, 447
Монадическая операция 4, 18
Монжа конус 2, 325; 3, 799
- кривая 2, 325, 3, 799
- ось 2, 326; 3, 799
Монжа уравнение 3, 800
- формулы для минимальных поверхностей 3, 685
Монжа — Ампера уравнение 3, 800—802
Монитор 4, 649
Моногенная полугруппа 3, 802
Моногенная функция 3, 67, 802—805
Моногенности множество 3, 805
Моногенность 5, 691
Монодромии группа 1, 176; 3, 806
Монодромии матрица 1, 863, 3, 312, 806
Монодромии оператор 2, 773; 3, 60, 806, 4, 131
Монодромии преобразование 3, 806—809
Монодромии теорема 3, 809
Монодромия накрытия 3, 888
- семейства 3, 807
Монодромная производная 5, 691
Монодромная функция 3, 809
Моноид 3, 809; 4, 441
-, внутренний автоморфизм 1, 736
-, группа когомологий 2, 909
- свободный 4, 1083
Моноидальная категория 3, 810
Моноидальное преобразование 3, 810
Мономиальная группа 2, 560; 3, 812
Мономиальная группа подстановок 3, 811
Мономиальная матрица 3, 811
- подстановка 3, 811
Мономиальное представление 3, 811
Мономорфизм 1, 471; 3, 370
Мономорфизм в категории 3, 812
- векторных расслоений 1, 646
- нормальный 3, 1074
Монополе 5, 75
Моносплайн 3, 812
Монотетическая полугруппа 5, 373
Монотонная булева функция 1, 557, 3, 812
- непрерывность нормы 2, 1076
Монотонная последовательность 3, 813
Монотонная функция 3, 813
- - алгебры логики 1, 127
- - k-значной логики 3, 813
Монотонно эквивалентные автоморфизмы 5, 1011
- - потоки 5, 1011
Монотонное отображение 2, 519; 3, 814; 4, 156, 1097
Монотонный оператор 3, 814, 960
Моноунарная алгебра 5, 496
Монте-Карло метод 3, 815—820
Монтеля принцип 3, 287
Монтеля пространство 3, 820
Монтеля теорема 3, 820
- - о нормальных семействах аналитических функций 3, 1069
Мопертюи принцип 3, 821
Мора — Маскерони построения 1, 933
де Моргана закон 3, 759
Морделла гипотеза в алгебраической геометрии 2, 159; 3, 822
Морделла — Вейля теорема о группе с конечным числом образующих 5, 981
- - - об абелевых многообразиях 1, 25
Мореры теорема в теории аналитических функций 1, 263; 3, 822
Мори теорема о кольцах 2, 871
Мориты теорема о паракомпактности 4, 394
Мориты эквивалентность 3, 823
Морли теорема в теории моделей 3, 768
Моро—Рокафеллара теорема для выпуклых функций 5, 265
Моровское пространство 3, 657; 4, 271
Морса индекс 3, 823
Морса лемма 3, 824
Морса неравенства 3, 825
Морса перестройка 3, 825—827
- теорема об индексе 3, 824
Морса теория 3, 827—830
Морса функция 3, 830
Морса — Смейла неравенства 3, 831
Морса — Смейла система динамическая 3, 830
Морфема 5, 255
Морфизм 5, 713
- аналитический 1, 281
- аффинный 1, 363
- биективный 1, 485
- бирациональный 1, 494
- гладкий 5, 300
- градуированных объектов 2, 1001
- граничный 1, 1053, 1057
- группы Ли 3, 255
-, единица 2, 761
- замены базы 2, 430, 431
- замкнутый 5, 65
Морфизм категории 2, 761; 3, 831
- -, ковдро 3, 74

- квазиаффинный 2, 800
- квазипроективный 2, 819
-, коконус 2, 1074
-, конус 2, 1074
- отделимый 4, 1113
- плоский 4, 318
- расслоений 4, 893
- связывающий 1, 1053, 1057
- сепарабельный 4, 1113
- системы Постникова 4, 515
-, слой 2, 430, 5, 299
- собственный 5, 65
- спектра 5, 102
- стягивающий 2, 1002
- схем 5, 299
- - гладкий 1, 1021
- - проективный 4, 673
-, универсальное свойство 5, 300
- функторный 5, 687
- цепных комплексов 2, 1001
-, Шевалле теорема 2, 1054
- этальный 5, 1025
-, ядерная пара 5, 1032
-, ядро 5, 1044
C^k-морфизм 2, 355
Мост 2, 335
Мостова теорема о многообразиях 4, 1010
Мостова — Карпелевича теорема для однородных пространств 3, 1178
Мотивов теория 3, 832
Мощности критерия функция 3, 833
- функция 5, 182, 186
Мощностная характеристика 3, 834—837
Мощностной метод 4, 1187
Мощность 3, 837
- алгебраической системы 1, 155
- источника 2, 681
- континуума 2, 1068, 3, 838
- множества, Кантора теорема 2, 714, 723
- по Кантору 2, 723
- покрытия 4, 393
Мощность статистического критерия 3, 838; 5, 186
- схемы из функциональных элементов 5, 303
- топологического пространства 3, 834
Муавра формула 2, 1010; 3, 838
Муавра — Лапласа теорема 1, 489; 3, 202, 838
Мультиалгебра 3, 839
Мультигильбертово пространство 5, 1036, 1041
Мультиграф 1, 1105; 3, 839
Мультимодальное распределение 3, 763, 839
Мультиномиальное распределение 4, 409
Мультиоператорная Ω-алгебра 3, 839
Мультиоператорная группа 3, 839
- -, оператор 2, 989
- Ω-группа 2, 981
Мультиоперация частичная 3, 839
Мультипликативная арифметическая функция 3, 840
- граница функции 1, 1042
Мультипликативная группа 3, 840
- групповая схема 1, 1147
- квадратичная форма 2, 778
Мультипликативная полугруппа 3, 840
- последовательность 5, 763
Мультипликативная решетка 3, 840
Мультипликативная система 3, 422, 841
- теория когомологий 3, 1122
Мультипликативное множество 3, 422
- нормирование 1, 41
Мультипликативный группоид кольца 2, 967
Мультипликативный интеграл 3, 841
- оператор замыкания 4, 727
- спектр пространств 5, 103
- функционал 5, 746
Мультипликатор 1, 863, 3, 312, 4, 269
Мультипликатор группы 3, 842
- Шура 2, 910, 5, 919
Мультипликаторный тип 1, 863
Мультипликаторы 3, 842
Мультипликационная теорема Адамара 1, 87
Мультипольный момент 3, 843
Мультиполя потенциал 3, 843
Мультирадиус 4, 405
Мультиструя 4, 127
Мультифунктор 3, 740
Мура автомат 1, 53, 72
Мура пространство 3, 844
- теорема об автоматах 1, 69, 78
Мура — Постникова система отображения 4, 516, 1167
Мурнагана — Накаямы правило 4, 589
Муфанг лупа 3, 844
- теорема о лупах 3, 461
- тождество 1, 239
Муфанг-лиева алгебра 3, 508
Мочина формула 5, 307
Мюнца теорема 3, 845
Мягкий пучок 3, 846

H

Набла-оператор 1, 854
Наблюдаемый по координатам объект управления 1, 62
Наблюдений обработка 3, 847
Наблюдения задача 4, 44
Набор коэффициентов Фурье 1, 981
- формул 4, 1104
Навье — Стокса уравнения 3, 848—852
Нагаты теорема об алгебраических многообразиях 4, 423
- - об идеалах 2, 871
Нагаты — Смирнова критерий для метризуемых пространств 3, 657, 673
Нагеля точка 3, 853
Нагруженное интегральное уравнение 3, 853
Надграфик функции 3, 853
Надежности теория 3, 854—858
Надежность 3, 854
Надежность и контроль управляющих систем 3, 858—862
Надкоммутативное многообразие полугрупп 4, 440
Надкритический ветвящийся процесс 1, 681, 684, 685, 687, 688
Наднильпотентное кручение 4, 807
Надполе 4, 398
Надстроечная категория 2, 47
Надстроечное последовательностью пространство 1, 1067
Надстройка 3, 862, 5, 102
-, гомоморфизм 1, 1067
- когомологическая 2, 921
-, Фрейденталя теорема 1, 1067
Надъязык 4, 641
Надя теорема об операторных группах 4, 22
Наиболее благоприятное распределение 3, 874
Наиболее мощный критерий 3, 862
Наибольшего гарантированного результата принцип 3, 863—865
- правдоподобия метод 4, 176
- - оценка 4, 551
Наибольший общий делитель 3, 865
- элемент 5, 834
Наивная теория множеств 3, 758
Наивысшая степень точности квадратурной формулы 2, 794
Наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула 3, 866
Наилучшая гармоническая мажоранта 1, 872
Наилучшая квадратурная формула 3, 867, 4, 35
- оценка 4, 174
Наилучшего приближения алгебраический многочлен 1, 179
Наилучшего приближения многочлен 3, 868
- - оператор 3, 659
- - функционал 3, 870
- - функция 4, 605
Наилучшего приближения элемент 3, 869, 870
Наилучшее полное приближение 3, 869
Наилучшее приближение в среднем 3, 872
- - класса функций 3, 871
Наилучшее приближение функции 3, 870—872
- - - интегральное, Маркова критерий 3, 513
- - цепными дробями 5, 814
- частное приближение 3, 869
Наилучший линейный метод 3, 872
- локальный алгоритм 1, 209
Наилучших приближений последовательность 3, 873
Наименее благоприятное распределение 3, 873
- - - априорное 5, 192
Наименее уклоняющийся от нуля многочлен 3, 874
Наименьшая гармоническая мажоранта 5, 263
Наименьшего действия принцип 1, 857
- - - в форме Лагранжа 3, 173
- - - классической механики 1, 603
- принуждения принцип 1, 900
- - - вариационный 1, 598
Наименьшего числа оператор 3, 875
Наименьшее общее кратное 3, 89, 876
Наименьшей кривизны принцип 1, 954
- - - вариационный 1, 599
Наименьший неотрицательный вычет 1, 814
- элемент 5, 834
Наименьших квадратов метод 3, 876—882
Наименьших реакций принцип 3, 882
- - - вариационный 1, 599
Наискорейшего спуска метод 3, 882
Найквиста диаграмма 3, 883
Найквиста критерий 3, 883
Наймарка теорема о спектральных функциях 5, 119
Наказания стратегия 2, 478
Накаямы лемма о модулях 3, 780
Наклон поля экстремалей 5, 955
Наклонная 3, 884
- производная 3, 37
Накопление погрешности 3, 884—887
Накопления точка 3, 887, 4, 1099
Накрывающая гомотопия 3, 887, 4, 1166
- изотопия 2, 519
Накрывающая поверхность 3, 888
Накрытие 3, 888
- аналитическое 1, 281
- A-множества 2, 95
- ориентирующее 4, 70
- универсальное 5, 500, 681
-, число листов 2, 55
Накрытия вероятность 2, 365
- матрица Александера 1, 232
- модуль Александера 1, 232
Наложение 4, 675
Наложения область 3, 889
- преобразование 3, 807
Направление 3, 889; 4, 1025
- асимптотическое 1, 337, 2, 252
- главное 1, 1015, 2, 252; 3, 97
- Дарбу 2, 16
- изотропное 4, 739
- исключительное 2, 769
- характеристическое 2, 325; 3, 326, 799
Направлений поле 2, 283, 576, 885; 3, 889
Направления сопряженные 2, 252, 5, 87
Направленное множество 3, 890
Направленность 3, 890
- Коши 5, 682
- псевдомногообразия 4, 741
Направляющая кривая 3, 380
- линия 2, 1033
- поверхность 4, 949
Направляющие косинусы 1, 634, 3, 799
Направляющих функционалов метод 3, 890
Напряжений тензор 3, 891
Напряженность вихревой трубки 1, 716
Нарост пространства 3, 892
- пунктиформный 4, 765
Наследственно неразложимый континуум 2, 884, 1068, 3, 892
- неразрешимая теория 5, 282
- несвязное пространство 2, 226, 4, 1096
- нормальное пространство 3, 1065
Наследственный класс 3, 639
- радикал 4, 806
Насыщения эффект 4, 611
Нат 5, 1005
Натуральная плотность 1, 333
- система 1, 1070, 4, 515
Натуральное уравнение кривой 2, 250, 3, 892
Натуральное число 2, 73; 3, 892
Натуральный логарифм 3, 405, 407
Натуральный параметр на кривой 3, 892
Натуральный репер 3, 892
Натуральный ряд 3, 893
- -, базис 1, 372
- фильтр 4, 561
Натягивающий базис 1, 378
«Начала» Евклида 3, 893—895
Начало координат 1, 358, 2, 80
Начальная задача 3, 895
- позиция 4, 386
- точка 2, 284; 3, 895
- фаза 4, 1085
Начальное значение 2, 284
- порядковое число 4, 502
Начально-краевая задача 5, 36
Начальные условия 3, 339, 604, 895
Начальный отрезок вполне упорядоченного множества 1, 763
- символ 1, 1092
Начальных условий носитель 3, 46
Начертательная геометрия 3, 895
Неабелев коцепной комплекс 3, 896
Неабелево числовое поле 3, 896
Неабелевы когомологии 3, 896—898
Неалгоритмический язык программирования 1, 223
Неархимедова геометрия 3, 898
- прямая 3, 989
Неархимедово абсолютное значение 1, 41
- тело 3, 431
Неассоциативные кольца и алгебры 3, 899—903
Неатомическая игра 3, 903
Неатомическая мера 3, 639, 904
Неатомическое пространство 3, 638
Небелинга — Понтрягина теорема о топологических пространствах 4, 822
Небелинга — Понтрягина — Гуревича — Куратовского теорема о размерности 4, 826
Неблуждающая точка 1, 507; 3, 904
Неванлинновская характеристика функции 3, 904, 4, 887
Неванлинны дефект 4, 888
- исключительное значение 2, 675
- теорема о распределении значений 4, 888
- - о функциях ограниченного вида 3, 1159
Неванлинны теоремы 3, 904
- характеристическая функция 2, 100
Неванлинны — Пика проблема 2, 621, 3, 905
Невозможное событие 3, 906

Невозрастающая последовательность 5, 466
- функция 5, 466
Невыпуклый правильный многогранник 4, 553
Невырождающаяся линия 2-го порядка 3, 389
- нераспадающаяся поверхность 2-го порядка 4, 343
Невырожденная абелева функция 1, 22
- квадратичная форма 2, 777
Невырожденная матрица 3, 614, 906
- особая точка 4, 122
- стационарная точка 5, 209
Невырожденное голоморфное отображение 1, 1030
Невырожденное представление 3, 906
- распределение 1, 809
Невырожденный параллелотоп 4, 205
Невычет 3, 906, 5, 153, 217
- биквадратичный 5, 153, 217
- в теории чисел 1, 814
- квадратичный 2, 785; 5, 153, 217
- кубический 3, 143, 5, 217
- степени n 5, 217
Невычислимости степень 3, 1003
Невязка 3, 906
Невязки вектор 4, 420
Невязок минимальных метод 3, 694
Негативная интерпретация Гёделя 4, 357
Негативный перевод 2, 1040
Неголономная сеть 4, 1122
Неголономные координаты 1, 1034
Неголономные системы 3, 907
Недезаргова геометрия 3, 908
- плоскость 3, 908
- система 3, 908
Неделимых метод 3, 908
Недетерминированная машина 3, 628
- - Тьюринга 5, 458
Недетерминированный автомат 1, 48
Недифференцируемая функция 3, 909
Недоопределенная система 3, 909
Недоопределенный линейный дифференциальный оператор 3, 368
Недостижимая точка границы области 3, 1098
Неевклидово пространство 3, 909
- расстояние 4, 283
Неевклидовы геометрии 3, 910—914
Неединственности множество 2, 401
Независимая переменная 5, 713
Независимое множество 1, 552, 884
Независимости показателей теорема 2, 864
- число графа 1, 1120
Независимость алгебраическая 1, 148
Независимость в теории вероятностей 1, 661, 3, 914—917
- линейная 3, 308
Независимость системы аксиом 3, 918
Независимые измеримые разбиения 3, 918
Независимые меры 3, 918
- случайные величины 1, 660
- события 1, 658; 3, 914
Независимых функций система 3, 918
Незамкнутая система 2, 327
Незаузленный узел 3, 738
Неизвестное 5, 539
Неизмеримое множество 3, 919
Неизмеримость абсолютная 3, 667
Неизотропное условие Гёльдера 1, 915
Неисправности функция 3, 858
Нейвирта зацепление 5, 478
Нейвирта узел 3, 920
Нейенхейса тензор 4, 542
Нейля парабола 3, 920; 4, 458
Неймана алгебра 1, 978; 3, 920—922
Неймана задача 1, 771; 3, 83, 203, 922
- - внешняя 4, 528
- - внутренняя 4, 527
Неймана метод доверительных интервалов 3, 922—924
- многочлен 3, 925
- модель в математической экономике 3, 586
- обертывающая алгебра 1, 120
Неймана ряд 3, 924; 5, 652
Неймана структура 3, 925
- теорема о минимаксе 3, 619
- - о полярном разложении 4, 479
- - о самосопряженных алгебрах 3, 920
- - о сжатии 5, 119
Неймана теорема эргодическая 3, 926
Неймана функции 3, 927
Неймана — Моргенштерна решение игры 2, 472, 4, 979
Неймана — Пирсона лемма 3, 928
Нейтральная форма 1, 713
Нейтрального типа уравнение 2, 295; 3, 928
Нейтральное подпространство 4, 718
Неклассическая теория моделей 3, 928—930
Неколебательное уравнение 1, 862
Некоммутативная эргодическая теория 5, 1012
Некомпактности мера 3, 977
Некорректная по Адамару задача 3, 937
Некорректно поставленные задачи 3, 930
Некорректные задачи 3, 930—936
Некорректные задачи теории функций комплексного переменного 3, 937
Некрасова интегральное уравнение 3, 938
Нелинейная краевая задача 3, 938
Нелинейная краевая задача; численные методы решения 3, 938—942
- регрессия 4, 931
Нелинейная связность 3, 942
- система 2, 766
Нелинейное диофантово приближение 2, 162
Нелинейное дифференциальное уравнение 3, 943
Нелинейное интегральное уравнение 3, 944
- - - Вольтерра 1, 754
- интегро-дифференциальное уравнение 2, 613
Нелинейное программирование 3, 945
- уравнение, ветвление решений 1, 676
- - математической физики эволюционное 5, 912
Нелинейное уравнение; численные методы решения 3, 945—950
Нелинейное уравнение с частными производными 3, 950—956
Нелинейности порядок 1, 936
Нелинейные колебания 3, 956—958
Нелинейный оператор 3, 958—961, 4, 19
- - дифференциальный 2, 345, 3, 959
- - интегральный 2, 604, 3, 959
- - - Вольтерра 1, 752
- - интегро - дифференциальный 3, 959
- - ограниченный 3, 959
- -, полугруппа 4, 445
Нелинейный потенциал 3, 961
Нелинейный функционал 3, 962
Нелинейный функциональный анализ 3, 962
Нелогические аксиомы теории типов 5, 352
Нелогичная аксиома 4, 579
Немыцкого оператор 3, 959
- теорема о полной неустойчивости 4, 417
Неналегания свойство 1, 789
Необрывающийся марковский процесс 3, 524
Необходимая достаточная статистика 2, 376, 3, 683, 962
Необходимое условие Вейерштрасса для экстремума 1, 619
Необходимые и достаточные условия 3, 963
Неограниченная делимость 3, 656
- область 3, 1098
- проблема Бернсайда 1, 416
Неограниченно продолжаемое решение 1, 83
Неограниченное случайное блуждание 5, 12
Неограниченный оператор 3, 376, 963
Неоднородная линейная форма, Минковского гипотеза 1, 949
- проблема геометрии чисел 1, 948
- - Минковского 1, 949
- цепь Маркова 3, 518
Неоднородное диофантово приближение 2, 162
- дифференциальное уравнение 3, 339
- - - линейное с периодическими коэффициентами 3, 314
- интегральное уравнение 2. 590
- преобразование Галилея 1, 844
- уравнение Бесселя 1, 461
- - диффузии 2, 359
Неоднородные тангенциальные координаты 5, 321
Неоднородный арифметический минимум лучевой функции 1, 949
Неоида 1, 329
Неокольцо 2, 968
Неопределенная задача 2, 677
- квадратичная форма 2, 777
- проблема моментов 3, 794
- система уравнений 3, 357, 964
Неопределенное уравнение 2, 168; 3, 963
Неопределенностей раскрытие 3, 964
Неопределенности множество 3, 649, 651
Неопределенности принцип 3, 965
- точка 4, 117, 569
Неопределенность когомологической операции 2, 922
- соответствия 5, 78
Неопределенный интеграл 2, 564, 579; 3, 965
- - Бёркиля 1, 416
Неопределенных коэффициентов метод 3, 966
Неопределенных коэффициентов метод построения численных алгоритмов 3, 967
Неориентированный бордизм 1, 533
- граф 1, 1105
Неориентируемое многообразие 3, 968
Неориентируемое сферическое отображение 5, 297
Неориентируемый кобордизм 2, 891
- многогранник 3, 711
Неособая билинейная форма 1, 483
Неособая граничная точка 3, 968
- точка аналитического пространства 1, 285
- экстремаль 3, 232
Неособенная гомология 1, 1060
- матрица 3, 906
- экстремаль 4, 938
Неособое действительное алгебраическое многообразие 2, 70
Неосцилляции промежуток 3, 969
Неотделимость слов по инвариантам 1, 821
Неотрицательная форма 4, 462
- эрмитова матрица 5, 1019
Неотрицательно определенное ядро 2, 101
Неотрицательное самосопряженное линейное преобразование 4, 1074
Непараметрические методы статистики 3, 969—975
Непараметрический критерий 3, 975
Непаскалева геометрия 3, 975
Непера аналогии 5, 292
Непериодическая задача вариационного исчисления в целом 1, 592
- цепь Маркова 3, 519; 5, 239
Неперово число 2, 397, 3, 975
Неподвижная особая точка 3, 975
Неподвижная точка 3, 975—978, 4, 784; 5, 385
- -, Брауэра теорема 1, 546, 1049
Неподвижной точки свойство 4, 976
Неподвижный элемент 4, 153
Непозиционная система счисления 5, 315
Неполная бета-функция 1, 489, 3, 979
Неполная гамма-функция 1, 866; 3, 979
- двоякокруговая область 2, 49
Неполное эрмитово ядро 5, 1023
Неполной обратной связи канал 2, 705
- релаксации метод 4, 966
Неполнота формализованной арифметики 1, 112
Неполный латинский квадрат 3, 208
- эллиптический интеграл 5, 990
Неположительная квадратичная форма 4, 462
Неположительно определенное ядро 2, 101
Непополнимость 1, 112
Неправильная дробь 2, 389
- интерпретация 4, 551
Неправильности коэффициенты 3, 380
Непредикативное определение 3, 981; 5, 352
Непредикативность теории 5, 641
Непрерывная алгебра Неймана 3, 921
- геометрия 4, 104
Непрерывная группа 3, 982
Непрерывная дробь 3, 982; 5, 812
- мера 3, 639
- проективная прямая 4, 671
Непрерывная серия представлений 3, 982
- сумма элементов множества 1, 376
Непрерывная функция 3, 983—985
- -, Коши теорема о промежуточных значениях 3, 62
Непрерывно дифференцируемых функций пространство 1, 387
Непрерывное линейно упорядоченное множество 3, 323
- многозначное отображение 3, 720
Непрерывное множество 3, 986
Непрерывное отображение 3, 986—988, 4, 558
- -, спектральная последовательность 3, 235
- - топологических пространств 5, 390
Непрерывное представление 1, 446, 3, 988
- пространство 3, 638
Непрерывное разбиение топологического пространства 3, 988
Непрерывное распределение вероятностей 3, 989; 5, 9
Непрерывное сечение 3, 989
- слева кольцо 4, 940
- ядро 2, 605

δ-непрерывное отображение 1, 501
Непрерывности аксиома 3, 989; 5, 878
Непрерывности модуль 3, 990, 4, 616
- принцип Браузера 2, 642
- - для голоморфных функций 3, 990
Непрерывности теорема для голоморфных функций 3, 990
- уравнение 3, 481
Непрерывность 3, 991
- аппроксимативная 1, 303
-, Дедекинда теорема 2, 63
- действительных чисел 2, 74
- метрическая 3, 994
- по Гёльдеру 1, 915
- равномерная 4, 786
- равностепенная 4, 797, 800
- стохастическая 5, 239
- суммы степенного ряда, Абеля теорема 1, 29
- функции абсолютная 1, 34
Непрерывные аналоги итерационных методов 3, 991—993
Непрерывный каскад 2, 757
Непрерывный оператор 3, 993; 4, 19
Непрерывный поток 3, 993
- спектр 3, 373; 5, 98
Непрерывный функтор 3, 994
Непрерывный функционал 3, 994
Непрерывных функций пространство 1, 386, 387; 3, 994
Неприводимая алгебра Ли 1, 1025
n-арная операция 2, 804
- аффинная схема 1, 358
- компонента 3, 997
- - аналитического множества 1, 280
- корневая система 3, 16
- крквая 4, 309
Неприводимая матричная группа 3, 995
- полугруппа 5, 373
Неприводимое алгебраическое уравнение 1, 192
- аналитическое множество 1, 280
Неприводимое аналитическое пространство 3, 995
- аффинное алгебраическое множество 1, 360
- глобально симметрическое риманово пространство 1, 1025
Неприводимое многообразие 3, 996
Неприводимое отображение 3, 996; 5, 390
- подкольцо 5, 804
- покрытие 1, 560
Неприводимое представление 1, 448, 3, 996, 4, 546
- примарное разложение 4, 634
- пространство 4, 1097
- - риманово 4, 633
Неприводимое топологическое пространство 3, 997
Неприводимости точка аналитического множества 1, 281
Неприводимый континуум 2, 1068; 3, 997
Неприводимый многочлен 3, 754, 997
- -, Гильберта теорема 1, 971
Неприводимый модуль 3, 998
Непримитивный характер 2, 193
Непротиворечивая формальная система 3, 998
Непротиворечивое множество 1, 910
Непротиворечивость 3, 998
- относительная 1, 110
Непрямые численные методы вариационного исчисления 1, 587
Неравенство 3, 999
Неравномерная оценка 5, 806
Неравномерное кодирование 2, 935
Неразветвленное расширение 2, 203, 3, 114, 5 668
Неразветвленный идеал 3, 1001
- квазихарактер 2, 826
Неразветвленный характер 3, 1001
- элемент 4, 414; 5, 971
Неразличимость стохастическая 5, 240
Неразложимая группа Кокстера 2, 946
- матрица 4, 276
- - Картана 2, 731
- цепь Маркова 3, 519, 521
Неразложимое представление 3, 1001; 4, 592
- пространство 2, 884
Неразложимое распределение 3, 1002
Неразложимость метрическая 3, 667
Неразложимый континуум 2, 1068; 3, 1002; 5, 892
- элемент кольца 1, 351
Неразрешимая элементарная теория 1, 215
Неразрешимое ассоциативное исчисление 1, 339
- предложение 3, 1004
Неразрешимости степень 3, 1002
Неразрешимость 3, 1003
Неразрывности уравнение 3, 1005
Нерандомизированный статистический критерий 5, 182
Нераспадающаяся линия 2-го порядка 3, 387
Нерастягивающее отображение 4, 1025
Нерастягивающий оператор 3, 978
Нерв 3, 1005, 4, 393, 687, 1159
Нерегулярная цепь Маркова 4, 260
Нёрлунда метод суммирования 1, 755
Нерона модель 3, 1005
Нерона — Севери группа 1, 180; 2, 132, 3, 1005, 4, 283
- - теорема об абелевых группах 3, 1005
Несамоприменимый алгоритм 1, 210
Несамосопряженный оператор 3, 1006—1010; 5, 112
Несвязное пространство 4, 1096
Несглаживаемое многообразие 3, 1010
Несепарабельная степень 4, 1114
Несепарабельное расширение 4, 1113
Несепарабельный алгебраический элемент 4, 1114
Несжимаемая поверхность 5, 433
Несмешанный идеал 3, 69, 1011
Несмещенная оценка 3, 1011—1015; 4, 174, 184; 5, 408
Несмещенный критерий 3, 1015
Несобственная аффинная сфера 1, 358
- гиперплоскость 4, 675
- плоскость 4, 664
- подгруппа 4, 369
- прямая 4, 664
- связка окружностей 4, 1089
- - плоскостей 4, 1089
- седловая точка 4, 1102
- точка 2, 484; 4, 664
Несобственное вращение 1, 764
- движение 2, 20
- нормирование поля 3, 1079
- ортогональное преобразование 4, 87
- подобие 4, 372
Несобственное распределение 1, 809, 3, 1016
Несобственные элементы 1, 442, 456
Несобственный интеграл 3, 1016—1019
- - абсолютно сходящийся 1, 39
- -, зависящий от параметров 2, 429
- -, Коши критерий 1, 39
- - нормально сходящийся 3, 1052
- пучок 4, 771, 772
Несовершенное поле 5, 69
Несовместимая нормальная система 3, 1019
Несовместимость 3, 1019
Несовместная нормальная система 3, 1019
- система 3, 998
- - линейных уравнений 3, 357
Несоизмеримые величины 3, 1019, 5, 73
Несократимое представление 1, 91
- слово 4, 1082
Несопряженности промежуток 3, 969
Несплющенный конус 2, 1075
Нестабильные теории 5, 165
Нестандартная модель 3, 1020
Нестандартный анализ 3, 1019
Нестационарная связь 1, 1033
Нестратегическая игра 2, 470
Нестрогий максимум 3, 494
- минимум 3, 494
Несущественное отображение 3, 1020
- состояние цепи Маркова 3, 518
Несчетное множество 3, 1020
Нетерминальный символ 1, 1092
Нётер проблема 1, 972; 3, 1020
Нётер теорема 3, 1021—1024
- - в механике 3, 181
- - о гамильтоновой системе 1, 859
- ток 3, 1023
- формула 3, 1022
Нётера неравенство 4, 113
- теорема для сингулярных интегральных уравнений 4, 1174
- - о нётеровых операторах 3, 1025
- - - проективной плоскости 3, 95
- - об интегральных уравнениях 3, 1027
- формула 4, 1001
- - для рода алгебраической поверхности 1, 150
Нётера — Энрикеса теорема 3, 1024
Нётера — Энрикеса — Петри теорема 3, 1024
Нётеров модуль 3, 1025
Нётеров оператор 3, 1025
Нётерова аффинная схема 1, 358
Нётерова группа 3, 1025
Нётерова индукция 3, 1026
- краевая задача 3, 76
- решетка 3, 840
Нётерова схема 3, 1026
Нётерово интегральное уравнение 3, 1026
Нётерово кольцо 3, 1027
Нётерово пространство 3, 1028
- уравнение 3, 1026
Нётеровость задачи 2, 306
Нетривиальный нуль дзета-функции 2, 113, 4, 878
- - *L*-функции Дирихле 2, 189
Неубывающая последовательность 1, 749
- функция 1, 749
Неудерживающие связи 1, 1034
Неукорачивающий гомоморфизм 5, 644
Неустойчивая сепаратриса 4, 1101
Неустойчивое многообразие седла 4, 1101
Неустойчивость абсолютная 5, 565
- полная 4, 417
y-неустойчивость 5, 573
Неустранимая погрешность 4, 357
Нефокальное многообразие 5, 612
Неформальный аксиоматический метод 3, 1028—1030
Нефредгольмов оператор, индекс 2, 554
Нефредгольмово интегральное уравнение 3, 1030
Нехарактеристическая поверхность 3, 47
Нехари — Покорного условия однолистности 3, 1169
Нехопфова группа 3, 1030
Нецентральная линия 2-го порядка 3, 388
- поверхность 2-го порядка 4, 344
Нецентральное «хи-квадрат» распределение 3, 1031
-Хотеллинга T^2-распределение 5, 796
Нечеткий автомат 1, 49
Нечетная подстановка 4, 381
Нечетная функция 3, 1031
Нечетное число 3, 1031
Нечетный овал 2, 70
- характер Дирихле 2, 192
Неэффективная статистика 3, 1031
Неявная формула Штермера 2, 293
Неявная функция 3, 1032—1034
Неявная функция в алгебраической геометрии 3, 1035
Неявный метод 2, 292
Неявный оператор 3, 1036
Нигде не плотное множество 3, 1036
- не связное пространство 4, 1096
Нижнее десятичное приближение 2, 98
- производное число левое 4, 690
- - - правое 4, 690
Нижней релаксации метод 4, 966
Нижний аппроксимативный предел 1, 304
- доверительный предел 2, 615; 3, 923
- интеграл Бёркиля 1, 415
- - Дарбу 2, 17
- конус 5, 834
- оператор Привалова 4, 629
- особый показатель 4, 132
Нижний предел 3, 1036; 4, 558
- - последовательности 1, 669, 670
- - спектра 4, 686
- - функции 1, 670
- радикал 4, 806
- - Бэра 4, 807
- топологический предел 4, 562
- центральный показатель 5, 809
- - ряд 4, 367; 5, 811
Нижняя граница множества 1, 673
Нижняя грань множества 1, 672; 3, 1036
Нижняя грань семейства топологий 3, 1036
- - функций 5, 715
- квартиль 2, 837
- полуплоскость 4, 462
- субгармоническая функция 1, 671
- супергармоническая функция 1, 671
Никольского пространство 3, 1036—1039
Никомеда конхоида 3, 1039
Нильалгебра 3, 901, 1039
- Ли 3, 269
Нильгруппа 3, 1040
Нильмногообразие 3, 1040
Нильполугруппа 3, 1040
Нильпотент 3, 1043
Нильпотентная алгебра 3, 1041
- - Ли 3, 269
Нильпотентная группа 3, 1042
- - Ли 3, 271
- - мультиоператорная 3, 839
- компонента разложения Жордана 2, 421
- матрица 3, 617
- орбита, Шмида теорема 4, 155
Нильпотентная полугруппа 3, 1042
Нильпотентности класс 5, 811
- ступень 5, 811
Нильпотентность альтернативного кольца 1, 237
Нильпотентный автомат 1, 67
Нильпотентный идеал 3, 1043
- радикал 4, 808
Нильпотентный элемент 2, 423; 3, 1043
- эндоморфизм 2, 421
Нильпоток 3, 1044
Нильрадикал 3, 270, 1043; 4, 808
- алгебры 3, 1039
- алгебры Мальцева 3, 509
- верхний 4, 807
Нильсена преобразование 4, 1082
- теорема о свободных группах 4, 1082

Нильсена — Шрайера теорема о свободных группах 4, 1082
Нить 1, 33; 3, 1044, 5, 373
- вихревая 1, 715
- максимальная 4, 686
- минимальная 4, 686
Новикова теорема об отделимости множеств 4, 141
Номер 1, 314
- гёделев 1, 314, 4, 960
Номерное множество 3, 1087
Номинальный признак 3, 733
Номограмма 3, 1044
- составная 3, 1046
- элементарная 3, 1045
Номография 3, 1044—1047
Норма 1, 979, 3, 1047—1049
- p-адическая 1, 41, 100
- бемольная 1, 409
- весовая 1, 674
- Гильберта — Шмидта 1, 977
- группы 3, 1049
- диезная 2, 133
- Дирихле 5, 1003
- кватерниона 2, 838
- Люксембурга 3, 466
-, монотонная непрерывность 2, 1076
- на теле 1, 41
- оператора 3, 1162
- операторная 3, 372, 1048
- Орлича 4, 75
-, полумонотонность 2, 1075
- следовая 5, 1031
- согласованная 5, 314
- строго выпуклая 3, 868
- элемента конечного расширения поля 3, 1076
- энергетическая 4, 833, 5, 1003
- ядерная 5, 1031
Нормализатор 3, 1049
Нормализаторное условие 3, 1049
Нормализации метод 4, 667
Нормализации принцип 1, 215; 3, 1049
- - в теории алгоритмов 3, 1073
- теоремы 2, 1041; 4, 1166
Нормализованная матрица Адамара 1, 86
- поверхность 4, 973
Нормализованное число 2, 443
Нормализованный латинский прямоугольник 3, 209
- функтор 1, 20
Нормаль 2, 249, 251, 3, 1049; 4, 667
- аффинная 1, 355
- главная 1, 1013; 2, 249
- внешняя 1, 734
- проективная 4, 668
Нормальная аксиомстрия 1, 113
- аффинная схема 1, 358
- близость 1, 501
- геодезическая область 1, 927
Нормальная динамическая система 3, 1050
- жорданова форма матрицы 3, 352
- картографическая проекция 2, 753
- конгруэнция 2, 802, 1015
- корреляция 2, 1002
Нормальная кривизна 2, 251, 3, 97, 1050
- линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений 3, 340
Нормальная матрица 3, 616, 1050
- область Фроммера 4, 1107
Нормальная плоскость 3, 1050
Нормальная подгруппа 3, 1051, 1073
- подквазигруппа 2, 802
Нормальная подполугруппа полугруппы 3, 1051
- полугруппа 4, 1127
- проективная связность 4, 672
Нормальная производная 3, 1051
- - потенциала простого слоя 4, 525
- -, прямое значение 4, 704
Нормальная разрешимость 3, 1051
- система подгрупп 4, 368
- - Поста 4, 513, 515
Нормальная схема 3, 1051
Нормальная сходимость 3, 1051
Нормальная форма 3, 1052—1061
- - булевой функции 1, 563
- - дизъюнктивная 1, 126, 2, 135
- - импликативная 2, 524
- - конъюнктивная 1, 126, 2, 1102
- - k-кратной рекурсии 3, 722
- - Лиувилля 3, 392
- - оператора 5, 632
- - совершенная 5, 67
- - сокращенная 5, 73
- - эллиптического интеграла 5, 989
- формула 2, 1047
Нормальная фундаментальная система решений 3, 472, 1061
- функция 4, 568
- - в области 3, 1069
Нормально гиперболического типа уравнение 2, 861
- разрешимое уравнение 3, 1062
Нормально разрешимый оператор 3, 1026, 1061
Нормально расположенное подпространство 3, 1062
- сходящийся несобственный интеграл 3, 1052
Нормального притяжения зона 3, 1062
- - область 4, 641
- типа целая функция 5, 798
Нормальное аналитическое пространство 3, 1063
Нормальное p-дополнение 3, 1064
- исчисление 4, 515
- - Поста 4, 515
- кольцо 3, 1051
- отображение 5, 297
- представление 1, 449
Нормальное пространство 3, 1065; 4, 140, 5, 391
- - с мерой 3, 1050
Нормальное разбиение пространства 1, 755
Нормальное распределение 3, 1065—1067
Нормальное расслоение 1, 646, 2, 755; 3, 1067
- - сферическое 4, 748
- расширение 4, 909
Нормальное расширение поля 1, 850, 3, 1068
- решение 3, 935
Нормальное семейство аналитических функций 3, 1068—1070
Нормальное сечение 3, 97, 1070, 1071
- уравнение 3, 879
Нормальное уравнение прямой 3, 1070
Нормальное число 3, 1070
$\varkappa$-нормальное пространство 3, 1065
π-нормальное пространство 3, 1065
Нормальной кривизны эллипс 3, 1071
Нормальности принцип для голоморфных функций 3, 820
Нормальность звездная 3, 656
Нормальные координаты 4, 1006
Нормальный абелев дифференциал 1, 14
- абелев интеграл 1, 16
Нормальный алгорифм 3, 1072
- -, композиции теорема 1, 226
- - Маркова 1, 820
- -, Маркова тезис 1, 821
- -, нормальная композиция 1, 225
- -, нормальное объединение 1, 225
- -, - повторение 1, 225
- -, - разветвление 1, 225
- -, объединения теорема 1, 226
- -, разветвления теорема 1, 226
- - универсальный 5, 500
- -, эквивалентность относительно алфавита 1, 230
- вид квадратичной формы 2, 778
- гиперэллиптический интеграл 1, 1011
Нормальный делитель 3, 1073; 5, 91
- - допустимый 4, 22
Нормальный комплекс полугруппы 3, 1073
- контур 5, 46
- конус 2, 1075, 4, 434
Нормальный мономорфизм 3, 1074
Нормальный нульмерный цикл 3, 1074
Нормальный оператор 3, 375, 1074
Нормальный пучок 3, 1075
- ряд 1, 851
Нормальный ряд группы 3, 1076
- - подгрупп 4, 367
- случайный элемент 5, 33
- факторобъект 5, 596
- элемент алгебры 4, 1148
- эллиптический интеграл 5, 990, 991
Нормальный эпиморфизм 3, 1076
Нормальных меток критерий 3, 972
Норменная подгруппа 3, 1076
Норменное отображение 3, 1076
Норменный вычет 3, 1077
Нормирование вещественное 1, 689
- дискретное 2, 204
- мультипликативное 1, 41
Нормирование поля 3, 1078—1081
Нормирования кольцо 5, 815
Нормированная алгебра 3, 1081
- - булева 1, 552, 5, 20
- - симметричная 4, 1149
- решетка 4, 471
- - ограниченных элементов 1, 384
Нормированная система 3, 1081
Нормированное кольцо 3, 1081
Нормированное поле 3, 1081
Нормированное пространство 3, 1047, 1081; 5, 705
- уравнение прямой 3, 1070
Нормированности условие 4, 93
Нормированный абелев дифференциал 1, 14
Нормировка унимодулярная 2, 385
Нормировки условия для конформных отображений 2, 1094
Нормируемое пространство 3, 1047
- - топологическое векторное 5, 379
Нормирующий множитель 3, 1070, 1081
Нормы топология 4, 716
Носителей семейство 2, 907
Носитель алгебраической системы 1, 155
- граничного элемента 1, 1103
- дивизора 2, 130
- компактный 2, 681
- конструктивного метрического пространства 2, 1051
Носитель меры 3, 644, 1081
Носитель модуля 3, 1081
- начальных условий 3, 46, 895
- обобщенной функции 3, 1105, 1118
- пучка 4, 771
- симплекса 4, 1179
- сингулярный 3, 1118, 5, 672
Носитель функции 3, 1082
Нулевая матрица 3, 613
- схема серий 4, 1118
Нулевое множество 3, 639
- сечение 4, 766, 1124
Нулевой абсолютной гармонической меры множество 1, 873
Нулевой вектор 1, 632
Нулевой гармонической меры множество 1, 873
Нулевой класс Бэра 1, 567
- меридиан 5, 291
Нулевой объект категории 3, 1082
- оператор 4, 20
- - линейный 3, 369
Нуль 2, 73, 76; 3, 1082
- абелевой группы 3, 1082
- алгебраической системы 3, 1082
- дзета-функции 2, 113
Нуль — единица закон 3, 1083
Нуль категории 3, 1082
- кольца 3, 1082
- мероморфной функции 3, 649
- полугруппы 3, 1082
-, порядок 4, 504
- решетки 3, 1082
- функции 3, 1082
- L-функции Дирихле 2, 189
- целой функции 5, 798
- частично упорядоченного множества 5, 834
Нуль-компонента фиттингова 2, 736
Нульмерное отображение 3, 1084
Нульмерное пространство 3, 1084
Нуль-отношение 1, 488; 4, 151
Нуль-последовательность 2, 76
Нуль-ряд, Меньшова пример 3, 636
«Нуль-свойство» 3, 458
Нуль-система 5, 1085
Нумерал 1, 224
Нумераций теория 3, 1085
Нумерация 3, 1085—1088; 5, 314
- главная 5, 418
-, сводимость 5, 418
Нумерически выразимый предикат 3, 1088
- представимая функция 3, 1088
Нумерова метод 5, 903
Нумерованная алгебраическая система 3, 1088
Нумерованная модель 2, 1059; 3, 1088
Нумерованное множество 3, 1086
Нуссельта число 3, 1089
Ньютона агвинея 1, 297
Ньютона бином 2, 974; 3, 1089
Ньютона диаграмма 3, 1090
- закон всемирного тяготения 1, 1078
Ньютона законы механики 3, 1091
Ньютона интерполяционная формула 3, 1091
- интерполяционный ряд 2, 634
- классификация кривых 3-го порядка 4, 311
Ньютона метод 2, 624; 3, 1092
- многоугольник 3, 1090
- ряд 2, 1028
- теорема механики 1, 1079
- - о кривых 3-го порядка 4, 312
- формулы для симметрических многочленов 4, 1145
Ньютона число 3, 1093
Ньютона — Канторовича метод 3, 947, 1093
Ньютона — Котеса квадратурная формула 2, 794; 3, 1093
Ньютона — Лейбница формула 2, 564, 583; 3, 1094
Ньютонов потенциал 3, 1094
- - двойного слоя 4, 524
- - объемный 4, 524
- - простого слоя 4, 524
Ньютонова емкость 2, 404
Нэша решение 1, 312; 4, 979
Нэша теорема в теории игр 1, 433; 3, 1095
- - о римановых пространствах 2, 863
Нэша теоремы в дифференциальной геометрии 3, 1096

О

Обвертывающий ряд 3, 1097
Обертка поверхности 4, 166
Обертывающая алгебра Неймана 1, 120
Обертывающее полярное разложение 4, 479, 480
Обеспечение математическое 3, 595
- программное 3, 595
Обзорный поиск 3, 757
Обильное аналитическое расслоение 4, 433
Обильное векторное расслоение 3, 1097
Обильный пучок 3, 1097
Область 3, 1098, 4, 1096
- абсолютного будущего 4, 149
- - прошлого 4, 149
- - удаления 4, 149

- бесконечносвязная 1, 455, 3, 748
- бицилиндрическая 1, 500
- Вейля 1, 271, 629
- влияния 1, 721; 3, 48
- - устойчивого корня 2, 340
- выпуклая 1, 788
- Гартогса 1, 893
- геодезическая 1, 927
- - нормальная 1, 927
- геодезически выпуклая 4, 1004
- гиперболичности 5, 45
- главных идеалов 1, 1019
- голоморфно выпуклая 1, 272, 1031
- голоморфности 1, 272, 1030; 4, 414
-, граничный элемент 1, 1102, 1103
- двоякокруговая 2, 49
- двусвязная 3, 748
- Дирихле 1, 755, 2, 196
- жорданова 2, 240, 3, 1099
- зависимости 3, 48
- звездообразная (звездная) 2, 449
- Зигеля 2, 455
- значений оператора 4, 18
- - соответствия 5, 78
Область значений функции 3, 1099
- imprимитивности 2, 524
-, исчерпание 2, 683
- Каратеодори 2, 720
- кольцевая 1, 1023, 2, 967
- конечносвязная 3, 748
- концевая 1, 1023
- кратно круговая 3, 88
- кривизны 3, 1072
- критическая 3, 112
- круговая 1, 1023, 3, 88
- многолистная 3, 723
- многосвязная 3, 748
- наложения 3, 889
- нормального притяжения 4, 641
-, оболочка голоморфности 1, 1032
- однородная ограниченная 3, 1172
- односвязная 3, 1182
- определения оператора 4, 18
- - отображения 4, 152
- - решения задачи Коши 3, 48
- - соответствия 5, 78
Область определения функции 3, 1099
- плотностная 1, 1024
- подобная 4, 376
- поликруговая 4, 405
- полицилиндрическая 1, 500
- полиэдрическая 2, 683
-, полная кривизна 4, 416
- полосообразная 1, 1023
- полукруговая 1, 893
- предметная 4, 580
- приведения Минковского 2, 788
- - фундаментальная 2, 788
- применения алгоритма 1, 227
- притяжения 4, 640
- - локального экстремума 3, 356
- - тривиального решения 1, 64
- пропускной способности 2, 703
- простые концы 1, 1102, 1103
- псевдовыпуклая 1, 272, 1031
- - по Леви 1, 1031
- регулярная 4, 933
- Рейнхарта 3, 88
- риманова 3, 889; 4, 1014
- Рунге 4, 1055
- k-связная 3, 748
- сеточная 4, 218
-, сечение 1, 1102
- симметрическая 3, 1172, 4, 1142
- смешанная 5, 45
- Смирнова 5, 53
- строго псевдовыпуклая 1, 1031
- существования аналитической функции 1, 267
- - вейерштрасова 4, 413
- - естественная 4, 414
- - римановa 4, 415
- сходимости 5, 220
- типа C 5, 53
- - S 5, 53
- транзитивности 5, 411
- - группы 4, 382
-, транзитивность 5, 374
- трубчатая 5, 449
- устойчивости 5, 559
- фундаментальная 5, 681
Область целостности 2, 961; 3, 1099
- - целозамкнутая 5, 800
- частичного притяжения 5, 836
- эллиптичности 5, 45
Обложение 3, 1099
Обмотка 4, 968
-, проводимость 4, 969
- тора иррациональная 2, 338
- узла 5, 485
Обновляющий случайный процесс 2, 692; 5, 28
Обобщения правило 4, 579
Обобщенная аналитическая функция 3, 1099—1103
- винтовая линия 1, 706
- гипергеометрическая функция 1, 1003
- гипотеза Пуанкаре о многообразиях 4, 744, 5, 288
- - Римана 4, 995
- грамматика 1, 1092
- группа 1, 1136
Обобщенная группа 3, 1103
- - кватернионов 2, 840
- дзета-функция 2, 117
- задача Коши 3, 607
- - Римана — Гильберта 3, 81, 1102
- континуум-гипотеза 1, 235; 2, 1053, 1068
- матрица Адамара 1, 86
- мера 2, 444
- минимальная поверхность 3, 685
- поверхность переноса 4, 247
- последовательность 3, 890, 5, 307
- - сходящаяся 5, 307
- постановка краевой задачи 3, 607
- проблема делителей 2, 86
- - собственных значений 4, 421
- - типа римановой поверхности 4, 1030
Обобщенная производная 3, 1103
- - Пеано 4, 230, 231
- - симметрическая 1, 574
- - слабая 3, 1107
- - Соболева 5, 55
- резольвента 4, 454
- собственная функция 2, 805
- спектральная функция 5, 119
- субгармоническая функция 1, 671
- сумма ряда 5, 308
- супергармоническая функция 1, 671
- теорема Бохнера 1, 882
- теория гомологии 1, 1046
- - гомологий 3, 1123
- формула Коши 2, 316
- - Родрига для ортогональных многочленов 4, 94
- - суммирования Пуассона 1, 883
Обобщенная функция 3, 1104—1110
- - Грина 1, 1128; 4, 531
- - Жуковского 2, 426
- -, свертка 4, 1076, 5, 730
- -, Фурье преобразование 5, 729
- частная производная 5, 55
Обобщенно нильпотентная группа 3, 1110
- однорядное кольцо 3, 1182
Обобщенно разрешимая группа 3, 1111
- фредгольмов оператор 3, 1027
Обобщенно-выпуклая игра 1, 787
Обобщенного градиента метод 3, 603
Обобщенного сдвига операторы 3, 1111—1116
- сжатия принцип 3, 976
Обобщенное гипергеометрическое уравнение 4, 992
- индуктивное определение 2, 565
- интегральное уравнение Абеля 1, 26
- канторово многообразие 2, 717
- многообразие 1, 1058
- неравенство Гельдера 1, 914
- - Харди 5, 773
- однородное пространство 1, 934
- представление Бореля 5, 160
- преобразование Лагерра 3, 169
- - Стилтьеса 5, 227
- - Фурье 3, 1115
- равенство Парсеваля 4, 223
- распределение арксинуса 1, 326
- - Пуассона 4, 758
Обобщенное решение 3, 333, 1116
- - задачи Дирихле 1, 671
- - - - в смысле Перрона — Винера 4, 530
- - краевой задачи 3, 607
- - смешанной задачи 5, 42
- риманово пространство 4, 1022
- случайное поле 5, 17
- собственное значение 2, 805
- субпроективное пространство 5, 267
- уравнение Вольтерра 1, 754
- условие Голубева — Привалова 1, 1034
- финслерово пространство 5, 624
Обобщенной лучистости свойство 2, 446
Обобщенной функции носитель 3, 1118
Обобщенной функции производная 3, 1118
Обобщенные близнецы 1, 500
- координаты 1, 1034
- - полярные 4, 481
- - сферические 5, 293
- - цилиндрические 5, 820
- многочлены Лагерра 3, 168
Обобщенные почти периодические функции 3, 1118—1120
Обобщенные теории когомологий 3, 1120—1125
- уравнения Фридмана — Келлера 5, 451
- условия Коши — Римана 5, 771
- цилиндрические координаты 5, 820
Обобщенный автомат 1, 68
- базис 1, 374
- гауссовский процесс 1, 906
- гипергеометрический ряд 1, 1003
- инвариант Хопфа 5, 792
- класс Понтрягина 4, 486
- метод Эйткена 4, 252
- нильрадикал 4, 807
- полицилиндр 4, 405
- принцип аргумента 1, 313
- производящий оператор 4, 692
- ряд Лорана 1, 679
- - Фурье 3, 1115
- случайный процесс 5, 17
- - - стационарный 5, 213
- собственный вектор 5, 130
- характер Чжэня 5, 866
- четырехугольник 5, 831
- якобиан 5, 1047
Обобщенных сечений пространство 3, 365
Обобщенных функций произведение 3, 1125
Обобщенных функций пространство 3, 1126
Обогащение модели 5, 164
σ-обогащение модели 2, 1059
Оболочек теория 3, 1127—1129
Оболочка аффинная 1, 355
- выпуклая 1, 788
- голоморфности 1, 273, 1032
- инъективная 2, 664
- линейная 3, 308
- сдвиговая 4, 1100
Образ аналитический 1, 276
- векторного расслоения 1, 646
- гомоморфизма 2, 961
- линейного оператора 3, 370
- множества 4, 153
Образ морфизма категории 3, 1129
- подмножества 5, 714
- соответствия 5, 78
- сферический 5, 296
- формульный 4, 1105
- элемента 5, 78, 714
- эллиптический 1, 622
Образования правило 1, 111
Образующая By 5, 762
- инфинитезимальная 3, 1171
- квадрики 2, 797
- конуса 2, 1073
Образующая линия 2, 1033
Образующая параллелотопа 4, 205
Образующая поверхность 4, 985
Образующая прямолинейная 3, 380
- свободная 4, 1083
Образующий объект категории 3, 1130
Обратимый автомат 1, 50
- идеал 2, 387
Обратимый модуль 3, 1130
Обратимый пучок 3, 1130
- узел 5, 488
Обратимый элемент полугруппы 3, 1131
Обратная задача Стефана 5, 224
- - теории Галуа 1, 849
- - Штурма — Лиувилля 5, 911
Обратная корневая система 3, 16
Обратная матрица 3, 614, 1132
- прогонка 2, 293
- пропорциональность 5, 217
- связь 1, 63, 69
- система 4, 686
Обратная теорема 3, 1132
- - в теории приближения 4, 612, 625
Обратная функция 3, 1132
- -, производная 2, 272
Обратно параболическое уравнение 3, 1133
Обратное бинарное отношение 1, 488
- линейное преобразование 3, 351
Обратное отображение 3, 1133; 4, 153
- преобразование Фурье 5, 728
- уравнение Колмогорова 2, 361, 958
- число 2, 73
Обратной матрицы метод 4, 1153
- связи канал 2, 705
- функции метод 3, 815
Обратные гиперболические функции 3, 1134
- задачи теории потенциала 4, 520
Обратные тригонометрические функции 3, 1135
- элементы группы 1, 1138
Обратный дифференциал 2, 241
- оператор 3, 1133
- - линейный 3, 370
- предел 4, 683
- спектр 4, 686; 5, 100
- ход прогонки 4, 88, 89, 642
Обращение матрицы 3, 1136—1139
Обращение ряда 3, 1139; 5, 219
Обращение эллиптического интеграла 3, 1139
Обращения формула 2, 589
- - преобразования Лапласа 3, 197
- - сингулярного интеграла Гильберта 1, 969
- - Фурье 1, 883
Обращенный логарифм 1, 292
Обрыва момент 3, 526
Обрыва цепей условие 3, 1140
Обрывающийся марковский процесс 3, 526
Обусловленности число 4, 419, 420, 833
Обучающая последовательность 4, 872
Обучения задача без учителя 4, 872
- - с учителем 4, 872
Обход графа 1, 1112
Общая алгебра 3, 1140
- - Ли 3, 244
- валентность 5, 326
- группа Лоренца 3, 453
- декартова система координат 2, 80
- комбинаторная схема 2, 978
- мера 5, 73
- позиционная игра 2, 471
- синусоида 4, 1193

- смешанная задача Бицадзе 5, 46
- теория относительности 4, 145
Общая топология 3, 1141—1143
Общая точка 3, 1143
Общего положения точка 3, 1144; 4, 67
- типа алгебраическая поверхность 4, 113
- - П-разложение 4, 515, 516
Общее кратное 3, 89
Общее положение 3, 1144—1146; 4, 412
Общее решение 2, 286; 3, 339, 1146
- - разностного уравнения 4, 839
- - системы линейных уравнений 3, 358
- уравнение Бесселя 1, 462
- - динамики 1, 597
- - Риккати 4, 986
- хаусдорфово преобразование 5, 778
Общезначимая формула 3, 415, 418, 765, 1147; 4, 695, 700, 5, 618
Общезначимость 3, 1147; 5, 357
- финитная 5, 617
Общей ковариантности принцип 1, 1079
Общерекурсивная функция 1, 820, 3, 1147; 4, 960
Общерекурсивное множество 4, 852
Общерекурсивный оператор 3, 1147, 5, 833
Общий дифференциальный оператор обыкновенный 2, 345
- - - с частными производными 2, 346
Общий интеграл 2, 327, 567, 568, 3, 1148
- кольцевой алгоритм 1, 562
- масштаб 2, 746
- ранг группы 4, 861
- ряд Дирихле 2, 183
- сингулярный оператор 4, 1172
- тригонометрический ряд 5, 439
- элемент алгебры 2, 211
Общих представителей система 1, 773, 3, 1148
Общности квантор 3, 1148
Объединение 4, 942
- многозначных отображений 3, 720
Объединение множеств 3, 759, 1148
- подгрупп 4, 369
- свободное 4, 1086
- событий 1, 658
Объединения теорема для нормальных алгорифмов 1, 226
Объект аффинной связности 1, 356
Объект геометрический 1, 934, 3, 1148
- градуированный 2, 1001
- дифференциально-геометрический 1, 938
- инвариантный 2, 538; 3, 1176
- инициальный 5, 616
- инъективный 2, 665
Объект категории 2, 761; 3, 1148
- - групповой 1, 1149
- -, идеал 2, 483
- - инъективный 4, 683
- - косимплициальный 4, 1168
- - малый 3, 508
- -, подобъект 4, 378
- - проективный 4, 682
- -, произведение 4, 688
- -, расслоенное произведение 4, 895
- -, ретракт 4, 975
- -, рефлектор 4, 978
- - симплициальный 4, 1168
- квазитензорный 1, 937
- конструктивный 2, 1043, 1057
- кривизны 4, 1095
- линейный 1, 937
- - однородный 1, 937
- оснащенный 1, 938
- пунктированный 4, 765
- связности 4, 1094
- терминальный 4, 689, 5, 616
- унарный 3, 758
- управления 2, 853
- финальный 5, 616
G-объект 1, 934
- категории 1, 1017
Объектная программа 5, 419
Объектный язык 4, 1185
Объем 3, 1149—1151
- смешанный 5, 49
Объема функция 3, 659
Объемлющая изотопия 2, 519
Объемности аксиома 1, 105; 3, 1151; 5, 352
Объемный потенциал 3, 1151, 4, 524
- -, Гаусса формула 4, 524
- - Грина 4, 529
- - ньютонов 4, 524
Обыкновенная дихотомия 2, 363
- синусоида 4, 1193
- точка 2, 248, 251
- эллиптическая кривая 5, 981
Обыкновенное дифференциальное уравнение 2, 282
- - - линейное 3, 339
- - - - 2-го порядка 3, 337
- - -, приближенные методы решения 2, 290, 626
Обыкновенный линейный дифференциальный оператор 3, 364
- ряд Дирихле 2, 183
- узел 5, 475
Овал 3, 1152
- декартов 2, 79
- Кассини 2, 759
- кривой 2, 70
-, Крофтона формула 2, 572
Овалоид 2, 432, 3, 1153
Овоид 3, 1153
Овраг, дно 3, 1153
-, размерность 3, 1154
Овражная функция 3, 1153
Овражных функций метод минимизации 3, 1153—1157
Огибающая 2, 250; 3, 1157—1159
- средняя 5, 923
Ограничение меры 3, 638
- оператора 4, 19
- отображения 5, 390
- представления 5, 269
- расслоений 4, 893
Ограниченная алгебра Ли 3, 248
- алгоритмическая проблема 1, 221
- вариация 1, 606
- - Витали 1, 709
- - Фреше 5, 664
- задача трех тел 2, 870, 5, 431
- знакопеременная группа 4, 1142
- область 3, 1098
- проблема Бёрнсайда 1, 416
- симметрическая группа 4, 1142
- табличная сводимость 4, 958, 5, 317
- функция 5, 715
Ограниченно компактное множество 3, 1159
- полный базис 1, 378
Ограниченного вида класс функций 1, 1100
Ограниченного вида функция 3, 1159
Ограниченно-детерминированная функция 3, 1160
Ограниченное исчисление 4, 513
Ограниченное множество 3, 1161
- -, чебышевский радиус 5, 850
- -, - центр 5, 850
- подмножество 5, 379
- поле 5, 275
Ограниченной вариации функция 3, 1162
- кривизны двумерное многообразие 2, 56
- - пространство 4, 1008
Ограниченность по вероятности 5, 240
- равномерная 4, 786
- стохастическая 5, 240
Ограниченный квантор 2, 837, 3, 1162, 4, 637
Ограниченный оператор 3, 1162
- - линейный 3, 372, 4, 19
- - минимизации 4, 637
- - нелинейный 3, 959
Ограниченных измеримых функций пространство 1, 387
Ограничивающий цикл 1, 1043
Одновершинное распределение 3, 763; 5, 503
Одновременная рекурсия 4, 962
Одновременное разрешение особенностей 4, 119
Одновременный комитант 2, 980
Однозначная ветвь аналитической функции 1, 681
- функция 5, 715
Однозначного характера особая точка 4, 115
Однозначное отображение 3, 720
Однозначно-определенная выпуклая поверхность 1, 790
Одноклеточный оператор 3, 1008
Однократный числовой ряд 4, 1063
Однолистная функция 1, 266, 3, 1163—1168
- -, вариация 1, 605
- -, вариационная формула 1, 737
- -, Дженкинса теорема 2, 110
- - звездообразная 2, 449
- -, параметрическое представление 4, 218
- -, Тейхмюллера принцип 2, 110
Однолистное отображение 5, 714
Однолистности радиус 3, 1168
Однолистности условия 3, 1168—1170
Одномерная оптимизация 3, 490
- сетевая модель 4, 1120
Одномерное многообразие 3, 1170
- слоение 2, 884
Одномерные задачи вариационного исчисления 1, 594
Одномерный многоугольник 3, 749
- оператор 4, 241
- - сингулярный интегральный 2, 605
- случайный процесс 5, 23
Одноместная операция 4, 18
Одноместное исчисление предикатов 3, 419
Одноместный функтор 5, 685
Однопараметрическая группа преобразований 3, 1170
Однопараметрическая подгруппа 3, 1171
Однопараметрическая полугруппа 3, 1171
Однопериодическая функция 3, 1172
Однополостный гиперболоид 1, 1000; 3, 1172
- -, горловой эллипс 1, 1000
Однородная булева алгебра 1, 552
- краевая задача 3, 75
- линейная функция 3, 319
Однородная ограниченная область 3, 1172
- переходная функция 4, 259
- проблема геометрии чисел 1, 945
- разностная схема 4, 845
- система линейных уравнений 3, 358
- структура 1, 50
Однородная функция 3, 1173
- цепь Маркова 3, 518
Однородное аналитическое множество 1, 280
- диофантово приближение 2, 162
- дифференциальное уравнение 3, 339
- интегральное уравнение 2, 590
Однородное комплексное многообразие 3, 1173—1175, 1176
- кэлерово многообразие 3, 1174
- линейное уравнение 3, 355
Однородное пространство 2, 874, 3, 1175—1179
- - группы 3, 1175, 4, 66
- -, инвариантный объект 2, 538
- - обобщенное 1, 934
- - риманово 4, 1026
- - симметрическое 4, 1147
- - симплектическое 4, 1157
- расслоение 3, 1177
- случайное поле 5, 18
- - - изотропное 5, 19
- - -, спектральная функция 5, 119
- уравнение Вольтерра 1, 752
- - диффузии 2, 359
Однородные координаты 3, 1180; 4, 681
- - тангенциальные 5, 321
Однородный арифметический минимум лучевой функции 1, 945
- во времени случайный процесс 5, 209
Однородный выпуклый конус 3, 1180
- гармонический трехчлен 1, 886
- канал без памяти 2, 701
- - с конечным числом состояний 2, 704
- марковский процесс 3, 525
- многочлен 3, 753
Однородный оператор 3, 960, 1181
- случайный процесс с независимыми приращениями 5, 29
Однорядное кольцо 3, 1182
Односвязная группа 3, 1182, 5, 891
Односвязная область 3, 1098, 1182
- -, Каратеодори теорема 2, 720
- риманова поверхность 4, 1018
Односвязное симплициальное множество 4, 1165
Односкоростное уравнение 4, 248
Односортный язык 5, 637
Односторонне образующее разбиение 5, 1004
- связный граф 1, 1109
Одностороннее преобразование Лапласа 3, 196
- приближение 4, 608
Односторонние и двусторонние поверхности 3, 1182
- связи 1, 1034
Односторонний предел 3, 1183, 4, 560
Односторонняя гипотеза 4, 1138
- поверхность 3, 1183
Односторонняя производная 3, 1184
Одноступенчатый план 5, 183
Односукцедентная секвенция 4, 1105
Однотактная релейно-контактная схема 4, 969
Однотипные распределения 4, 886
Одноточечное бикомпактное расширение 5, 393
Одноурновая задача стандартизации 5, 166
Одночлен 3, 1184
Одноэргодичность 5, 247
Ожидание математичсское 3, 600
Означаемое 5, 254
Означающее 5, 254
Ока принцип 5, 900
- теорема о когерентных пучках 2, 905
- - о псевдовыпуклых областях 1, 1031
- - о римановых областях 4, 1014
Ока теоремы 4, 9
Ока — Вейля теорема 4, 9
Ока — Картана теория 2, 739
Окаймление пространства 4, 9
Окаймления метод 4, 9—11
Окатывание 4, 11
Океанологии математические задачи 4, 11—14
Окно Вивиани 1, 693
- ковариационное 5, 125
- корреляционное 5, 120
- спектральное 5, 119
Окольцованное пространство 4, 14
- -, когерентный пучок 2, 905
Окончательная позиция 4, 386
Окрестностный ретракт 4, 976
Окрестность 4, 14; 5, 389
- дифференциальная 2, 260; 3, 423
- отмеченная 3, 445

- параметрическая 3, 445
- тонкая 5, 365
- точки 1, 738
- трубчатая 5, 449
Округление 4, 14
-, ошибка 4, 15
-, погрешность 4, 15
Округления точка 2, 252; 4, 15
Окружности концентрические 4, 15
Окружность 4, 15
- Аполлония 1, 298
- геодезическая 1, 927; 4, 438
- девяти точек 2, 63
- Зейферта 5, 479
- кривизны 3, 118
- на плоскости Лобачевского 3, 398
-, пучок 4, 771
-, радиус 4, 808
-, связка 4, 1089
- соприкасающаяся 2, 250; 5, 79
- фундаментальная 4, 1090
- Эйлера 2, 63
Октант 2, 80; 4, 16
Октаэдр 4, 16
Октаэдра пространство 4, 16
Октаэдрическая ткань 5, 357
Омбилическая точка 3, 97; 4, 15, 17
«Омега-квадрат» критерий в математической статистике 3, 88
«Омега-квадрат» распределение 4, 17
Омега-непротиворечивость 4, 17
Омега-полнота 4, 17
Омонимия синтаксическая 4, 1183
О'Нэна — Симса группа 5, 149
Операнд 4, 18, 404
Оператив 1, 1150
Оператор 4, 18—21, 26
- автоматный 5, 695
- аккретивный 2, 228
- алгоритмический 2, 1052
- аналитический 1, 276
- антитонный 3, 960
- базовый 1, 224
- Банаха — Мазура 1, 379
- в алгоритмическом языке 1, 224
Оператор в программировании 4, 18
- взятия внутренности 4, 727
- вложения 1, 723
- вогнутый 1, 738
- волновой 2, 9; 5, 128
- Вольтерра 1, 752, 754
- вольтерров 3, 1007; 5, 117
- вполне непрерывный 1, 759, 2, 994; 3, 373, 960; 4, 19
- всюду определенный 4, 18
- входной 4, 241
- вызова процедуры 1, 224
- выпуклый 1, 738, 802
- вырождения 4, 1161, 1167, 1169
- Гамильтона 1, 854
- Гаммерштейна 3, 959
- Гекка 3, 787
- Гильберта — Шмидта 1, 977; 5, 116
- гипермаксимальный 4, 1074
- гомотопии 4, 632
- граней 4, 1161, 1167, 1169
- граничный 1, 1047, 1063; 2, 953, 998
- Грина — де Рама 5, 789
- Д'Аламбера 2, 9
-, дефектное подпространство 2, 100
-, дефектное число 2, 99
- дефинизирующий 2, 101
- Джексона 2, 110
- диагонально клеточный 2, 123
- диагональный 2, 124
- Дирака 5, 140
- диссипативный 2, 228; 4, 905
- дифференциальный 2, 345; 4, 900
- дифференцирования 4, 20, 26
-, дифференцируемый по Гато 3, 960
-, - по Фреше 3, 960
- единичный 4, 20
- замкнутый 2, 437, 4, 19
- замыкания 1, 373
- - мультипликативный 4, 727
- звездного сопряжения 2, 238
- изометрический 2, 505
- изотонный 3, 960
-, индекс 2, 550, 4, 1174
-, индекс дефекта 2, 101
- интегральный 2, 604; 4, 20
- интегрирования 4, 26
- интегро-дифференциальный 3, 959
-, интерполирование 2, 627
- инфинитезимальный 2, 645; 3, 1113, 4, 262, 451, 692
- Иосиды 3, 333
- Казимира 2, 698
- Кальдерона — Зигмунда 2, 699
-, каноническое представление 3, 1056
- ковырождения 4, 1169
- кограней 4, 1169
- когранический 2, 954
- компактный 2, 994, 3, 373, 960; 4, 19, 5, 128
- комплексного дифференцирования 3, 67
- конечного порядка 3, 1006
- - ранга 5, 1037
- Коши 3, 59
- Лапласа 3, 194
- Лапласа — Бельтрами 3, 194
- линейный 1, 644; 3, 291, 369; 4, 19
- - дифференциальный 3, 364
- максимальный монотонный 3, 814
- массовый 3, 559
-, матричный след 5, 1040
- минимизации 3, 875; 4, 960
- - ограниченный 4, 637
- многозначный 4, 19
- модальный 3, 764
- монодромии 2, 773, 3, 60, 806, 4, 131
- монотонный 3, 814, 960
- набла 1, 854
- наилучшего приближения 3, 659
- наименьшего числа 3, 875
- нелинейный 3, 958; 4, 19
- Немыцкого 3, 959
- неограниченный 3, 376, 963
- непрерывный 3, 993; 4, 19
- нерастягивающий 3, 978
- несамосопряженный 3, 1006
- нётеров 3, 1025
- нефредгольмов 2, 554
- неявный 3, 1036
-, норма 3, 1162
-, нормальная форма 3, 1056, 1057
- нормально разрешимый 3, 1026, 1061
- нормальный 3, 375, 1074
- нулевой 4, 20
- обобщенно фредгольмов 3, 1027
- обобщенного сдвига 3, 1111
- обратный 3, 1133
- общерекурсивный 3, 1147; 5, 833
- ограниченный 3, 1162
- одноклеточный 3, 1008
- одномерный 4, 241
- однородный 3, 960, 1181
- ортогонального проектирования 1, 981
- ортогональный 3, 375
- передачи управления 1, 224
- перечисления 4, 262
-, подобие 4, 378
- полилинейный 3, 960; 4, 407
- полный 4, 428, 5, 116
- положительно определенный 4, 432
- положительный 4, 434, 905
-, полугруппа 4, 447
- полунепрерывный 4, 19
- полуограниченный 4, 462
- - снизу 4, 905
- полуфредгольмов 3, 1062
- поля 4, 475
-, полярное разложение 4, 479
- порождающий 1, 373
- потенциальный 3, 947, 960; 4, 537
- преобразования 5, 918
- Привалова 4, 629
- примитивной рекурсии 4, 960
- присваивания 1, 224
- проекционный 4, 684
- производящий 4, 451, 692, 1126
- псевдодифференциальный 4, 733
- равномерно непрерывный 3, 993
- разностный 4, 841
-, расширение 4, 904
- расширенно расщепляющийся 4, 912
- расщепляющийся 4, 912
-, регуляризатор 4, 1176
- регуляризирующий 3, 933
- регулярный 2, 774
-, резольвента 4, 950
- рекурсивный 4, 962; 5, 833
- рождения 2, 990, 4, 1051, 5, 632
- с частными производными главного типа 1, 1013
- самосопряженный 3, 375, 4, 1074, 1146
- G-самосопряженный 1, 986
- сдвига 4, 27, 1099, 5, 771
- - по траекториям 3, 61
- секториальный 4, 905
- сжимающий 4, 1124
- сильно эллиптический 3, 362
-, символ 4, 1133
- симметрический 4, 1145; 5, 1018
- G-симметричный 1, 986
- симплектический 4, 1157
- сингулярный 4, 1172
- слабо непрерывный 4, 19
- - регулярный 2, 771
- слабого типа 2, 630
- - следом 5, 116, 1039
- собственно эллиптический 3, 362
-, собственное значение 5, 58, 98
-, - подпространство 5, 65
- собственный 4, 241
-, собственный вектор 5, 65
- совместности 3, 368
- сопряженный 5, 88
- союзный 4, 1172
-, спектр 5, 98
-, спектральное множество 5, 119
- спектральный 5, 131
-, спектральный след 5, 1041
- сплетающий 5, 147
- строго ядерный 5, 1038
- суперпозиции 3, 959; 4, 960
- счетно непрерывный 3, 993
- трансверсально эллиптический 5, 412
- умножения 4, 20
-, унитарная эквивалентность 5, 508
- унитарный 2, 505, 3, 375; 5, 514
- J-унитарный 1, 987; 5, 127
- уничтожения 2, 990; 5, 632
- уплотняющий 3, 977; 5, 522
- Урысона 3, 959; 5, 546
- усиленно непрерывный 4, 19
- факторизованный 4, 912
- Фредгольма 5, 679, 1038
- фредгольмов 3, 373, 1027
-, фундаментальная функция 4, 453
- цикла 1, 224
- циклический 3, 1056
- частично рекурсивный 5, 833
- числовой 4, 26
- Шварца 5, 886
- Штурма — Лиувилля 5, 915
- эволюционный 5, 924
- эллиптический 3, 360; 5, 991
- энергии 5, 178, 203
- эрмитов 3, 375; 4, 1074; 5, 1018
- ядерный 3, 373; 5, 116, 1037
-, ядерный след 5, 1040
F-оператор 3, 1027
μ-оператор 1, 820; 3, 875
Φ-оператор 3, 1027
∇-оператор 1, 854
Операторная группа 4, 21
- норма 3, 372, 1048
- схема 4, 650
Операторная топология 3, 374; 4, 22
- функция 4, 27
Операторная эргодическая теорема 4, 23
Операторно неприводимое представление 4, 24
Операторное вхождение переменной 4, 1083
Операторное кольцо 2, 961; 4, 24
- уравнение 5, 698
- - Вольтерра 1, 754
- - линейное 1, 754
Операторный алгоритм 1, 825
Операторный гомоморфизм 4, 22, 25
- изоморфизм 4, 22
Операторы рождения 5, 517
- уничтожения 5, 517
Операционная семантика 4, 650
- система 3, 597
Операционное исчисление 4, 25—28
Операция — см. соответствующее название
Опережающего типа уравнение 2, 295
Оперение пространства 4, 28, 270
Описание алгебраической системы 3, 766
- в алгоритмическом языке 1, 224
- модели 3, 770
- примитивно рекурсивное 4, 636, 963
Описанная кривая 1, 757
Описанный многоугольник 1, 758
Описательное определение 1, 781
Опорная гиперплоскость 1, 794, 797, 4, 29
Опорная плоскость 4, 29
- прямая 1, 793; 4, 29
- точка 4, 29
Опорная функция 1, 797; 4, 29
- - овала 3, 1152
Опорное полупространство 1, 797
Опорный функционал 4, 29
Опоясывание гомологическое 1, 1060
Определение индуктивное 2, 556
- непредикативное 5, 352
- описательное 1, 781
- рекурсивное 4, 961
Определения область 3, 48
Определенная билинейная форма 1, 713
- проблема моментов 3, 794
- система линейных уравнений 3, 357
Определенно расходящаяся последовательность 5, 1042
Определенное ядро 2, 101
Определенный интеграл 2, 564, 581; 4, 29
- - Лебега 2, 565
- - по Коши 3, 51
- - Римана 4, 992
M-определимое множество 2, 1053
Определитель 4, 30—32
-, Адамара теорема 1, 87
- бинарной квадратичной формы 1, 486
- Вандермонда 1, 578
- Вроньского 1, 768; 3, 339, 340
- Ганкеля 4, 187
- Грама 1, 1085
- квадратичной формы 2, 777
-, Лапласа теорема 1, 188
- Леви 3, 223
- решетки 5, 409
- Фредгольма 5, 653
- функциональный 5, 712
- Якоби 5, 1058
Определяющая последовательность областей 4, 1029
- псевдогруппа 4, 732
Определяющая система окрестностей 4, 32
Определяющее уравнение 4, 33
Определяющие соотношения универсальной алгебры 4, 33
Опровержимая формула 4, 34
Оптимальная вероятность ошибочного декодирования 4, 185
Оптимальная гарантирующая стратегия 4, 34
Оптимальная квадратура 4, 34
- квадратурная формула 3, 867
- оценка погрешности 4, 61
- стабилизация системы 4, 44
- - стохастическая 4, 45

- стратегия 5, 529, 532
- точка 3, 602
Оптимальная траектория 4, 35
- функция Ляпунова 1, 66
ε-оптимальная стратегия 5, 529, 532
Оптимального быстродействия задача 4, 36
- регулятора аналитическое конструирование 4, 44
- управления задача 1, 584; 4, 37, 41, 487
Оптимального управления математическая теория 4, 37—41
Оптимальное бейесовское решение 4, 508
Оптимальное декодирование 4, 41
- по Парето решение многокритериальной задачи 3, 722
- поведение автомата в случайной среде 1, 57
- правило 2, 216
- программирование 2, 677
- резервирование 3, 857
- решение 2, 676
Оптимальное управление 4, 39, 41, 48, 488
- - адаптивное 4, 47
- - в условиях неопределенности 4, 40
- - особое 4, 54
Оптимальное управление позиционное 4, 42—47
Оптимальное управление программное 4, 47—51
- - стохастическое 4, 40, 45
- - условное 2, 155
π-оптимальное решение 4, 508
Оптимальности достаточные условия 4, 51—54
Оптимальности принципы 2, 155; 4, 43, 54
Оптимальный код 2, 937
- метод 4, 61
- момент остановки 4, 508
- план 3, 602
- по порядку метод 3, 695
Оптимальный режим особый 4, 54—58
Оптимальный режим скользящий 4, 58—61
Оптимальных регуляторов аналитическое конструирование 1, 66
Оптимизационная задача 2, 676
Оптимизация вычислительного метода 4, 61
Оптимизация вычислительных алгоритмов 4, 61—63
- дискретная 5, 800
- кибернетической системы 2, 853
- одномерная 3, 490
Оптимизирующее преобразование программ 4, 643
Оптическая длина пути 1, 857
Оптическое свойство параболы 4, 192
Опускание индекса 5, 328
Опциональная σ-алгебра 4, 63
Опциональный случайный процесс 4, 63
Орбит метод 4, 63—66
- пространство 4, 66
Орбита 2, 147; 4, 66—68
- группы 4, 382
- точки 2, 68
Орбитальная устойчивость 4, 68
Орбитально устойчивый предельный цикл 4, 575
Орбитального разложения задача 4, 67
Орбитальное разложение 2, 544
Ординал 1, 319; 4, 69, 501
- рекурсивный 5, 421
Ординальная сумма 5, 525
Ординальное произведение 3, 233
Ординальное число 1, 783, 4, 69, 501
Ординальный признак 3, 733
Ординарная сумма 4, 1091
Ординарный поток 3, 541
- случайный точечный процесс 5, 31
Ордината 1, 244, 358, 2, 80; 4, 69
Оре теорема о дедекиндовых решетках 2, 64
- - о кольцах 1, 341
- - о решетках 4, 983
- условие для полугрупп 1, 723
Оригинал 3, 197
Ориентационный класс 5, 684
Ориентация 4, 69—73
-, когерентность 2, 662
- многообразия 4, 70
- расслоения 4, 71, 72, 5, 362
Ориентированная бордантность многообразий 1, 533
- площадь 4, 328
Ориентированное расслоение 4, 71
Ориентированный бордизм 1, 533
- граф 1, 1105, 1108
- кобордизм 2, 891
- симплекс 2, 996; 4, 70
Ориентируемое многообразие 4, 70
- расслоение 4, 72
- слоение 2, 884
Ориентируемый многогранник 3, 711
- многоугольник 3, 750
- путь 3, 750
- пучок 1, 1058
Ориентирующее накрытие 4, 70
Ориентирующий пучок 1, 1058
Ориентирующий цикл 4, 71
Орисфера 4, 73
Орицикл 3, 399; 4, 73, 167
Орициклический поток 4, 73
Орлича класс 4, 74
- норма 4, 75
Орлича пространство 4, 75
Орнстейна — Чекона эргодическая теорема 4, 76
Орнштейна — Уленбека процесс 4, 76
Орра — Зоммерфельда уравнение 4, 78
Орт 1, 632, 634; 4, 79
Ортогонализации метод 4, 79
Ортогонализации процесс 4, 80
- - Грама — Шмидта 1, 982
Ортогонализация 4, 80
Ортогонализация системы функций 4, 80
Ортогональная аксонометрия 1, 113
- алгебраическая группа 4, 83
Ортогональная группа 2, 866; 4, 81—84, 478
- - вещественная 4, 84
- линейная регрессия 3, 309
Ортогональная матрица 3, 616; 4, 84
- проекция 4, 688
Ортогональная сеть 4, 85
- симметрическая алгебра Ли 1, 1025
Ортогональная система 4, 85
Ортогональная таблица 4, 87
Ортогональная траектория 2, 502, 4, 87
- - дифференциала 2, 786
Ортогонального проектирования линейный метод приближения 4, 609
- - оператор 1, 981
Ортогональное дополнение 1, 484, 980
- - множества 1, 644
Ортогональное преобразование 4, 81, 87
- разложение Ходжа 3, 196
G-ортогональное дополнение 4, 718
Ортогональной прогонки метод 4, 88
Ортогональности свойство характера Дирихле 2, 192
Ортогональность 4, 89
Ортогональные векторы 1, 980
- идемпотенты 2, 486
- квазигруппы 2, 804
Ортогональные латинские квадраты 4, 90—92
- - прямоугольники 3, 209
- линейные многообразия 1, 980
Ортогональные многочлены 4, 92—97
Ортогональные многочлены в комплексной области 4, 97—99
- - классические 2, 868
- соквадраты 4, 90
- функции 4, 90
- элементы 5, 256
Ортогональный базис 4, 85, 99
- кобордизм 2, 891
- массив 4, 87
- оператор 3, 375
- подмодуль 1, 484
Ортогональный проектор 4, 99
- репер 4, 974
Ортогональный ряд 4, 100—104
Ортогруппа 2, 883
Ортодополнение 4, 104
Ортодромическая проекция 2, 742, 753
Ортомодулярная решетка 4, 104
Ортоморфизм 4, 91
Ортонормированная система 1, 980, 4, 105
- - векторов 4, 85
- - функций 4, 85
Ортонормированное множество 1, 980
Ортонормированные многочлены 4, 93
Ортонормированный базис 1, 492, 634, 981; 4, 85, 99
- репер 4, 974
G-ортонормированный базис 4, 719
J-ортонормированный базис 1, 986
Ортооптическая кривая 2, 512
Ортопроектор 4, 99
Ортоцентр 4, 105
Ортоцентрический треугольник 5, 598
Освещения задача 4, 105
Осгуда условие 3, 49
Осгуда — Брауна теорема об аналитическом продолжении 4, 117
- - - об устранении особенностей 1, 894
- - - об устранимых множествах 5, 582
Осгуда — Гобсона теорема о равномерной сходимости 4, 792
Осевая окружность тора 5, 405
Осевой вектор 4, 106
Ослабления метод 4, 966
Ослабленная проблема Гольдбаха 1, 94
Ослабленное решение 3, 332
Оснащение 3, 744, 5, 284
Оснащенное гильбертово пространство 4, 106, 5, 130
- зацепление 5, 490
Оснащенное многообразие 4, 107; 5, 284
- - дифференцируемое 1, 938
Оснащенный объект 1, 938
- поток 4, 539
Основа вхождения 1, 772
Основание изгибания 4, 107
- конуса 2, 1074
- логарифма 3, 405
- отображения 4, 157
- пирамиды 3, 709
- призматоида 4, 634
- призмы 3, 709; 4, 633
- трапеции 5, 428
- трубчатой области 5, 449
- цилиндра 5, 818
- цилиндрической поверхности 5, 819
Основания геометрии 4, 107—113
Основная гармоника 1, 887
- гипотеза в статистике 5, 185
- - комбинаторной топологии 3, 152, 4, 486
- квадратичная форма поверхности 1, 770
- лемма Привалова о сингулярном интеграле Коши 4, 630
- серия представлений 4, 1117
- - - унитарных 5, 512
- структурная теорема для топологических групп 5, 368
- теорема алгебры 1, 199
- - арифметики 4, 876
- - вложения Соболева 1, 724
- - Гартогса о голоморфных функциях 1, 269, 893
- - о расширениях Ганца 1, 845
- - теории Ганца 1, 851
- - элементарной теории чисел 4, 706
Основного типа алгебраическая поверхность 4, 113
Основное множество алгебраической системы 1, 155
- соответствие Галуа 1, 164
- тождество Урысона 4, 822
Основной алфавит 1, 1092
- инвариант поверхности 2-го порядка 4, 344
- контакт 4, 968
- метрический тензор 4, 1013
- модуль 2, 192
- параллелограмм периодов 2, 50
- период 4, 268
- предикат 1, 207
- резонанс 4, 217
- символ 1, 1090, 1092
- тензор 3, 668; 4, 235
- функтор 5, 686
Основные единицы поля алгебраических чисел 2, 187; 4, 946
- периоды абелевой функции 1, 22
Особая алгебра Ли 3, 272
- билинейная форма 1, 483
- группа Ли 3, 272
- линия 4, 125
- матрица 1, 806
Особая точка 2, 248, 251, 4, 113—125, 784
- - алгебраическая 1, 173, 679
- - алгебраически-логарифмическая 1, 182
- - алгебраического многообразия 4, 118
- - аналитического пространства 1, 285
- - аналитической функции 1, 264; 4, 113
- - - -, Иверсена теорема 2, 469
- - бесконечно удаленная 1, 253, 4, 749
- - векторного поля 4, 120
- - дифференциального уравнения 4, 120
- - - - регулярная 3, 338
- - дифференцируемого отображения 4, 123
- - изолированная 2, 503
- - иррегулярная 1, 251; 2, 667
- - квадрики 2, 796
- -, кратность 3, 90
- - кривой 4, 119, 124, 310
- - многозначного характера 1, 679
- - неподвижная 3, 975
- - поверхности 4, 120, 124
- - подвижная 4, 363
- -, ранг 4, 859
- - регулярная 1, 251; 4, 934
- - схемы 1, 1020
- - устранимая 5, 581
- экстремаль 4, 938
Особенная гомология 1, 1060
Особенности дифференцируемых отображений 4, 125—131
Особенность алгебраического многообразия 4, 118
Особенность аналитической функции 4, 131
- гореншгейнова 4, 915
- дю Валя 4, 119, 915
- каноническая 4, 916
- Клейна 4, 915
- краевая 4, 130
- полярная 4, 1206
- простая 4, 915
-, разрешение 4, 849
- рациональная 4, 915
- слабая 4, 1206
- спектральная 3, 1008
- универсальная 4, 127
-, фундаментальный цикл 4, 120
-, характеристика 4, 120
Особого режима участок 4, 938
Особое интегральное уравнение 2, 592, 3, 1030
- оптимальное управление 4, 54
Особое решение 4, 131
- управление 4, 50
Особой точки индекс 4, 132
Особые показатели 4, 132—134
Особый интеграл 2, 327, 3, 52
- оптимальный режим 4, 54

- показатель 3, 330
- слой эллиптической поверхности 5, 984
- элемент 4, 414
Осреднение 4, 134
Остановка, цена 4, 508
Остановки момент 3, 523
Остаток 2, 81
- ряда 4, 1064
Остаточная тактическая конфигурация 5, 319
- функция 3, 1161
Остаточное множество 2, 764
Остаточный спектр 3, 373, 5, 98
Остаточный член 4, 135
- - интерполяции 2, 634
Остов 2, 92; 3, 765, 4, 687, 696
- комплекса 2, 995
- k-мерный 2, 880
- области Вейля 1, 629
- поликруга 4, 405
- симплициального множества 4, 1163
- симплициальной схемы 4, 1159
Остовное дерево 2, 92
Остовный подграф 1, 1106
Острие клина, Боголюбова теорема 1, 511
- Лебега 2, 667; 4, 530
Островского теорема об абсолютном значении 1, 42
- условие 2, 799
Остроградского метод 4, 135
- уравнение 3, 728
Остроградского формула 4, 136
Остроградского — Лиувилля формула 4, 137
Осциллирующее решение 4, 137
Осциллятор Ван дер Поля 1, 577
Осциллятор гармонический 4, 137, 1085
Осцилляционная матрица 4, 138
Осцилляционное дифференциальное уравнение 4, 138
Осцилляционное ядро 4, 139
Ось 1, 634
- абсцисс 1, 358; 2, 80
- аппликат 1, 358, 2, 80
- вещественная 2, 1008
- винта 1, 706
- вращения 1, 764
- гиперболы 1, 988
- гомологии 1, 1060
- действительная 2, 1008
- конуса 2, 1074
- координат 1, 358, 2, 80
- мнимая 2, 1008
- Монжа 2, 326, 3, 799
- ординат 1, 358; 2, 80
- параболы 4, 191
- переноса 4, 1151
- радикальная 4, 772, 808, 1090; 5, 222, 287
- симметрии 4, 1150
- цилиндра 5, 818
- Чеха 4, 668
- эллипса 5, 977
- эллиптического параболоида 5, 993
Отбора метод 3, 816
Отделения правило 3, 790
Отделенная аксиоматика 3, 414
Отделимая S-схема 5, 300
- фильтрация 5, 616
π-отделимая группа 4, 139
Отделимое пополнение кольца 4, 140
Отделимое топологическое векторное пространство 5, 380
- - кольцо 5, 385
Отделимости аксиома 4, 140, 5, 390
- принцип 2, 94, 95
- принципы Лузина 3, 456
Отделимость голоморфная 5, 899
Отделимость множеств 4, 140
- функциональная 4, 140, 5, 694
Отделимый морфизм 4, 1113
Отказа вероятность 3, 540
Отклонение 3, 658, 5, 779
- аргумента 2, 294
- вероятное 1, 655
- квадратичное 2, 782, 3, 877
- срединное 1, 655
- стандартное 2, 782; 5, 168
Отклоненность вершины графа 1, 557
Откоса линия 4, 141
Открытая база 1, 371
Открытая звезда 5, 434
- кибернетическая система 2, 852
- модель транспортной задачи 5, 420
- риманова поверхность 4, 1015
- топология 5, 374
Открытое многообразие 3, 743, 4, 141
- двумерное 2, 53
Открытое множество 4, 141
Открытое отображение 4, 142, 155, 5, 384
- покрытие, Бореля — Лебега теорема 1, 540
- проективно метрическое пространство 4, 667
Открытое ядро 4, 143
Открыто-замкнутое множество 4, 143
Открытый подкомплекс 2, 995
- промежуток 4, 695
- узловой сектор 4, 1106
- шар 5, 881
Отладка программы 4, 646
Отладочный транслятор 1, 225
Отмеченная окрестность 3, 445
- точка 4, 1165
Отмеченное отображение 3, 445
Отмеченный класс расширений 4, 1114
- круг 3, 445
Отнесения система 3, 9
Относительная гомологическая алгебра 4, 143
- группа Вейля 1, 626; 4, 144
- -, Гуревича теорема 1, 1066
- - гомологии комплекса 2, 999
- - когомологии комплекса 2, 1000
- - когомотопическая 2, 927
- избыточность 2, 940
Относительная метрика 4, 144
- непротиворечивость 1, 110
- погрешность 4, 356
- проекционная константа 1, 390
- рекурсивность 3, 1002
Относительная система корней 4, 144
- схема Пикара 4, 285
Относительная топология 4, 145
- энтропия 2, 657
- ε-энтропия 5, 1008
- эффективность критерия 5, 1026
Относительно бикомпактное множество 4, 145
- выпуклая подгруппа 1, 792
- инвариантный интеграл 2, 532
- компактное множество 2, 992
- минимальная модель 3, 683
- определимая элементарная теория 5, 973
Относительно открытое (замкнутое) множество 4, 145
- равномерная сходимость 4, 1037
- свободная группа 4, 1082
Относительное клеточное разбиение 2, 880
Относительности принцип 4, 145
- - Галилея 1, 844
Относительности теория 4, 145—153
Относительные гомологии 4, 151
- когомологии 2, 913, 4, 151
- - де Рама 4, 855
Относительный инвариант 1, 937
- - в теории эллиптических функций 3, 788
- - дифференциальный 2, 344
- - интегральный 2, 601
- - формы 2, 541
- - $\flat$-функции 1, 622
- масштаб 2, 746
- функтор Пикара 4, 284
- - производный 4, 143
Отношение 4, 151
- аддитивное 1, 94
- ангармоническое 1, 289; 2, 27
- бинарное 1, 488
- - единичное 1, 488
- близости 1, 500
- вынуждения 1, 783
- гармоническое 2, 27
- двойное 2, 27
- дисперсионное 5, 627
- доминирования 2, 1103
- замыкания 2, 438
- корреляционное 3, 26
- модулярности 4, 456
- подчинения 4, 384
- порядка 4, 505
- правдоподобия 5, 172
- примитивно рекурсивное 4, 636
- простое 4, 706
- равенства 1, 488
- рекурсивное 4, 961
- рефлексивное 4, 978
- связности 1, 505
- симметричное 4, 1149
- синтаксического подчинения 4, 1183
- сложное 2, 27
- Стьюдента 4, 179
- транзитивное 5, 412
- универсальное 1, 488
- функциональное 5, 697
- функциональной эквивалентности 5, 945
- чисел 2, 81
Отношения правдоподобия критерий 4, 152
Отображение 4, 152—154; 5, 713
- аддитивное 1, 1133
- аналитическое 1, 281, 285
- антиконформное 1, 292
- антилинейное 4, 458
- антитонное 1, 297
- аффинное 1, 362
- базисное 1, 374, 375
- биголоморфное 1, 268, 471
- биективное 1, 471, 3, 760, 5, 714
- бикомпактное 1, 472; 4, 155
- билинейное 1, 484
- бимероморфное 3, 651
- бирациональное 1, 494; 4, 309, 920
- бифакторное 1, 496
- Веронезе 1, 654
- взаимно однозначное 2, 665, 5, 714
- внутреннее 1, 735
- вполне замкнутое 1, 758
- вполне непрерывное 1, 759
- вырезания 2, 1000
- гауссово 5, 297
- геодезическое 1, 931
- Гессе 5, 223
- голоморфное 1, 268, 282, 285, 1030
- гомеоморфное 1, 1035
- гомотопически ассоциативное 4, 713
- - мономорфное 1, 1068
- - устойчивое 4, 128
- - эпиморфное 1, 1068
- n-гомотопное 1, 1069
-, гомотопность 1, 1075
-, график 1, 1115, 5, 384
-, диагональное произведение 2, 124
-, дифференциал 2, 352
-, дифференцирование 2, 351
- дифференцируемое 2, 352
- дробно-линейное 2, 384
- дуальное 4, 310
- ефимовское 5, 298
- замкнутое 2, 435, 4, 155
- измеримое 2, 498, 3, 638
- B-измеримое 1, 535
- изометрическое 2, 505
- изоморфное 2, 512
- изотонное 2, 518
- инфинитезимально устойчивое 4, 128
- инъективное 2, 665
- Ито — Сигала — Вика 5, 633
- касательное 2, 352, 755
- квадратичное 2, 777
- квазиконформное 2, 810
- квазирегулярное 2, 810
- клеточное 2, 878
- когранничное 3, 44
- конечное 2, 1021
- конечнократное 2, 1021; 4, 156
- конструктивное 2, 1054
-, конус 2, 1074
- конформное 1, 266, 2, 1091, 1099
- кремоново 4, 309
- кусочно линейное 3, 151; 4, 410
- n-линейное 4, 407
- мажорирующее 4, 1025
- мёбиусово 2, 1094
- мероморфное 3, 650
- многозначное 3, 720
- монотонное 2, 519, 3, 814, 4, 156, 1097
- непрерывное 3, 986, 4, 558
- δ-непрерывное 1, 501
- неприводимое 3, 996, 5, 390
- нерастягивающее 4, 1025
- несущественное 3, 1020
- нормальное 5, 297
- норменное 3, 1076
- нульмерное 3, 1084
- обратное 3, 1133
- однозначное 3, 720
- однолистное 5, 714
- открытое 4, 155, 5, 384
- отмеченное 3, 445
- параметрическое 3, 445
- периодическое 2, 548
Отображение периодов 4, 154
- перспективное 4, 278
- подобное 4, 378
- полилинейное 4, 407
- положительное 4, 434
- полулинейное 4, 458
- полунепрерывное 4, 460
- полярное 5, 298
- последования 2, 338, 4, 505
-, предел 4, 558
- приклеивающее 4, 1058
- проективное 1, 931
-, производная 2, 352
- псевдоконформное 1, 471, 4, 740
- псевдооткрытое 4, 155, 741
- Пуанкаре 4, 505
- равномерно непрерывное 4, 786, 795
- растягивающее 4, 896
- рациональное 4, 309, 919
- резидуальное 4, 948
- сепарабельное 4, 1113
-, сечение 4, 1124
- сжимающее 3, 672
- симметричное 4, 1149
- симплексов линейное 4, 1152
- симплициальное 2, 998, 3, 151; 4, 1159, 1161, 1168, 1169
- совершенное 2, 435, 4, 155; 5, 69
- - неприводимое 5, 69
- спектра 5, 99
- спроса 3, 587
-, степень 5, 221
- существенное 4, 823, 5, 283
- сферическое 5, 296
- сюръективное 5, 316
- Тайхмюлера 5, 317
- топологическое 1, 1035, 5, 390
- точечно-множественное 3, 720
- трансверсально регулярное 5, 413
- трансверсальное 5, 413
- универсальное 1, 1133
- факторное 4, 155, 5, 390, 592
- характеристическое 5, 766
- эквивариантное 2, 980
- эквилонгальное 4, 1025
- экспоненциальное 4, 1006, 5, 954
- ядерное 5, 1037
C^k-отображение 2, 355
pl-отображение 3, 151
Г-отображение 3, 743
Отображений классы 4, 155
Отображений метод 2, 499, 4, 156
- пространство 4, 715
Отображения вариация 1, 606
Отображения главная сеть 4, 157
Отождествления абстракция 1, 44
Отражение 4, 157, 1150
- поворотное 1, 765
Отражений группа 4, 158—160
Отражения принцип 4, 160
Отрезок 2, 615; 4, 160; 5, 881
- без контакта 2, 392
- Жюлиа 2, 427
-, конгруэнтность 4, 675
- конденсации 2, 22
- симплициальный 5, 168
- сообщений 2, 682

G-отрезок 1, 927
Отрицание 1, 124; 4, 161
- сильное 2, 1040
Отрицания антецедента закон 4, 386
- двойного закон 2, 25
Отрицательная асимметрия 1, 331
- вариация заряда 2, 444
Отрицательная вариация функции 4, 161
Отрицательная корреляция 4, 161
- полутраектория 5, 587
Отрицательно асимптотическая точка 4, 570
- градуированный модуль 1, 1084
- определенная билинейная форма 2, 563
- определенное эрмитово ядро 5, 1023
- - квадратичная форма 2, 778
- устойчивая по Лагранжу траектория 5, 567
- - по Пуассону точка 4, 570
Отрицательное биномиальное распределение 4, 161
Отрицательное гипергеометрическое распределение 4, 162
- изменение функции 4, 161
- подпространство 4, 718
Отрицательное показательное распределение 4, 163
Отрицательное полиномиальное распределение 4, 163
Отрицательное расслоение 4, 163
- число 2, 73, 76, 77
- эрмитово ядро 5, 1023
Отрицательной кривизны поверхность 1, 973, 4, 163—173
Отрицательный индекс инерции 2, 778
- квадратичный дифференциал 2, 786
- эксцесс 5, 969
Отсчета система 4, 173
Отто — Эйленберга — Хемингсена теорема о перегородках 4, 827
Охватов метод 4, 657
Охватывающий геометрический объект 1, 936
Охваченный геометрический объект 1, 936
Оцанама квадратриса 2, 793
Оценивание доверительное 2, 365
- статистическое 5, 195
Оценка априорная 4, 844
асимптотическая 4, 498
-асимптотически несмещенная 1, 334
- бейесовская 1, 402
- Варшамова — Гилберта 2, 932
- Виноградова 1, 704; 2, 193
- двусторонняя 2, 58
- доверительная 3, 923
- интервальная 2, 615
- максимального правдоподобия 4, 551
- минимаксная 5, 195
- наибольшего правдоподобия 4, 551
- недопустимая 5, 195
- неравномерная 5, 806
- несмещенная 3, 1011, 4, 184; 5, 408
- Питмена 4, 290
- погрешности приближения 4, 606
- сверху 2, 58
- сверхэффективная 4, 1078
-смещенная 5, 51, 408
- снизу 2, 58
- состоятельная 5, 93
- спектральной плотности 5, 124
- - функции 5, 125
Оценка статистическая 4, 173—182, 5, 170
- суперэффективная 4, 1078
- точечная 5, 408
- эквивариантная 5, 947
- эффективная 3, 1013, 4, 867; 5, 1025
Оценки итерационных отклонений метод 4, 250
Очень **сильная суммируемость** 5, 276
Очередей теория 3, 557, 4, 182
Очередности множество 4, 386
Ошибка 4, 181
- арифметическая 2, 928, 929
- грубая 4, 181, 183
- истинная 4, 183
- квадратичная 2, 776, 783
- методическая 3, 880
- округления 4, 15
- постоянная 3, 880
- систематическая 3, 847, 877; 4, 181, 183; 5, 51, 408
- случайная 3, 847, 877, 4, 181, 183
- типа замещения 2, 940
Ошибок вектор 5, 408
- интеграл 2, 566
Ошибок теория 4, 183—185
Ошибочного декодирования вероятность 4, 185
Оштукатуриваемый конус 2, 1076

П

Паде аппроксимация 4, 187—189
- таблица 4, 187
Пайерлса интегральное уравнение 4, 249
Пакетная обработка программ 3, 597
Пале — Смейла условие 3, 830
- - - в вариационном исчислении 1, 593
Пальма функция 3, 542
Памяти сигнализирующая функция 1, 211
Память в программировании 4, 650
- локального алгоритма 1, 209
- полная 4, 386
Паналгебраическая кривая 5, 424
Паппа аксиома 4, 189
- теорема 3, 975
Папперица уравнение 4, 189
Пара 5, 713
- банахова 2, 628
- Бертрана 1, 432
- Борсука 3, 14
- дуальная 2, 391
- Пуанкаре 4, 748
- пунктированная 1, 1063
- точная 5, 106
- фигур 5, 614
Парабол метод 4, 190
Парабола 2, 1034, 3, 383, 387, 4, 191
- главная 5, 993
- кубическая 3, 142
- Нейля 3, 920; 4, 458
- полукубическая 4, 458
Параболическая гомология 1, 1060
- группа Кокстера 2, 945
- интерполяция 3, 880
- линия уравнения 5, 45
- модулярная форма 3, 786
- поверхность 5, 515
Параболическая подалгебра 4, 192
Параболическая подгруппа 1, 538; 4, 192—194
--, Леви разложение 4, 193
- - системы Титса 4, 193
- показательная функция 4, 27
- прямая 2, 801
Параболическая регрессия 4, 194, 931
·связка окружностей 4, 1090
· ·-прямых 4, 1089
- - сфер 4, 1090
·сеть 4, 1123
Параболическая спираль 4, 194
Параболическая точка 2, 252, 4, 194
k-параболическая поверхность 4, 362
Параболические координаты 4, 194
- прямые 3, 12
Параболический дифференциальный оператор 2, 346
- - - линейный 3, 366
- луч 2, 1014
- пучок 4, 772, 773
- сектор 4, 1106
- тип римановой поверхности 4, 1019, 1028
Параболический цилиндр 4, 195, 5, 819
Параболического типа уравнение 4, 195
Параболического типа уравнение; численные методы решения 4, 195—198
Параболического уравнения метод 4, 198—200
Параболического цилиндра функции 1, 612; 4, 200
Параболическое дробно-линейное отображение 2, 386
- уравнение 2, 299, 323
- - абстрактное 3, 334
- - вырожденное 1, 808
- -, Грина функция 1, 1130
- - линейное 3, 348
Параболоид 4, 201
- гиперболический 1, 992
- соприкасающийся 2, 251, 5, 80
- эллиптический 5, 993
Параболоидальные координаты 4, 201
Парадигматическая аналитическая модель языка 1, 248
Парадокс 1, 292, 4, 202; см. также соответствующее название
Паракомпакт 3, 433; 4, 202
Паракомпактное пространство 4, 202
Паракомпактности критерии 4, 203
- условие 5, 393
Паракомплексное число 2, 32
Параллелепипед 4, 204
- *n*-мерный 1, 325
Параллели 3, 397
- Клиффорда 4, 991
- поверхности вращения 1, 767
Параллелизм абсолютный 4, 204
Параллелизуемое многообразие 4, 205
Параллелограмм 4, 205
- периодов 2, 50
Параллелогранник 4, 205
Параллелотоп 4, 205
- периодов абелевой функции 1, 23
Параллелоэдр 1, 946; 4, 206
Параллель 4, 949; 5, 291
- Клиффорда 2, 882
Параллельная аксонометрия 1, 113
- проекция 4, 688
Параллельное векторное поле 4, 1005
Параллельное перенесение 4, 206—208
- - Леви — Чивита 4, 1005
Параллельное поле 4, 208
- программирование 4, 647
Параллельности аксиома 4, 209
- - Евклида 4, 778
- угол 3, 398, 404
Параллельные линии 4, 209
Параллельные поверхности 4, 210
Параллельные прямые 3, 388, 398, 4, 210, 747
Параллельный перенос 4, 210
- -, подгруппа 1, 362
Параметр 4, 578
- аффинный 1, 364
- винта 1, 706
- дифференциальный 2, 349
- индукции 3, 564
- интегрального уравнения 2, 591
- локальный 3, 445
- параболы 4, 191
- Привалова 4, 629
- регулярный 4, 945
- сдвига 4, 1099
Параметра вариации метод 4, 211
Параметризация 3, 742
- естественная 2, 248
- - кривой 3, 892
- множества 2, 729
- поверхности 4, 358
Параметризованная поверхность 5, 665
Параметрикс 4, 737
Параметрикса метод 4, 212—214
Параметрическая задача 2, 677
- окрестность 3, 445
- операторная функция 4, 27
- спектральная оценка 5, 104
Параметрические уравнения линии 3, 383
Параметрический круг 3, 445
- метод Лёвнера 3, 226
- резонанс 1, 864, 3, 316
Параметрических интегральных представлений метод 4, 214
Параметрических представлений метод 4, 215
Параметрического резонанса математическая теория 4, 216—218
Параметрическое отображение 3, 445
- представление 2, 587
Параметрическое представление в теории однолистных функций 4, 218
Параметрическое представление функции 4, 219
Параметрическое программирование 4, 220
Параметрическое уравнение 4, 221
Параметры Кэли — Клейна 3, 162
- Эйлера — Родрига 3, 162
Парастрофа 2, 230
Парастрофия 2, 802
Паратактичные прямые 4, 991
Парето распределение 4, 222
Парикмахера парадокс 4, 222
Парные интегральные уравнения 2, 600
Парсеваля равенство 2, 434; 4, 100, 222, 544, 546; 5, 909
Парсеваля — Планшереля формула 4, 223, 294
Парсеваля — Стеклова равенство 4, 99
- - условие замкнутости 2, 434
Партия в теории игр 2, 143, 471; 4, 386
Пары аксиома 1, 106
Паскалева геометрия 4, 223—225
- плоскость 4, 224
Паскаля прямая 4, 225
Паскаля распределение 4, 225
Паскаля теорема в проективной геометрии 4, 225
Паскаля треугольник 4, 226
Паскаля улитка 4, 226
Пассивный вычислительный алгоритм 4, 62
Пасынкова теорема о перистых пространствах 4, 271
- - о размерностях 4, 822
Паули матрицы 4, 227
- уравнение 5, 898
Паша аксиома 1, 970; 4, 228
Пеано аксиомы 1, 319; 3, 893; 4, 228
- арифметика 2, 759; 4, 229
Пеано кривая 4, 229
Пеано производная 4, 230
- - обобщенная 4, 231
Пеано теорема 3, 976; 4, 231
- форма остаточного члена 5, 323
Пейджа теорема в теории чисел 4, 231
Пекле число 4, 232
Пелля группа единиц 1, 164
Пелля уравнение 4, 232
Пенлеве множество 4, 233
Пенлеве проблема 4, 233; 5, 582
Пенлеве теорема в теории функций комплексного переменного 4, 233
- -для дифференциальных уравнений 1, 253
- теория 4, 566
- трансцендентная функция 4, 233
Пенлеве уравнение 4, 233
Пентасферические координаты 4, 234
Первая аксиома счетности 4, 234
Первая вариация 1, 608; 4, 234
Первая квадратичная форма 2, 784; 4, 234—236, 359

Первая краевая задача 2, 178; 3, 83, 203, 349, 4, 236
- основная форма 3, 668
- подстановка Эйлера 5, 928
- смешанная задача 5, 37, 41
- теорема Абеля о степенных рядах 5, 219
- - Гарнака о сходимости последовательности функций 1, 893
- - Гёделя о неполноте 1, 909
Первичная спецификация 2, 978
Первичное кольцо 3, 901, 4, 237
Первичный идеал 4, 237
- множитель Вейерштрасса 1, 616; 2, 714
Первого приближения критерий 2, 341
Первое уравнение Колмогорова 2, 958
Первой категории множество 2, 764
Первообразная 4, 237
Первообразная функция 2, 563, 579; 4, 237
Первообразный корень 3, 15; 4, 237; 5, 152
- характер 2, 192
Первый дифференциальный параметр 2, 350
- - - Бельтрами 3, 206
Первый интеграл 2, 568, 4, 238
- - уравнения Пфаффа 4, 776
- класс Бэра 1, 567
- принцип отделимости 2, 94
Перевала метод 4, 239
- точка 4, 239
Перевальный контур 4, 239
Перевод автоматический 1, 59
- Гёделя — Тарского 4, 357
- машинный 1, 59
- негативный 2, 1040
d-перевод 2, 1040
Переводное соответствие 1, 59
Переворачивание 4, 81
Перегиба точка 4, 239, 310
Перегородка 2, 550, 4, 240, 821
Передаточная функция 4, 240
Передача информации 2, 647
Передачи управления оператор 1, 224
Перекоса коэффициент 4, 419
Перемена ориентации комплекса 2, 995
Переменная зависимая 5, 713
- индивидная 2, 555
- индукционная 2, 558
- независимая 5, 713
- предикатная 4, 577
- предметная 2, 555, 4, 576, 581
- пропозициональная 4, 698
- регрессионная 4, 929
- свободная 4, 1083
- связанная 4, 1088
Переменное высказывание 1, 124
Переменных направлений метод 4, 241—243
Перемещивание 4, 243
Перемещение виртуальное 1, 1033
- возможное 1, 1033
- действительное 1, 1033
- циклическое 4, 752
Перенесение параллельное 4, 206
Перенормировка 4, 249—245
Перенос параллельный 4, 210
Переноса излучения теория 4, 245—247
Переноса поверхность 4, 247
- принцип Хинчина 2, 164
Переноса сеть 4, 247
Переноса теорема в теории диофантовых приближений 4, 247
- уравнение 3, 464; 5, 723
Переноса уравнения; численные методы решения 4, 248—252
Переопределенная система 2, 327, 4, 252
Переопределенный линейный дифференциальный оператор 3, 368
Пересекающиеся прямые 3, 388, 398; 4, 746
Пересечение многозначных отображений 3, 720
Пересечение множеств 3, 759, 4, 253
Пересечений теория 4, 253—255
Пересечения индекс в теории размерности 4, 255
Пересечения индекс для алгебраических многообразий 4, 255
Перестановка 2, 974, 4, 256, 380, 5, 316
- множества 1, 471
Перестановки в логике 1, 920
Перестановок критерий 4, 256, 864
Перестановочности соотношения 4, 257
Перестановочности операторы 4, 258
Перестановочность 2, 989
Перестановочные операторы 4, 258
Перестановочный автомат 1, 67
- куб 3, 208
Перестройка 4, 258
- Морса 3, 825
- сферическая 4, 1058
Пересчет прямой 4, 724
Переход 4, 280
- индукционный 3, 564
Переход с запрещениями 4, 258
- фазовый 5, 201
Перехода модуль 3, 405
- функция 4, 895
- явления 2, 342
Переходная плотность 1, 698, 4, 259
- система 1, 55
Переходная функция 4, 259
Переходные вероятности 4, 260
Переходный процесс 1, 64
- режим 1, 786
Переходных вероятностей матрица 3, 518; 4, 261
Переходных операторов полугруппа 4, 261
Переходов функция 1, 53
Перечисления оператор 4, 262
Перечисления проблема 4, 263
Перечисления теория 4, 263—265
- - Пойа 2, 977
Перечислимое множество 1, 227, 4, 265
- - слов 4, 513
Перечислительные задачи 2, 976
Периметр 4, 265
Период абелевой функции 1, 22
-, базис 2, 50
- гармонического колебания 1, 888
-, группа 2, 50
Период группы 4, 265
- дифференциала 2, 238
- инволюции 2, 548
- логарифмический 5, 989
- минимальный 4, 269
-, модуль 2, 50
- основной 4, 268
-, параллелограмм 2, 50
- примитивный 2, 50, 4, 268
- решения 4, 269
-, решетка 2, 50
- свободного гармонического колебания 4, 1084
- точки 4, 267
Период функции 4, 265, 268
- эллиптического интеграла 5, 989
Периодическая группа 4, 266
- дробь 1, 434, 2, 98
Периодическая полугруппа 4, 266
- теорема Ботта 1, 541
Периодическая точка 4, 267
Периодическая траектория 2, 533, 4, 267
Периодическая функция 4, 267
- цепь Маркова 3, 521
- часть абелевой группы 1, 18
Периодически-коррелированные случайные процессы 5, 124
Периодически - нестационарные случайные процессы 5, 124
Периодическое многообразие полугрупп 4, 440
- отображение 2, 548
Периодическое решение 4, 268—270
- -, близкое к разрывному 4, 967
- - разрывное 4, 967
- условие 5, 915
Периодов базис 1, 374
Периодограмма 4, 270
Перистое пространство 4, 270—272
Периферическая подгруппа 5, 477
Периферически бикомпактное пространство 4, 272
Перманент 4, 272
- матрицы 2, 976, 4, 1140
Перманентные методы суммирования 4, 944
Пермутатор 4, 273
Перпендикуляр 4, 273
- общий двух скрещивающихся прямых 4, 1205
Перпендикулярные прямые 4, 274
Перрона интеграл 4, 274
- коэффициент неправильности 3, 980
Перрона метод 4, 274
Перрона преобразование 4, 275
- пример об устойчивости 5, 571
- теорема о преобразованиях 4, 276
Перрона — Винера обобщенное решение задачи Дирихле 4, 530
Перрона — Стилтьеса интеграл 4, 276
Перрона — Фробениуса теорема о матрицах 4, 276
Персея кривая 4, 277
Персидского теорема о коэффициентах неправильности 3, 981
Перспектива 4, 277
Перспективное отображение 4, 278
Перспективно-подобные фигуры 1, 1061
Перцентиль 4, 278
Петель пространство 4, 278
Петера — Вейля теорема о неприводимых представлениях 1, 448
- - - о представлениях групп 2, 992
Петера — Вейля теорема о топологических группах 4, 278
Петерсена граф 1, 1112
Петерсона поверхность 2, 1034; 4, 279
- преобразование 4, 279
Петерсона соответствие 4, 279
Петерсона — Кодацци уравнения 4, 280
Петерсона — Кодацци — Майнарди уравнения 4, 361
Петля 4, 280
- геодезическая 2, 431
- графа 1, 1105
-, теорема 2, 90
Петре *K*-метод 2, 629
Петри сеть 4, 280
Петровского теорема для алгебраических кривых 2, 70
Петтиса интеграл 4, 281
Пеццо поверхность 3, 141
Пи 4, 282
Пика множество 1, 133
Пика теорема о псевклидовых расстояниях 4, 282
- точка 1, 132, 2, 966
Пикара группа 4, 283
- исключительное значение 2, 674
Пикара многообразие 4, 283
- относительный функтор 4, 284
- свойство 4, 286
Пикара схема 4, 284
Пикара теорема о аналитических функциях 4, 285—287
- - об интегральных уравнениях 2, 597
- число 1, 151, 3, 1006; 4, 283
Пикара — Вессио расширение 4, 902
Пикара — Лефшеца формула 3, 808
Пикаровское исключительное значение 4, 286
Пиконе метод 2, 309
Пирамида 3, 709, 4, 287
Пирса стрелка 4, 287
Пирсовское разложение 1, 130; 4, 288
Пирсона дифференциальное уравнение 4, 94
Пирсона кривые 4, 288—290
Пирсона распределение 4, 288, 290
- статистика 5, 784
- уравнение 2, 868, 4, 1050
Питмена оценка 3, 681, 4, 290
Пифагора теорема 4, 89, 290
- - в гильбертовом пространстве 1, 981
- - сферическая 5, 292
Пифагорово замыкание 1, 712
- поле 1, 711
Пифагоровы числа 2, 169, 4, 291
ПЛ/1 4, 291
Плавающая запятая 2, 443
План двухступенчатый 5, 183
- одноступенчатый 5, 183
- оптимальный 3, 602
Планарная точка 3, 1072
Планарный граф 1, 1109
Планигон 4, 292
Планирование календарное 4, 877
- сетевое 4, 1120
Планирование эксперимента 4, 293
Планка постоянная 4, 293
Планов множество 3, 602
Планшереля мера 5, 512
Планшереля теорема о сходимости 4, 294
- - об отображении 1, 882
Планшереля тождество 4, 323
Планшереля формула 4, 294; 5, 512
Пластичности математическая теория 4, 295—302
Плата игры 2, 329
Плато задача 4, 302
Плато многомерная задача 4, 303—308
Платона тела 4, 308, 552
Плеснера свойство 4, 308
Плеснера теорема об аналитических функциях 4, 308
- точка 4, 308, 567
Плоская вариация Тонелли 5, 363
Плоская действительная алгебраическая кривая 4, 309—312
Плоская задача теории упругости 4, 313—317
- карта 1, 1109
- контактная схема 2, 1063
- конфигурация 2, 1076
- кривая 2, 250
- - алгебраическая 4, 309
- мера Хаусдорфа 5, 778
- область, периметр 4, 265
- обратная задача теории потенциала 4, 522
- связность 4, 207
- *p*-ткань 5, 356
- триангуляция 1, 1110
- фигура, площадь 4, 327
Плоский алгебраический элемент 5, 613
- граф 1, 1109, 1115
Плоский модуль 4, 317
Плоский морфизм 4, 318
- угол 5, 467
Плоское аналитическое отображение 1, 282
- множество 1, 643
- пространство 4, 709
Плоскость 4, 318
- абсолютная 1, 492
- аналитическая 1, 249
- бесконечно удаленная 1, 443
- биссекторная 1, 496
- гиперболическая 4, 746, 747; 5, 507
- двойная 2, 23
- инверсная 3, 630
- касательная 2, 251, 755
- комплексная 2, 1008
- комплексно-аналитическая 1, 249
- комплексного переменного 2, 1010
- координатная 1, 358; 2, 80
- круговая 3, 630
- лагранжева 5, 519
- Лобачевского 3, 784
- Мебиуса 3, 630

- m-мерная 3, 729
- недезаргова 3, 908
- несобственная 4, 664
- нормальная 3, 1050
- опорная 4, 29
- паскалева 4, 224
- полярная 4, 476
- проективная 2, 52, 975, 4, 668
- проекций 3, 895, 896; 4, 688
-, пучок 4, 771
- радикальная 4, 773, 5, 222, 287
- регрессии 4, 926, 931
- Римана 4, 989
-, связка 4, 1089
- симметрии 4, 1150
- соприкасающаяся 2, 249; 5, 80
- спрямляющая 5, 150
- сублагранжева 5, 519
- фазовая 5, 586
- фокальная 2, 1015
- эквиаффинная 5, 942
- эллиптическая 4, 989
m-плоскость 3, 729
Плотная мера Бореля 1, 537
- - Бэра 1, 537
- подкатегория 3, 420
- - полная 1, 21
Плотно вложенный идеал 4, 908
- упакованный код 4, 396
Плотное множество 1, 769; 4, 319; 5, 280
- - линейное упорядоченное 3, 323
- подмножество 1, 785
- расширение 4, 908
- семейство распределений 4, 886
Плотности Джекобсона теорема 1, 341
Плотности матрица 3, 26; 4, 319
- теорема Бореля 2, 201
Плотности точка 4, 320; 5, 1013
Плотностная гипотеза 4, 320
- область 1, 1024
Плотностные теоремы в теории чисел 2, 116, 4, 321
Плотностный метод в теории чисел 4, 322
Плотность асимптотическая 1, 332
- бета-распределения 1, 866
- в графе 1, 1120
- векторная 5, 330
Плотность вероятности 4, 323
- - перехода 3, 519
- - совместная 5, 70
- гиперболической метрики 1, 989
- двойного слоя 3, 1107
- заряда 4, 810
- интеграла типа Коши 3, 52
- источника 2, 682
- метрическая 3, 460
Плотность множества 4, 324
- натуральная 1, 333
- переходная 1, 698; 4, 259
- показательная 1, 866
Плотность последовательности 3, 512; 4, 324; 5, 894
- потенциала 4, 524
- простого слоя 3, 1106
- распределения 3, 989
- сингулярного интеграла 4, 1176
- - - Гильберта 1, 969
- скалярная 5, 330
- спектральная 5, 105, 212, 910
- тензорная 5, 329
Плотность топологического пространства 3, 834; 4, 323
- условная 5, 548
χ^2-плотность 1, 866
Плотный функционал 3, 643
- элемент 5, 234
Площадей метод 4, 325, 326
Площадей принцип 4, 325—327
- теорема 4, 326
- теория 4, 329
Площадь 4, 327—331
- гиперболическая 1, 989
-, минимизация 3, 699
- по Лебегу 4, 329
- поверхности в метрическом пространстве 4, 1026
Плюккера интерпретация 4, 331—333
Плюккера формулы 4, 333
Плюккеровы координаты 1, 732; 4, 334
Плюмбинг 2, 379
- Рохлина 2, 380
Плюригармоническая функция 4, 334
Плюриканонические системы алгебраических поверхностей 1, 150
Плюрисубгармоническая функция 4, 335—337
Плюрисупергармоническая функция 4, 335, 337
Побуквенное кодирование 2, 938
Поведение автомата 1, 57
- - в случайной среде 1, 57
- - инициального автономного 1, 54
- - - конечного 1, 54
Поверхностей теория 2, 251; 4, 337
- -, Бонне теорема 1, 531
- -, вторая квадратичная форма 1, 770
- -, Гаусса теорема 1, 901
Поверхности изометричные 2, 253
- параллельные 4, 210
Поверхностная полоса 4, 437
- пространственная ткань 5, 359
- сферическая гармоника 5, 290
- тороидальная гармоника 5, 407
Поверхностная функция 4, 338, 5, 50
- эллипсоидальная гармоника 5, 979
Поверхностный интеграл 4, 338—341
Поверхностный потенциал 4, 341
- треугольник 4, 1025
Поверхность 4, 341
- алгебраическая 1, 149, 249, 250
- аналитическая 5, 860
Бианки 1, 465
- Бонне 5, 923
- в метрическом пространстве 4, 1025
- Вейнгартена 1, 631
- винтовая 1, 706
- вихревая 1, 715
- вращения 1, 767
Поверхность второго порядка 4, 343—346
- выпуклая 1, 788, 799
- k-выпуклая 4, 361
- гиперболическая 5, 515
-, гиперболическая точка 1, 990
- гиперэллиптическая 4, 1032; 5, 985
- Гишара 1, 1012
-, главная кривизна 1, 1012
-, главное направление 1, 1015
-, гладкая точка 2, 756
- граничная 2, 1015
- Гурса 5, 923
- Дарбу 2, 16, 18
- двусторонняя 2, 59; 3, 1184
- дель Пеццо 3, 141; 4, 917; 5, 597
- Демулена 2, 90
- замкнутая 2, 51
- Зейферта 5, 479, 486
- изотермическая 2, 518
- инвариантная 2, 533
- интегральная 2, 325, 577
- Иохимсталя 2, 665
- каналовая 2, 710
-, касательная плоскость 2, 755
- Каталана 2, 759
-, квадратичная форма 2, 784
- Клейна 2, 52, 873
- Клиффорда 2, 882; 4, 991; 5, 405
- комплексно-аналитическая 1, 249
- коническая 2, 1033
-, коническая точка 2, 756
- кубическая 3, 141
- Куммера 3, 147
- Кэли 3, 157
- линейчатая 3, 380
- Лиувилля 3, 392
- m-мерная 4, 358
- минимальная 2, 253; 3, 684
- модуля 1, 276
- накрывающая 3, 888
- направляющая 4, 949
- несжимаемая 5, 433
- нехарактеристическая 3, 47
- нормализованная 4, 973
-, обертка 4, 166
- образующая 4, 985
- общего типа 2, 713
- односторонняя 3, 1183
- ориентированная временным образом 3, 328
-, особая точка 4, 120, 124
- отрицательной кривизны 4, 163
- параболическая 5, 515
- k-параболическая 4, 362
-, параметризация 4, 358
- параметризованная 5, 665
-, первая квадратичная форма 4, 359
- переноса 4, 247
- Петерсона 2, 1034; 4, 279
-, Петерсона — Кодацци — Майнарди уравнения 4, 361
-, площадь 4, 328
-, подера 4, 370
- полная 4, 165
-, полная кривизна 4, 416
- Понтрягина 4, 487
- предельная 3, 399
- присоединенная 4, 639
- пространственно ориентированная 3, 328
- Прюфера 4, 721
- равных расстояний 3, 399
- развертывающаяся 4, 811
- k-развертывающаяся 4, 362
- рациональная 4, 916
-, ребристая точка 2, 756
- регрессии 4, 926, 931
- регулярная 2, 251
- резная 4, 949
- Римана — Шварца 4, 1002
- риманова 1, 267, 4, 1015
-, Риччи уравнения 4, 361
-, род 4, 1049
-, Родрига формула 1, 1015
- с краем 2, 52
- свободная 3, 326
- седловая 4, 170, 1102
- k-седловая 4, 362
- секущая 4, 505, 1124
- сингулярная 4, 342
- срединная 4, 347
- суперсингулярная 4, 342
- трансверсальная 5, 613
-, триортогональная система 5, 446
- фокальная 2, 1015; 5, 613
- Фосса 5, 646
- Фреше 5, 665
- характеристическая 2, 815; 3, 326, 5, 753, 756
- Хопфа 1, 250
- цилиндрическая 5, 819
- Шварца 5, 887
- Шерка 5, 893
- эвольвентная 5, 923
- эволютная 5, 922
- эллиптическая 5, 515, 984
- Эннепера 5, 1003
- Энриквеса 5, 985
$K3$-поверхность 4, 342
Поворот вокруг плоскости 1, 765
- - точки 1, 765
- кривой 1, 790, 924
Поворота точка 3, 499
Поворотное отображение от плоскости 1, 765
Поворотов диаграмма 4, 346
Повторений сокращение 1, 920
Повторения теорема для слов 1, 226
Повторного логарифма закон 1, 699, 4, 347
Повторное ядро 2, 691
Повторный дифференциал 2, 274
Повторный интеграл 4, 348
Повторный предел 4, 349
Повторный ряд 4, 350
Повторных подстановок метод 4, 511
Поглощающее множество 1, 544
- подмножество 5, 378
Поглощающее состояние цепи Маркова 4, 351
Поглощающий барьер 5, 12
Поглощение множеств 5, 378
- программное 2, 333
Поглощения законы 1, 125; 4, 351
Погони линия 4, 351
Погорелова преобразование 1, 436
Пограничного слоя метод 3, 503
Пограничного слоя теория 4, 352—356
- - функция 3, 503
Пограничный слой 3, 501; 4, 356
- - внутренний 2, 342
- член 2, 342
Погрешности мера 4, 604
- оптимальная оценка 4, 61
Погрешность 4, 356
- абсолютная 1, 36
- аппроксимации 4, 844
- квадратуры 4, 35
- метода 4, 61
-, накопление 3, 884
- округления 4, 15
- приближения 4, 606
Погружающая операция 2, 370; 4, 357
Погружение 4, 357
- изометрическое 2, 506
- каноническое 2, 713
- коротное 2, 506
Погружение многообразия 4, 358
- свободное 4, 362
Погруженное многообразие 4, 358
Погруженных многообразий геометрия 4, 359—363
Подалгебра борелевская 3, 279
- Бореля 1, 538; 4, 192
- Картана 2, 736, 3, 1041
- Ли 3, 244
- параболическая 4, 192
p-подалгебра 3, 249
σ-подалгебра достаточная 2, 377
Подбора метод 3, 932
Подвижная особая точка 4, 363
Подвижного репера метод 4, 363—366
Подвижных сеток метод 4, 366
Подгиперграф 1, 1006
Подготовительная теорема Вейерштрасса 1, 617
- - - для формальных степенных рядов 1, 618; 5, 643
Подграф 1, 1106
- критический 1, 1112
- остовный 1, 1106
Подгрупп ряд 4, 367
Подгрупп система 4, 368
Подгруппа 4, 369
- абнормальная 1, 32
- абсолютно выпуклая 1, 792
- алгебраическая 1, 142
- борелевская 3, 280
- Бореля 1, 538
- Браве 3, 108
- вербальная 1, 654
- вполне характеристическая 1, 764
- выпуклая 1, 792
- главных аделей 1, 96
- декартова 1, 654
- диагональная 2, 123
- дискретная 2, 198
- допустимая 4, 22
- достижимая 2, 377; 5, 266
- евклидовых движений 1, 363
- изолированная 2, 504
- изотропия 3, 260
- инвариантная 2, 531, 534; 3, 1073
-, индекс 4, 369; 5, 36
- инерции 2, 561
- Картана 2, 737
- Картера 2, 740
- конечного индекса 4, 369
- Леви 4, 193
- Ли 3, 255
- локальная 3, 426
- максимальная 3, 482
- - компактная 3, 482
- массивная 1, 448
- минимальная нормальная 3, 684
- нормальная 3, 1051, 1073
- норменная 3, 1076
- однопараметрическая 3, 1171
- относительно выпуклая 1, 792
- параболическая 1, 538; 4, 192
- параллельных переносов 1, 362
- периферическая 5, 477

- пронормальная 4, 697
- равномерная 4, 787
- самосопряженная 3, 1073; 5, 91
- сервантная 4, 1116; 5, 880
- Силова 4, 1129
- силовская 4, 1129
- сопряженная 5, 91
- стационарная 2, 521; 5, 163, 207
- строго изолированная 5, 522
- субабнормальная 1, 32
- субнормальная 5, 266
- Томпсона 5, 363
- Фиттинга 5, 626
- Фраттини 5, 649
- характеристическая 5, 756
- холлова 5, 789
- целых аделей 1, 96
- центроаффинная 1, 363
- чистая 4, 1116; 5, 880
- эквиаффинная 1, 363

l-подгруппа 5, 256
p-подгруппа 1, 1142
π-подгруппа 1, 1142; 4, 851
Подгруппы индекс 4, 369; 5, 36
Подера 4, 370
Подидемпотентное кручение 4, 807
Подкасательная и поднормаль 4, 370
Подкатегория 4, 370
- корефлексивная 4, 978
-, локализация 1, 21, 1134; 3, 420
- плотная 3, 420
- полная 4, 417
- - плотная 1, 21
- рефлексивная 4, 978
- Серра 4, 1119
Подквадрат латинский 3, 207
Подквазигруппа нормальная 2, 802
Подкольцо 2, 967
Подкомплекс 2, 880, 995
- полный 4, 411
Подкручивающий обратимый пучок Серра 3, 1130
Подматрица 4, 371
Подмногообразие 4, 371
- исключительное 2, 675
-, коразмерность 3, 14
-, кривизна 3, 100
-, степень 3, 159
-, стягивание 2, 675
C^k-подмногообразие 2, 356
Подмногообразий решетка 1, 186
Подмножество 3, 759
- выпуклое 1, 798
-, деформация 2, 108
- дискриминантное 4, 118
- дополнительное 2, 373
- замкнутое неограниченное 5, 279
- инвариантное 4, 153
- конструктивное 2, 1054
- плотное 1, 785
- поглощающее 5, 378
- радиальное 5, 378
- разрешимое 2, 1059
- связное 4, 1096
- симметричное 4, 1149
- симплициальное 4, 1161
- тотальное 1, 644
Подмодуль 3, 780, 4, 372
- вполне изотропный 1, 483
- изотропный 1, 483
- ортогональный 1, 484
- примарный 4, 635
- чистый 5, 879
Поднормаль 4, 370
Поднятие кривой горизонтальное 4, 1098
Подобие 3, 370; 4, 373
- групп подстановок 4, 382
- прямое 2, 138
Подобия критерий 4, 374
Подобия теория 4, 373—376
Подобная область 4, 376
- однолистной римановой поверхность 4, 1018
Подобная статистика 4, 377
Подобное отображение 4, 378
Подобно-расположенные фигуры 1, 1061
Подобные геометрические объекты 1, 936
Подобные матрицы 4, 377
- многочлены 3, 753
Подобные множества 4, 377
Подобные операторы 4, 378
- по Витту квадратичные формы 2, 778
- преобразования 4, 600
- фигуры 1, 1061; 4, 373
Подобный критерий 4, 378
Подобъект объекта категории 4, 378
Подошва ручки 4, 1058
Подошвенная сфера 4, 1058
Подпокрытие 4, 393
Подполе 4, 397
- алгебраически замкнутое 4, 909
Подполиэдр 4, 410
Подпредставление 4, 595
Подпредставление представления 4, 378
Подпрограмма 5, 167
Подпространство 1, 643, 674, 980, 3, 308
- аналитическое 1, 286
- аффинное 1, 362; 3, 345
- векторное 1, 643; 3, 350
- весовое 1, 673
- вырожденное 4, 718
- горизонтальное 4, 154
-, дефект 1, 981
- дефектное 2, 100; 4, 904
- дефинитное 4, 718
- допустимое 2, 534
-, дуальная пара 1, 986
- изотропное 4, 718
- инвариантное 2, 534; 3, 351, 371
-, коразмерность 1, 981; 3, 14
- корневое 3, 20
- линейное 3, 350
- нейтральное 4, 718
- нормально расположенное 3, 1062
- отрицательное 4, 718
- положительное 4, 718
- проекционно полное 4, 718
- собственное 5, 65
- спектральное 5, 114
-, факторразмерность 3, 14
- чебышевское 5, 850
Подпроцесс марковского процесса 5, 693
Подпрямая сумма 4, 379
Подпрямое произведение 4, 379
Подпучок 4, 767
Подразбиение ребра графа 1, 1107, 1116
Подразделение 4, 379
- барицентрическое 1, 394; 4, 1160
- звездное 3, 153; 4, 413
- комплекса 3, 152
Подранг 4, 860
Подрасслоение 1, 646
Подрешетка 4, 380
Подсистема алгебраической системы 1, 155
Подстановка 4, 256
- дифференциальная 5, 677
- допустимая 2, 804
- интегральная 5, 677
Подстановка множества 4, 380—382
- мономиальная 3, 811
-, ограниченная знакопеременная группа 4, 1142
-, - симметрическая группа 4, 1142
- полная 2, 804
- ряда в ряд 5, 219
-, финитная группа 4, 1142
- формальных языков 5, 644
-, цикловая запись 4, 1141
-, цикловой тип 4, 1141
Подстановки аксиома 1, 105
Подстановки правило 4, 382
Подстановок группа 4, 382—384
- система 5, 455
Подсхема замкнутая 2, 438
- симплициальная 4, 1159
Подформульности свойство 1, 920; 4, 384
Подходящая дробь 4, 384; 5, 812
Подчинения отношение 4, 384
Подчинения принцип 4, 384
Подчиненная функция 4, 384
Подчиняющая функция 4, 384
Подъем индекса 5, 328
- схемы 2, 105
Подъема метод 2, 343; 3, 490
Подъязык 4, 642
Подэра 4, 370
Позитивная последовательность 4, 385
Позитивное логическое исчисление 3, 418
Позитивное пропозициональное исчисление 4, 386
- собственное значение 4, 434, 435
Позиционная игра 2, 471; 4, 386
- система счисления 5, 315
Позиционное управление оптимальное 4, 42
Позиция 1, 223; 4, 386
- в теории игр 2, 471
- выигрышная 2, 475
- игры 2, 330
Поиск детальный 3, 757
- обзорный 3, 757
- симплексный 4, 1154
Пойа процесс 4, 388
Пойа распределение 4, 387
- регулярная частотная функция 2, 960
Пойа теорема в комбинаторике 2, 978, 4, 388
- - для случайных блужданий 5, 14
- - об аналитическом продолжении 2, 41
- теория перечисления 2, 977
- урновая схема 4, 387
Показатели особые 4, 132
Показатель генеральный 2, 772; 3, 330
- группы 4, 159, 265
- искажения 1, 113
- итерации 2, 691
- Ляпунова 3, 471
- особый 3, 330
- сходимости последовательности 2, 714
- устойчивого распределения 5, 557
- Фурье 4, 544
- характеристический 2, 765; 3, 313, 315; 5, 764
- центральный 5, 809
Показательная гиперболическая функция 4, 27
- матрица 3, 312
- параболическая функция 4, 27
- плотность 1, 866
- форма комплексного числа 2, 1009
Показательная функция 4, 390
Показательно-диофантово множество 2, 174
Показательное распределение 4, 391
- уравнение 5, 540
Показательные оценки для вероятности больших отклонений 1, 522
Покоординатного спуска метод 4, 391
Покоя точка 1, 82; 2, 533; 4, 784
- энергия 4, 146
Покрываемое множество 4, 395
Покрывающее множество 4, 395
Покрывающий элемент 4, 392
Покрытие 4, 821; 5, 365, 392
- в комбинаторной геометрии 4, 394
- Витали 1, 709
-, Гейне — Бореля теорема 1, 911
- звездно вписанное 4, 794
- звездное 4, 203
-, Кёбе теорема 2, 841
- консервативное замкнутое 4, 203
- локально конечное 3, 433
- σ-локально конечное открытое 4, 203
максимальное 1, 560
- минимальное 1, 560
Покрытие множества 1, 559; 4, 392—394
- неприводимое 1, 560
- равномерное 4, 794
- топологического пространства 4, 392
ε-покрытие 3, 216
Покрытий метод 3, 756
Покрытия и упаковки 4, 394—396
Покрытия теоремы для регулярных функций 4, 396
Поле 4, 397
- *p*-адических чисел 1, 100
- алгебраически замкнутое 1, 178
- алгебраических функций 1, 177
- алгебраических чисел, основные единицы 2, 187
- - -, регулятор 4, 945
- алгебраическое 1, 197
- без характеристики 5, 755
- бесконечной характеристики 5, 755
- бинарное 3, 1044
- векторное 1, 640
- вероятностей 1, 666
- вполне непрерывное 3, 977
- вычетов локального кольца 3, 437
- - нормирования 3, 1078
- - точки 5, 299
- Галуа 1, 848
- гармоническое 1, 650
- геометрических объектов 5, 249
- геометрического объекта 4, 658
- гиперэллиптическое 1, 1011
- глобальное 2, 157; 4, 400
- градиентное 1, 1082; 4, 536
- действительно замкнутое 5, 527
- деления круга 2, 82; 3, 120
-, дискриминант 2, 211
-, дискриминант системы элементов 2, 210
- дифференциально-геометрического объекта 1, 938
- дифференциальное 2, 280
- евклидово 2, 398, 1037
-, идеал 2, 482
- интерпретаций 1, 110
- инфинитезимально однородное 4, 208
- калибровочное 5, 1058
- касательное 4, 1210
- квадратичное 2, 783
- классов в смысле Вебера 1, 168
- ковариантно постоянное 4, 208
- комплексных чисел 2, 1008
- конечное 1, 848; 2, 1019
- констант 1, 174; 2, 280
- корреляционное 3, 28
- круговое 3, 120
-, круговое расширение 3, 122
- линейных элементов 2, 885
- локальное 3, 439; 4, 400
- минимальное 1, 64
- множеств борелевское 1, 536
- направлений 2, 283, 576, 885; 3, 889
- неабелево числовое 3, 896
- неприводимое 1, 1026
- несовершенное 5, 69
-, нормальное расширение 3, 1068
-, нормирование 3, 1078
- нормированное 3, 1081
-, нуль 3, 1082
- ограниченное 5, 275
- оснащенное 1, 938
-, основные единицы 4, 946
- параллельное 4, 208
- пифагорово 1, 711
- потенциальное 1, 649; 4, 536
- простое 4, 706
- - характеристики *p* 1, 848
Поле разложения многочлена 1, 192; 4, 398
-, размерность 1, 846
-, расширение 1, 850; 4, 908
- рациональных функций 1, 178. 4, 309
- регулирования 1, 63
- сепарабельно замкнутое 4, 1114
- скалярное 4, 1197
- скоростей 3, 1171
- случайное 5, 16
- событий борелевское 1, 536
- совершенное 5, 69
-, совершенное замыкание 5, 70
- соленоидальное 1, 650; 5, 74
- спинорное 5, 139
- суммируемости 5, 275
-, существенное нормирование 2, 129

- сходимости метода суммирования 5, 275
- тензорное 5, 249, 333
- топологическое 5, 386
- трубчатое 5, 74
- упорядоченное 5, 527
- формально действительное 5, 527
- функциональное 1, 178
- - абелево 1, 23
-, характеристика 5, 755
- характеристики нуль 4, 398
- частных дифференциальное 4, 901
- -, единица 2, 400
- числовое 5, 878
- Шварцшильда 5, 890
- экстремалей 5, 955
- эллиптическое 1, 1011
- Якоби 5, 1049
- Янга — Миллса 5, 1058
A-поле 2, 778
σ-поле 1, 536
Полезности теория 4, 399
- функция 3, 587; 4, 399
Полей классов теория 4, 399—402
Полиадическая операция 4, 18
Полианалитическая функция 4, 402
Поливектор 3, 43, 4, 402
Полигамма-функция 1, 869
Полигармоническая функция 4, 403
Полигармоническое уравнение 4, 403
Полигон 4, 404
Поликоническая проекция 2, 754
Поликруг 1, 269; 4, 405
- сходимости 5, 220
Поликруговая область 4, 405
Полилинейная алгебра 4, 406
Полилинейная форма 4, 406
- функция 4, 406
Полилинейное отображение 4, 407
- - кососимметризованное 4, 408
- - симметризованное 4, 408
- тождество 1, 121
Полилинейный оператор 3, 960; 4, 407
Полинильпотентная группа 4, 408
- длина 4, 408
Полинильпотентный ряд 4, 408
Полином 3, 752; 4, 408, 5, 797
- алгебраический 5, 797
- Аппеля 1, 299
- Гончарова 1, 30
- Жегалкина 2, 409
- интерполяционный 2, 622, 631
- Карлемана 2, 727
- наилучшего приближения 3, 868
- приведенный 1, 128
- тригонометрический 5, 438
- Фейера 5, 600
- Хосокавы 1, 233
- Чжэня 5, 864, 865
-, экстремальные свойства 5, 968
Полиномиальная игра 1, 805
- матрица 3, 616
- регрессия 4, 194, 931
Полиномиальная функция 4, 408
Полиномиальное размещение 5, 22
Полиномиальное распределение 4, 409
- тождество 1, 120
Полиномиальный коэффициент 4, 409
- полиэдр 1, 277
Полиномиальный сплайн 4, 604; 5, 143
Полиобласть 4, 405
Полисферические координаты 4, 234
Полициклическая группа 4, 410
Полициклический ранг 4, 410
- ряд 4, 410
Полицилиндр 4, 405
Полицилиндрическая область 1, 500
Полиэдр 3, 151, 2, 996; 4, 410—412, 1160
- аналитический 1, 277
-, гомологии 1, 1043
- Куратовского 3, 150
- полиномиальный 1, 277
- топологический 3, 151
-, триангуляция 2, 997, 5, 434
t-полиэдр 3, 151
Полиэдральная функция 5, 889
Полиэдральная цепь 4, 412
Полиэдральный комплекс 2, 996, 4, 412
Полиэдральный цикл 4, 413
Полиэдрическая область 2, 683
Полиэдрическое исчерпание 2, 683
Полла теорема о квадратичных формах 2, 778
Поллачека — Спицера тождество 5, 14
Полная абелева группа 1, 19
- алгебраическая функция 1, 177
Полная аналитическая функция 1, 267, 4, 413—415
- булева алгебра 1, 552
- вариация заряда 2, 444
Полная вариация функции 1, 35, 4, 415
- выпуклая поверхность 1, 788
Полная группа 4, 415
- - движений 2, 22
- - Лоренца 3, 453
- двоякокруговая область 2, 49
- кратно круговая область 3, 89
Полная кривизна 1, 904, 3, 98, 4, 416; 5, 297
- круговая область 3, 89
Полная линейная группа 2, 866, 3, 300, 612, 615; 4, 416
- - -, Гаусса разложение 1, 900
- линейная система 3, 311
Полная мера 3, 639, 4, 417
- минимальная поверхность 3, 689
- независимая система функций 3, 715
Полная неустойчивость 4, 417
- область Гартогса 1, 893
- память 4, 387
- поверхность 4, 165
Полная подкатегория 4, 371, 417
- подстановка 2, 804
Полная проблема собственных значений 4, 417—421
- проективная группа 4, 666
Полная производная функции 4, 421
- псевдобулева алгебра 4, 727
Полная решетка 4, 421
- связность 4, 1093
- симплициальная схема 4, 1159
Полная система вычетов 1, 814; 4, 423, 5, 151
Полная система дифференциальных уравнений 4, 422
- - подгрупп 4, 368
- - собственных функций 5, 654
Полная система функций 4, 100, 423
- статистика 2, 376
- степень одночлена 3, 1184
- структура 4, 421
- сумма вычетов 1, 814
- теория 4, 427
- тригонометрическая сумма 5, 436
- управляемость 4, 48
- флаговая структура 5, 628
- формальная система 4, 851
Полного накопления точка 4, 423
Полное алгебраическое многообразие 4, 423
- включение методов суммирования 1, 718
Полное изменение функции 4, 423
- кольцо матриц 3, 612
- - частных 3, 422
- конструктивное метрическое пространство 2, 1052
- локальное кольцо 3, 438
Полное метрическое пространство 3, 670, 4, 423
- многообразие языков 5, 644
Полное множество 4, 423, 5, 378
- - ортонормированное 1, 980
- по Вейлю пространство 4, 424
- - Дьедонне пространство 4, 425
- - Райкову пространство 4, 424
- - Чеху пространство 4, 271, 425
- предельное множество 4, 565
Полное приращение 2, 236, 275, 4, 424
- пропозициональное исчисление 4, 699
Полное пространство 3, 639; 4, 424
- -, Бэра теорема 1, 568
- прямое произведение 4, 724
Полное равномерное пространство 4, 425, 795
- расслабление 4, 687
Полное риманово пространство 4, 426, 1004
- семейство распределений 4, 884
- сепарабельное пространство, Гротендика теорема 2, 44
- - -, Эберлейна теорема 2, 44
- симплициальное множество 4, 1165
- соответствие 5, 77
- сплетение групп 5, 147
Полное топологическое пространство 4, 426
- - - векторное 5, 378
- эрмитово ядро 5, 1023
B_r-полное локально выпуклое пространство 5, 383
Полной вероятности формула 1, 659, 4, 426
- индукции аксиома 2, 558
- приводимости принцип 1, 762
- релаксации метод 4, 966
Полнота в математической логике 4, 426—428
Полнота в топологии 4, 428
- гильбертова пространства 1, 979
- дедуктивная 3, 412
- действительных чисел 2, 74
Полноты аксиома 5, 877
- валюативный критерий 4, 423
- проблема 3, 715
- свойство 3, 715
- условие 4, 98
Полные системы автоматов 1, 70
Полный вывод 1, 1092
- граф 1, 1106
- - двудольный 1, 1108
Полный дифференциал 2, 236, 275, 4, 428
Полный интеграл 2, 327, 568, 4, 428
- класс Ω-систем 1, 160
- - Чжэня 5, 864
- латинский квадрат 3, 207
- лифт 3, 262
Полный оператор 4, 428; 5, 116
- подкомплекс 4, 411
- полусимплициальный комплекс 4, 1161
- предел спектра 4, 686
- прообраз 4, 153
- угол выпуклой поверхности в точке 1, 789
- флаг 5, 628
- функтор 5, 686
- четырехвершинник 5, 859
- четырехсторонник 2, 1077
- эллиптический интеграл 5, 991
Половинного деления метод 4, 429
Положение общее 3, 1144
Положительная асимметрия 1, 331
- вариация заряда 2, 444
Положительная вариация функции 4, 430
Положительная корреляция 4, 430
- полутраектория 4, 68; 5, 587
- формула 3, 767
Положительно асимптотическая точка 4, 570
- градуированный модуль 1, 1084
- определенная билинейная форма 2, 563
- - квадратичная форма 2, 778
- - матрица 4, 431
Положительно определенная форма 4, 430
Положительно определенная функция 4, 431; 5, 739
- - эрмитова матрица 5, 1019
- определенное самосопряженное линейное преобразование 4, 1074
- - финслерово пространство 5, 621
Положительно определенное ядро 4, 431
- - - эрмитово 5, 1023
Положительно определенный оператор 4, 432
- полуопределенная эрмитова матрица 5, 1019
- полуопределенное самосопряженное линейное преобразование 4, 1074
- устойчивая по Лагранжу траектория 5, 567
- - по Пуассону точка 4, 570
Положительное изменение функции 4, 430
- отображение 4, 434
- подпространство 4, 718
Положительное расслоение 4, 432
- число 2, 73, 76, 77
- эрмитово ядро 5, 1023
Положительности аксиома гармонического пространства 1, 889
- конус 2, 781
Положительный градуированный объект 2, 1001
- дивизор 1, 144; 2, 129, 131
- индекс инерции 2, 778
- квадратичный дифференциал 2, 786
Положительный конус 2, 1075; 4, 433, 470; 5, 526
- - группы 5, 833
- линейный метод приближения 4, 609
- - оператор 4, 470
- - функционал 4, 1149
Положительный оператор 4, 434, 905
- собственный вектор 4, 435
Положительный функционал 4, 435
- эксцесс 5, 969
Положительный элемент алгебры 4, 436
Полос метод 2, 607; 4, 436, 437
Полоса 4, 437, 471
- асимптотическая 4, 438
- геодезическая 4, 438
- критическая 2, 113, 189
- периодов 4, 268
- поверхностная 4, 437
- фокальная 2, 325
- характеристическая 2, 326; 5, 756
Полосообразная область 1, 1023
Полосы уравнение 2, 325
- условие 2, 325
Полугеодезические координаты 4, 438
Полугиперболическое пространство 4, 439
Полугруда 1, 1135
Полугрупп многообразие 4, 440
Полугруппа 4, 441—445
- автомата 1, 67
- архимедова 1, 328, 329
- бипростая 4, 702
- бициклическая 1, 499
- Брандта 1, 544
- Бэра — Леви 4, 703
- бэровская 4, 982
-, вложение в группу 1, 722
- вполне полупростая 1, 1019
- - простая 1, 762
- - регулярная 1, 762; 2, 883
- выпукло идеально простая 5, 524
- гауссова 1, 905
-, главный фактор 1, 1019
-, Грина отношения эквивалентности 1, 1121
-, идеальный ряд 2, 485
-, - фактор 1, 1019
- идемпотентная 2, 486
- изометрий 4, 1127
- инверсная 2, 545
- квазипериодическая 4, 267

- клиффордова 2, 883
- левых нулей 2, 487
- локально конечная 3, 432
- матричного типа рисовская 4, 1034
- многонная 3, 802
- монотетическая 5, 373
- мультипликативная 3, 840
Полугруппа нелинейных операторов 4, 445—447
- неприводимая 5, 373
- нильпотентная 3, 1042
- нормальная 4, 1127
-, нормальный комплекс 3, 1073
- однопараметрическая 3, 1172
Полугруппа операторов 4, 447—454
-, Оре условие 1, 723
- переходных вероятностей 4, 261
- периодическая 4, 266
- полупростая 1, 1019
- полутопологическая 5, 374
- правых нулей 2, 487
-, представление 4, 447, 587
- преобразований 4, 600
- примитивная 4, 935
-, производящий оператор 4, 692
- простая 4, 701
- 0-простая 5, 524
-, 0-прямое объединение 4, 723
- прямоугольная 2, 487
-, расширение 4, 907
- регулярная 4, 935
-, регулярный элемент 4, 945
-, Риса теорема 1, 762
- с возрастающим аннуляторным рядом 3, 1041
- с отделяющейся групповой частью 3, 1131
- с правой обратимостью 4, 702
- с правым делением 4, 702
Полугруппа с условием конечности 4, 454—456
- самосопряженная 4, 1127
- свободная 4, 1083
-, связка 4, 1090
-, сдвиг 4, 1099
- сепаративная 4, 1115
- сжатий 4, 1126
- - вполне неунитарная 4, 1127
- сильно непрерывная 4, 1130
- симметрическая 4, 599
- сингулярная 4, 487
- слабо равномерная 5, 372
- - редуктивная 4, 1100
-, сплетение 5, 147
-, тип 4, 1130
- топологическая 5, 372
- Тосье 4, 703
- унитарная 4, 1127
- упорядоченная 5, 523
- упорядочиваемая 5, 523
- феллеровская 4, 535
- финитно аппроксимируемая 5, 620
-, характер 5, 373, 748
- целозамкнутая 5, 525
- циклическая 3, 802; 5, 816
- четырехспиральная 4, 702
- чистая линейная 4, 553
- эндоморфизмов 5, 1001
-, ядро 3, 692; 5, 1044
1-полугруппа 5, 373
n-полугруппа 4, 444
Полугруппа-распределение 4, 451
Полугрупповая алгебра 4, 456
Полудедекиндова решетка 4, 456
- структура 4, 456
Полуевклидово пространство 4, 456
Полуинвариант 4, 457
- Вороного 2, 789
- линии 2-го порядка 3, 388
- поверхности 2-го порядка 4, 344
Полуканонический репер 4, 365
Полукольцо 2, 968, 4, 458
- множеств 3, 637
Полуконечная алгебра Неймана 3, 921
Полуконечный след 4, 1209
Полукруговая область 1, 893
Полукубическая парабола 4, 458
Полулинейное отображение 4, 458
- преобразование 4, 458, 679
Полулокальное кольцо 3, 439
Полумарковский процесс 4, 458
Полумартингал 4, 459
Полумодулярная решетка 4, 456
- структура 4, 456
Полумонотонность нормы 2, 1075
Полунаследственное кольцо 4, 459
Полунеевклидово пространство 4, 457
Полунепрерывная матрица 4, 461
Полунепрерывная функция 4, 460
- -, Бэра теорема 1, 568
Полунепрерывное отображение 4, 460
- - многозначное 3, 720
Полунепрерывное разбиение 4, 460
Полунепрерывность сверху 5, 385
Полунепрерывный метод суммирования 4, 460
- оператор 4, 19
Полунорма 3, 374, 1048; 4, 461
- весовая 1, 674
α-полунорма Гёльдера 1, 915
Полуограниченный оператор 4, 462
- -, расширение 4, 905
- снизу оператор 4, 905
Полуопределенная форма 4, 462
Полуоси гиперболоида 1, 1000
Полуось эллипсоида 5, 978
Полупервичное кольцо 4, 237
Полупериодическое условие 5, 915
Полуплоскость 4, 462
- голоморфности 2, 184
- сходимости ряда Дирихле 2, 183
Полуподобие унитарное 5, 507
Полуправильные многогранники 3, 711; 4, 463
Полуправильный многоугольник 3, 750
Полупростая алгебра 1, 383; 4, 463, 804
- - Ли 3, 272
Полупростая алгебраическая группа 4, 464
Полупростая группа 4, 465, 804
- - Ли 3, 257, 276
- компонента разложения Жордана 2, 421
Полупростая матрица 4, 465
- полугруппа 1, 1019
Полупростое кольцо 4, 465
- линейное преобразование 4, 466
Полупростое представление 4, 465
J-полупростое кольцо 2, 820
Полупростой модуль 4, 465
- ранг 4, 860
- - алгебры Ли 4, 861
Полупростой элемент 2, 423; 4, 465
Полупростой эндоморфизм 2, 421; 4, 466
Полупространство опорное 1, 797
Полупрямая 4, 466
Полупрямое произведение 4, 466, 912
Полупсевдоевклидово пространство 4, 466
Полупсевдориманово пространство 4, 467
Полурегулярная группа 4, 383
Полурегулярный тор 4, 945
Полуредуктивная группа 4, 946
Полурефлексивное пространство 2, 45
- - локально выпуклое 5, 384
Полурешетка 2, 486; 4, 467
Полуриманово пространство 4, 467
Полусимплектическое преобразование 4, 468
Полусимплектическое пространство 4, 468
Полусимплициальное множество 4, 1161
Полусимплициальный комплекс 4, 469, 1161
Полусовершенное кольцо 4, 469
Полуспинор 5, 140
Полуспинорное представление 5, 140
Полустабильное векторное алгебраическое расслоение 1, 638
Полустохастическая матрица 4, 261
Полуструктура 2, 486; 4, 467
Полутопологическая полугруппа 5, 374
Полуторалинейная форма 4, 469
- -, дискриминант 2, 210
Полутраектория 2, 767; 5, 587
- положительная 4, 68
Полу-Туэ система 5, 455
Полуупорядоченное пространство 4, 469—473
Полуустойчивый предельный цикл 4, 576
Полуформальная аксиоматическая система 1, 434
- система 4, 1181
- теория 1, 434; 5, 257
Полуфредгольмов оператор 3, 1062
Полуцелого порядка цилиндрическая функция 5, 822
Полуценное кольцо 4, 473
Полуценной модуль 4, 473
Полуэллиптическое пространство 4, 473
Польке — Шварца теорема о проекциях 1, 113, 4, 474
Полюс 2, 796, 1032; 4, 115, 474, 809; 5, 291
- алгебраической функции 1, 176
- аналитической функции 1, 264
- гиперплоскости 4, 477
- графа 4, 968
- входной 4, 967
- выходной 4, 968
- интерполяции 2, 618
- инверсии 2, 544
- контактной схемы 2, 1061
- координат 4, 480
- матрицы 1, 251
- мероморфной функции 3, 649
- на плоскости Римана 4, 990
-, порядок 4, 504
- сети 4, 1121
- сингулярного интеграла 4, 1176
Полюсник контактный 2, 1061
Поля аксиомы 5, 877
Поля оператор 4, 475
- теория квантовая 2, 829
Поляра 2, 796, 1032; 4, 475
- вторая 3, 140
- гармоническая 3, 140
- коническая 3, 140
- множества 2, 44
- на плоскости Римана 4, 990
- первая 3, 140
- прямолинейная 3, 140
- точки 4, 477
Поляризации степень 4, 477
Поляризация главная 4, 477
- точки 4, 64
- элсмента 1, 449
Поляризованное алгебраическое многообразие 4, 476
- многообразие Ω-систем 1, 186
- семейство 4, 477
Поляритет 4, 477
Полярная гомология 2, 1085
- особенность 4, 1206
- плоскость 4, 476
- система 4, 774
- форма 2, 796, 1032
- - комплексного числа 2, 1009
Полярное множество 4, 478
- отображение 5, 298
- преобразование 4, 477
Полярное разложение 4, 479
- расстояние 5, 291
Полярное соответствие 4, 480
- ядро 2, 605
Полярные выпуклые тела 1, 797
Полярные координаты 4, 480
- - геодезические 4, 438
Полярный период абелева дифференциала 1, 14
- - - интеграла 1, 16
- радиус 4, 480
- угол 4, 480
Помехоустойчивость 4, 481
Помпею формула 3, 55
Понижающий множитель 5, 442
Понселе — Штейнера построения 1, 933
Понтрягина алгебра 5, 790
Понтрягина двойственность 1, 231; 4, 481—483
- -, теорема для топологических полугрупп 5, 373
Понтрягина инвариант 4, 483
Понтрягина квадрат 4, 483
Понтрягина класс 4, 484—487; 5, 762
- - симплектический 5, 761
Понтрягина поверхности 4, 487
Понтрягина принцип максимума 4, 487—489
Понтрягина пространство 4, 489—491
- степень 4, 484
- теорема двойственности 1, 231, 882
- - о бордантных многообразиях 4, 481
- - об инвариантах 4, 483
Понтрягина характер 4, 491
Понтрягина число 4, 491
- экстремаль 4, 50, 488
Понтрягина — Куратовского теорема (критерий) о графах 1, 1109, 1119
Понтрягина — Нёбелинга теорема о компактах 2, 990
Понтрягинская форма задачи Лагранжа 3, 170
Понтрягинского типа задача 4, 489
Попарная независимость событий 3, 914
Попарно ортогональные квадраты 4, 90
Поперечная проекция 2, 753
Поперечник 4, 622
- гомологический 1, 1060
Поперечник множества 4, 492—495
- p-размерный 1, 1060
Попова критерий 5, 564
Пополнение алгебры 4, 1149
- Мак-Нейла 4, 496
- мальцевское 3, 435
- множества 4, 422
- пространства 1, 666; 3, 671
Пополнение равномерного пространства 4, 496
Пополнение сечениями 4, 496
Пополнение топологического пространства 4, 496; 5, 378
Пополнения метод 4, 496
Пополняющий гомоморфизм 4, 1084
Поправка Йетса 2, 693
Поправление 1, 503
Пористое множество 4, 497, 569
Пористости точка 4, 497
Пороговая функция 5, 302
Пороговый элемент 5, 302
Порождающая грамматика 1, 1092
- система 2, 770
Порождающий оператор 1, 373
Порция множества 4, 497
Порядка аксиома 5, 877
- отношение 4, 505
Порядка соотношение 4, 497
Порядковая статистика 4, 498—501
- сходимость 4, 470, 1037
Порядковая топология 4, 501
Порядково полное упорядоченное векторное пространство 4, 470
Порядковое число 4, 501—503
- -, Кёнига теорема 2, 724
Порядковый гомоморфизм 5, 522, 524
- признак 3, 733
Порядковый тип 4, 503
Порядковых автоморфизмов группа 1, 199
Порядок 4, 504, 505
- алгебраической сети 2, 804
- алгебраической системы 1, 155

- алгебраической точки ветвления 1, 174, 176
- аппроксимации 4, 627
- борелевского множества 1, 536
- величины 4, 498
- гиперповерхности 1, 1009
- группы 2, 1016
- дифференциального оператора 2, 345
- - уравнения 2, 285, 298
- - - линейного 3, 339
- канонического произведения 2, 714
- коварианта 2, 896
- конгруэнции 2, 1014
- кривой 4, 309
- лексикографический 3, 233
- метрический 3, 659
- нелинейности 1, 936
- нуля (полюса) мероморфной функции 3, 649
- подстановки 4, 381
- полюса 4, 475
- преобразования эллиптических функций 5, 987
- приближения 4, 627
- псевдодифференциального оператора 4, 735
- пучка 4, 773
- разветвленности 5, 971
- связности 3, 748
- - области 3, 1098
- тета-ряда 5, 346
- тета-функции 5, 347
- целой функции 5, 798
- частичный 5, 836
- числа 2, 443
- эллиптической функции 5, 986

R-порядок целой функции 2, 185
Последействия эффект 4, 388
Последняя теорема Пуанкаре 4, 751
Последования отображение 2, 338, 4, 505
- функция 4, 505, 576
Последователь порядкового числа 4, 501
Последовательно аннулирующая связка 4, 1091
Последовательного улучшения плана метод 4, 1152
Последовательное правило 4, 508
Последовательной верхней релаксации метод 4, 966, 1077
Последовательностей категория 4, 506
Последовательностная функциональная система 5, 695
Последовательность 4, 506
- абсолютно беспристрастная 1, 38
- асимптотическая 1, 333
- бесконечно большая 4, 557
- бесконечно малая 4, 557
-, верхний предел 1, 669, 670
- возвратная 1, 740
- возрастающая 1, 749
- выпуклая 1, 792
- гомологическая 1, 1045, 1052, 1058, 2, 1000, 1002
- двойная 2, 24
-, двойной предел 2, 28
- дискретно компактная 5, 311
- - сходящаяся 5, 311
- интерполяционная 2, 621
- - универсальная 5, 789
- итерационная 2, 690
- когомологическая 1, 1046, 1053, 2, 925, 1001
- компактно сходящаяся 5, 311
- Коши 3, 61, 5, 682
- кратная 3, 88
- лакунарная 3, 183
- Лапласа 3, 196
- максимизирующая 3, 489
- Мейера — Вьеториса 1, 1048
- минимизирующая 1, 303; 3, 489, 699
- монотонная 3, 813
- мультипликативная 5, 763
- наилучших приближений 3, 873
- невозрастающая 5, 466
- неубывающая 1, 749
-, нижний предел 1, 669, 670
- обобщенная 3, 890; 5, 307
- обучающая 4, 872
- определенно расходящаяся 5, 1042
-, плотность 5, 894
- позитивная 4, 385
-, показатель сходимости 2, 714
-, предел 4, 556, 559, 562
-, равномерная сходимость 4, 787
- расходящаяся 4, 896
-, расщепляемость 4, 632
- расщепляющаяся 4, 913
- регулярно сходящаяся 5, 311
- рекуррентная 1, 740
- серий 4, 1118
- случайная 1, 663, 5, 10, 23
- собственно сходящаяся 5, 311
- спектральная 5, 106
- стохастическая 5, 240
- строго возрастающая 1, 749
- - убывающая 5, 466
- суммирование 5, 270
- сходящаяся 5, 306, 309
- точек равномерно распределенная 4, 876
- точная 5, 409
- трансфинитная 4, 501; 5, 421
- убывающая 5, 466
- устойчиво сходящаяся 5, 312
- фундаментальная 2, 76; 3, 670, 5, 682
- шпеккерова 5, 896

P-последовательность для мероморфной функции 4, 569
α-последовательность 4, 502
Последовательный анализ 4, 507—511
- минимум лучевой функции 1, 947

Последовательных приближений метод 2, 690; 4, 511
Поста алгебра 3, 714; 4, 513
- *m*-значная логика 3, 719
- исчисление 4, 513

Поста каноническая система 4, 513
Поста класс 3, 716; 4, 513
Поста машина 4, 515
Поста нормальная система 4, 515
- нормальное исчисление 4, 515
- нумерация 3, 1086
- проблема 3, 1003
- - о сводимости 4, 958

Поста решетка 4, 515
Поста система продукций 4, 515
- теорема о перечислимых множествах 4, 265

Постепенный переход к пределу 4, 1043
Постникова квадрат 4, 515
Постникова система 1, 1070; 4, 515—518
Постниковский фактор 4, 516
Постоянного охвата тело 4, 519
Постоянное отображение 4, 153
Постоянной кривизны пространство 3, 100; 4, 518
Постоянной ширины кривая 4, 519
Постоянной ширины тело 4, 519
- яркости тело 4, 519

Постоянный пучок 4, 766
Постоянство растяжений 2, 1092
Постулат 2, 368, см. также соответствующее название
Постулации формула Кэли — Нётера 1, 150
Постусловие программы 4, 652
Постфиксная операция 4, 18
Посылка правила 1, 920
- правила вывода 1, 780

Потенциал 1, 890, 4, 519, 533
- абелев 2, 239
- бесселев 1, 458
- векторный 1, 650; 4, 520
- волновой 3, 609
- двойного слоя 2, 26; 4, 524
- - - Грина 4, 529
- - - логарифмический 4, 524
- - - ньютонов 4, 524
- - -, прямое значение 4, 525
- диполя 3, 843
- емкостный 2, 403, 404
- запаздывающий 2, 441, 860
- квадруполя 3, 843
- конечнозонный 3, 31
- логарифмический 3, 410
- - масс 4, 524
- меры 4, 529
- мультиполя 3, 843
- нелинейный 3, 961
- ньютонов 3, 1094
- объёмный 3, 1151; 4, 524
- - Грина 4, 529
- - ньютонов 4, 524
-, плотность 4, 524
- поверхностный 4, 341
-, полярное множество 4, 478
- простого слоя 4, 704
- - - логарифмический 4, 524
- - - ньютонов 4, 524
- - -, прямое значение нормальной производной 4, 525
- - - тепловой 4, 705
- равновесный 2, 403, 404; 4, 528, 1046, 1047
- распределения 4, 530
- Рисса 4, 1036
- риссов 2, 384
- Робена 4, 528, 1046
- скалярный 1, 650, 4, 520, 536
- тепловой 3, 609
- термодинамический 5, 171, 340
- функции 4, 262

α-потенциал 4, 1036
Потенциала теории обратные задачи 4, 520—523
Потенциала теория 4, 523—531
Потенциала теория абстрактная 4, 531—535
Потенциалов метод 4, 535; 5, 420
Потенциальная бесконечность 1, 44, 45
- помехоустойчивость 4, 481

Потенциальная сеть 4, 536
- функция 4, 519, 536

Потенциальное поле 1, 649; 4, 536
- - векторное 3, 202

Потенциальный оператор 3, 960, 947; 4, 537
Потерь функция 4, 537
Поток 3, 1170; 4, 538; 5, 371
Поток в интуиционистской математике 4, 538
Поток в сети 4, 539
Поток векторного поля 1, 650; 4, 340, 537
- входной 3, 542
- вызовов входящий 3, 541
- геодезический 1, 928
- главный 4, 538
- измеримый 2, 499
- касательный 2, 756
-, монотонная эквивалентность 5, 1011
- на торе 2, 338
- непрерывный 3, 993
- орициклический 4, 73
- простейший 4, 703
- пуассоновский 3, 542; 4, 763
- разрешимый 4, 852
- специальный 5, 137
- топологический 3, 994
- фазовый 1, 83
- финитарный 1, 613

K-поток 4, 1194
Потоковый анализ программы 4, 644
- метод прогонки 4, 643

Поточечная сходимость 4, 540, 5, 308
Поточечной сходимости топология 4, 540, 716; 5, 382
Похгаммера уравнение 4, 541
- функция 1, 804

Почленное дифференцирование рядов 4, 1069
- интегрирование рядов 4, 1069

Почти всюду 3, 639; 4, 541
- гамильтонова структура 4, 1156
- изометричные банаховы пространства 1, 390
- инвариантная функция 4, 598
- инвариантный элемент 4, 279

Почти комплексная структура 4, 541
- кроссово многообразие групп 1, 1137
- кэлерова структура 5, 1021
- линейная система 2, 816
- нормальная формула 2, 1047

Почти период 4, 543
Почти периодическая функция 1, 375; 4, 543—545
- - - абстрактная 3, 1119
Почти периодическая функция аналитическая 4, 545
- - - асимптотическая 3, 1120
- - - Бора 1, 532
- - -, Дирихле ряд 2, 186
- - - комплексная 1, 382

Почти периодическая функция на группе 3, 1119; 4, 546
- - - - - правая 4, 546
- - - обобщенная 3, 1118
- - - равномерная 1, 532
- периодические функции Безиковича 1, 400
- - - Боля 1, 530
- - - Бохнера 1, 542
- - - Вейля 1, 629
- - - Степанова 5, 216
- периодическое решение 3, 75

Почти приводимая линейная система 4, 547
Почти простое число 4, 548
Почти симплектическая структура 4, 548
- чебышевское множество 5, 851
- эрмитова связность 5, 1020
- - структура 5, 1021

N-почти периодическая функция Левитана 3, 1120
Почтикольцо 2, 968; 4, 549
«Почтовый ящик» 4, 649
Пояс вокруг компакта 1, 1060
Пояс симплекса 3, 153; 4, 550
Правая геодезическая кривизна 1, 924
Правая группа 4, 550
- единица 2, 400, 3, 790
- *F*-квазигруппа 2, 803
- конгруэнция 1, 1123
- мера Хаара 3, 644
- полуплоскость 4, 462
- почти периодическая функция на группе 4, 546
- прогонка 4, 643
- производная 2, 272; 3, 1184
- трансляция 2, 802
- тройка векторов 1, 634

Правдоподобия максимального метод 3, 483
- отношение 5, 172

Правдоподобия уравнение 3, 483; 4, 551
- функция 2, 645; 3, 483; 4, 176; 5, 173
- - логарифмическая 2, 645

Правило — см. соответствующее название
Правильная аналитическая кривая 1, 246
- вершинная (реберная) раскраска графа 1, 1113
- граничная точка 3, 968
- дробь 2, 389
- - цепная 5, 813
- замкнутая кривая типа Пеано 4, 230

Правильная интерпретация 4, 551
- конфигурация 2, 1077

Правильная линейная система 4, 551
- подалгебра булевой алгебры 1, 552
- призма 4, 633
- ткань 5, 355
- точка аналитической функции 1, 264
- укладка графа 1, 1115
- функция 4, 937
- цепная дробь 5, 813

Правильно сходящийся ряд 4, 791
Правильное вложение 2, 138
- пространство близости 1, 503
- разбиение 4, 810

Правильные многогранники 3, 712; 4, 552
Правильные многоугольники 3, 750; 4, 553
Правильный гиперболоид 1, 1000
- коммутатор 1, 379
- конус 2, 1076
- многогранный угол 3, 712

Правого сдвига оператор 3, 1111, 1113

Правое деление формальных языков 5, 644
- крыло слова 1, 772
- обратное отображение 3, 1133
- примитивное кольцо 4, 637
- совершенное кольцо 5, 68
- топологическое векторное пространство 5, 377
- цепное кольцо 5, 815
- ядро 3, 460
- - билинейного отображения 1, 484
- - билинейной формы 1, 483
Правозакрученная винтовая линия 1, 706
Правоинвариантная мера Хаара 5, 741
- метрика 5, 625
Правоинвариантное среднее 2, 534
Правоинвариантный интеграл 2, 531
Правоконтекстная грамматика 1, 1094
Правопримитивный идеал 4, 638
Праворегулярная функция гиперкомплексного переменного 1, 1007
Правосингулярная полугруппа 2, 487
Правоупорядоченная группа 4, 553
Правый аппроксимативный предел 1, 305
- идеал 2, 481
- - минимальный 3, 693
- A-модуль 3, 777
- нуль 3, 1082
- - категории 5, 616
- обратный линейный оператор 3, 370
- G-объект категории 1, 1018
- поворот кривой 1, 790
- регуляризатор оператора 4, 1175
- символ оператора 4, 1134
- смежный класс 5, 36
- топологический модуль 5, 377
- цоколь 3, 693
- частный элемент 1, 1138, 5, 525
Прандтля уравнение 4, 554
Прандтля число 4, 554
Превосходное кольцо 4, 554
Предабелева категория 1, 89
Предбаза 4, 555
- топологии 1, 671
Предваренная форма 4, 556
- - нормальная 4, 555
Предваренная формула 4, 555
Предгеометрия 2, 969
Предгильбертово пространство 1, 979; 4, 556
Преддвойственное пространство 3, 920
Предел 4, 556—563
- аппроксимативный 1, 304
- асимптотический 1, 335
- в компактно открытой топологии 4, 954
- двойной 2, 28
- доверительный 2, 367, 615; 3, 923
- индуктивный 2, 557; 3, 428; 5, 381
- нижний 3, 1036
- обратного спектра 5, 100
- обратный 4, 683
- односторонний 3, 1183
- повторный 4, 349
- последовательности верхний 1, 669, 670
- - нижний 1, 669, 670
- проективный 3, 428; 4, 683; 5, 381
- прямого спектра 5, 99
- система Постникова 4, 515
- слева 3, 1184
- справа 3, 1184
- толерантный 5, 359
- тонкий 5, 365
- функции верхний 1, 670
- -, Коши критерий 3, 56
- - нижний 1, 670
- -, Фату теорема 1, 31
- частичный 5, 836
Предельная алгебра 2, 108
- линия 3, 399; 4, 73
- поверхность 3, 399
- сфера 5, 288
- теорема Пуассона 4, 759
- - центральная 5, 804
- точка Вейля 5, 916
Предельная точка множества 4, 563
Предельная точка траектории 4, 563
- формула Лапласа 1, 904
α-предельная точка 4, 563
ω-предельная точка 4, 563
Предельно ограниченная система 2, 227
- постоянная случайная величина 1, 524
Предельного поглощения принцип 4, 563—565
Предельное значение 4, 565
- кардинальное число 2, 724
- множество группы 2, 875
Предельное множество траектории 4, 570
- - фуксовой группы 5, 678
Предельное множество функции 4, 565—570
- порядковое число 4, 501
α-предельное множество 4, 563, 570
ω-предельное множество 4, 563, 570
Предельной амплитуды принцип 2, 495; 4, 571
Предельные теоремы локальные 3, 443
Предельные теоремы теории вероятностей 1, 662; 4, 572—575
Предельный конус 4, 575
- круг Вейля 5, 916
- переход термодинамический 5, 341
Предельный цикл 4, 575
- спектр 5, 99
- элемент вполне упорядоченного множества 1, 764
Предикат 4, 576, 577
- арифметический 1, 320
- n-арный 4, 151
-, Бернайса лемма 1, 910
- вспомогательный 1, 207
-, гейтинговское исчисление 1, 911
- индукционный 2, 558
-, интуиционистское исчисление 1, 911
- n-местный 4, 151
- нумерически выразимый 3, 1088
- основной 1, 207
- разрешимый 4, 852
- рекурсивный 4, 961
- универсальный 1, 320
Предикативная промежуточная логика 4, 696
- теоретико-типовая система 5, 352
Предикативность 4, 577
Предикативный анализ 5, 641
Предикатная буква 4, 577
- константа 2, 1036
Предикатная переменная 4, 577
Предикатный символ 4, 577
Предикатов исчисление 4, 577—580
- - интуиционистское 2, 643
- - классическое 3, 417, 418
- - минимальное 3, 692
- - одноместное 3, 419
- -, основная интерпретация 3, 418
- - сингулярное 3, 419
- - узкое 4, 579
- -, формулы 3, 416
Предиктор 2, 414
Предкомпактное пространство 1, 502; 4, 580
Предложение 4, 580; 5, 269, 637
- индукционное 2, 558
- конфигурационное 2, 1080
- неразрешимое 3, 1004
- формально неразрешимое 3, 1004
Предмера 4, 580; 5, 818
- гауссова 3, 646
Предметная константа 2, 555
Предметная область 4, 580
Предметная переменная 2, 555; 4, 576, 581
- теория 3, 653
Предметный язык 4, 581, 1185
Преднорма 3, 378, 1048; 4, 581
Предписанная продолжительность игры преследования 4, 602
Предполный класс 1, 71; 3, 715
Предположение индуктивное 2, 558; 3, 564
Предпорядок 4, 505, 581
Предпочтение 4, 399
Предпучок 4, 581, 766
- множеств 5, 1024
- сечений 4, 766
Предсказуемая σ-алгебра 4, 581
- проекция дуальная 4, 1200
- случайная мера 4, 1199
Предсказуемый случайный процесс 4, 582
Представимая квадратичная форма 2, 778
Представимости матриц проблема 4, 582
Представимый функтор 4, 582
Представление 4, 586
- алгебраически неприводимое 3, 997
Представление алгебры Ли 4, 583
- - -, кратность веса 3, 89
- аналитическое 1, 283, 446
- антианалитическое 1, 283
- асимптотическое 1, 337
Представление ассоциативной алгебры 4, 584
- - -, характер 5, 749
- Бергмана—Вейля 1, 413
- бесконечномерное 1, 446
Представление бесконечной группы 4, 585
Представление бикомпактной группы 4, 585
- Бурау 3, 34
- векторное 5, 139
-, вес 4, 464
- вполне приводимое 1, 761; 4, 592
-, вырожденная серия 1, 806
- Гейзенберга 1, 911
- Гельфанда 1, 917
- голоморфное 1, 283
- групп Ли, Гельфанда — Гординга теорема 2, 359
Представление группы 4, 382, 586
- -, инвариант 2, 541
- - регулярное левое (правое) 2, 992
- -, характер 5, 749
- дизъюнктное 2, 136, 5, 147
-, дискретная серия 2, 202
-, дифференциал 1, 447
- дифференцируемое 1, 446
-, дополнительная серия 2, 374
- единичное 2, 401
- изотропии 2, 521
- индуцированное 2, 558
- интегрируемое 1, 448, 2, 612
- касательное 5, 297
- квазипростое 2, 819
- кольца 3, 778, 5, 1001
- коммутационных и антикоммутационных соотношений 2, 990
Представление компактной группы 4, 586
- конечной группы 2, 1019
- конечномерное 2, 1022; 4, 595
- контрагредиентное 2, 1070; 4, 583, 591
- коприсоединенное 3, 10
- Лакса 4, 1191
- линейное 3, 350, 4, 595
- - кристаллографической группы 3, 108
- Мартина 3, 532
- Мартинелли — Бохнера 1, 542
- многозначное 3, 721
-, модуль 4, 595
- модулярное 2, 1021
- мономиальное 3, 811
- невырожденное 3, 906
- непрерывное 1, 446, 3, 988
- неприводимое 1, 448; 3, 996; 4, 546
- неразложимое 3, 1001; 4, 592
- нормальное 1, 449
-, ограничение 5, 269
- операторно неприводимое 4, 24
- параметрическое 2, 587
-, подпредставление 4, 378
Представление полугруппы 4, 447, 587
-, полуинвариант 4, 457
- полупростое 4, 465
- полуспинорное 5, 140
- приводимое 4, 633
- примарное 4, 634
- примитивное 2, 524
- присоединенное 4, 639
- про-p-группы 4, 655
- проективное 4, 678
- простое 4, 706
-, пространство 4, 595
- раздельно непрерывное 1, 446
- разложимое 4, 592
-, размерность 1, 446; 4, 546, 595
- рациональное 4, 920
- регулярное 4, 383, 941
- Рисса 4, 1039
-, серия 4, 1117
Представление симметрической группы 4, 588—590
- симметричное 4, 1150
Представление со старшим вектором 4, 590
- сопряженное 4, 591
- спинорное 5, 140
-, сужение 5, 269
- Тейхмюллера 1, 711
- тензорное 5, 329
-, тензорное произведение 5, 332
- топологически неприводимое 3, 996
Представление топологической группы 4, 591—594
- точное 4, 595; 5, 409
- транзитивное imprимитивное 2, 524
- тривиальное 2, 401
-, унитарная эквивалентность 5, 508
- унитарное 4, 546; 5, 508
- K-финитное 1, 448
- Флоке 2, 773; 5, 630
-, формальная размерность 2, 202
- Шрёдингера 5, 897
- эквивалентное 5, 943
- ядерное 5, 1031
A-представление 1, 447
Представлений кольцо 4, 594
- непрерывная серия 3, 982
Представлений теория 4, 595
Представления квазиэквивалентные 2, 827
Представления классических групп 4, 595—598
Представленческого типа алгебра 4, 585
Представляющая мера 2, 966
- точка 2, 144
Представляющая функция 4, 598
Представляющее сечение 4, 599
Представляющий функтор 4, 582
- элемент 4, 278
Предупорядоченность 4, 581
Предусловие программы 4, 652
Предшественник порядкового числа 4, 501
Предъязык 4, 642
Прекомпактная равномерность 4, 796
Прекращения точка 4, 599; 5, 424
Пренебрегаемость асимптотическая 1, 333
Пренексная форма 4, 555
Преобразование 4, 599; 5, 713
- Абеля 1, 27
- Аппеля 1, 301
- аффинное 1, 361
- Бендиксона 1, 411
- Бианки 1, 465
- бирациональное 1, 494
- Бореля 1, 538
- Бохнера 2, 589
- Варма 3, 633
- Ватсона 1, 610
- Вебера 2, 589

- Вейерштрасса 1, 899; 2, 589
- Вилсона — Хилферти 5, 34
- Галилея 1, 844
- Ганкеля 2, 589
- Гаусса 1, 899
- Гегенбауэра 1, 908
- Гельфанда 2, 985
- Гильберта 1, 968
- годографа 1, 1027
- гомографическое 1, 301
- градиентное 1, 1082
- двойственности 1, 126
- дробно-линейное 2, 384
- дуальное 3, 29
- Жонкьера 3, 95
- изометрическое 1, 790; 2, 505
- интегральное 2, 589, 604
- инфинитезимальное 2, 645
- калибровочное 1, 1083
- каноническое 1, 860
- Карсона 2, 729
- касательное 2, 755; 4, 634
- квазисимплектическое 2, 822
- Кельвина 2, 844
- контактное 2, 1063, 4, 634
- - инфинитезимальное 2, 1063
- Конторовича — Лебедева 2, 1069
- конформное 2, 1097
- Кон-Фоссена 2, 1101
- кремоново 3, 94
- кривизны 3, 102; 4, 1007
- круговое 3, 122
- Куммера 3, 147
- Кэли 2, 505; 3, 157
- Лагерра 3, 168
- Ламберта 3, 187
- Лапласа 3, 196, 200
- Лебедева 3, 218
- Лежандра 3, 229
- линейное 3, 291, 350, 369
- Лиувилля 3, 392
- локальное 4, 730
- Лоренца 3, 453
- Ляпунова 2, 766; 3, 468
- мартингальное 3, 534
- Мёбиуса 3, 122
- Мейера 3, 632
- Мейера — Бесселя 3, 633
- Мелера — Фока 3, 634
- Меллина 3, 635
- монодромии 3, 806
- моноидальное 3, 810
- наложения 3, 807
- Нильсена 4, 1082
- ортогональное 4, 81, 87
- Перрона 4, 275
- Петерсона 4, 279
- Погорелова 1, 436
- полулинейное 4, 458, 679
- полусимплектическое 4, 468
- полярное 4, 477
- прикосновения 2, 1063; 4, 634
- проективное 4, 666, 679
-, псевдогруппа 4, 730
- Пуанкаре 3, 453; 4, 749
- Пуассона 4, 756
- Радона 4, 809
- свертки 4, 1077
- симметрическое 4, 1074
- симплектическое 4, 1157
- скольжения 3, 807
- случайных величин 5, 33
-, собственное значение 5, 58
- стандартное квадратичное 3, 94
- Стилтьеса 5, 227
- строго контактное 2, 1063
- тождественное 1, 125
- Уиттекера 5, 492
- унимодулярное 5, 504
- унитарное 5, 513
- Фишера 5, 34
- Фурье 2, 590; 4, 294; 5, 727
- - на группе 1, 882
- Фурье —Стилтьеса 5, 738, 756
- Харди 5, 773
- хаусдорфово общее 5, 778
- центроаффинное 5, 811
- цепное 2, 589
- Чаплыгина 1, 1028
- частичное 4, 600
- Эйлера 3, 449; 5, 929
- Эрмита 5, 1016
- эрмитово 4, 1074
- Якоби 5, 1049

λ-преобразование Фурье 5, 722

Преобразований группа 4, 599
Преобразований полугруппа 4, 600
Преобразования оператор 5, 918
Преобразователь дискретный 4, 654
- информации 2, 852
- конечный 1, 54
Препятствие 4, 517, 601
-, Александрова теорема 1, 1056
Препятствий число 1, 153
Преследования игра 4, 602
Преследования — уклонения игра 2, 330
Префиксная операция 4, 18
Префиксный код 2, 937
Приближающее множество 4, 603
Приближение 4, 603
- аналитических функций, Монтеля теорема 3, 820
Приближение в среднем 4, 603, 605
- - - наилучшее 3, 872
- взвешенное 4, 605
- - среднестепенное 4, 603
- геометрическое 1, 939
- геометрической оптики 2, 809
- геометро-оптическое 1, 939
- гидродинамическое 1, 964
- диофантово 2, 162
- диффузионное 2, 360
- квазиклассическое 1, 717; 2, 807
-, Келдыша теорема 2, 842
- коротковолновое 2, 809
- Лиувилля — Грина 1, 717
- многогрупповое 3, 712
- наилучшее полное 3, 869
- одностороннее 4, 608
- равномерное 4, 604, 794; 5, 852
- рациональное 4, 1056
- среднеквадратическое 4, 605; 5, 162
- среднестепенное 4, 603, 605
Приближение функций 4, 603—609
Приближение функций комплексного переменного 4, 624—627
Приближение функций; линейные методы 4, 605, 609—612
- - локальное 3, 440
- - наилучшее 3, 870
Приближение функций; прямые и обратные теоремы 4, 612—614
Приближение функций; случай многих действительных переменных 4, 614—618
Приближение функций; экстремальные задачи на классах функций 4, 618—624
- чебышевское 4, 604; 5, 852
ВКБ-приближение 1, 717
Приближения метод 4, 605
Приближения порядок 4, 627
Приближения теория 4, 627
Приближения функций мера 4, 628
Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2, 290, 626
Привалова операторы 4, 629
- основная лемма в теории интеграла типа Коши—Стилтьеса 3, 53
- - - о сингулярном интеграле Коши 4, 630
- параметр 4, 629
Привалова теорема 4, 630
- - единственности 4, 630
- - о гармонических функциях 1, 875; 4, 630
- - о сингулярном интеграле Коши 4, 630
- - о сопряженных функциях 4, 630
- - об интегралах типа Коши — Лебега 4, 631
Приведение к абсурду 4, 631
- квадратичных форм 2, 788
- подобных членов 3, 753
Приведения к абсурду закон 3, 691; 4, 386
- условия Лагранжа — Гаусса 2, 789
Приведенная C^*-алгебра 5, 512
- аффинная схема 1, 358
- гомологическая последовательность 1, 1046
Приведенная группа 2, 888
- - гомологии 1, 1046
- - Уайтхеда 5, 135, 464
- замкнутая подсхема 2, 434
- корневая система 3, 16
- матрица плотности 4, 320
- надстройка 3, 862
Приведенная система вычетов 4, 631; 5, 152
- степень Стинрода 5, 230
Приведенная схема 4, 631
- K-теория 4, 924
- форма уравнения Бесселя 1, 460
Приведенно свободная группа 4, 1082
Приведенное аналитическое пространство 1, 286
- квадратное уравнение 2, 792
Приведенный автомат 1, 69, 78
- вурф 1, 771
- класс вычетов 5, 152
- модуль 3, 783
- полином 1, 128
Привилегированный компакт 4, 632
Приводимая n**-арная операция** 2, 804
- кривая 4, 309
Приводимая линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений 2, 766; 4, 633
Приводимое алгебраическое уравнение 1, 192
- аналитическое множество 1, 280
Приводимое представление 4, 633
Приводимое риманово пространство 4, 633
Приводимый многочлен 3, 754
Призма 3, 709; 4, 633
Призматоид 4, 634
Прикладное исчисление 3, 411
- программирование 4, 645
Приклеивание ручек 2, 52, 4, 1058
Приклеивающая сфера 4, 1058
Приклеивающее отображение 4, 1058
Прикосновенная линия 2, 1003
Прикосновения преобразование 2, 1063; 4, 634
Прикосновения точка 2, 1002; 4, 634; 5, 389
Прилежащие углы 5, 467
Примальная универсальная алгебра 5, 498
Примарная группа 1, 1142
- - абелева 1, 18
Примарно редуцированное представление 1, 91
Примарное кольцо 4, 634
Примарное представление 4, 634
Примарное разложение 4, 634
Примарный идеал 1, 91, 132; 4, 635
- множитель Вейерштрасса 1, 616; 2, 714
- подмодуль 4, 635
- радикал 1, 91
Примитивная гармоническая форма 1, 874
- группа 2, 524
Примитивная группа подстановок 4, 635
- полугруппа 4, 935
- псевдогруппа преобразований 4, 730
Примитивная рекурсия 4, 636, 963
- функция 4, 237
Примитивно рекурсивная арифметика 3, 412
Примитивно рекурсивная функция 4, 636, 963
- рекурсивное описание 4, 636; 963
- - отношение 4, 636
Примитивное кольцо 4, 637
- представление 2, 524
Примитивной рекурсии оператор 4, 960
Примитивные когомологии 3, 237
- периоды абелевой функции 1, 22
Примитивный алгебраический класс когомологий 1, 181
Примитивный идеал 4, 638
- идемпотент 1, 762
Примитивный класс 1, 185; 4, 638
- корень 4, 237
Примитивный многочлен 4, 638
- одночлен 3, 1184
- период 2, 50, 4, 268
- репер 1, 755
- характер 2, 192
- цикл 3, 237
- элемент 1, 850
Принудительная синхронизация 1, 47, 787
Принцип — см. соответствующее название
Приоритета метод 4, 638
Приписывающая функция 1, 1091
Приращение полное 2, 236, 275; 4, 424
- частное 2, 274; 4, 424
Присваивания оператор 1, 224
Присоединенная алгебра 4, 640
Присоединенная группа 4, 639
Присоединенная поверхность 4, 639
- система 2, 340
- экстремаль 5, 1054
Присоединенное кольцо 3, 438
Присоединенное представление 4, 639
- - алгебры Ли 3, 242
- - группы Ли 3, 257
Присоединенные уравнения 5, 419
- функции Лежандра 3, 232; 5, 293
Присоединенный эндоморфизм 3, 242
Пристрелки метод 3, 939; 4, 640
Пристройка 4, 1058
Притяжения область 4, 640
- - локального экстремума 3, 756
Причесывание косы 3, 34
Проблема — см. соответствующее название
Проблемно - ориентированный язык 1, 223; 4, 641
Проверочная матрица 2, 932
Проводимость контакта 4, 969
- обмотки 4, 969
- цепи 2, 1061
Прогноза метод 2, 292
Прогнозирование случайных процессов 5, 34
Прогомотопический тип 1, 1074
Прогонка обратная 2, 293
- прямая 2, 293
Прогонки метод 4, 642
- - ортогональный 4, 88
Программ оптимизирующие преобразования 4, 643—645
Программа 1, 220, 819; 4, 645
-, алгополодобная схема 4, 650
- действий 3, 601
-, компиляция 5, 417
- машины Тьюринга 5, 456
- объектная 5, 419
-, отладка 4, 646
-, постусловие 4, 652
-, потоковый анализ 4, 644
-, предусловие 4, 652
- программирующая 1, 225
-, проекция 5, 418
- системная 4, 1196
- стандартная 5, 167
-, схема 4, 650
- тотально правильная 4, 652
-, трансляция 5, 417
- управления 1, 62
- частично правильная 4, 652
Программирование 4, 645—647
-, автоматизация 1, 58
- булево 2, 678
- выпуклое 1, 798; 2, 678; 3, 602
- динамическое 2, 154

- дискретное 2, 204, 678; 5, 800
- квадратичное 2, 678, 784
- линейное 2, 678; 3, 353
Программирование математическое 2, 677, 3, 601; 4, 647
- нелинейное 3, 945
-, операнд 4, 18
-, оператор 4, 18
- оптимальное 2, 677
Программирование параллельное 4, 647—649
- параметрическое 4, 220
- прикладное 4, 645
- системное 4, 645, 1196
- стохастическое 2, 678; 3, 602; 5, 245
Программирование теоретическое 4, 650—654
-, формальный язык 1, 222
- целочисленное 2, 678; 5, 800
Программирования язык 4, 654
Программированная грамматика 1, 1089
Программирующая программа 1, 225
Программирующий процессор 1, 225
Программное обеспечение 3, 595
- оптимальное управление 4, 47
- поглощение 2, 333
Программы схема 4, 655
Прогрессивно измеримый марковский процесс 3, 525
Прогрессия 4, 655
- арифметическая 1, 322
- геометрическая 1, 932
Про-p-группа 1, 846; 4, 655
Продолжаемость решений дифференциальных уравнений 4, 656
Продолжение аналитическое 1, 267, 283
- геометрического объекта 1, 938
- линейного дифференциального оператора 3, 365
- меры 3, 637
- отображения 4, 153
- G-структуры 5, 252
Продолжений и охватов метод 4, 657—659
Продолжения по параметру метод 3, 948, 992; 4, 659
Продолжения теоремы в аналитической геометрии 4, 662
Продолжения теоремы в теории функций 4, 660—662
Продуктивное множество 4, 662
Продукций система Поста 4, 515
Проективизация векторного расслоения 1, 648
Проективная алгебра 4, 663
Проективная геометрия 4, 664—666
Проективная группа 4, 666, 679
- - специальная 4, 416
Проективная дифференциальная геометрия 4, 666
- иерархия 2, 490; 4, 677
- интерпретация Кэли — Клейна 3, 402
- инфинитезимальная структура 2, 645
- конфигурация 2, 1077
- кривизна, тензор 3, 101
- мера отрезка 1, 34
Проективная метрика 4, 667
- модель 3, 683
Проективная нормаль 4, 668
Проективная плоскость 2, 52, 975; 4, 668—670
Проективная прямая 4, 671
- размерность 1, 1053
- резольвента 4, 951
- - модуля 1, 1050
Проективная связность 4, 671—673
- симплектическая группа 4, 1154
- система распределений мер 5, 72
Проективная схема 4, 673
- топология 3, 427; 5, 381, 383
Проективно метрическое пространство 4, 667
- плоское пространство 1, 931
Проективное алгебраическое многообразие 1, 360
Проективное алгебраическое множество 4, 674
Проективное изгибание 4, 674
Проективное мероопределение 4, 675—677
- многообразие 4, 674
Проективное множество 2, 94, 3, 455; 4, 677
- отображение 1, 931
Проективное представление 4, 678
Проективное преобразование 4, 666, 679
- - π-допустимое 4, 478
Проективное пространство 4, 679
- - над алгеброй 4, 714
- расслоение 1, 637
- свойство 4, 664
- соответствие 4, 681
- топологическое тензорное произведение 5, 393
Проективности условие 4, 1183
Проективные координаты 4, 680—682
- - Бельтрами 1, 409
Проективный класс моделей 1, 103
- линейный элемент 5, 675
Проективный модуль 4, 682
- - банахов 1, 381
- -, ранг 4, 862
- морфизм схем 4, 673
Проективный объект категории 4, 682
Проективный предел 3, 428; 4, 683; 5, 381
- спектр 5, 102
Проективный спектр кольца 4, 684
Проектирование 4, 688, 982
Проектор 1, 981; 3, 375; 4, 21, 472, 684
- ортогональный 4, 99
Проекции градиента метод 3, 603
Проекционная группа гомологии 2, 36
Проекционно полное подпространство 4, 718
Проекционно-разностный метод 4, 831; 5, 60
Проекционно-сеточный метод 4, 761
Проекционные методы 4, 684—686, 761
Проекционный линейный метод приближения 4, 609
- оператор 4, 684
Проекционный спектр 4, 686—688
Проекция 3, 889; 4, 688
- азимутальная 2, 754
- вектора на ось 1, 634
- геодезическая 2, 742
- картографическая 2, 746—754
- коническая 2, 744, 754; 4, 688
- конформная 2, 742, 753
- косая 2, 753
- метрическая 3, 659
- ортогональная 4, 688
- ортодромическая 2, 742, 753
- особой точки 4, 114
- параллельная 4, 688
-, плоскость 3, 895, 896
- поликоническая 2, 754
- поперечная 2, 753
- программы 5, 418
- прямоугольная 4, 688
- псевдоконическая 2, 754
- псевдоцилиндрическая 2, 754
- равновеликая 2, 742, 753
- равнопромежуточная 2, 742, 753
- равноугольная 2, 742, 753
- расслоений 4, 893
- стереографическая 5, 222
- центральная 4, 688
- цилиндрическая 2, 754; 4, 688
- чебышевская 2, 745
- эквивалентная 2, 742, 753
- эквидистантная 2, 742
G-проекция 4, 718
Проецирование 4, 688
Произведение 5, 495
- адамаровское 1, 88
- альтернированное 1, 240
- бесконечное 1, 444
- близостное 1, 503
- Бляшке 1, 508
- Бэра 1, 569
- веерное 1, 613
- вектора на число 1, 633
- векторное 1, 642; 4, 403
- веночное 5, 147
- внешнее 1, 240
- внутреннее 4, 1197
- групп подстановок 4, 383
- декартово 2, 80; 4, 723
- измеримых пространств 3, 641
- каноническое 2, 713
- кардинальных чисел 2, 723
- σ-колец 3, 642
- Колмогорова — Александера 2, 906
- комплексных чисел 2, 1008
- косое 3, 41; 4, 743
- кронекерово 3, 118; 5, 332
- лексикографическое 4, 504
- Ли 2, 990
- линейных преобразований 3, 351
- мальцевское 1, 186; 3, 510
- матриц 3, 613
- матрицы на элемент (число) 3, 614
- мер 3, 642
- множеств 5, 713
- обобщенных функций 3, 1125
- операторов 4, 21
- подпрямое 4, 379
- полупрямое 4, 466, 912
- порядковых чисел 4, 503
- пространств с мерой 3, 642
- прямое 4, 723
- псевдоскалярное 4, 743
- путей 4, 765
- расслоение 4, 895
- рациональных чисел 4, 922
- Рисса 4, 1036
-, род 4, 1049
- ряда на число 4, 1064
- рядов 4, 1066
- свободное 4, 1086
Произведение семейства объектов категории 4, 688
- скалярное 4, 1197
- скрещенное 4, 1204
- смешанное 5, 48
- соответствий 5, 78
- тензорное 5, 330, 382
- тензоров 5, 328
- тихоновское 5, 356, 387
- топологическое 5, 387
- - тензорное 5, 393
- Уайтхеда 5, 465
- узловое 5, 147
- фильтрованное 1, 159
- форм внешнее 1, 731
- формальное 5, 640
- чисел 2, 73, 76, 78
- Эйлера 5, 930
Производная 2, 270; 4, 689
- алгебраическая 2, 733; 4, 26
- аппроксимативная 1, 303, 3, 804
- асимптотическая 1, 333; 3, 804
- в силу системы 2, 351
- Валле Пуссена 1, 574
- Вольтерра 5, 694
- вторая симметрическая 4, 995
- выводящая 1, 736
- Гато 1, 895
- - оператора 3, 960
- группа 2, 981
- - Ли 3, 278
-, Дарбу теорема 2, 18
- дробная 1, 727; 2, 383
- ковариантная 2, 735, 896, 897
- косая 3, 37
- левая 2, 272; 3, 1184
- Ли 3, 261, 278
- логарифмическая 3, 406
- многочлена 2, 210
- монодромная 5, 691
- наклонная 3, 37
- нормальная 3, 1051
- обобщенная 3, 1103
- - слабая 3, 1107
- обобщенной функции 3, 1118
- односторонняя 3, 1184
- отображения 2, 352
- Пеано 4, 230
- по множеству 5, 691
- сети 2, 353
- полная 4, 421
- поля пфаффова 1, 938
-, порядок 4, 504
- правая 2, 272; 3, 1184
- Радона — Никодыма 4, 324
- Римана 4, 995, 5, 887
- риссова 2, 384
- сильная 1, 895, 4, 1130; 5, 666
- симметрическая 4, 1143
- - вторая 5, 887
- - обобщенная 1, 574
- - Шварца 5, 887
- слабая 1, 895; 4, 1206
- случайного процесса 5, 27
- сферическая 3, 1069, 4, 568
- тактическая конфигурация 5, 319
- точная пара 5, 106
- формальная 3, 805, 5, 639
- Фреше 5, 666
- - оператора 3, 960
- функциональная 5, 694
- частная 2, 274, 275, 5, 836
- Шварца 4, 995; 5, 885, 888
Производное множество 4, 563, 690
- подразделение 4, 379
Производное правило вывода 4, 690
Производное число 3, 805, 4, 690
- - аппроксимативное 1, 304
- -, Данжуа теорема 2, 13
- - симметрическое 4, 1146
Производный автоморфизм 4, 690
- геометрический объект 1, 937
Производный функтор 4, 691
- характер 2, 193
Производственного планирования основная задача 3, 585
Производящая функция 3, 791, 4, 692; 5, 758
Производящий оператор 4, 451, 692, 1126
Производящий оператор полугруппы 4, 448, 692
Произвольная картографическая проекция 2, 753
Произвольных постоянных вариация 4, 693
- функций метод 1, 657
Прока уравнение 5, 898
Проконечная группа 4, 694
Промежуток 2, 615, 4, 695
- выборочный 1, 776
Промежуточная логика 4, 695—697
Промежуточное банахово пространство 2, 628
- пропозиционное исчисление 4, 695, 699
- реле 4, 968
Промежуточный интеграл 2, 568
- тор Гриффитса 4, 697
Промежуточный якобиан 4, 697
Пронормальная подгруппа 4, 697
Прообраз множества 5, 714
- полный 4, 153
- элемента 5, 78, 714
Пропозициональная переменная 4, 698
Пропозициональная связка 4, 698
Пропозициональная форма 4, 698
Пропозициональная формула 4, 698
Пропозициональная функция 4, 698
Пропозициональное исчисление 1, 812, 4, 699
- - минимальное 3, 691
- - промежуточное 4, 695
Пропорциональность обратная 5, 217
- прямая 5, 217
Пропорция арифметическая 1, 322
- разностная 1, 322
Пропускная способность канала 2, 709, 941
Пропускной способности область 2, 703
Простая алгебра 4, 700
- - универсальная 5, 497
- - центральная 5, 809
- выборка 1, 918

Простая гипотеза 4, 700; 5, 185
- - формулы 1, 127
- гомотопическая эквивалентность 3, 131, 5, 465
Простая группа 4, 700
- - Ли 3, 257
- доминационная грамматика 1, 1090
Простая дуга 2, 391, 424; 3, 386; 4, 700
- -, Шёнфлиса теорема 2, 423
- замкнутая геодезическая 2, 431
- - линия 3, 386
- игра 2, 1103
- импликанта 5, 73
- итерация 4, 250
Простая конечная группа 4, 700
- особая точка 4, 122
- особенность 4, 915
- поверхность 4, 341
Простая полугруппа 4, 701—703
- теория типов 5, 351, 352
- точка аналитического пространства 1, 285
- - схемы 1, 1020
- фигура 5, 614
- функция 2, 565
- характеристика 3, 326
- цепь в графе 1, 1106
O-простая полугруппа 5, 524
Простейшая задача вариационного исчисления 1, 580
- коса 3, 32
Простейший поток 4, 703
Просто порожденное расширение 4, 900
- транзитивная группа 4, 383
Простого слоя потенциал 4, 524, 704
- - - запаздывающий 2, 860
- - - логарифмический 3, 410; 4, 524
- - - ньютонов 3, 1095; 4, 524
- - -, прямое значение нормальной производной 4, 525
- - - тепловой 4, 705
Простое гармоническое колебание 4, 1085
- гауссово число 1, 905
- двоеточие 2, 23
Простое кольцо 4; 705
Простое множество 4, 705
Простое отношение 4, 706
Простое поле 4, 706
- - характеристики p 1, 848
Простое представление 4, 706
- расширение 4, 909
- рекурсивно перечислимое множество 4, 957
- следствие формулы 1, 127
- уравнение Бендиксона 5, 670
Простое число 4, 706
- -, Валле Пуссена теорема 1, 576
- -, Вандивера признак 2, 668
- -, Вильсона теорема 1, 694
- -, Евклида теорема 2, 397
- - идеальное 2, 484
- - инертное 2, 561
- - иррегулярное 2, 667; 4, 942
- -, Куммера признак регулярности 2, 667
- -, распределение 4, 876
- - регулярное 2, 667; 4, 942
- -, Чебышева теорема 5, 845
Простой базис 3, 718
Простой гомотопический тип 4, 707
- дивизор 2, 129
Простой идеал 3, 485; 4, 707
- - вложенный 4, 634
- -, высота 1, 813
- - изолированный 4, 634
- -, ковысота 1, 813
- интеграл Фурье 5, 720
Простой интервал 4, 708
Простой итерации метод 3, 294, 946; 4, 511, 708
Простой корень многочлена 1, 192
- многоугольник 3, 749
- модуль 3, 998
- поливектор 4, 403
- слой, плотность 3, 1106
- случайный точечный процесс 5, 31
- турнир 5, 454
- цикл в графе 1, 1106
Простой элемент 4, 709
- - кольца 1, 352; 2, 85
Просто-периодическая функция 3, 1172
Пространственная группа симметрий 3, 109
- конфигурация 2, 1079
- криволинейная ткань 5, 356
- поверхностная ткань 5, 357
- сферическая гармоника 5, 290
- тороидальная гармоника 5, 407
- форма 4, 518
- эллипсоидальная гармоника 5, 979
Пространственно ориентированная гиперплоскость 3, 327
- - поверхность 3, 328
Пространственного типа элемент 2, 814
Пространственное сечение 4, 149
Пространственноподобная линия 3, 703
Пространственноподобный вектор 3, 702; 4, 149
Пространственные формы 4, 709—712
Пространство 4, 712
- абелево 1, 1065
- абсолютно замкнутое 2, 436
-, θ-абсолют 1, 33
- алгебраическое 1, 189
- аналитических в круге функций 1, 387
- аналитическое 1, 285
- - вещественное 1, 689
- антидискретное 1, 292
- арифметическое 1, 325
- архимедово 4, 1038
-, атом 3, 638
- аффинное 1, 360, 362
- аффинной связности 1, 355
- банахово 1, 386; 3, 1047
- бесконечномерное 1, 452; 5, 706
- биаксиальное 1, 492
- бикомпактное 1, 473; 4, 393
- бивекторное 1, 469
- бипланарное 1, 492
- бисвязное 1, 496
- близости 1, 500
- Бора 1, 387
- борнологическое 5, 494
- бочечное 1, 544
- Брауэра 4, 533
- Брело 4, 533
- Бэра 1, 568
- векторное 1, 642; 3, 291
- вероятностное 1, 666; 3, 638
- весовое 1, 673, 674, 676
- вполне несвязное 1, 760; 4, 1096
- - несовершенное 1, 760
- - нормальное 1, 760
- - ограниченное 1, 761; 4, 580
- - регулярное 1, 762; 4, 140; 5, 392
- второе сопряженное 1, 771
- выборочное 1, 776
- выпукло-вогнутое 4, 728
- галилеево 1, 843
- l-гармонических функций 4, 907
- гармоническое 1, 889; 4, 533
- гёльдерово 1, 915
- гильбертово 1, 978
- гиперболическое 1, 713
- гладкое 1, 1022
- голоморфно полное 5, 899
-, гомеоморфизм 1, 1035
-, гомологическая размерность 1, 1055
-, гомотопическая пара 1, 1063
-, - эквивалентность 1, 1068
- Грина 1, 1123
- дантово 2, 15
- дверное 2, 20
- двойственное 5, 510
- дезаргово 2, 67
- диадическое 2, 127
- дискретное 2, 205, 953
- дисперсное 2, 226; 4, 1096
- додекаэдра 2, 367
- достижимое 2, 378
- дуально метрическое 5, 1034
- евклидово 2, 398
- естественно редуктивное 4, 948
- H-замкнутое 2, 436
- заполненное 2, 442
- измеримое 2, 498; 3, 638
-, изотопия 2, 519
- икосаэдра 2, 522
- индуктивно нульмерное 4, 143
- инициально компактное 2, 994
- интерполяционное 2, 629
- инфрабочечное 2, 661
- исчезающих когомологий 3, 808
- Кавагути 2, 697
- Канторовича 4, 471, 713
- Канторовича — Банаха 4, 472
- касательное 1, 285
- квазигиперболическое 2, 800
- квазидуальное 5, 510
- квазиевклидово 2, 806
- квазикомпактное 2, 809, 993
- квазинормальное 2, 818; 3, 1065
- квазинормированное 2, 818
- квазиримановo 4, 467, 468
- квазисимплектическое 2, 822
- квазиэллиптическое 2, 828
- Кёте 5, 1034
- классифицирующее 2, 864
- Клейна 2, 874
- клеточное 2, 879
-, когомологическая размерность 1, 1055
- коевклидово 2, 942
- кокасательное 1, 285; 2, 755
- Колмогорова 2, 952, 958
- компактного типа 1, 1025
- компактное 1, 473; 2, 993
- σ-компактное 2, 993
- комплексно евклидово 5, 1019
- комплексное 1, 285; 2, 1007
- - аналитическое 2, 1007
-, компонента 2, 1013
- конечномерное 4, 826
- конфигураций 3, 32
- конфигурационное 2, 145
- конформное 2, 1084, 1090, 1097
- конформно-евклидово 2, 1098
- координатное 1, 325
- копсевдогалиллеево 3, 12; 4, 439
- копсевдоевклидово 3, 12
- коэффициентов 2, 781
- Крейна — Шмульяна 5, 383
- Кураниси 5, 406
- лакунарное 3, 184
- лакунарности 2, 22
- Лебега 3, 214; 5, 309
- Линделёфа 3, 288
- линейно связное 3, 321
- линейное 1, 640, 642; 3, 291, 355
- - топологическое 3, 355
- линзовое 3, 382
- Лобачевского 3, 402
- локально выпуклое 3, 428; 4, 462
- - евклидово 2, 355
- - конечное 5, 393
- - линейно связное 3, 434
- - окольцованное 4, 14
- - псевдоевклидово 4, 740
- - связное 3, 436; 4, 1097
- Лузина 3, 457
- Макки 3, 478
- максимальных идеалов 2, 985
- Мартина 3, 531
- Марцинкевича 3, 535
- метризуемое 3, 656
- метрическое 3, 658, 669
- - полное 4, 423
- Минковского 3, 702; 4, 148; 5, 621
- модулей 2, 103
- - структур Ходжа 5, 406
- модулярное 5, 406
- Монтеля 3, 820
- моровское 3, 657; 4, 271
- мультигильбертово 5, 1036, 1041
- Мура 3, 844
Пространство над алгеброй 4, 713—715
- направлений 4, 1025
- наследственно несвязное 2, 226; 4, 1096
- неатомическое 3, 638
- неевклидово 3, 909
- некомпактного типа 1, 1025
- непрерывно дифференцируемых функций 1, 387
- непрерывное 3, 638
- непрерывных функций 1, 386, 387; 3, 994
- неприводимое 4, 1097
- неразложимое 2, 884
- несвязное 4, 1096
- нётерово 3, 1028
- нигде несвязное 4, 1096
- Никольского 3, 1036
- нормально наследственное 3, 1065
- нормальное 3, 1065; 5, 391
- $\varkappa$-нормальное 3, 1065
- π-нормальное 3, 1065
- нормированное 3, 1047, 1081; 5, 705
- нормируемое 3, 1047
- нульмерное 3, 1084
- обобщенных сечений 3, 365
- - функций 3, 1104, 1126
- ограниченной кривизны 4, 1008
- ограниченных измеримых функций 1, 387
- однородное 2, 874; 3, 1175
- - главное 1, 1015
- - обобщенное 1, 934
-, окаймление 4, 9
- окольцованное 4, 14
- октаэдра 4, 16
-, оперение 4, 28
- орбит 2, 68; 4, 66
- Орлича 4, 75
Пространство отображений 4, 715—717; 5, 382
- паракомпактное 4, 202
- перистое 4, 270
- периферически бикомпактное 4, 272
- петель 4, 278
- плоское 4, 709
- полиэдра 3, 152
- полное 3, 639; 4, 424
- - по Вейлю 4, 424
- - по Дьедонне 4, 425
- - по Райкову 4, 424
- - по Чеху 4, 271, 425
- полугиперболическое 4, 439
- полуевклидово 4, 456
- полунеевклидово 4, 457
- полупсевдоевклидово 4, 466
- полупсевдориманово 4, 467
- полурефлексивное 2, 45
- полуриманово 4, 467
- полусимплектическое 4, 468
- полуупорядоченное 4, 469
- полуэллиптическое 4, 473
- Понтрягина 4, 489
-, пополнение 1, 666
- постоянной кривизны 3, 100; 4, 518
- предгильбертово 1, 979; 4, 556
- преддвойственное 3, 920
- предкомпактное 4, 580
- представлений группы Ли 1, 934
- представления 4, 595
- прекомпактное 1, 502
- проективно метрическое 4, 667
- проективно плоское 1, 931
- проективное 4, 679
- - двумерное 4, 668
- прямое 1, 930
- псевдогалилеево 4, 730
- псевдоевклидово 4, 739
- псевдокомпактное 4, 740
- псевдометрическое 4, 741
- псевдориманово 4, 743
- Пуанкаре 4, 748
- пунктированное 4, 765
- путей 4, 765
- равномерное 4, 794
- - полное 4, 425
- радоново 4, 809
- разбиений 5, 593
- расслоений 4, 893
- расслоения 1, 637
- расслоенное 4, 896
- регулярное 4, 140, 942; 5, 391
- редуктивное 4, 947
-, резольвента 1, 1073
- репрезентативное 4, 975
- рефлексивное 3, 378; 4, 977; 5, 708
- Римана 4, 990

- -, кривизна 4, 989
- риманово 4, 1003, 1022
- - неприводимое 4, 633
- - полное 4, 426
- - приводимое 4, 633
- Рисса 4, 1037
- с билинейной метрикой 4, 717
- с весом 1, 674
Пространство с индефинитной метрикой 4, 717—719
Пространство с мерой 3, 638, 4, 719
- - - нормальное 3, 1050
- с операторами, когомологии 2, 908
- с первой аксиомой счетности 1, 371
- с сетью 5, 384
- с фундаментальной группой Ли 1, 934
- связное 4, 1092, 1096, 1097
-, сдвиг 1, 648
- секвенциально компактное 4, 1104
- секвенциальное 4, 1104, 1139
- сепарабельное 3, 644; 4, 1113
- сильно q-вогнутое 4, 728
- - p-выпуклое 4, 728
- - сопряженное 2, 45
- симметризуемое 3, 657
- симметрическое 4, 1146; 5, 625
- симплектическое 4, 1156
- симплициальное 4, 1168
- слабо бесконечномерное 4, 1206
-, слабо гомотопическая эквивалентность 1, 1068
- слабо сопряженное 2, 44
- со второй аксиомой счетности 1, 371
- со сходимостью 5, 306
- Соболева 5, 56
- совершенно нормальное 1, 475; 3, 1065; 5, 67
- - $\varkappa$-нормальное 3, 1065
- сопряженное 3, 292, 377; 5, 86, 708
- состояний 5, 178, 203
- Стоуна 5, 233
- строго симплектическое 4, 1158
- структурное 4, 638; 5, 256
- субпроективное 5, 266
- счетно компактное 1, 473; 4, 393
- счетномерное 5, 314
- счетнонормированное 5, 314
- Тайхмюллера 4, 1031; 5, 317, 680
- тетраэдра 5, 350
- тихоновское 1, 763; 4, 140; 5, 356, 392
- Тома 5, 362
- топологическое 5, 374, 388
- - векторное 5, 377
- транснормальное 4, 519
- триангулируемое 4, 1160
- убивающее 4, 517; 5, 466
- ультраборнологическое 5, 494
- ультрабочечное 5, 494
- универсальное 5, 500
- унитарное 5, 514
-, уплотнение 1, 1035
- Урысона 5, 546
- фазовое 2, 144, 766; 5, 587
- фигуры 5, 613
- финально компактное 2, 994; 3, 288; 4, 393
- финслерово 5, 621, 624
- флаговое 5, 629
- Фока 5, 631
- фоковское 5, 631
- Фреше 5, 380, 666
- -, Джеймса теорема 2, 44
- Фреше — Урысона 4, 1104
- функций лебегово 5, 718
- функционально замкнутое 5, 796
- - хаусдорфово 5, 694
- Харди 1, 1099; 5, 789
- хаусдорфово 4, 140; 5, 391, 777, 780
- центроаффинное 5, 811
- частично редуктивное 4, 948
- числовое 1, 325
- Шварца 5, 666
- Штейна 5, 899
- Эйленберга—Маклейна 5, 925
- Эйнштейна 4, 1044
-, экспонента 5, 953
- экспоненциально отделенное 5, 542
- экстремально несвязное 4, 1096; 5, 961
- элементарных событий 1, 666, 776
- эллиптическое 4, 990
- - эрмитово 5, 676
- эрмитово 5, 1021
- - векторное 5, 1019
- - симметрическое 5, 1022
- ядерное 5, 1033
AD-пространство 1, 387
B-пространство 1, 386
c-пространство 1, 386
$C^n[\Gamma]$-пространство 1, 387
$C[a, b]$-пространство 1, 386
$C^n[a, b]$-пространство 1, 387
$C[K]$-пространство 1, 387
E-пространство 1, 1123
G-пространство 1, 930; 4, 717; 5, 624
H-пространство 4, 713
J-пространство 1, 985
K-пространство 4, 471, 713
KB-пространство 4, 472
l_p-пространство 1, 386
l^2-пространство 1, 979
L^2-пространство 1, 979
$Lp[a, b]$-пространство 1, 387
$Lp(S; \Sigma, \mu)$-пространство 1, 387
m-пространство 1, 386
$M[a, b]$-пространство 1, 387
Q-пространство 5, 796
S-пространство 5, 766
T_0-пространство 2, 952; 5, 391
T_1-пространство 2, 378; 5, 391
T_2-пространство 5, 391, 777, 780, 798
T_3-пространство 4, 942; 5, 391
T_4-пространство 5, 391
$W_l^2(\Omega)$-пространство 1, 980
Пространство-время 4, 148, 719
- дискретное 2, 205
Пространство-произведение 3, 642
Простые близнецы 1, 500
- концы области 1, 1102, 1103
Простых чисел распределение 1, 254
Противоположная теорема 4, 720
Противоположное число 2, 73, 77
Противоположные борелевские подгруппы 1, 538
- векторы 1, 632
Противоречивая система 3, 998
ω-противоречивая теория 4, 428
Противоречивое пропозициональное исчисление 4, 699
Противоречивый класс 4, 720
Противоречие 4, 720
Противоречия закон 1, 125; 4, 721
- принцип 2, 644
Протокол в программировании 4, 651
Протяженность булевой функции 1, 556
Профилактическое обслуживание 3, 856
Профиль Жуковского 2, 426
Профильная плоскость проекций 3, 896
Прохорова теорема о плотных множествах 3, 644
- - о плотных семействах распределений 4, 886
Процедура 4, 721; см. также соответствующее название
Процедура-функция 4, 721
Процедуры тело 1, 224
Процентиль 4, 278
Процесс авторегрессионный 1, 84
- без последействий 1, 663; 3, 523
- Беллмана — Харрисса 1, 407
- броуновского движения 1, 548
- вероятностный 1, 667; 5, 22
- ветвящийся 1, 681
- винеровский 1, 698
- восстановления 1, 756
- Гальтона — Ватсона 1, 681, 854
- гауссовский 1, 906
- диагональный 2, 125
- динамический 4, 37
- диффузии 1, 420
- диффузионного типа 2, 692
- диффузионный 2, 361
- интерполяционный 2, 632
- Ито 2, 691
- Канторовича 2, 715
- конструктивный 2, 1057
- марковский 1, 663; 3, 523
- - стационарный 3, 529
- обновляющий 2, 692
- переходный 1, 64
- Пойа 4, 388
- полумарковский 4, 458
- пуассоновский 4, 763
- рождения и гибели 4, 1050
- сепарабельный 4, 1114
- скачкообразный 4, 1198
- случайный 1, 663; 5, 22
- стохастический 5, 22, 240, 243
- феллеровский 5, 603
- чистого размножения 4, 261, 1051
- эпидемии 5, 1008
- Юла 4, 1051
σ-процесс 3, 810
Процессор диалоговый 1, 225
- программирующий 1, 225
- шаговый 1, 225
Прюфера поверхность 4, 721
- ранг абелевой группы 1, 19
Прямая 3, 383; 4, 721
- аналитическая 1, 249
- бесконечно удаленная 1, 443
- гиперболическая 2, 801; 4, 746, 747
- голоморфности 2, 184
- Демулена 2, 90
- изотропная 2, 801; 3, 124
Прямая картографическая проекция 2, 753
Прямая комплексная 1, 249
Прямая линия 1, 643
Прямая метрическая 4, 667
- неархимедова 3, 898
- несобственная 4, 664
- опорная 1, 793; 4, 29
- параболическая 2, 801
- Паскаля 4, 225
Прямая призма 4, 633
- прогонка 2, 293
Прямая проективная 4, 671
- проективной плоскости 4, 668
- пропорциональность 5, 217
-, пучок 4, 771
- регрессии 4, 926, 930
Прямая регулярная задача Пуанкаре 5, 677
Прямая Римана 4, 989
-, связка 4, 1089
- Симсона 4, 1170
Прямая сумма 4, 722
- - билинейных отображений 1, 484
- - векторных пространств 1, 645
- - гильбертовых пространств 1, 982
- - квадратичных форм 2, 778
- - корневых систем 3, 16
- - представлений 4, 592
Прямая сходимости ряда Дирихле 2, 183
Прямая теорема в теории приближения 4, 612, 625
Прямая фундаментальная 4, 1089
- Чевы 5, 852
- числовая 2, 78
- Эйлера 2, 63; 5, 930
- эллиптическая 2, 801; 4, 989
G-прямая 1, 927
Прямейшего пути вариационный принцип 1, 599, 954
Прямое алгебраическое дополнение 2, 373
- значение нормальной производной 4, 525, 704
- - потенциала двойного слоя 4, 525
- подобие 2, 138
Прямое произведение 4, 723
- - автоматов 1, 68
- - алгебр Неймана 3, 921
- - векторных пространств 1, 645
- - дискретное 4, 722
- - пространство 1, 930
- сплетение групп 5, 147
- топологическое дополнение 2, 374
- умножение формальных языков 5, 644
- уравнение Колмогорова 2, 362, 958
0-прямое объединение полугрупп 4, 723
Прямой геликоид 1, 913
- интеграл-алгебры Неймана 3, 922
- конус 2, 1074
- параллелепипед 4, 204
Прямой пересчет 4, 724
- предел функтора 2, 557
- спектр 5, 99
- угол 5, 467
- ход прогонки 4, 88, 89, 642
- цилиндр 5, 818
- численный метод 3, 293
Прямолинейная образующая 3, 380
- поляра 3, 140
- триангуляция 3, 152; 4, 410; 5, 434
Прямолинейное частное решение задачи трех тел 5, 431
Прямоугольная группа 1, 762
- полугруппа 2, 487
- проекция 4, 688
- связка полугрупп 4, 1091
- частичная сумма 2, 29
Прямоугольник 4, 724
- измеримый 3, 642
- латинский 3, 208
Прямоугольников формула 2, 794; 4, 724
Прямоугольное распределение 4, 798
Прямоугольный параллелепипед 4, 204
Прямые антипараллельные 1, 296
- гиперболические 3, 12
- гиперпараллельные 4, 747
- изотропные 3, 12
Прямые методы вариационного исчисления 1, 581
- - - - численные 1, 588
Прямые параболические 3, 12
- параллельные 3, 398; 4, 210, 747
- паратактичные 4, 991
- пересекающиеся 3, 398; 4, 746
- перпендикулярные 4, 274
- равноотстоящие 4, 991
- расходящиеся 3, 398; 4, 747
- скрещивающиеся 4, 1205
- эллиптические 3, 12
Прямых метод 4, 725
Псевдоавтоморфизм 3, 461
Псевдобаза топологического пространства 4, 726
Псевдобулева алгебра 1, 546; 4, 696, 726—728
Псевдовектор 4, 106, 728
Псевдовогнутая группа 1, 81
Псевдовогнутость 4, 728
Псевдовыпуклая область 1, 272, 1031
- -, Леви теорема 1, 1031
- -, Ока теорема 1, 1031
p-псевдовыпуклая функция 4, 728
Псевдовыпуклость и псевдовогнутость 4, 728—730
Псевдогалилеево пространство 4, 730
Псевдогеометрическое кольцо 1, 939
Псевдограф 1, 1105
Псевдогруппа 4, 730—732
- определяющая 4, 732
Псевдогрупповая структура 4, 732—734
Псевдодискриминант 2, 139
Псевдодифференциальный оператор 4, 734—738
Псевдодополнение 4, 726
- относительное 1, 546

Псевдодуга 4, 739
Псевдоевклидово пространство 4, 739
Псевдоинверсная полугруппа 4, 936
Псевдоинъективный модуль 2, 664
Псевдокомпактное пространство 4, 740
Псевдоконическая проекция 2, 754
Псевдоконформное отображение 1, 471; 4, 740
Псевдолокальность 4, 735
Псевдометрика 3, 658; 4, 740
Псевдометрическое пространство 4, 741
Псевдомногообразие 3, 744; 4, 741
Псевдонормирование 4, 741
Псевдоортогональная группа 4, 83
Псевдоортодоксальная полугруппа 4, 936
Псевдооткрытое отображение 4, 155, 742
Псевдоотражение 4, 158
Псевдопериодическая функция 4, 742
Псевдоразность 1, 546
Псевдорасстояние аффинное 1, 363
- гиперболическое 5, 422
- эллиптическое 5, 423
Псевдориманов метрический тензор 3, 669
Псевдориманова геометрия 4, 742, 1008
Псевдориманово пространство 4, 743
- - глобально симметрическое 4, 1147
- - локально симметрическое 4, 1146
- - однородное 3, 1176
Псевдоскаляр 4, 743
Псевдоскалярное произведение 4, 743
- - векторов 1, 635
Псевдослучайные числа 3, 815; 4, 743; 5, 20
Псевдоспираль 5, 141
Псевдосфера 3, 399, 4, 165, 743
Псевдотензор 4, 744, 5, 329
Псевдоунитарная группа 5, 507
Псевдофробениусово кольцо 2, 826
Псевдохарактер 4, 744
- топологического пространства 3, 836
Псевдоцилиндрическая проекция 2, 753
Псевдоэллиптический интеграл 4, 744
Пси-функция 4, 744
- Гаусса 1, 869
Птолемея теорема о четырехугольниках 4, 744
Пуанкаре аксиома в теории размерности 4, 824
- асимптотическое разложение 1, 338
- гипотеза в теории групп 2, 159
Пуанкаре гипотеза о многообразиях 4, 744
- - обобщенная 2, 894; 5, 288
Пуанкаре группа 3, 453; 4, 745; 5, 680
Пуанкаре двойственность 4, 745
Пуанкаре дивизор 4, 746
Пуанкаре задача 1, 1095; 2, 770; 3, 76; 4, 746
- индекс 4, 122
- интегральный инвариант 1, 860
Пуанкаре интерпретация 3, 404; 4, 746
- кинематическая мера 2, 571
Пуанкаре комплекс 4, 747
- комплексов кобордизм 2, 893
- лемма для дифференциальных форм 2, 263
- многочлен 3, 165
- модель 2, 197; 4, 283
- отображение 4, 505
- пара 4, 748
- преобразование 3, 453; 4, 749
- проблема 5, 900
- - о мероморфных функциях 3, 650
Пуанкаре пространство 4, 748
- прямая регулярная задача 5, 677
- ряд 5, 346
Пуанкаре сфера 4, 749
Пуанкаре теорема в теории устойчивости 4, 749
Пуанкаре теорема возвращения 4, 749—751; 5, 572
- - двойственности 2, 35
- - для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 3, 499
- - о гомоморфизмах 4, 1165; 5, 681
- - о подгруппах 4, 370
Пуанкаре теорема о римановых многообразиях 4, 749
- - об особых точках 1, 253
Пуанкаре теорема последняя 4, 751
- тета-ряд 2, 877; 5, 346
Пуанкаре уравнения 4, 751—753
- формула 2, 573
- цепная пара 4, 748
Пуанкаре — Бендиксона теория 4, 753
Пуанкаре — Бертрана формула 4, 754
Пуанкаре — Биркгофа — Витта теорема об алгебрах Ли 1, 495; 3, 248, 252
Пуанкаре — Вольтерра теорема об аналитических функциях 4, 414
Пуанкаре-инвариантность 4, 970
Пуанкаре — Картана интегральный инвариант 1, 860; 2, 602
Пуанкаре — Лефшеца двойственность 3, 441; 4, 745
Пуанкаре — Линдштедта метод 3, 957
Пуансо тело 3, 711; 4, 553
Пуассона интеграл 4, 754—756
- интегральное представление 5, 822
Пуассона метод суммирования 4, 756
Пуассона преобразование 4, 756
Пуассона распределение 4, 757
Пуассона скобки 4, 758
- схема 4, 759
Пуассона теорема 4, 759
Пуассона уравнение 4, 760
Пуассона уравнение; численные методы решения 4, 760—762
Пуассона формула 3, 48; 4, 762, 763
Пуассона формула суммирования 4, 763
- - - обобщенная 1, 883
- ядро 4, 755, 756; 5, 1043
Пуассона — Гергиотца формула 3, 532
Пуассона — Иенсена формула для мероморфных функций 2, 488
Пуассона — Лебега интеграл 4, 755
Пуассона — Стилтьеса интеграл 4, 755
Пуассона — Шарлье многочлен 5, 882
Пуассоновский поток 3, 542; 4, 763
Пуассоновский процесс 4, 763
Пульверизация 2, 756, 4, 764
Пунктированная пара 1, 1063
Пунктированное пространство 4, 765
- симплициальное множество 4, 1165
Пунктированный объект 4, 765
Пунктиформный нарост 3, 892; 4, 765
Пуппе последовательность 2, 1074
Пустая U-свертка 1, 898
Пустое множество 4, 765
- слово 2, 1043; 4, 1209
Пустой граф 1, 1106
Пустых ящиков критерий 4, 765
Путей пространство 4, 765
Путь 4, 765
- в графе 1, 1108
- дезориентирующий 2, 68; 4, 70
- критический 4, 1121
- многоугольный 3, 750
- ориентируемый 3, 750
Пучков теория 4, 766—771
Пучок 4, 766, 771—773
- l-адический 1, 99
- алгебраический когерентный 2, 903
- Альфана 1, 242
- аналитический 1, 277, 286
- аналитических дифференциальных форм 2, 277, 278
- вялый 1, 830
- гармонический 1, 889; 4, 532
- гипергармонический 1, 889; 4, 532
- дифференциальный 4, 769
- идеалов аналитического множества 2, 904
- касательный 2, 443, 757
- квазикогерентный 2, 809
- когерентный 2, 905
- конструктивный 5, 1024
- кругов 2, 1085
- кэлеровых дифференциалов 2, 242
- лакунарный 3, 443
- Лефшеца 3, 808
- локально ориентируемый 1, 1058
- - постоянный 5, 1024
- - свободный 2, 904; 3, 436
- множеств 5, 366
- мягкий 3, 846
- нормальный 3, 1075
- обильный 3, 1097
- обратимый 3, 1130
- окружностей 4, 771
- ориентируемый 1, 1058
- ориентирующий 1, 1058
- относительных дифференциалов 2, 242, 278
- - когомологий де Рама 4, 855
- плоскостей 4, 771
- прямых 4, 771
- - на плоскости Лобачевского 3, 398
- ростков аналитических векторных пространств 2, 278
- - мероморфной функции 3, 649
- сизигетический 3, 140
- структурный 5, 101
- - окольцованного пространства 4, 14
- сфер 2, 1085; 4, 772
- Тейта 1, 99
- тонкий 5, 365
- Фреше 2, 904
- функций 1, 889; 4, 531
- ядерный 3, 165
- якобиев 5, 984
Пфаффа проблема 4, 773
Пфаффа система 4, 774
- - уравнений 2, 733
Пфаффа структура 4, 774
Пфаффа уравнение 4, 775—777
Пфаффа форма 2, 733; 4, 777
Пфаффиан 4, 777
Пфаффова производная поля 1, 938
Пфистера теорема о кольцах Витта 1, 712
Пьерпонта вариация 4, 777
Пэли — Винера теорема о преобразованиях Фурье 4, 778
Пэ-функция Вейерштрасса 1, 622
Пюизё диаграмма 3, 1090
Пюизе разложение 4, 119
Пюизё ряд 1, 174, 176, 276, 679; 3, 1091; 4, 414, 778, 1016
Пятая проблема Гильберта 5, 368
Пятисторонник 2, 1079
Пятый постулат 4, 778

Р

Раабе признак сходимости 4, 781
Равенства аксиомы 4, 781
- отношение 1, 488; 4, 151
- слов проблема 1, 216
Равенство 1, 1116; см. также соответствующее название
Равнобочная гипербола 1, 988
Равновеликая проекция 2, 742, 753
Равновеликие и равносоставленные фигуры 4, 781—784
Равновесия задача 4, 1046
Равновесия положение 1, 82; 4, 784
- ситуация 1, 433
Равновесия соотношение 4, 784
- состояние 2, 767; 4, 784
Равновесная мера 2, 405; 4, 1046, 1047
Равновесное распределение вероятностей 5, 199
Равновесный ансамбль 5, 179
- потенциал 2, 403, 404; 4, 528, 1046, 1047
Равнодополняемые многоугольники 4, 782
Равномерная алгебра 2, 966; 4, 785
- база 1, 371; 3, 657
- дискретная подгруппа 2, 198
- метрика 3, 658
Равномерная непрерывность 4, 786
- -, Кантора теорема 2, 715
Равномерная ограниченность 4, 786
Равномерная подгруппа 4, 787
- структура 4, 794
Равномерная сходимость 4, 787—789
- -, Вейерштрасса признак 1, 615
- -, Витали теорема 1, 709
- -, Дини теорема 2, 156
- -, Коши критерий 3, 57
- - на границе области, Вейерштрасса теорема 1, 617
- - рядов аналитических функций, Вейерштрасса теорема 1, 617
Равномерная топология 4, 789
Равномерная устойчивость 2, 771; 4, 789
- y-устойчивость 5, 573
- эргодическая теорема 4, 24
Равномерно выпуклое банахово пространство 1, 389
- гиперболическое уравнение 3, 328
Равномерно наиболее мощный критерий 4, 790
- непрерывное отображение 4, 786, 795
- непрерывный оператор 3, 993
- параболическая система 3, 348
- равносходящиеся ряды 4, 801
- распределенная последовательность точек 4, 876
- сингулярный интеграл 4, 1180
- сходящееся бесконечное произведение 1, 445
Равномерно сходящийся ряд 4, 791—794
- устойчивая система линейных дифференциальных уравнений 3, 341
- устойчивое решение 2, 775
- эллиптическое уравнение 2, 299; 5, 994
Равномерное вложение 4, 795
- покрытие 4, 794
- - пространства близости 1, 502
Равномерное приближение 4, 604, 794; 5, 852
- -, Карлемана теорема 2, 726
- -, Келдыша — Лаврентьева теорема 2, 843
Равномерное пространство 4, 794—798
- - полное 4, 425
- -, пополнение 4, 496
Равномерное распределение 4, 798
- условие Гёльдера 1, 915
Равномерной ограниченности принцип 1, 380
Равномерной сходимости топология 4, 716, 799; 5, 382
Равномерность 4, 794
- универсальная 4, 796
Равномерные почти периодические функции 1, 532

Равномощность 3, 760
Равномощные множества 2, 723
Равноотстоящие прямые 4, 991
Равнопромежуточная проекция 2, 742, 753
Равносильность 4, 800
Равносильные методы суммирования 1, 718; 4, 800; 5, 273
- уравнения 5, 540
- языки 1, 128
Равносоставленные фигуры 4, 781
Равностепенная непрерывность 4, 797, 800
Равносторонне-полуправильный многоугольник 3, 750
Равносходимости теорема 5, 110
Равносходящиеся ряды 4, 801
Равноугольная проекция 2, 742, 753
Равноугольно - полуправильный многоугольник 3, 750
Равные векторы 1, 632
- углы 5, 467
- формулы 1, 124
Равных расстояний линия 3, 398
- - поверхность 3, 399
Радемахера система 4, 86, 801
- теорема об ортонормированных системах 4, 801
Радиальное граничное значение 4, 802
- подмножество 5, 378
Радиан 4, 802
Радианная мера угла 5, 467
Радикал 3, 244, 279; 4, 802
- алгебраической группы 4, 804
- алгебры 1, 383
- - Мальцева 3, 509
- Брауна — Маккоя 4, 807
- Бэра нижний 4, 807
Радикал в классе подгрупп 4, 803
Радикал группы 4, 804
- Джекобсона 2, 109; 3, 485; 4, 807
Радикал идеала 4, 804
- идеально наследственный 4, 806
- квазирегулярный 2, 820
- Кете 4, 807
- Кострикина 5, 999
- Левицкого 3, 434; 4, 807
- локально конечный 3, 432
- наследственный 4, 806
- нильпотентный 4, 808
- обобщенный 4, 807
- примарного разложения 4, 634
- примарный 1, 91
- специальный 4, 807
- строго наследственный 4, 806
- терциарный 5, 341
- унипотентный 5, 504
r-радикал 4, 805
Радикалы колец и алгебр 4, 804—808
Радикальная алгебра 4, 805
Радикальная ось 4, 772, 808, 1090; 5, 222, 287
- плоскость 4, 773; 5, 222, 287
Радикальный вес корневой системы 3, 17
- центр 4, 808, 1123
Радиус 4, 808
- внутренний 2, 1099
- выпуклости 1, 799
- Гартогса 1, 894
- графа 1, 557, 1106
- звездообразности 2, 450
- конформный 2, 1098
- кривизны 2, 250; 3, 118, 5, 79
- - пространства Лобачевского 3, 398
- ларморовский 2, 381
- лемнискаты 3, 234
- *p*-листности 3, 727
- однолистности 3, 1168
- окружности 4, 15
- полярный 4, 480
- спектральный 1, 383; 5, 131
- сходимости 1, 29; 3, 118; 5, 218
- чебышевский 5, 850
- шара 5, 881
Радиус-вектор 4, 809
Радо квадратурная формула 4, 809
- теорема об аналитических многообразиях 4, 721
Радона интеграл 4, 809
Радона мера 4, 809
Радона преобразование 4, 809
Радона — Никодима производная 4, 324
Радона — Никодима теорема 4, 810
Радоново пространство 4, 809
Разбавление ряда 4, 810
Разбиение 4, 810
- Дирихле — Вороного 4, 810
- измеримое 2, 498
- локальное 3, 440
-, мелкость 2, 17
- непрерывное 3, 988
- полунепрерывное 4, 460
- пространства 1, 755, 4, 811
- - правильное 4, 810
-, пространство 5, 593
- симплициальное 4, 1168
- Хегора 5, 780
Разбиения метод 4, 782
- функция 3, 90
Разброс булевой функции 1, 565
Развернутый угол 5, 467
Развертка 4, 811
- кривой 1, 356; 4, 673, 1093
- многогранной поверхности 4, 811
Развертывающаяся поверхность 4, 811
k-развертывающаяся поверхность 4, 362
Разветвления теорема для нормальных алгорифмов 1, 226
Разветвления точка 4, 811
- уравнение 1, 677; 3, 474
Разветвленности порядок 5, 971
Разветвленный анализ 5, 641
- идеал 3, 114
- элемент 4, 415; 5, 971
- язык 1, 784
Раздвижка дисков 5, 403
Раздела множество 4, 848
Разделения переменных метод 2, 302; 4, 811; 5, 726
Разделенная разность 2, 1027
Разделительная дизъюнкция 4, 811
Раздельно непрерывное представление 1, 446
Раздутие 3, 819
Различающая 4, 517, 812
Различающая конецъ 4, 812
Различающий элемент 4, 812
Различения задача 2, 213
Различных представителей система 1, 773, 4, 813
Разложение асимптотическое 1, 337
- бордизма на ручки 4, 1059
- Брюа 1, 549
- Вейля 1, 414
- весовое 1, 673
- вириальное 1, 708
- Витта 1, 713
- Гаусса 1, 900
- группы 5, 36
- декартово 2, 80
Разложение единицы 4, 814; 5, 118
- Жордана 2, 421
- Ивасавы 2, 468
- Картана 2, 738
- Карунена — Лоэва 5, 124
- Корниша — Фишера 3, 20
- Лебега 3, 215; 4, 1178
- Леви 4, 193
- Леви — Мальцева 3, 224
- Лефшеца 3, 237
- Миттаг-Леффлера 2, 446
- многообразия на ручки 4, 1059
- орбитальное 2, 544
- пирсовское 1, 130; 4, 288
- по базису 1, 375
- полярное 4, 479
- примарное 4, 634
- Пюизе 4, 119
- спектральное 5, 120, 121
- Фиттинга 1, 674
- Хана 5, 745
- Ходжа 5, 788
- числа в цепную дробь 5, 813
- Штейнера 5, 49
π-разложение общего типа 4, 515, 516
Разложения поле 4, 398
Разложимая алгебраическая группа 4, 860
- - - диагонализируемая 2, 122
Разложимая группа 4, 814
- цепь Маркова 3, 519, 521
Разложимое представление 4, 592
Разложимость нормированной инвариантной меры 3, 667
Разложимый *s*-вектор 1, 732
- оператор 5, 115
- поливектор 4, 403
Размах выборки 4, 815
- стьюдентизированный 5, 261
Размер критерия 4, 152
Размерное ядро 3, 150
Размерностей анализ 4, 815—820
Размерности аддитивные свойства 4, 820
- аксиома 1, 1045; 5, 231
Размерности теория 4, 820—823
Размерности функция 4, 823
Размерностная компонента 2, 716
- однородность псевдомногообразия 4, 741
Размерностное ядро внутреннее 2, 717
- - индуктивное 2, 717
Размерностный инвариант 4, 824
Размерностный многочлен 4, 825
Размерность алгебраическая 1, 154, 374
- алгебраического многообразия 4, 919
- алгебраической группы 1, 142
- аналитического множества 1, 280
- - пространства 1, 285
- базисная 1, 373
- бесконечного геометрического комплекса 1, 933
- булевой функции 1, 556
- векторного пространства 1, 643, 4, 858
- вложения 1, 285
- гильбертова 1, 981
- гильбертова пространства 1, 981
- гомологическая 1, 1053
-, гомологическая теория 1, 1055
- группы Ли 3, 255
- *p*-делимой группы 2, 83
- дифференциала 2, 241
- дифференциальная 2, 243; 4, 825
- индуктивная 2, 556
- инъективная 2, 664
- карты 2, 729
- касательная 1, 285
- классическая 4, 824
- когомологическая 1, 846; 2, 925
- Кодаиры 2, 934
- кольца, левая глобальная 1, 1054
- -, слабая глобальная 1, 1054
- компакта 4, 821
- комплексная 1, 249
- конечного геометрического комплекса 1, 933
- Лебега 3, 215
- лебегова 4, 826
- линейная гильбертова пространства 1, 981
- локальная 3, 423
- метрическая 3, 659
- оврага 3, 1154
- полиэдра 4, 410
- поля 1, 846
- представления 1, 446; 4, 546, 595
- проективная 1, 1053
- пространства 3, 307; 5, 102
- - гомологическая 1, 1055
- - когомологическая 1, 1055
- расслоения 1, 637, 639, 646
- решета 4, 980
- решетки 4, 980
-, сдвиг 2, 917
- симплекса 3, 152; 4, 1152, 1159
- слоения 4, 1210
- стабильная 2, 927
- структуры Пфаффа 4, 774
- супермногообразия 5, 278
- суперпространства 5, 279
Размерность топологического пространства 4, 826—830
- - - векторного 5, 377
- Хаусдорфа 5, 779
- элемента комплекса 2, 995
Размеченное дерево составляющих 4, 1183
Размещение 2, 974; 4, 830
- полиномиальное 5, 22
- случайное 5, 21
Размещения задача 2, 973
Размножения процесс 4, 261
Размыкающий контакт 2, 1061
Разностная вариационная схема 4, 831—836
- задача корректная 3, 84
- пропорция 1, 322
Разностная схема 4, 836, 843; 5, 995
Разностное множество 4, 837
- семейство 4, 838
Разностное уравнение 4, 838—841
Разностные методы 4, 761, 841
Разностный оператор 4, 841—843
Разностных схем теория 4, 843—847
- - устойчивость 5, 575
Разность 1, 828
- векторов 1, 633
- вперед 2, 1026
- конечная 2, 1019, 1026
Разность множеств 4, 847
- назад 2, 1026
- разделенная 2, 1027
- симметрическая 4, 1144
- центральная 2, 1027
- чисел 2, 73, 78
Разреженная матрица 4, 848
Разреженность множества 4, 848
Разрез 3, 748, 4, 540, 848; 5, 691
- в графе 1, 1114
- канонический 2, 712
- циклический 2, 712
Разреза множество 4, 848
Разрешающая функция 4, 849, 1202
Разрешающее ядро 4, 950, 5, 653
Разрешение особенностей 4, 849
- - одновременное 4, 119
- - алгебраического многообразия 4, 118
Разрешения предиката проблема 1, 219
Разрешения проблема 4, 850
- слова сложность 1, 220
Разрешенная форма задачи Лагранжа 3, 170
Разрешимая алгебра Ли 3, 278
Разрешимая группа 4, 850
- - Ли 3, 280
- мультиператорная группа 3, 839
- по Ношу игра 1, 433
- промежуточная логика 4, 695
- система 3, 765
- - подгрупп 4, 368
- формальная теория 2, 371
Разрешимая формула 4, 851
- функция 4, 274, 532
- элементарная теория 1, 215; 5, 972
π-**разрешимая группа** 4, 851
Разрешимое многообразие 4, 851; 5, 73
Разрешимое множество 1, 227; 4, 532, 852
- подмножество 2, 1059
Разрешимости аксиома гармонического пространства 1, 889
- множество 4, 220
- проблема 3, 537; 4, 957
Разрешимость альтернативного кольца 1, 237
- в радикалах алгебраического уравнения 1, 193
Разрешимый аксиоматизируемый класс моделей 1, 103
Разрешимый поток 4, 852
Разрешимый предикат 4, 852
- радикал 3, 257
- ряд 4, 850

Разрыва точка 4, 852
Разрывная вариационная задача 4, 853
Разрывная функция 4, 854
Разрывное колебание 4, 967
- периодическое решение 4, 967
Разрывный множитель 4, 854
- - Дирихле 2, 182
Райзера формула о перманентах 4, 272
Райкова теорема о гомоморфизме 5, 384
«Райский сад» 1, 51
Рама когомологии 4, 855
- комплекс 2, 263, 278
Рама кручение 4, 855, 953
- неабелев комплекс 3, 897
Рама теорема о когомологиях 4, 768, 855
- - о приводимых римановых пространствах 4, 633
Рамануджана гипотеза 4, 856
Рамануджана суммы 4, 856
- формула 2, 117
Рамануджана функция 4, 857
Рамсея теорема 1, 773; 4, 857
Ранг 4, 858
- абелевой группы 1, 19
Ранг алгебраической группы 4, 860
- алгебры 4, 858
Ранг алгебры Ли 4, 861
- базисный 3, 902
- билинейной формы 1, 483; 4, 859
- векторного пространства 4, 858
- внешней формы 2, 733
Ранг группы 2, 737, 4, 861
Ранг группы Ли 4, 861
- индефинитности J-метрики 1, 986
- квадратичной формы 2, 778, 4, 859
- конечной групповой схемы 2, 1018
- корневой системы 3, 16
Ранг линейного обыкновенного дифференциального уравнения 4, 859
- - отображения 4, 859
- матрицы 4, 858
- многообразия 5, 613
- множества 1, 373; 2, 969
Ранг модуля 4, 861
- нормирования 3, 1080
Ранг особой точки 4, 859, 860
- отношения 4, 151
- полициклический 4, 410
- полупростой 4, 860
- проективного модуля 4, 862
- пространства 3, 307
- расслоения 1, 637, 639
- редуктивный 4, 860
- решетки 4, 980
- свободного модуля 4, 862, 1087
- свободной группы 4, 1082
- - полугруппы 4, 1083
- системы векторов 4, 858
- - линейных неравенств 3, 346
- - Пфаффа 4, 776
- стабильный 5, 166
- структуры Пфаффа 4, 774
- фигуры 5, 613
- характеристического числа 5, 654
- эллиптической кривой 5, 983
Рангов вектор 4, 862
Ранговая статистика 4, 863
Ранговой корреляции коэффициент Кендалла 2, 846
- - - Спирмена 5, 142
Ранговый критерий 4, 864
Рандомизации критерий 4, 864
Рандомизация 4, 865
Рао — Блэкуэлла — Колмогорова теорема 2, 376; 4, 865—867
Рао — Крамера неравенство в математической статистике 4, 867
Раскраска графа 1, 1113
Раскроя задача 4, 868—870
Раскрытие неопределенностей 3, 964
Распада разрыва метод 4, 870
Распадающаяся линия 2-го порядка 3, 388
Распараллеливания задача 4, 647
Расписаний теория 4, 870—872
Распознавание образов 3, 931, 4, 872
Распознавания инвариантных свойств полугрупп проблема 1, 216
Распознаватель конечный 1, 54
Распределение 3, 1104; 4, 774, 873; 5, 739
- апостериорное 1, 298
- априорное 1, 311
- арифметическое 1, 325
- арксинуса 1, 326
- атомическое 1, 352
- безгранично делимое 1, 397
- - -, разложение 1, 399
- Бернулли 1, 424, 489
- бимодальное 1, 485; 3, 763
- биномиальное 1, 489
- Больцмана 1, 518
- в теории вероятностей 1, 665
- Вейбулла 1, 614
Распределение вероятностей 1, 660, 665; 4, 873—875
- - дискретное 5, 9
- - непрерывное 5, 9
- -, плотность 4, 323
- - равновесное 5, 199
- вероятностное 1, 665
- выборки 5, 998
- вырожденное 1, 809
- Гаусса — Лапласа 1, 904
- геометрическое 1, 940
- Гиббса 1, 956
- гипергеометрическое 1, 1003
- гипотетическое 4, 700
- горизонтальное 1, 1077
- двувершинное 1, 485
- Дирихле 2, 183
- дискретное 2, 206
- дисперсионного отношения 5, 627
Распределение дробных долей 4, 875
Распределение дробных долей многомерное 4, 875
- инволютивное 2, 547
- канторово 4, 1178
- Колмогорова 4, 180
- конечномерное 1, 663
- Коши 3, 61
- Лапласа 3, 201
- логарифмически-нормальное 3, 408
- логистическое 3, 414
- логнормальное 3, 420
- Максвелла 3, 479
- Максвелла — Больцмана 1, 519
- маргинальное 3, 513
- микроканоническое 5, 200
- многовершинное 3, 839
- многомерное 3, 731
- мультимодальное 3, 763, 839
- мультиномиальное 4, 409
- наиболее благоприятное 3, 874
- наименее благоприятное 3, 873
- невырожденное 1, 809
- непрерывное 3, 989
- неразложимое 3, 1002
- несобственное 1, 809; 3, 1016
- нормальное 3, 1065
- одновершинное 3, 763; 5, 503
- «омега-квадрат» 4, 17
- отрицательное биномиальное 4, 161
- - гипергеометрическое 4, 162
- - показательное 4, 163
- - полиномиальное 4, 163
- Парето 4, 222
- Паскаля 4, 225
- Пирсона 4, 288, 290
- Пойа 4, 387
- показательное 4, 391
- полиномиальное 4, 409
Распределение простых чисел 1, 254; 4, 876—883
- прямоугольное 4, 798
- Пуассона 4, 757
- равновесное 5, 199
- равномерное 4, 798
- решетчатое 4, 984
- Рэлея 4, 1061
- сингулярное 4, 1178
- Снедекора 5, 54, 626
- собственное 1, 809
- совместное 5, 70
- стационарное 5, 207
Распределение степенных вычетов и невычетов 4, 883
- строго устойчивое 5, 557
- Стьюдента 5, 260
- треугольное 4, 798
- Уишарта 2, 901; 3, 734; 5, 493
- унимодальное 3, 763; 5, 503
- усеченное 5, 547
- условное 5, 554
- устойчивое 5, 557
- фидуциальное 5, 614
- Фишера — Снедекора 5, 626
- «хи-квадрат» 5, 785
- - нецентральное 3, 1031
- целых точек 5, 801
- частное 3, 513
- Шарлье 5, 882
- экспоненциальное 5, 954
- эмпирическое 5, 998
- Эрланга 3, 520; 5, 1014
- $\beta(x)$ 1, 463
F-распределение 4, 873; 5, 626
t-распределение 4, 873; 5, 260
T^2-распределение 4, 873
W-распределение 4, 873
z-распределение 4, 873; 5, 627
β-**распределение** 4, 873
Γ-**распределение** 1, 865; 4, 873
χ^2-распределение 4, 873, 5, 785
ω^2-распределение 4, 873
Распределений полное семейство 4, 884
- семейство плотное 4, 885
Распределений сходимость 4, 885
Распределений тип 4, 886
Распределения закон 4, 887
Распределения значений теория 4, 887—891
- потенциал 4, 530
- согласованные 5, 72
- -, Колмогорова теорема 1, 666
Распределения функция 3, 1099, 4, 97, 891
Распределительность 2, 230
Распрямления точка 5, 149
Рассеивание выборки 4, 892
Рассеивания эллипсоид 4, 892
Рассела антиномия 1, 294
Рассела парадокс 1, 294; 4, 893
Рассеянная данные 5, 914
- коэффициент Джини 2, 112
Рассеяния матрица 4, 893
- фаза 5, 912
- функция 2, 22
Расслабление 4, 687
Расслоение 4, 893, 975, 1210
-, база 1, 637
- в смысле Кана 4, 1166
- векторное 1, 646
- - алгебраическое 1, 637
- - аналитическое 1, 639
- геометрических структур 5, 249
- главное 1, 1015
- - аналитическое 1, 1013
- голоморфное 1, 639
- Гуревича 3, 887
- евклидово 2, 398
- Зейферта 2, 452
- индуцированное 2, 561
- касательное 2, 443, 755
- кокасательное 2, 755
- кореперов 5, 249
- локально тривиальное 3, 437
- нормальное 1, 646, 2, 755; 3, 1067
- обильное аналитическое 4, 433
- однородное 3, 1177
-, ориентация 4, 71, 72
- ориентированное 4, 71
- ориентируемое 4, 72
- отрицательное 4, 163
- положительное 4, 432
- проективное 1, 637
-, пространство 1, 637
-, размерность 1, 637, 639, 646
-, ранг 1, 637, 639
- риманово 4, 361
- Серра 3, 887; 4, 1119
- слабо отрицательное 4, 433
- - положительное 4, 433
- со структурной группой 4, 894
- Спивака 4, 748
- спиноров 5, 139
- спин-реперов 5, 139
- струй 3, 366; 4, 126
- структурное 4, 733
- тензорное 5, 332
-, тензорное произведение 5, 249
- Титса 5, 353
- универсальное 2, 864
- Хопфа 5, 793
G-расслоение 4, 894
Расслоения гомотопическая последовательность 1, 1064
Расслоенная выборка 4, 895
Расслоенное произведение 4, 895
Расслоенное пространство 4, 896
Расстояние аффинное 1, 363
- Безиковича 3, 1119
- в графе 1, 1106
- в римановом пространстве 4, 1004
- Вейля 3, 1119
- геодезическое 1, 931
- гиперболическое 1, 988, 989; 4, 283
- информационное 2, 656
- кодовое 2, 931
- между скрещивающимися прямыми 4, 1205
- на множестве 3, 658
- неевклидово 4, 283
- от точки до множества 3, 670
- по Фреше 5, 665
- полярное 5, 291
- Степанова 3, 1119
- сферическое 4, 996
- фокусное 1, 987
- Хемминга 2, 931
- хордальное 4, 996
G-расстояние 1, 927
Расстройка 4, 1085
Раствор линейных многообразий 1, 981
Растущий автомат 1, 48, 51
Растягивающее отображение 4, 896
Растяжение 4, 1125
Растяжения коэффициент 2, 1092
Расходящаяся последовательность 4, 896
Расходящиеся прямые 3, 398; 4, 747
- - косые 4, 991
Расходящийся двойной ряд 2, 29
Расходящийся интеграл 4, 896
Расходящийся ряд 4, 897, 1063
- -, суммирование 5, 270
Расхождение 2, 127
- геометрическое 1, 940
Расчленяющее семейство отображений 2, 124
Расширение абелево 1, 845; 4, 399
- алгебраической системы 5, 876
Расширение алгебры Ли 4, 898
Расширение ассоциативной алгебры 4, 898
- бикомпактное 1, 477; 4, 909
- - александровское 5, 393
- - совершенное 5, 67
- вполне разветвленное 2, 203
- Галуа 1, 849, 850
- -, основная теорема 1, 845
Расширение группы 4, 899
Расширение дифференциального поля 4, 900—903
-, дифференциальный тип 4, 825
-, индекс ветвления 2, 203
- квазиинформационное 2, 807
- кольца целое 5, 799
- круговое 3, 122
- Куммера 3, 148
Расширение модуля 4, 903
- неразветвленное 2, 203, 3, 114, 5, 668
- несепарабельное 4, 1113
Расширение оператора 4, 19, 904—907
- отображения 4, 153
Расширение полугруппы 4, 907
Расширение поля 1, 850; 4, 398, 908
- - конечное 1, 850
- - нормальное 1, 850
- - сепарабельное 1, 850
- расщепляемое 4, 912
- Самюэля 4, 796
- сепарабельное 4, 1113

- слабо разветвленное 2, 203
- теории 4, 427
Расширение топологического пространства 4, 909
- трансцендентное 5, 425
- упорядоченное поля 5, 527
- функциональное 5, 796
- хаусдорфово 4, 909
- Хьюитта 5, 796
- чисто несепарабельное 4, 1114
Расширения области принцип 4, 909
Расширенная гипотеза Римана 2, 187, 190; 4, 995
Расширенная комплексная плоскость 1, 443; 4, 910
- числовая прямая 1, 443
Расширенно расщепляющийся оператор 4, 912
Расширенное комплексное пространство 1, 443
- пространство Лобачевского 3, 403
- K-пространство 4, 472
Расшифровка булевой функции 1, 558
Расщепимая группа 3, 487
- - диагонализируемая алгебраическая 2, 122
Расщепимый алгебраический тор 1, 179
Расщепление Мальцева 3, 279
- B-множества 2, 95
Расщепления метод 3, 818; 4, 251, 910—912
Расщепленная система Постникова 4, 517
Расщепляемая алгебра Кэли 3, 161
Расщепляемая группа 4, 912
- - кристаллографическая 3, 107
- полупростая алгебра Ли 3, 275
- разрешимая алгебра Ли 3, 279
Расщепляемое комплексное число 2, 32
- расширение 4, 912
Расщепляемость последовательности 4, 632
Расщепляющаяся последовательность 4, 913
Расщепляющийся оператор 4, 912
Рауса критерий о корнях многочлена 4, 914
- схема 4, 913
Рауса теорема о корнях многочлена 4, 913
- функция 4, 752
Рауса — Гурвица критерий о корнях многочлена 4, 914
- - - устойчивости 5, 558
- - теорема о корнях многочлена 4, 914
- - условие 4, 914
Рауха теорема сравнения 4, 1011
Рациональная дробь 4, 922
Рациональная кривая 4, 311, 914
- линейчатая поверхность 3, 381
- нормальная форма матрицы 3, 1054
Рациональная особенность 4, 915
Рациональная поверхность 4, 916
- точка 5, 299
- тригонометрическая сумма 5, 436
Рациональная функция 3, 754; 4, 917—919
- -, поле 4, 309
Рационального раскроя задача 4, 868
Рациональное p-адическое число 1, 100
Рациональное многообразие 3, 466; 4, 919
Рациональное отображение 4, 309, 919
Рациональное представление 4, 920—922
- приближение 4, 1056
Рациональное число 1, 260; 2, 74; 4, 922
Рациональности критерий 4, 916
Рациональности теоремы 4, 923
Рационально - эквивалентные многообразия 5, 502
Рациональные точки аффинного многообразия 1, 361
Рациональный G-модуль 4, 920
Рациональных функций поле 1, 178
Реализация верного равенства 2, 1047
- дизъюнкции 2, 1047
- конъюнкции 2, 1047
- симплициальной схемы 4, 1160
- случайного графа 1, 1110
- случайной функции 5, 11
- суждения 2, 1047
Реализуемая формула 4, 925
Реализуемость 4, 924
- рекурсивная 4, 956
Ребаланса метод 4, 251
Реберная связность графа 1, 1114, 1120
Реберное хроматическое число графа 1, 1120
Реберный граф 1, 1106
Ребристая выпуклая поверхность 1, 788
- точка поверхности 2, 756
Ребро аналитического полиэдра 1, 277
- возврата 1, 740; 4, 811
- выпуклого многогранника 1, 801
- гиперграфа 1, 1006
- графа 1, 1105
- Грина 4, 668
- двугранного угла 2, 50
Ребро многогранника 3, 708; 4, 925
- области Вейля 1, 629
- сети 4, 1121
Региомонтана формула 5, 320
Регрессии коэффициент 4, 925, 930
- кривая 4, 926, 929
- линия 3, 27; 4, 929
Регрессии матрица 4, 925
- плоскость 4, 926, 931
Регрессии поверхность 4, 926, 931
- прямая 4, 926, 930
Регрессии спектр 4, 926
- функция 4, 929
Регрессионная переменная 4, 929
Регрессионный анализ 4, 926—929
Регрессия 4, 929—931
- криволинейная 4, 931
- линейная 3, 308; 4, 930
- множественная 4, 931
- нелинейная 4, 931
- параболическая 4, 194
- полиномиальная 4, 194, 931
- средняя квадратическая 4, 930
Регрессор 4, 929
Регулирования время 1, 65
- закон 1, 63
- поле 1, 63
Регуляризатор оператора 4, 1176
Регуляризации метод 2, 343; 3, 932; 4, 931—933
- параметр 3, 933
- процесс 3, 604
Регуляризация 4, 933
- обобщенной функции 3, 1105
Регуляризированное решение 3, 933
Регуляризирующий оператор 3, 933
Регуляризованный след 5, 908
Регулярная алгебра функций 1, 132
- алгебраическая поверхность 1, 150
- аналитическая функция 1, 265
- аффинная схема 1, 358
- база 1, 372; 3, 657
- в бесконечности гармоническая функция 1, 875
- ветвь аналитической функции 1, 681
- внутренняя точка геодезической области 1, 927
- выпуклая поверхность 1, 791
- гомотопия 4, 358
Регулярная граничная точка 4, 275, 533, 933
- - - геодезической области 1, 927
Регулярная p-группа 4, 934
- дифференциальная форма 2, 266
- задача Штурма — Лиувилля 5, 907
- кривая 2, 248
Регулярная мера 4, 934, 938
- метрика выпуклой поверхности 1, 791
- область 4, 933
- обобщенная функция 3, 1105
Регулярная особая точка 1, 251; 4, 934
- - - дифференциального уравнения 3, 338
- поверхность 2, 251
Регулярная полугруппа 4, 935—937
Регулярная решетка 4, 937
- A-система 4, 1194
- структура 4, 937
Регулярная схема 4, 937; 5, 299
- ткань 5, 356
- точка аналитического множества 1, 280
Регулярная функция 1, 265, 4, 937
- - гиперкомплексного переменного 1, 1007
Регулярная функция множества 4, 937
- -, покрытия теоремы 4, 396
- цепь Маркова 4, 260
- частотная функция Пойа 2, 960
Регулярная экстремаль 4, 938
Регулярно гиперболическое уравнение 3, 328
- сходящаяся последовательность 5, 311
Регулярное выражение 4, 942
- кардинальное число 2, 724
Регулярное кольцо в коммутативной алгебре 4, 939
Регулярное кольцо в смысле Неймана 4, 939—941
- - локальное 3, 439
- многообразие 2, 668
- порядковое число 4, 502
Регулярное представление 4, 941
- - группы 4, 383
Регулярное простое число 2, 667; 4, 942
Регулярное пространство 4, 140, 942; 5, 391
- решение 2, 298
Регулярное событие 4, 942
- топологическое пространство, абсолют 1, 32
- условное распределение 5, 554
*-регулярное кольцо 4, 941
u-регулярное кольцо 4, 940
π-регулярное кольцо 4, 940
Регулярности аксиома 4, 140
Регулярности признаки для методов суммирования 4, 943
Регулярно-сходящийся степенной ряд 2, 614
Регулярные методы суммирования 4, 944
Регулярный автоморфизм 4, 944
- дифференциал 2, 239
- - аналитический 2, 239
- граф 1, 1106
Регулярный идеал 3, 790; 4, 944
- оператор 2, 774
- параметр 4, 945
- случайный процесс 4, 1195
Регулярный тор 4, 945
- факторобъект 5, 696
- функционал 1, 621
- элемент 4, 413, 945
Регулярный элемент полугруппы 4, 945
- - унипотентный 5, 506
Регулярных точек алгоритм 1, 561
Регулятор 1, 63; 4, 945
Редеи теорема о полугруппах 4, 455
Редуктивная алгебра Ли 3, 281
Редуктивная группа 4, 946
- - Ли 3, 281
Редуктивное пространство 4, 947
- - однородное 3, 1176
Редуктивный ранг 4, 860
Редукция Вальда 3, 874
- статистической задачи 2, 375
Редуцированная алгебра 3, 920
- - инцидентности 4, 264
- группа 1, 19
- степень многочлена 4, 1114
Редуцированный латинский квадрат 3, 207
Режим биений 1, 786
- квазипериодический 1, 786
- переходный 1, 786
- установившийся 1, 786
Резервирование 3, 855
Резидуально конечная алгебраическая система 1, 184
Резидуальное множество 2, 764
Резидуальное отображение 4, 948
Резная поверхность 4, 949
Резольвента 4, 449, 949—951; 5, 99, 653
- асимптотическая 4, 453
- в топологии 1, 1073
- гомотопическая 1, 1070, 1072; 4, 515, 516
-, изоморфизм 1, 1072
- инъективная 2, 664, 665
- линейного оператора 3, 373
- - - дифференциального 3, 368
- модуля проективная 1, 1050
- обобщенная 4, 454
- пространства 1, 1073
- свободная 4, 1084, 1087
- симплициального множества 1, 1070
- элемента алгебры 1, 383
Резольвентное множество 4, 449, 951; 5, 99
Резонанс 4, 951
- комбинационный 4, 217
- основной 4, 107
- параметрический 1, 864; 3, 316; 4, 216
Резонансное уравнение 3, 958
Резонансные члены 4, 951
Результант многочленов 4, 952
Результирующий вывод 1, 781
Рейдемейстера кручение 4, 953
- теорема о поверхностях 4, 247
- условие замыкания 2, 439
Рейе конфигурация 2, 1080
Рейнольдса напряжения 5, 452
- уравнения 5, 452
Рейнольдса число 4, 954
Рейнхарта область 3, 88
Рекуррентная последовательность 1, 740
Рекуррентная точка динамической системы 4, 954
- траектория 4, 954
Рекуррентная формула 4, 954, 955
Рекуррентная функция 4, 954
Рекуррентное матричное уравнение Риккати 4, 987
Рекуррентное соотношение 4, 955
Рекуррентность цепная 5, 815
Рекуррентные события 4, 955
Рекурсивная игра 4, 956
Рекурсивная реализуемость 4, 956
- схема 1, 230
- - программы 4, 650
Рекурсивная теория множеств 4, 957—960
- формула Тарского 1, 235
- - Хаусдорфа 1, 235
Рекурсивная функция 4, 960; 5, 833
- -, алгоритмический язык 4, 976
- -, нормальная форма 3, 1057
- -, функциональная эквивалентность 1, 230
- эквивалентность 4, 959
Рекурсивно аксиоматизируемый класс моделей 1, 103
- перечислимое множество 3, 1003; 4, 957
- устойчивая модель 2, 1060
- эквивалентные модели 2, 1060
Рекурсивное множество 4, 852, 957
Рекурсивное определение 4, 961
Рекурсивное отношение 4, 961
Рекурсивной эквивалентности тип 4, 961
Рекурсивность относительная 3, 1002
Рекурсивный анализ 2, 1054
Рекурсивный оператор 4, 962; 5, 833
- ординал 5, 421
Рекурсивный предикат 4, 962
Рекурсии высших ступеней 4, 962

Рекурсия 4, 962—965
- многократная 3, 721
- примитивная 4, 636
- трансфинитная 5, 421
Релаксации метод 4, 966
Релаксационное колебание 1, 46; 4, 966—968
Релаксационный путь 3, 490
Релаксация 5, 202
Реле, основной контакт 4, 968
- промежуточное 4, 967
Релевантная импликация 2, 66
Релейно-контактная схема 4, 968
Рёло треугольник 4, 519
Рельеф аналитический 1, 276
Рельеф аналитической функции 4, 969
Релятивистская динамика 4, 969
Релятивистская инвариантность 4, 147, 970
- скорость 4, 146
Релятивистской астрофизики математические задачи 4, 970
Релятивистской гидродинамики математические задачи 4, 971
Релятивистской термодинамики математические задачи 4, 972
Релятивная геометрия 4, 973
Реляционная система 1, 155
Реммерта теорема конечности 2, 1025
Реммерта — Штейна — Шифмана теорема о продолжении 4, 662
Ремонтоприспособленность 3, 854
Реньи критерий 4, 973
- статистика 4, 973
- функция распределения 4, 974
Репер 4, 364, 974
- аффинный 1, 364
- канонический 4, 365
- натуральный 3, 892
- полуканонический 4, 365
- примитивный 1, 755
- пространства 4, 681
- сопровождающий 4, 365
- Френе 3, 892
Реплика алгебраической системы 4, 974
Реплика эндоморфизма 4, 975
Реплично полный класс 4, 974
Репрезентативное пространство 4, 975
Ретракт деформационный 2, 102
Ретракт объекта категории 4, 975
Ретракт топологического пространства 4, 975
Ретракция 4, 976
Рефал 4, 976
Референции система 3, 9
Рефлексивная форма 2, 866
Рефлексивное отношение 4, 978
- - бинарное 1, 488
Рефлексивное пространство 3, 378; 4, 977, 5, 708
- - банахово 1, 388
- - локально выпуклое 5, 384
Рефлексивности банаховых пространств критерий 1, 388
Рефлексивность 4, 978; 5, 942
Рефлективная подкатегория 4, 978
- топологическая группа 4, 481
Рефлектор объекта категории 4, 978
Решающая процедура 4, 979
Решающая функция 4, 979
Решающее правило 4, 508
- - бейесовское 5, 192
- - допустимое 5, 192
- - минимаксное 5, 192
Решение в теории игр 4, 979
Решета метод 4, 979
Решетка 2, 198, 4, 980—982
- алгебраическая 1, 154
- атомная 1, 352
- банахова 1, 384
- Браве 3, 110
- Брауэра 1, 546
- булева 1, 550
Решетка в группе Ли 4, 980
- векторная 1, 636; 2, 14; 4, 1037
- весов 4, 464
- вполне дедекиндова 1, 758
- геометрическая 2, 969; 4, 456
- дедекиндова 2, 63
- дистрибутивная 2, 230
- допустимая 1, 945
-, единица 2, 400
-, идеал 2, 482
- компактно порожденная 1, 154
-, компактный элемент 2, 994
- критическая 1, 945
- локально выпуклая 3, 427; 4, 472
- модулярная 2, 63; 3, 786; 4, 456
- мультипликативная 3, 840
- нётерова 3, 840
- нормированная 4, 471
-, нуль 3, 1082
- ортомодулярная 4, 104
- периодов 2, 50
Решетка подалгебр 4, 982
- подмногообразий 1, 186
- полная 4, 421
- полудедекиндова 4, 456
- полумодулярная 4, 456
- Поста 4, 515
- регулярная 4, 937
Решетка с дополнениями 4, 983
- свободная 4, 1084
- Стоуна 5, 234
- точечная 1, 945; 5, 408
- условно полная 5, 553
Решето большое 1, 530
- Брунна 1, 549
- Лузина 3, 457
-, размерность 4, 980
- Сельберга 4, 1109
- Эратосфена 5, 1010
Решеточная база 1, 372
Решеточно изоморфные алгебры 4, 982
Решеточно упорядоченная группа 4, 984; 5, 255
- - полугруппа 5, 523
- упорядоченное кольцо 5, 526
Решеточный изоморфизм 4, 982
- фильтр 4, 726
Решетчатая упаковка 5, 521
Решетчатое распределение 4, 984
Рибокура конгруэнция 4, 985
Рибокура кривая 4, 985
Рида — Маллера код 2, 932
Рида — Соломона код 2, 932
Риккартово кольцо 4, 985
- *-кольцо 4, 986
Риккати уравнение 4, 986
- - матричное алгебраическое 5, 839
- - - дифференциальное 3, 620
Римана билинейные соотношения 1, 13
Римана геометрия 4, 987—991
Римана гипотезы 4, 991
- граничная задача 3, 323
Римана дзета-функция 2, 112; 4, 992
- -, Линделёфа гипотеза 3, 285
Римана дифференциальное уравнение 4, 992
- инвариант 4, 170
Римана интеграл 4, 992
- интегральная сумма 3, 91
- кратный интеграл 3, 91
- кси-функция 2, 113
- матрица 4, 994
Римана метод 1, 1151; 4, 993—995
Римана метод суммирования 4, 995; 5, 440
Римана обобщенная гипотеза 4, 995
- определенный интеграл 4, 992
- плоскость 4, 989
- -, радиус кривизны 3, 912
- проблема 1, 252
Римана производная 4, 995; 5, 887
- пространство 4, 990
- -, кривизна 4, 989
- -, радиус кривизны 3, 912
- прямая 4, 989
- расширенная гипотеза 2, 187, 190, 4, 995
Римана соотношение 4, 995
Римана сфера 4, 995
Римана тензор 4, 996
Римана теорема 4, 997
- - о конформном отображении 1, 266; 4, 997, 1018
- - о нормальных аналитических пространствах 3, 1063, 1064
- - о перестановке членов ряда 4, 998
- - о продолжении 4, 662
- - о римановых поверхностях 4, 1028
- - о тригонометрических рядах 4, 999
- - об условно сходящихся рядах 5, 549
- - существования в алгебраической геометрии 5, 159
Римана тета-функция 4, 998
- уравнение 5, 677
- *P*-уравнение 4, 190
- формула для задачи Гурса 1, 1151
- функциональное уравнение 2, 113
Римана функция 2, 312; 3, 420; 4, 993, 999
- - в теории дифференциальных уравнений 4, 1000
- - - тригонометрических рядов 4, 999
- - для задачи Гурса 1, 1151
- *P*-функция 4, 992
Римана — Брилля — Нётера теорема об алгебраических кривых 1, 145
Римана — Вольтерра метод 4, 993
Римана — Гильберта задача 1, 1095; 4, 1000
- - - обобщенная 3, 81, 1102
Римана — Гильберта — Пуанкаре задача 1, 1095
Римана — Гурвица формула 2, 55, 4, 1000; 5, 679
Римана — Кристофеля тензор 4, 1000, 1006
Римана — Лиувилля интеграл 2, 383; 5, 930
Римана — Привалова граничная задача 3, 323
Римана — Роха теорема для алгебраических поверхностей 1, 151
- - - о дивизорах 1, 15
- - - о мероморфных функциях 3, 648
Римана — Роха теорема об алгебраических кривых 4, 1000—1002
Римана — Роха — Хирцебруха теорема о проективных многообразиях 4, 1001
- - - - об индексе 2, 552
Римана — Роха — Хирцебруха — Гротендика теорема о проективных многообразиях 4, 1002
Римана — Стилтьеса интеграл 4, 1002; 5, 226
Римана — Фробениуса условие 1, 23
- - - для матрицы периодов 2, 1012
Римана — Шварца поверхность 4, 1002
Римана — Шварца принцип 4, 1002
- - - симметрии 4, 1138
- - функция 5, 888
Риманов метрический тензор 3, 669
Риманова геометрия 4, 1003—1009
Риманова геометрия в целом 4, 1009—1013
Риманова кривизна 4, 1013
- матрица 1, 23
Риманова метрика 2, 1089, 4, 1013
Риманова область 3, 889; 4, 1014
- - существования 4, 415
Риманова поверхность 1, 267; 4, 1015—1021
- - абстрактная 1, 178; 5, 317
- -, дифференциал 1, 1029; 2, 237
- -, дубль 2, 391
- - конечная 2, 1019
- -, конформно - инвариантная метрика 2, 1098
- -, матрица периодов 5, 1046
- -, модули 3, 775
- - с краем 4, 1015
- -, униформизация 5, 515
Риманова связность 4, 1021
Риманово кручение 3, 130
Риманово многообразие 4, 1022
- -, Гаусса — Бонне теорема 1, 903
- -, Жане теорема 2, 409
- - кватернионное 2, 839
- -, скалярная кривизна 4, 1197
Риманово пространство 4, 1003, 1022
- - геодезически полное 4, 1004
- - глобально симметрическое 1, 1024
- -, движение 2, 21
- - касательное 5, 623
- -, класс 2, 863
- -, кривизна 3, 98
- - локально симметрическое 4, 1146
- - неприводимое 4, 633
Риманово пространство обобщенное 4, 1022—1026
Риманово пространство однородное 3, 1176; 4, 1026—1028
- - полное 4, 426, 1004
- - приводимое 4, 633
- - слабо неприводимое 4, 633
- - субпроективное 5, 267
- расслоение 4, 361
Римановская теория тригонометрических рядов 5, 439
Римановы координаты 1, 928; 4, 1028
Римановых поверхностей классификация 4, 1028—1030
Римановых поверхностей конформные классы 4, 1030—1033
Римские цифры 4, 1033
Риса матрица 4, 1034
- теорема о полугруппах 1, 762
Риск бейесовский 1, 403
Риск статистической процедуры 4, 1033
Риска функция 4, 1033; 5, 192
Рисовская конгруэнция 4, 444
Рисовская полугруппа матричного типа 4, 1034
Рисса базис 4, 1035
Рисса интерполяционная формула 4, 1035
- мера 4, 1039; 5, 263
Рисса метод суммирования 4, 1035
Рисса неравенство 4, 1035
Рисса потенциал 4, 1036
- представление 4, 1039
Рисса произведение 4, 1037
Рисса пространство 4, 1037
Рисса система 4, 1038
Рисса теорема 4, 1038
Рисса теорема выпуклости 4, 1039
- - для функционалов 5, 708
- - о классах Харди 5, 770
- - о компактных операторах 3, 373
- - о локальном представлении субгармонической функции 5, 263
- - о субгармонических функциях 4, 1038, 1039
- - об аналитических функциях классов Харди 4, 1039
- - об интегралах Стилтьеса 5, 227
- - об интегральных представлениях 4, 215
- факторизация 5, 770
Рисса — Герглотца теорема 2, 719
Рисса — Торина теорема об интерполяции 4, 1040
Рисса — Фишера теорема для почти периодических функций 4, 544
- - - о рядах по ортонормированной системе 4, 105
Рисса — Фишера теорема об ортонормированных системах 4, 1040
Рисса — Шаудера теорема об операторах 5, 655
Риссов потенциал 2, 384
Риссов теорема 4, 1040
- - единственности 4, 566, 1040
- - об интеграле Коши 4, 1041
Риссова производная 2, 384
Ритта — Рауденбаха теорема о дифференциальных идеалах 2, 242

Ритца метод 4, 1041
Ритца — Галеркина метод 4, 1042
Ричардсона экстраполяция 4, 1042—1044
Риччи кривизна 3, 99; 4, 1044
Риччи тензор 3, 99; 4, 1007, 1045
Риччи теорема о поверхностях 3, 687; 4, 1045
Риччи тождество 2, 899, 4, 996, 1007, 1045
- уравнения 4, 361
Ришара антиномия 1, 296
Ришара парадокс 4, 1046
Робена задача 3, 83; 4, 1046
Робена постоянная 2, 404, 1099; 4, 1046, 1047
- потенциал 4, 528, 1046
Роббинса — Монро процедура стохастической аппроксимации 5, 235
Род алгебраической кривой 1, 145
Род алгебраической функции 4, 1048
- арифметический 1, 323; 4, 1049
- геометрический 1, 934; 4, 118, 1049
- графа 1, 1115
- канонического произведения 2, 714
Род кривой 4, 311, 1048
- линейный алгебраической поверхности 1, 150
- многообразия Фано 5, 597
Род поверхности 4, 1049
- произведения 4, 1049
- Тодда 5, 868
Род целой функции 4, 1049
Род элемента арифметической группы 4, 1049
$\hat{A}$-род 4, 492
L-род 4, 492, 1048
Роджерса лемма о рекурсиях 5, 421
Роджерса — Рамануджана тождество 5, 768
Родовая фаза 1, 520
Родрига обобщенная формула для ортогональных многочленов 4, 94
- теорема о кривизне 3, 97
Родрига формула 2, 868; 4, 1050
- - для поверхностей 1, 1015
Рождения и гибели процесс 4, 1050
Рождения операторы 2, 990; 4, 1051; 5, 517, 632
Роза трохоидальная 5, 448
Розенлихта — Гротендика теорема для алгебраических групп 4, 924
Розы 4, 1051
Ролля теорема 4, 1052
Рольфсена теорема о зацеплениях 5, 487
Ромб 4, 1052
Ромберга метод 4, 1052
- правило 4, 1043, 1052
Ромбическая сеть 4, 1053
Рост экспоненциальный 2, 174
Роста индикатриса 4, 1054
Росток 4, 1054
- аналитической функции 4, 415
- дифференциальный 2, 278
- дифференцируемого отображения 4, 126
-, комплексификация 1, 689
- конечно определенный 4, 128
- мероморфной функции 4, 1054
- нормальный 3, 1035
- k-определенный 5, 361
- функции 4, 1054
Ротор 1, 715; 4, 1054
- векторного поля 1, 649
Роуза формула 2, 1051
Рохлина многообразие (плюмбинг) 2, 380
Рудвалиса группа 5, 149
Рулетта 4, 1054
Рунге область 4, 1055
Рунге правило 4, 1055
Рунге теорема о приближениях 4, 1055
Рунге — Кутта метод 4, 1056—1058
Ручек теория 4, 1058—1061
Ручка 4, 1058
Ручного типа алгебра 4, 585
Ручное вложение 2, 138; 4, 1061, 5, 401
Руше теорема о нулях аналитической функции 4, 1061
Рынок в теории игр 2, 1104
Рэлея распределение 4, 1061
Рэлея уравнение 4, 1062
- формула 1, 1146
- функционал 2, 689
Рэлея — Ритца метод 4, 1042
Рэлея — Шварца частные 2, 59
Ряд 4, 1063—1070
- абсолютно сходящийся 1, 40; 4, 1065
- арифметический 1, 324
- асимптотический 1, 335
-, безусловная сходимость 5, 549
- биномиальный 1, 491
- Бюрмана — Лагранжа 1, 570
- вариационный 1, 603; 4, 499
- вириальный 1, 708
- возвратный 1, 740
- временной 1, 663, 768
- гармонический 1, 887
- Гартогса 1, 894
- Гартогса — Лорана 1, 894
- Гаусса 1, 1001, 1003
- геометрический 1, 932
- Гильберта — Шмидта 1, 977
- гипергеометрический 1, 1003
- главный 2, 485
- Грама — Шарлье 1, 1086
- группы главный 1, 1018
- двойной 2, 29
- динамики 1, 768
- Дирихле 2, 183
- - для аналитической почти периодической функции 2, 186
- Егорова 2, 399
- знакопеременный 2, 464
- знакочередующийся 2, 464
- идеальный 2, 485
- интегро-степенной 2, 614, 3, 474, 945
- интерполяционный 2, 633
- композиционный 2, 485, 1012; 5, 266
- кратный 3, 93
- Куммера 1, 804
-, Куммера признак сходимости 3, 147
- Лагранжа 1, 570, 3, 174, 1139, 5, 219
- лакунарный 3, 185
- Ламберта 3, 187
- Лейбница 3, 233; 4, 282
- Лиувилля — Неймана 5, 652
-, Лобачевского признак сходимости 3, 402
-, логарифмический признак сходимости 3, 411
- Лорана 1, 264, 265; 3, 450
- - обобщенный 1, 679
- Мёбиуса 3, 631
- Маклорена 3, 478
-, максимальный член 3, 488
- Мищенко 5, 866
- натуральный 3, 893
- Неймана 3, 924; 5, 652
- нормальный 1, 851
- Ньютона 2, 1028
- обвертывающий 3, 1097
-, обобщенная сумма 5, 308
-, обращение 3, 1139; 5, 219
- ортогональный 4, 100
-, остаток 4, 1064
- повторный 4, 350
- подгрупп 4, 367
- полинильпотентный 4, 408
- полициклический 4, 410
-, почленное дифференцирование 4, 1069
-, - интегрирование 4, 1069
- правильно сходящийся 4, 791
-, произведение на число 4, 1064
- Пуанкаре 5, 346
- Пюизё 1, 174, 176, 276, 679; 3, 1091; 4, 414, 778, 1016
- равномерно сходящийся 4, 791
-, разбавление 4, 810
- разрешимый 4, 850
- расходящийся 4, 987, 1063
- степенной 5, 218
- Стирлинга 1, 867
- субнормальный 5, 266
-, сумма 4, 1063, 5, 270
-, суммирование 5, 270
- сходящийся 4, 1063, 1068, 1069
- Тейлора 1, 263, 5, 218, 323
- тригонометрический 5, 438
-, умножение 4, 1066
- универсальный 5, 501
-, условная сходимость 5, 549
- условно сходящийся 4, 1065, 5, 549
- Фабера 5, 583
- Фарея 3, 632, 5, 598
- Фредгольма 5, 653
- функциональный 4, 1068
- Фурье 4, 99, 100, 5, 439
- - по ортогональным многочленам 5, 731
- - почти периодической функции 5, 732
- - функции 5, 732
- Фурье — Бесселя 5, 738
- Фурье — Стилтьеса 5, 740
- Фурье — Чебышева 5, 841
- центральный 5, 811
-, частичная сумма 4, 1063, 1068
- числовой 4, 1063
- шпеккеров 5, 896
- Штурма 5, 907
- Эджворта 5, 924
- Эйзенштейна 5, 346
- Эйлера 5, 931
-, Эйлера преобразование 5, 929
L-ряд 2, 188
- Дирихле 2, 188
θ-ряд 5, 346
Рядное кольцо 3, 1182

С

Сазонова топология 3, 646
Саккери четырехугольник 4, 1071
Салонная игра 4, 1071
Самовоспроизведения задача 1, 51
Самодуальная связность 5, 1060
Самоинъективное кольцо 4, 1071
Самокорректирующаяся схема 3, 859
Самонастраивающийся автомат 1, 50
Самообучения задача 4, 872
Самопересекающийся многоугольник 3, 749
Самопересечения точка 2, 25, 4, 124, 125, 1072
Самопериметр 4, 1072
Самоприкосновения точка 2, 25; 4, 124, 1072
Самоприменимый алгоритм 1, 210
Самосинхронизация 2, 937
Самосопряженная краевая задача 4, 1073
- линейная система 4, 1073
- матрица 5, 1019
- подгруппа 3, 1073, 5, 91
- полугруппа 4, 1127
Самосопряженное дифференциальное уравнение 4, 1072—1074
Самосопряженное линейное преобразование 4, 1074
- - пространство 3, 352
- расширение 5, 108
Самосопряженный интегральный оператор 2, 605
- однородный выпуклый конус 3, 1180
Самосопряженный оператор 3, 375, 4, 1074, 1146
- элемент алгебры 4, 1148
G-самосопряженный оператор 1, 986
Самюэли расширение 4, 796
Сарда теорема о критическом множестве 3, 113
Сарда теорема о многообразиях 4, 1075
Сбалансированная игра 2, 1103
Сбалансированное кольцо 4, 1075
- состояние 3, 589
Сбалансированный модуль 4, 1075
Свертка обобщенной функции 5, 730
Свертка тензора 4, 1077; 5, 328
Свертка функций 2, 606, 4, 1075
- ядер 4, 1206
U-свертка 1, 898
Свертки преобразование 4, 1077
Свертывание систем линейных неравенств, метод 3, 347
- тензоров 5, 328
Свертывания аксиом схема 5, 644
- аксиомы 1, 105; 5, 352
- - теоретико-типовые 5, 351
Сверхразрешимая группа 4, 1077
Сверхрелаксации метод 4, 966, 1077
Сверхслово 1, 53
Сверхсходимость 4, 1077
Сверхъязык 5, 644
Сверхэффективная оценка 4, 1078
Световой конус 2, 522
Светоподобный вектор 4, 149
Свободная абелева группа 4, 1078
Свободная алгебра 4, 1079
- - Ли 3, 281
Свободная алгебра над ассоциативно-коммутативным кольцом 4, 1079
Свободная алгебраическая система 1, 374, 4, 1079—1081
Свободная ассоциативная алгебра 4, 1081
Свободная булева алгебра 1, 552; 4, 1081
- гомотопия 1, 1075
Свободная группа 4, 1082
- -, Нильсена теорема 4, 1082
- -, Столлингса теорема 1, 1055
- поверхность 3, 326
- образующая 4, 1083
Свободная переменная 4, 1083
- полинильпотентная группа 4, 408
Свободная полугруппа 4, 442, 1083
- порождающая система 4, 1079
- про-p-группа 4, 655
Свободная резольвента 4, 1084, 1087
Свободная решетка 4, 1084
Σ-свободная группа 4, 22
Свободно становящаяся последовательность 2, 639; 4, 1084
Свободное вложение 3, 1096
- вхождение 4, 578
- - переменной 4, 1083
Свободное гармоническое колебание 4, 1084—1086
- действие группы 2, 69
- кольцо 4, 1079
Свободное множество 4, 1086
- некоммутативное аффинное кольцо 1, 123
Свободное объединение 4, 1086
- погружение 4, 362
Свободное произведение 4, 1086
Свободное произведение групп 4, 1086
- T-расширение кольца 1, 722
- семейство элементов модуля 1, 374
Свободной подвижности свойство 4, 83
Свободные колебания 5, 64
Свободный автомат 1, 67
- базис алгебраической системы 1, 373
- бивектор 1, 469
Свободный вектор 1, 632; 4, 1087
Свободный группоид 4, 1087
- идеал 1, 342
Свободный модуль 4, 1087
- -, ранг 4, 862
- моноид 4, 1083
- тривектор 5, 435
- ультрафильтр 5, 495
Свободных порождающих система 4, 1082
- точек метод 5, 831
Сводимости аксиома 4, 1088
Сводимость 4, 957
- алгоритмическая 1, 218
- нумераций 5, 418
- табличная 5, 317
- табличного типа 5, 317
btt-сводимость 5, 317

m-сводимость 4, 957; 5, 317
T-сводимость 4, 957
tt-сводимость 5, 317
Свойство 4, 151
C-свойство Лузина 3, 458
N-свойство Лузина 3, 458
Связанная переменная 4, 1088
Связанное вхождение 4, 578
- - переменной 4, 1083, 1088
Связанный вектор 1, 632; 4, 1089
Связи двусторонние 1, 1034
- неудерживающие 1, 1034
- односторонние 1, 1034
- удерживающие 1, 1034
Связка 2, 1041; 4, 1089
- окружностей 4, 1089
- плоскостей 2, 1085; 4, 1089
Связка полугрупп 4, 1090
- пропозициональная 4, 698
- прямых 4, 1089
- сфер 4, 1090
Связная алгебраическая группа 1, 142
- аффинная схема 1, 358
- *p*-делимая группа 2, 82
- коммутативная компактная группа Ли 3, 264
Связная компонента единицы 2, 82; 4, 1091
- полупростая компактная группа Ли 3, 264
Связная сумма 4, 1092
- топологическая группа 5, 367
k-связная область 3, 748
Связное двоеточие 2, 23; 5, 391
Связное множество 4, 1092
- подмножество 4, 1096
Связное пространство 4, 1092, 1096, 1097
- симплициальное множество 4, 1165
Связности коэффициент картановский 5, 622
Связности Леви-Чивита 4, 209
Связности на многообразии 4, 1092—1094
Связности объект 4, 1094
- отношение 1, 505
- сопряженные 5, 87
- схема 1, 505
Связности форма 4, 1095
Связности число 4, 1096
Связность 4, 1096
- аффинная 1, 355; 2, 268
- без кручения естественная 4, 947
- в категории 3, 943
- Вейля 1, 630
- графа 1, 1114
- евклидова 2, 398
-, Зариского теорема 2, 443
- инфинитезимальная 2, 645
- каноническая 4, 947
- Картана 4, 1093
- конформная 2, 1087
- Леви-Чивита 3, 225
- линейная 3, 309
- метрическая 3, 660
Связность на расслоенном пространстве 4, 1097—1099
- нелинейная 3, 942
- плоская 4, 207
- полная 4, 1093
- проективная 4, 671
- риманова 4, 1021
- самодуальная 5, 1060
- симплектическая 3, 660; 4, 1155
- эквиаффинная 5, 942
- эрмитова 5, 1020
- - каноническая 5, 1020
Связный граф 1, 1106, 1114
Связывающий гомоморфизм 2, 999, 1000
- морфизм 1, 1053, 1057
Связь 5, 71
- анафорическая 4, 1184
- нестационарная 1, 1033
- обратная 1, 63, 69
- стационарная 1, 1033
Сглаживаемая особенность 4, 118
Сглаживание углов 4, 1059
Сглаживания свойство 2, 295
Сглаживающий функционал 3, 934
Сгущения точка 4, 1099
Сдвиг 1, 648, 4, 1099, 1154; 5, 412
- канонический 4, 1161
- размерностей 2, 917
- унитарный 5, 506—507
ε-сдвиг 4, 822
Сдвига оператор 4, 27, 1099; 5, 771
Сдвига параметр 4, 1099
- по траекториям оператор 3, 61
Сдвиги полугрупп 4, 1099
Сдвигов динамическая система 4, 1100
Сдвиговая оболочка 4, 1100
Севери делитель 1, 151; 3, 1006
- число 3, 1006
Сегё формула для ортогональных многочленов 4, 98
Сегмент 2, 615; 4, 160, 1100, 1101
- в пространстве 4, 1101
- круга 4, 16
- круговой 4, 1101
- на плоскости 4, 1100
- шаровой 4, 1101
Сегре вложение 4, 1101
- критерий минимальности 3, 142
- многообразие 4, 1101
Седло 4, 122, 1101
Седло в бесконечности 4, 1102
-, сепаратриса 4, 1101
Седловая поверхность 4, 170, 1102
Седловая точка 4, 1103
Седловая точка в теории игр 4, 1103
- - несобственная 4, 1102
κ-седловая поверхность 4, 362
Седлового типа предельный цикл 4, 576
Седловой сектор 4, 1106
Седло-узел 4, 122, 1103
-, сепаратриса 4, 1103
Седьмая проблема Гильберта 5, 426
Секанс 4, 1104
Секвенциальная формальная система Генцена 1, 919
Секвенциально компактное пространство 4, 1104
Секвенциальное пространство 4, 1104, 1139
Секвенций исчисление 4, 1104
Секвенция 4, 1105
-, сходность 1, 921
Секефальви-Надя теорема о сжатии 4, 1125
Сектор 4, 1105
- в пространстве 4, 1105
Сектор в теории дифференциальных уравнений 4, 1106—1108
- гиперболический 4, 1106
- замкнутый узловой 4, 1106
- кратчайших. угол 1, 789
- круга 4, 16
- круговой 4, 1105
- на плоскости 4, 1105
- открытый узловой 4, 1106
- параболический 4, 1106
- седловой 4, 1106
- Фроммера 4, 1107
- шаровой 4, 1106
- эллиптический 4, 1106
Секториальный оператор 4, 905
Секунда 4, 1108
- метрическая 4, 1108
Секущая окружности 4, 15
Секущая поверхность 4, 503, 1124
- сфера 4, 1058
Секущий диск 4, 1058
Секущих метод 2, 624; 4, 1108
Секционная кривизна 3, 99; 4, 1107, 1109
Сельберга метод 4, 1109
Сельберга решето 4, 1109
Семантика 4, 1110; 5, 636
- алгебраическая 4, 696
- в программировании 4, 650
- денотационная 4, 651
- интерпретирующего типа 1, 224
- интуиционистская 1, 909
- конструктивная 2, 1046; 4, 696
- Крипке 4, 696
- операционная 4, 650
- структурная 5, 255
- трансляционного типа 1, 224
Семантическая антиномия 1, 294, 295
- процедура 1, 224
- система ступенчатая 5, 257
Семантически верная формула 4, 426
Семантический анализ 1, 223
- язык 3, 567
Семантическое следование 4, 696
Семафор 4, 649
Семейство—см. соответствующее название
Семидиэдральная группа 2, 806
Семиинвариант 4, 1111
- линии 2-го порядка 3, 388
- поверхности 2-го порядка 4, 344
- спектральный 5, 132
Семимартингал 4, 1112
Сепарабельная алгебра 4, 1113
- изогения 2, 501
- степень 4, 1114
Сепарабельно замкнутое поле 4, 1114
- порожденное расширение 5, 426
Сепарабельное замыкание 4, 1114
- конструктивное метрическое пространство 2, 1052
Сепарабельное отображение 4, 1113
Сепарабельное пространство 3, 644; 4, 1113
Сепарабельное расширение 4, 1113
- - полууниверсальное 4, 901
- - поля 1, 850
- - универсальное 4, 901
Сепарабельность дифференциальная 4, 825
Сепарабельный алгебраический элемент 4, 1114
- многочлен 4, 1114
- морфизм 4, 1113
Сепарабельный процесс 4, 1114
Сепаранта 4, 1114
Сепаративная полугруппа 4, 1115
Сепаратриса 4, 1116
- неустойчивая 4, 1101
- седла 4, 1101
- седло-узла 4, 1103
- устойчивая 4, 1101
Сепаратрисное многообразие 4, 1116
Сепарирующий базис 5, 426
Сервантная подгруппа 4, 1116; 5, 880
Сериальный коэффициент корреляции 4, 1117
Серии представлений 4, 1117
Серий схема 4, 1118
Серия слова 2, 930
- структурная 2, 889
Серпиньского ковер 3, 384; 4, 1118
Серпиньского кривая 4, 1118
теорема о континууме 2, 1067; 4, 1097
Серра критерий аффинности 1, 359
Серра подкатегория 4, 1119
- подкручивающий обратимый пучок 3, 1130
- проблема о кольце многочленов 3, 755
- - о проективных модулях 4, 682
Серра расслоение 3, 887; 4, 1119
- спектральная последовательность 3, 235
- теорема двойственности 2, 34, 39
- - об аффинных схемах 1, 359
- условие 1, 1027
Сетевая модель 4, 1119
Сетевое планирование 4, 1120
Сетевой вес 3, 836; 4, 1124
Сетевой график 4, 1119, 1121
- метод планирования и управления 4, 1120
Сети аполярные 1, 298
Сетка 4, 836, 844; 5, 995
Сеток метод 4, 195, 843, 1121
Сеточная аппроксимация 3, 304
- задача корректная 3, 306
- область 4, 218
Сеть 4, 1121, 1122, 1123, 5, 357
- автоматная 1, 53
- алгебраическая 2, 804
- асимптотическая 1, 333
- Бонне 1, 531
- в топологическом пространстве 3, 836
- виртуально - асимптотическая 1, 708
- геодезическая 1, 928; 4, 1122
- гиперболическая 4, 1123
- голономная 4, 1122
-, Дарбу инварианты 2, 15
- Егорова 4, 536
- изотермическая 2, 518
- итеративная 1, 50
- коническая 2, 1033
- конформно-геодезическая 2, 1090
- конформно-чебышевская 4, 1053
- линий кривизны 3, 102
- Лиувилля 3, 392
- логическая 1, 55
- неголономная 4, 1122
- ортогональная 4, 85
- параболическая 4, 1123
- переноса 4, 247
- Петри 4, 280
- потенциальная 4, 536
- ромбическая 4, 1053
- сопряженная 5, 81
Сеть сфер 4, 1123
Сеть топологического пространства 4, 1124
- транспортная 4, 1122
- фокальная 2, 1015; 5, 633
- Фосса 5, 646
- частично голономная 4, 1122
- чебышевская 4, 1053; 5, 847
- - сопряженная 4, 247
- эллиптическая 4, 1123
ε-сеть 4, 396
Сечение 2, 65, 75; 4, 505, 766, 975, 1124
- дедекиндово 2, 65; 3, 322, 986
- золотое 2, 466
- каноническое 2, 712
- коническое 2, 1034
- многозначных отображений 3, 720
- многообразия 2, 54
- непрерывное 3, 989
- нормальное 3, 97, 1070, 1071
- нулевое 4, 1124
- области 1, 1102
Сечение отображения 4, 1124
- представляющее 4, 599
- пространственное 4, 149
Сечение расслоения 4, 893, 1124
Сечения правило 1, 920; 4, 1105
Сжатие 4, 907, 1124; 5, 118, 119
Сжатие алгебры Ли 4, 1125
- вполне неунитарное 4, 1124
- группы 4, 1126
- класса 5, 118
Сжатий полугруппа 4, 1126
Сжатия линия 3, 380
Сжатых отображений принцип 3, 673, 4, 1127
Сжимающее отображение 3, 672
Сжимающий оператор 4, 1124
Сжимающих отображений принцип 3, 673; 4, 1127
Сигма-функция Вейерштрасса 1, 623
- с индексом 1, 624
Сигнал входной 2, 850
- выходной 2, 850
- телеграфный 3, 24
Сигнала выделение 1, 781
Сигнализирующая функция 1, 210, 211, 1092
- - емкости 1, 211
- - памяти 1, 211
Сигнатура 4, 1128
- билинейной формы 2, 563; 4, 1128
- класса алгебраической системы 1, 156; 4, 1128
- Минковского 5, 480
- многообразия 5, 860
- псевдоевклидова пространства 4, 739
- фуксовой группы 5, 679
Сигнум 4, 1129
Сидона множество 1, 885
Сизигетический пучок 3, 140
треугольник 3, 140

Сизигия 2, 542; 4, 1129
-, Гильберта теорема 1, 973
-, модуль 1, 973
-, цепь 1, 973
Силова подгруппа 4, 1129
Силова теоремы 4, 1130
Силовская подгруппа 4, 1129
Сильвестра теорема о квадратичных формах 2, 562
Сильная гомология 4, 1130, 1206
- единица 1, 384; 4, 471
- операторная топология 3, 374; 4, 23
Сильная производная 1, 895; 4, 1130; 5, 666
- связка 4, 1091
- связность псевдомногообразия 4, 741
- суммируемость 5, 275
- сходимость 5, 309
- теорема жесткости 2, 201
- топология 2, 44; 5, 382
Сильно аддитивная арифметическая функция 1, 89
- бесконечномерный бикомпакт 1, 454
- q-вогнутое пространство 4, 728
- выпуклая функция 1, 1100
- вырожденная алгебра Ли 5, 999
- гомологичный нулю цикл 4, 1205
- измеримая функция 1, 541
- изолированная подгруппа 2, 504
- конструктивная модель 2, 1059
- мультипликативная арифметическая функция 3, 840
- недостижимое кардинальное число 2, 724
- нелинейная система 2, 816
Сильно непрерывная полугруппа 4, 1130
- неустойчивое уравнение 1, 863
- нормальное расширение 4, 902
- одновершинное распределение 5, 503
- особая точка 2, 667
- плюрисубгармоническая функция 4, 336
- p-псевдовыпуклая функция 4, 728
- p-псевдовыпуклое пространство 4, 728
- сопряженные локально выпуклые пространства 5, 382
- субгармоническая функция 5, 264
- унимодальное распределение 5, 503
- устойчивое уравнение 1, 863
- феллеровский процесс 5, 603
- эллиптический оператор 3, 362
- эллиптическое уравнение 3, 801
Сильное дифференцирование 4, 1131
- отрицание 2, 1040
Сильное решение 4, 1131
- - стохастического дифференциального уравнения 5, 244
- сопряженное пространство 2, 45
- условие конуса 2, 1076
Сильносвязный граф 1, 1109
Сильный гомоморфизм 1, 1061
- - Ω-систем 1, 156
- граф 1, 1109
Сильный интеграл 4, 1131
Сильный относительный минимум 4, 1132
- турнир 5, 453
Сильный экстремум 1, 583; 4, 1133
Символ антивиковский 4, 1134
- Артина 1, 168; 5, 668
- Вейля 4, 1134
- виковский 4, 1134
- внутренний 4, 1135
- вспомогательный 1, 1092
- Гильберта квадратичный 5, 776
- граничный 4, 1135
- комплекса 2, 553
- Кристоффеля 3, 110
- Кронекера 3, 116
- Лежандра 3, 230
- линейного дифференциального оператора 3, 366
- начальный 1, 1092
- нетерминальный 1, 1092
Символ оператора 4, 1133—1135; 5, 753
- - главный 4, 1135
- основной 1, 1090, 1092
- псевдодифференциального оператора 4, 734
- терминальный 1, 1092
- Хассе 5, 776
- Шлефли 3, 712
- эллиптический 4, 1135
- Якоби 5, 1051
Символическая динамика 4, 1135
- логика 3, 568
Символический модуль линейного дифференциального оператора 3, 367
Символов кольцо 2, 349
Симметризатор Юнга 5, 1027
Симметризации метод 4, 1136
- принцип 4, 1136
Симметризация 4, 1137, 1140
- круговая 3, 120
Симметризованное полилинейное отображение 4, 408
Симметризуемое пространство 3, 657
- - топологическое 4, 1139
Симметрии аксиома для метрики 3, 658
Симметрии критерий 4, 1138
Симметрии принцип 4, 1138
- - для гармонических функций 1, 877
- - Римана — Шварца 4, 1002
- теорема Шварца 5, 888
Симметрий группа 1, 1140
Симметрика 3, 674; 4, 1139
Симметрирование 4, 1140
Симметрическая алгебра 4, 1140
- билинейная форма 1, 482
- - -, сигнатура 4, 1128
- гиперболическая система 3, 327
Симметрическая группа 4, 382, 1141
- -, представление 4, 588
- инверсная полугруппа 2, 546
- квазилинейная система 2, 815
Симметрическая матрица 3, 616; 4, 1142
Симметрическая область 3, 1172; 4, 1142
- полугруппа 4, 442, 599
Симметрическая производная 4, 1143
- - вторая 5, 887
- - Шварца 5, 887
Симметрическая разность 4, 1144
p-я симметрическая степень гомоморфизма 4, 1141
- - - модуля 4, 1140
Симметрическая функция 4, 1144
Симметрический многочлен 4, 1145
Симметрический оператор 4, 1145; 5, 1018
- - дифференциальный 5, 108
- -, максимальное и минимальное расширения 3, 484
- -, расширение 4, 904
- поляритет 4, 477
Симметрический тензор 4, 1146
Симметрическое полилинейное отображение 4, 407
- преобразование 4, 1074
Симметрическое производное число 4, 1146
Симметрическое пространство 4, 1146—1148; 5, 625
- - Фока 5, 631
- - эрмитово 5, 1022
- умножение 4, 1140
Симметричная алгебра 1, 133; 2, 548; 4, 1148—1150
- - равномерная 4, 786
- блок-схема 1, 506
Симметричное блуждание 5, 12
- отношение 4, 1150
- - бинарное 1, 488
- отображение 4, 1149
- подмножество 4, 1149
Симметричное представление 4, 1150
- ядро 2, 591, 595
- Фредгольма 5, 660
Симметричной выборки метод 3, 817
Симметричность 4, 1150; 5, 942
Симметричный канал 2, 709
Симметричный оператор 4, 1150
- тензор 4, 1146
G-симметричный оператор 1, 986
Симметрия 4, 1150
- локальная 3, 454
- метрического пространства 5, 625
- относительно окружности 2, 545
Симморфная кристаллографическая группа 3, 107
Симплекс 2, 996; 3, 151; 4, 681, 1151, 1159, 1161
-, вершина 2, 996
- вырожденный 4, 1163
- геометрический 2, 996
-, грань 2, 996
-, дезориентирующая цепочка 4, 72
-, дезориентирующий путь 4, 71
-, джойн 3, 153
- евклидово 2, 996
-, звезда 3, 153
-, линк 3, 153, 4, 550
-, носитель 4, 1179
- ориентированный 2, 996; 4, 70
-, пояс 3, 153; 4, 550
- симплициального объекта категории 4, 1169
-, соединение 3, 153
- стандартный 5, 168
- топологический 5, 434
- фундаментальный 5, 168
- Шоке 5, 895
- Эйленберга — Зильбера 4, 1163
Симплекс-метод 4, 1152
Симплексный метод 4, 1152—1154
Симплексный поиск 4, 1154
Симплектическая группа 2, 866; 4, 478, 1154
- корреляция 4, 477
- матрица 1, 862; 4, 1154, 1157
- -, Ляпунова — Пуанкаре теорема 1, 862
Симплектическая связность 3, 660; 4, 1155
Симплектическая структура 1, 860; 4, 548, 1156
- трансвекция 4, 1154
Симплектический инвариант 4, 1157
- класс Понтрягина 5, 761
- оператор 4, 1157
Симплектическое многообразие 4, 1156
- преобразование 4, 1157
Симплектическое пространство 4, 1156
Симплектическое пространство однородное 3, 1176; 4, 1157
Симплициальная аппроксимация 4, 1161
- гомотопия 4, 1169
- коцепь 3, 44
- подсхема 4, 1159
Симплициальная схема 4, 1158—1161, 1161
Симплициальное множество 4, 1161—1168
- -, резольвента 1, 1070
Симплициальное отображение 2, 998; 3, 151; 4, 1159, 1161, 1168, 1169
- подмножество 4, 1161
Симплициальное пространство 4, 1168
- разбиение 4, 1168
Симплициальный изоморфизм 3, 152
Симплициальный комплекс 3, 151; 4, 1159, 1168
Симплициальный объект категории 4, 1168—1170
- отрезок 5, 168
- спектр 4, 1167
Симпсона формула 2, 625; 4, 1170
Симсона прямая 4, 1170
Симула 4, 1170
Симула 1 4, 1170
Симула-67 4, 1171
Сингония 3, 108
Сингулярная задача Штурма — Лиувилля 5, 907
- коцепь 3, 44
- матрица 1, 806
- обобщенная функция 3, 1105
- поверхность 4, 342
- полугруппа 2, 487
Сингулярная функция 4, 1171
- цепь 4, 1179
Сингулярно возмущенное уравнение 2, 343
Сингулярное интегральное уравнение 2, 592; 4, 1172—1178
- исчисление предикатов 3, 419
- кардинальное число 2, 724
- порядковое число 4, 502
Сингулярное распределение 4, 1178
- симплициальное множество 4, 1162
Сингулярные гомологии 4, 1178—1180
- когомологии 4, 1179
- числа оператора 5, 116
Сингулярный бордизм 4, 304
Сингулярный интеграл 2, 605; 3, 52; 4, 1180; 5, 96
- - Валле — Пуссена 1, 575
- - Гильберта 1, 969
- - Джексона 2, 110
- - Дирихле 2, 194
- -, Коши — Привалова теорема 4, 630
- - Коши — Стилтьеса 4, 630
- - Фейера 5, 601
- интегральный оператор 4, 1172
- носитель 3, 1118, 5, 672
- оператор 4, 1172
- - Коши 2, 605
- симплекс 4, 1179
- тор 4, 945
- функтор 4, 1162
Синоним 2, 525
Синонимия 3, 566
Синтагматическая аналитическая модель языка 1, 248
Синтаксис в математической логике 1, 111; 4, 1181; 5, 636
- теоретический 4, 1185
- элементарный 4, 1185
Синтаксическая омонимия 4, 1183
Синтаксическая структура 4, 1182—1185
Синтаксическая теорема 4, 1185
Синтаксический анализ 1, 223
Синтаксический язык 4, 1185
Синтеза задачи 3, 931; 4, 943, 1185—1190
Синус 4, 1190
Синус амплитуды 4, 1191
Синус гиперболический 1, 991; 4, 1191
Синус Гордона уравнение 4, 1191—1193
- интегральный 2, 606
- эллиптический 4, 1191
Синусов теорема 4, 1193
- - в гиперболической геометрии 1, 990
- - в сферической тригонометрии 5, 292
Синусоида 4, 1193
Синусоидальная спираль 4, 1193
Синусоидальное колебание 1, 46, 888
Синус-преобразование Фурье 4, 1194
Синхронизация принудительная 1, 47, 787
Система — см. соответствующее название
***A*-система** 4, 1194
***K*-система** 4, 1194
***Y*-система** 4, 1195
Систематическая ошибка 3, 847, 877; 4, 181, 183; 5, 51, 408
Системная программа 4, 1196
Системное программирование 4, 645, 1196—1198
Ситникова двойственность 1, 1059; 5, 228
Ситуация в теории игр 2, 470, 481; 4, 386
- равновесия 1, 433
- элементарная 2, 143
Скаляр 1, 642; 4, 1197
Скалярная кривизна 3, 99; 4, 1007, 1045, 1197

- плотность 5, 330
- часть кватерниона 2, 838
Скалярное поле 4, 475, 1197
Скалярное произведение 1, 979; 4, 1197
- - в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
- - в римановом пространстве 4, 1003
- - векторов 1, 634
- - индефинитное 1, 861
- - тривекторов 5, 435
- - эрмитово 5, 1019, 1021
- уравнение Лапласа 3, 203
Скалярный квадрат 4, 1197
- потенциал 1, 650; 4, 520, 536
Сканирования метод 4, 1198
Скачка операция 3, 1003
Скачков функция 4, 1198
Скачкообразный процесс 4, 1199—1201
Скачок 3, 322
- в системе упорядоченных групп 5, 522
Сквозного индуцирования теорема 2, 559
Скедастическая линия 4, 929
Скелет категории 4, 1200
Склеивания метод в теории поверхностей 4, 1200
- теорема о выпуклых поверхностях 1, 791
Склеивания теоремы для аналитических функций 4, 1201
Скобка Лагранжа 3, 174
- Ли 3, 282
- Майера 5, 1052
- Пуассона 4, 758
- Якоби 5, 1052
Сколема парадокс 4, 1201
Сколема функция 4, 1202
Сколемовская нормальная форма формулы 4, 1202
- функция 4, 1202
Скольжений группа 4, 1203
Скольжения преобразование 3, 807
Скользящего среднего процесс 4, 1203
Скользящее среднее 3, 756
Скользящий вектор 1, 632; 4, 1204
- -, Вариньона теорема 1, 610
- оптимальный режим 4, 58
Скорости годограф 2, 530
Скорость групповая 1, 1146
- передачи 2, 932, 936, 940
- - информации 2, 653
- сходимости 5, 304
- фазовая 1, 1146; 5, 588
Скотта полная решетка 4, 654
Скрещенное групповое кольцо 4, 1204
Скрещенное произведение 4, 1204
- - норм 5, 1031
Скрещенно-обратимая лупа 3, 461
Скрещенные модули 4, 1205
Скрещенный гомоморфизм 2, 917; 4, 1205
Скрещиваний число в графе 1, 1115
Скрещивающиеся прямые 4, 1205
- - косые 4, 991
Скрученная группа 5, 891
Скулема функция 4, 1202
Слабая глобальная размерность кольца 1, 1054
- голоморфная выпуклость 5, 899
- гомологическая размерность 1, 1053
Слабая гомология 4, 1205
- единица 4, 471
- зависимость случайных величин 3, 917
- обобщенная производная 3, 1107
- операторная топология 3, 374; 4, 23
Слабая особенность 4, 1206
Слабая производная 1, 895; 4, 1206
- сходимость 5, 309, 312, 313
- - функционалов 3, 1104
Слабая топология 2, 44; 4, 716, 1206; 5, 382, 1035
Слабо аналитическая функция 1, 274
Слабо бесконечномерное пространство 4, 1206
- бесконечномерный бикомпакт 1, 454
Слабо блуждающее множество 4, 1206
- выпуклое множество 1, 799
- голоморфная функция 3, 1064
- гомологичный нулю цикл 4, 1205
- гомотопически эквивалентные пространства 1, 1068
- недостижимое кардинальное число 2, 724
- нелинейная система 2, 816
- нелинейное уравнение 3, 951
- непрерывный оператор 4, 19
- неприводимое риманово пространство 4, 633
- нормальное число 3, 1071
- относительно компактное семейство распределений 4, 886
- отрицательное расслоение 4, 163, 433
- полное банахово пространство 1, 389
- положительное расслоение 4, 433
- почти периодическая функция 3, 1119
- равномерная полугруппа 5, 372
- разветвленное расширение 2, 203
-регулярный оператор 2, 774
- редуктивная полугруппа 4, 1100
- сервантная подгруппа 5, 880
- сопряженное пространство 2, 44
- эквивалентные представления 5, 943
Слабого типа оператор 2, 630
Слабое перемешивание 4, 243
Слабое решение дифференциального уравнения 4, 1207
- - - - стохастического 5, 244
- - эллиптического уравнения 3, 361
- условие конуса 2, 1076
Слабой заполненности свойство 4, 1153
- проективности условие 4, 1183
Слабосвязный граф 1, 1109
Слабый граф 1, 1109
- дифференциал 1, 895
Слабый относительный минимум 4, 1132, 1207
- суммирующий базис 1, 377
- счетный базис 1, 376
Слабый экстремум 1, 583; 4, 1208
Славянские цифры 4, 1208
Слагаемое 4, 1212
След 4, 1208
- алгебры Неймана 3, 921
След квадратной матрицы 4, 1208
След на C^*-алгебре 4, 1209
- - группе 5, 512
- регуляризованный 5, 908
- тензора 4, 1077
- функции 1, 723
Следа формула 3, 239, 240
Следов проблема 1, 725
Следование семантическое 4, 696
Следовая норма 5, 1031
Следствие логическое 3, 420
- формулы 1, 127
Слейтера условие в математической экономике 3, 585
- - регулярности в математическом программировании 3, 602
Слившееся двоеточие 2, 23
Слова сложность 1, 220
- - устойчивая 1, 222
Словарь 1, 1092; 3, 568; 5, 643
Слово 1, 819; 2, 1043; 4, 1209
-, вхождение 1, 772
- групповое 1, 1136
-, длина 4, 1082
- кодовое 2, 649
-, крыло 1, 772
-, неотделимость по инвариантам 1, 821
- несократимое 4, 1082
Словосочетание 4, 1182
Слоение 4, 1210—1212
-, бордизм 1, 534
-, Кнезера теорема 2, 884
Слой конический 2, 1074
Сложение 4, 1212
Сложение множеств 4, 1212
- ручек 4, 1060
- степенных рядов 5, 219
Сложная гипотеза 4, 1213; 5, 185
Сложная система 2, 853; 4, 1213
Сложная функция 4, 1214—1216
- -, производная 2, 272, 276
- цепь Маркова 3, 521
Сложное отношение 2, 27
- отображение 4, 153
- распределение Пуассона 4, 758
Сложности машин мера 1, 213
Сложность вычислений алгоритма 1, 210
- декодера 2, 933
- декодирования 2, 937
- дизъюнктивной нормальной формы 1, 563; 3, 716
- конечного объекта 1, 214
- конъюнктивной нормальной формы 1, 563
- кусков рекурсивно перечислимых множеств 1, 214
- машины 1, 213
- нормальной формы булевой функции 1, 559
- нумерованной модели 3, 1088
- объекта по Колмогорову 1, 220
- описания алгоритма 1, 213
- разрешения слова 1, 220
-релейно-контактной схемы 4, 969
- системы 4, 1214
- слова 1, 220
- - устойчивая 1, 222
- теста 5, 343
- универсального нормального алгорифма 5, 501
- управляющей системы 4, 1186
- формул 3, 715
- функционального элемента 5, 302
Слоистой выборки метод 3, 817
Слой 4, 893, 1161, 1210
- вихревой 1, 715
- геометрический 2, 431; 5, 299
- морфизма 2, 430; 5, 299
- пограничный 4, 356
- предметной области 5, 351
- расслоения 4, 1166
- симплициального объекта 4, 1168
- эллиптической поверхности 5, 984
Слойно конечная группа 1, 1144
Случайная булева функция 1, 1111
Случайная величина 1, 660; 5, 9
- -, абсолютный момент 1, 42
- - безгранично делимая 1, 397
- - гауссовская 1, 907
- -, математическое ожидание 3, 600
- -, независимость 1, 660
- - предельно постоянная 1, 524
- -, среднее значение 3, 600
- -, функция концентрации 2, 1101
- замена времени 5, 693
- квадратурная формула 3, 817
- мера предсказуемая 4, 1199
- ошибка 3, 847, 877; 4, 181, 183
Случайная последовательность 1, 663; 5, 10, 23
- среда 1, 57
Случайная функция 5, 10
- - времени 5, 22
- - с некоррелированными приращениями 5, 212
- -, спектральное разложение 5, 121
Случайного спуска метод 3, 603
Случайное блуждание 5, 12
- дерево 1, 1111
Случайное кодирование 2, 649; 5, 15
Случайное отображение 1, 1111; 5, 15
Случайное поле 5, 16
Случайное поле обобщенное 5, 17
Случайное поле однородное 5, 18
- - - изотропное 5, 19
Случайное событие 1, 666; 5, 19
- -, Бореля — Кантелли лемма 1, 539
- -, независимость 1, 658
- -, объединение 1, 658
- -, совмещение 1, 658
Случайные величины независимые 3, 914
- - слабо зависимые 3, 914
Случайные и псевдослучайные числа 5, 20
Случайные размещения 5, 21
Случайный вектор 5, 10
- граф 1, 1110
Случайный процесс 1, 663; 5, 22—27
- -, автоковариация 1, 45
- -, автокоррелограмма 1, 47
- -, автокорреляция 1, 47
- - векторный 5, 23
- - гармонизуемый 1, 871; 5, 124
Случайный процесс дифференцируемый 5, 27
- -, конечномерное распределение 5, 70
- -, корреляционная функция 3, 23
- - линейно регулярный 3, 320
- - - сингулярный 3, 321
- - многомерный 5, 23
Случайный процесс обновляющий 5, 28
Случайный процесс обобщенный 5, 17, 28
- - одномерный 5, 23
- - однородный во времени 5, 209
- - опциональный 4, 63
- - предсказуемый 4, 582
- - регулярный 4, 1195
- - с дискретным временем 5, 10, 23
- - с многомерным временем 5, 16
- - с многомерным параметром 5, 16
Случайный процесс с независимыми приращениями 5, 29
- - с непрерывным временем 5, 23
- - скользящего среднего 4, 1203
Случайный процесс со стационарными приращениями 5, 30
Случайный процесс согласованный 5, 31
- -, спектральная мера 3, 24
- -, спектральное разложение 5, 121
- -, статистические задачи 5, 171
- -, статистический анализ 5, 178
- - стационарный 5, 209
- - управляемый 5, 528
- - устойчивый 5, 557
Случайный точечный процесс 5, 31
Случайный точечный процесс с ограниченным последействием 5, 32
Случайный элемент 5, 32
- - параболический 5, 516
Случайных величин преобразование 5, 33
Случайных процессов интерполяция 5, 34
Случайных процессов прогнозирование 5, 34
Случайных процессов фильтрация 5, 35
- - экстраполяция 5, 34
Смежная точка граничного элемента 1, 1103
Смежности символ 4, 293
Смежные вершины 3, 749
- - гиперграфа 1, 1006
- - графа 1, 1105
- ребра графа 1, 1105
- стороны 3, 749
- углы 5, 467
Смежный интервал 2, 718
Смежный класс 5, 36
- - Ω-систем 1, 157
Смейла аксиома 1, 1135
- теорема в теории Морса 3, 825
Смешанная группа 5, 36
Смешанная задача 3, 83, 203, 606, 5, 36

Смешанная и краевая задачи для гиперболических уравнений и систем 5, 36
Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем 5, 40—44
- краевая задача 5, 36, 45
- область 5, 45
- поверхностная функция 5, 50
- стратегия 2, 332; 3, 865
- частная производная 2, 275
Смешанного типа уравнение 2, 299; 5, 44
Смешанное произведение векторов 1, 635; 5, 48
Смешанный дифференциальный параметр 2, 350
- многосторонний канал 2, 702
- момент 3, 791
- направляющий вектор 5, 51
- объем 5, 49
Смешанный процесс авторегрессии-скользящего среднего 5, 48
- семиинвариант 4, 1111
- спектр 5, 101
- тензор 5, 326
Смешанных объемов теория 5, 49
Смещение 4, 175; 5, 51, 408
- статистики 4, 867
Смещения форма 5, 251
Смещенная оценка 5, 51, 408
Смирнова класс 5, 52, 771
Смирнова критерий 5, 52
Смирнова область 5, 53
- статистика 4, 377
Смита нормальная форма матрицы 3, 1052
-теорема о действии группы 2, 69
Снедекора распределение 5, 54, 626
Снобол 5, 54
Сноса коэффициент 2, 361, 692
Снятия двойного отрицания закон 2, 25
Соабсолютные пространства 1, 32
Соболева класс 5, 55
Соболева обобщенная производная 5, 55
- основная теорема вложения 1, 724
Соболева пространство 5, 56
Собственная аффинная сфера 1, 358
- длина 4, 148
- подгруппа 4, 369
- связка окружностей 4, 1089
- - плоскостей 4, 1089
- триада 1, 1048
Собственная функция 3, 338; 5, 58
- - задачи Штурма — Лиувилля 5, 908
- - ядра 2, 591
- частота 1, 888; 5, 64
Собственно ортогональная алгебраическая группа 4, 83
- сходящаяся последовательность 5, 311
- эллиптический оператор 3, 362
Собственное вращение 1, 764
- время 4, 150
- движение 2, 20
Собственное значение 3, 338, 371; 5, 58
- - ведущее 4, 434
- - задачи Штурма — Лиувилля 5, 908
- - матрицы 3, 617; 5, 764
- - -, итерационные методы нахождения 2, 686
- -, минимаксное свойство 3, 681
- - оператора 5, 98
- - позитивное 4, 434, 435
- -, полная проблема 4, 417
- -, частичная проблема 5, 831
- ортогональное преобразование 4, 87
- подобие 4, 373
- подпространство оператора 5, 65
- поле экстремалей 5, 955
- преобразование Лоренца 3, 453
- распределение 1, 809
- число матрицы 5, 764
Собственные значения дифференциальных операторов; численные методы нахождения 5, 59
Собственные значения интегральных операторов; численные методы нахождения 5, 62
Собственные колебания 5, 64
Собственный вектор 3, 351, 371
- - матрицы 3, 617
- - обобщенный 5, 130
Собственный вектор оператора 5, 65
- - положительный 4, 435
Собственный морфизм 5, 65
- оператор 4, 241
- поворот кривой 2, 491
- подмодуль 4, 372
- пучок 4, 771
Событие 1, 666
-, алгебра 4, 943
- достоверное 2, 378
- невозможное 3, 906
-, независимость 1, 658; 3, 914
-, объединение 1, 658
-, представимое конечным автоматом 1, 54
- регулярное 4, 942
- рекуррентное 4, 955
- случайное 5, 19
-, совмещение 1, 658
-, частота 1, 656
- элементарное 1, 657, 661, 666; 5, 976
Совершенная группа 5, 66
Совершенная мера 3, 642; 5, 66
Совершенная нормальная форма 5, 67
- - - дизъюнктивная 1, 126, 563
- - - конъюнктивная 1, 126, 563
- упаковка 4, 395
Совершенно нормальное пространство 1, 475; 3, 1065; 5, 67
- $\varkappa$-нормальное пространство 3, 1065
- нормальный бикомпакт 1, 475
- полное локально выпуклое пространство 5, 383
Совершенное бикомпактное расширение 5, 67
- вероятностное пространство 1, 666
- замыкание поля 5, 70
Совершенное кольцо 5, 68
Совершенное множество 5, 68
- - канторово 2, 715, 718
Совершенное неприводимое отображение 5, 69
Совершенное отображение 2, 435; 4, 155; 5, 69
- паросочетание 5, 591
- покрытие 4, 395
Совершенное поле 5, 69
- разностное множество 4, 837
Совершенное число 5, 70
Совершенный дифференциальный идеал 2, 242
- код 2, 932; 4, 396
Совместимое множество 5, 280
Совместная математическая индукция 3, 565
- плотность распределения вероятностей 4, 323; 5, 70
- система линейных уравнений 3, 357
- функция распределения 5, 70
Совместное распределение 5, 70
Совместности оператор 3, 367
Совместность методов суммирования 5, 70, 273
Совместные диофантовы приближения 2, 163
Совместный инвариант системы форм 2, 541
- комитант 2, 980
Совмещение событий 1, 658
Совпадение 5, 71
Согласия критерий 5, 72
Согласованные меры 1, 882
- нормы 5, 314
Согласованные распределения 5, 72
Согласованный случайный процесс 5, 31
Содержание многочлена 4, 638
Содержательно непротиворечивая система 3, 998
Соединение 5, 72
Соизмеримые дискретные подгруппы 2, 199
Соизмеримые и несоизмеримые величины 5, 73
Соквадраты ортогональные 4, 90
Сокращение повторений 1, 920
Сокращенная нормальная форма 5, 73
- - - дизъюнктивная 1, 126
- - - конъюнктивная 1, 126
Солвмногообразие 4, 851; 5, 73
Соленоидальное поле 1, 650; 5, 74
Солитон 5, 74
Солнце 5, 851
Сонина интеграл 5, 75
- формула 1, 868
Сообщающиеся состояния цепи Маркова 3, 518
Сообщение, источник 2, 682
-, отрезок 2, 682
Сообщений квантование 5, 76
Сообщений скорость создания 5, 76
Сообщений точность воспроизведения 5, 76
Соответственные углы 5, 467
Соответствие 5, 77, 713
- взаимно однозначное 1, 690; 3, 760
- Галуа 1, 845, 849
Соответствие границ 5, 79
- изометрическое 2, 505
- Комбескюра 4, 280
- Петерсона 4, 279
- полярное 4, 480
- проективное 4, 681
Соответствия границ принцип 5, 79
Соотношение — см. соответствующее название
O-o-соотношения 4, 497
Соприкасающаяся квадрика 5, 79
- кривая 5, 81
Соприкасающаяся окружность 4, 250; 5, 79
Соприкасающаяся плоскость 2, 249; 5, 80
Соприкасающаяся сфера 5, 80
Соприкасающийся круг 5, 80
Соприкасающийся параболоид 2, 251; 5, 80
Соприкосновение 2, 248, 249; 5, 81
Сопровождающая матрица многочлена 3, 1054
Сопровождающий репер 4, 365
Сопряжение 5, 90
Сопряженная краевая задача 5, 84
Сопряженная матрица 5, 81
Сопряженная сеть 5, 81
- - чебышевская 4, 247
Сопряженная функция 5, 82
Сопряженное векторное пространство 1, 644
Сопряженное дифференциальное уравнение 5, 83
- краевое условие 5, 84
Сопряженное линейное преобразование 5, 85
- множество 1, 644
- представление 4, 591
Сопряженное пространство 3, 292, 377; 5, 86, 708
- ядро 5, 1044
- - Дирихле 2, 194
Сопряженные алгебраические числа 1, 196
- банаховы пространства 1, 387
Сопряженные гармонические функции 1, 266, 878; 5, 86
- гиперкомплексные числа 1, 1008
Сопряженные изотермические координаты 5, 87
- интегральные операторы 2, 605
- комплексные числа 2, 1008
Сопряженные направления 2, 252; 5, 87
- переменные 3, 173
- подгруппы 5, 91
- радиусы сходимости 5, 220
Сопряженные связности 5, 87
- функции, Привалова теорема 4, 630
Сопряженный кватернион 2, 838
Сопряженный класс функций 5, 87
- конус 4, 434
Сопряженный модуль 5, 88
Сопряженный оператор 5, 88
- - линейный 1, 645; 3, 373
Сопряженный тригонометрический ряд 5, 89
Сопряженный функтор 5, 89
Сопряженный элемент 5, 91
- - алгебры 4, 1148
Сопряженных градиентов метод 5, 91
Сопутствующая структура 5, 497
Сопутствующие переменные 2, 901
Составляющих грамматика 1, 1093
- дерево 4, 1182
Составная номограмма 3, 1046
Составное имя 2, 525
- число 4, 706
Составной идеал 5, 92
Состояние — см. соответствующее название
Состояний множество 1, 53
- уравнения 3, 480
Состоятельная логика Хоара 4, 653
Состоятельная оценка 4, 174; 5, 93
- последовательность оценок 5, 198
Состоятельный критерий 5, 93
Софизм 1, 292
Софокусные кривые 5, 95
Сохоцкого теорема об особых точках 5, 95
Сохоцкого формулы 3, 52, 53; 5, 96
Сохранение углов 2, 1092
Сохранения закон 2, 815
Сохранения области принцип 1, 266; 5, 97
- предиката класс 3, 717
Сочетание 2, 974; 5, 98
- с повторением 5, 98
Сочетания алгоритмов 1, 225
Сочетательность 1, 340
Сочетательный закон 1, 340
Сочленение кортежей 2, 642
Союзное интегральное уравнение 4, 1172
- ядро Фредгольма 5, 660
Союзные уравнения 5, 419
Союзный оператор 4, 1172
Спаривание 5, 98
- Зейферта 2, 451
- Куммера 3, 148
Спациальная точка 3, 1072
Спектр абсолютно непрерывный 5, 128
- алгебры 5, 747
Спектр C^*-алгебры 5, 100
Спектр в категории 5, 99
- вейлевский 5, 99
-, верхний предел 4, 686
Спектр динамической системы 5, 101
- дискретный 5, 101
- замыкания 5, 98
- квазидискретный 2, 805
Спектр кольца 5, 101
- комплекса 4, 393
- Лагранжа 3, 174, 515
- лебеговский 3, 218
- линейного оператора 3, 371
- - преобразования 5, 58
- локальный 5, 114
- максимальный 5, 102, 747
- Маркова 1, 948; 3, 514
Спектр матрицы 5, 102
- мощности 5, 212
- нелинейного оператора 3, 961
- непрерывный 3, 373; 5, 98, 101
-, нижний предел 4, 686
- обратный 4, 686; 5, 100
Спектр оператора 5, 98
- остаточный 3, 373; 5, 98
- почти периодической функции 5, 727
- предельный 5, 99
- проективный 4, 684; 5, 102
- проекционный 4, 686

Спектр пространств 3, 1122; **5**, 102
- прямой **5**, 99
- регрессии 4, 926
- сгущения **5**, 128
- симплициальный 4, 1167
- смещанный **5**, 101
- стационарного случайного процесса **5**, 124
- Тома **5**, 363
- точечный **3**, 373; **5**, 98
- функции **5**, 723
- - распределения **3**, 796
- характеристических показателей Ляпунова **3**, 472
Спектр элемента **5**, 100
- - алгебры **1**, 383
- энергетический **5**, 212
Спектральная мера 3, 486, **5**, 103, 124
- - случайного процесса **3**, 24
- - функции **3**, 531
- особенность **3**, 1008
Спектральная оценка максимальной энтропии 5, 103
Спектральная оценка параметрическая 5, 104
Спектральная плотность 5, 105, 212, 910
Спектральная последовательность 5, 106
- - Лере **3**, 235, **5**, 106
- - накрытия **2**, 908
- - Серра **3**, 235
- - Хохшильда — Серра **2**, 913
- теорема для нормальных линейных операторов **3**, 376
Спектральная теория дифференциальных операторов **5**, 108
Спектральная теория линейных операторов **5**, 114
- топология **2**, 444; **5**, 101
Спектральная функция 3, 1110; **4**, 814; **5**, 118, 212, 910
Спектральная функция стационарного случайного процесса **5**, 119, 212
Спектральное многообразие **5**, 114
Спектральное множество 5, 119
Спектральное окно 5, 119, 120
- подпространство **5**, 114
Спектральное разложение линейного оператора **5**, 120
Спектральное разложение случайной функции **5**, 121
Спектральной плотности оценка 5, 124
Спектральной функции оценка 5, 125
Спектральные гомологии 5, 126
- когомологии **5**, 861
Спектральный анализ 5, 127
Спектральный анализ стационарных случайных процессов **5**, 130
Спектральный оператор 5, 131
Спектральный радиус 1, 383, **5**, 131
Спектральный семиинвариант 5, 132
Спектральный синтез 1, 885; **5**, 132
- след оператора **5**, 1041
- тип максимальный **3**, 486
Спектральный тип меры **5**, 134
- функтор гипергомологий **1**, 1006
Спектровая группа гомологии **2**, 36
Спеньера двойственность **2**, 47
Специализация точки топологического пространства **5**, 134
Специализированное градиентное преобразование **1**, 1083
Специальная абелева функция **1**, 22
- алгебра Ли **3**, 244, 270
- группа Клиффорда **2**, 882; **5**, 138
- - Ли **3**, 271
- йорданова алгебра **2**, 693
- кватернионная структура **2**, 839
Специальная линейная группа 2, 866; **5**, 135, 412
- ортогональная алгебраическая группа **4**, 83
- проективная группа **4**, 416
- теория относительности **4**, 145
- унитарная группа **5**, 507
Специальное многообразие **2**, 839
- подпрямое произведение **4**, 379
- уравнение Риккати **4**, 986
Специальности индекс дивизора **1**, 151
Специальные гомологии и когомологии **1**, 234
Специальные функции 5, 136
Специальный автоморфизм 5, 137
- дивизор **1**, 145
Специальный поток 5, 137
- радикал **4**, 807
- ранг группы **4**, 861
- унитарный кобордизм **2**, 892
Спецификация вторичная **2**, 978
- первичная **2**, 978
Спивака расслоение **4**, 748
Спин 5, 137
Спинор 5, 138, 140
- Ван дер Вардена **2**, 176
- Дирака **2**, 175
-, расслоение **5**, 139
Спинорная группа 2, 882; **5**, 138
- компактная группа Ли **3**, 265
Спинорная структура 5, 139
Спинорное поле **4**, 475, **5**, 139
Спинорное представление 5, 140
- четырехмерное многообразие **5**, 861
Спин-репер, расслоение **5**, 139
Спирали 5, 141, см. также соответствующее название
Sici-спираль 5, 142
Спирическая кривая **4**, 277
Спирмена коэффициент ранговой корреляции 4, 864; **5**, 142
Сплайн 4, 604; **5**, 143
- интерполяционный **2**, 635
- кубический **4**, 604, **5**, 145
- локальный **4**, 606
- полиномиальный **4**, 604, **5**, 143
- эрмитов **4**, 606
L-сплайн **5**, 143
L_g-сплайн **5**, 143
Сплайн-аппроксимация 5, 143
Сплайн-интерполяция 5, 146
Сплетающий оператор 5, 147
Сплетение 5, 147, 484
- групп подстановок **4**, 383
Сплетения число 5, 148
Спорадическая группа Судзуки **5**, 149
Спорадическая простая группа 5, 148
Спроса отображение **3**, 587
- функция **3**, 587
Спрэд **3**, 835
Спрямления точка **5**, 149
Спрямляемая кривая 2, 364, **5**, 149
- ткань **5**, 356
Спрямляющая плоскость 5, 150
Спуск градиентный **1**, 593
Спуска метод 3, 490, 947; **5**, 150
- наискорейшего метод **3**, 882
Сравнение 5, 151
- алгебраическое **1**, 190
- двучленное **2**, 61
- множественное **3**, 760
Сравнение от нескольких переменных 5, 154
Сравнение по двойному модулю 5, 155
Сравнение по простому модулю 5, 156
Сравнение топологий 5, 157
- функций **4**, 497
Сравнения признак 5, 158
- - сходимости несобственного интеграла **3**, 1017
- принцип **5**, 158
- рядов признак **4**, 1064
Сравнения теорема в теории дифференциальных уравнений **5**, 158
- - Корауса для ортогональных многочленов **4**, 96
Сравнения теоремы в алгебраической геометрии **5**, 159
Сравнения функция 5, 160
Сравнимые симплексы **4**, 1165
Сращивания метод **3**, 501
Срединная поверхность **4**, 347
- - гладкая **3**, 1127
Срединное отклонение **1**, 655
Срединный диск **4**, 1058
Среднего значения формула для интеграла Стилтьеса **5**, 227
Среднее 5, 161
- Абеля **4**, 24
- арифметическое **1**, 325, **5**, 161
- вдоль траектории **1**, 495
- взвешенное **1**, 693; **5**, 161
- временное **1**, 495
- выборочное **1**, 776; **5**, 998
- гармоническое **1**, 890; **5**, 161
- геометрическое **1**, 940; **5**, 161
Среднее движение 5, 161
- зигелево **2**, 780
- значение гармонической функции **1**, 876
- - для почти периодических функций **4**, 546
- -, Коши теорема **3**, 63
- - случайной величины **3**, 600
- инвариантное **2**, 534
- квадратичное **2**, 784
- логарифмическое **3**, 410
- пропорциональное **1**, 940
- скользящее **3**, 756
- Чезаро **4**, 23
- ядро **3**, 460
Среднеквадратическое приближение 4, 605; **5**, 162
Среднестепенное приближение **4**, 603, 605
Средних арифметических метод суммирования 5, 162
Средних потоков метод **4**, 251
Средняя абсолютная линейная регрессия **3**, 309
- вероятность ошибочного декодирования **4**, 185
- квадратическая регрессия **4**, 930
- - - линейная **3**, 309
Средняя кривизна 2, 253, 785; **3**, 97; **5**, 163
Средняя линия 5, 163
- - трапеции **5**, 428
- модульная линейная регрессия **3**, 309
- огибающая **5**, 923
- поверхность конгруэнции **2**, 1015
- порядковая статистика **4**, 500
- разность Джини **2**, 112
Срез, теорема **2**, 69
Срезанный узел **5**, 482, 487
Срыва точка **2**, 342; **3**, 501; **4**, 967
- явления **2**, 342
Стабилизатор 2, 521, **3**, 260, **5**, 163
- множества **4**, 383
Стабилизации операция **5**, 780
Стабилизирующий функционал **3**, 933
Стабильная гомотопическая группа 5, 163
- - - сфер **1**, 1067; **5**, 283
- когомотопическая операция **2**, 921
- когомотопическая группа **2**, 927
- размерность **2**, 927
- специальная линейная группа **5**, 135
Стабильное векторное алгебраическое расслоение **1**, 638
- композиционное умножение **5**, 284
Стабильности теоремы в алгебраической K-теории **5**, 164
Стабильные и нестабильные теории 5, 164, 165
Стабильный ранг 5, 166
Стандартизации и унификации математические задачи 5, 166
Стандартная диаграмма Юнга **5**, 1027
Стандартная конструкция 5, 167, 447
- нить **5**, 373
- параболическая подалгебра **4**, 192
- плоская G-структура **5**, 250
- - Г-структура **4**, 732
Стандартная программа 5, 167
- система Постникова **4**, 516
Стандартного действия принцип **1**, 856
Стандартное квадратичное преобразование **3**, 94
Стандартное отклонение 2, 782; **5**, 168
- тождество **1**, 120
Стандартный идеал **2**, 483
- класс **3**, 1087
- марковский процесс **3**, 526
Стандартный симплекс 5, 168
- фунтик **5**, 168
Старший вектор **4**, 590, 596
- -, Картана теорема **2**, 738
- вес **4**, 590, 596
- - неприводимого рационального представления **4**, 921
- характеристический показатель Ляпунова **3**, 472
Статика 5, 169
Статистика 5, 169
- Бозе **1**, 514
- Бозе — Эйнштейна **1**, 514
- Больцмана **1**, 520
- достаточная **2**, 375, 661; **4**, 176
- инвариантная **2**, 531
- информационная **2**, 658
- исчерпывающая **4**, 176
- критерия **5**, 182
- математическая **3**, 576
- необходимая **2**, 376
- неэффективная **3**, 1031
- Пирсона **5**, 784
- подобная **4**, 377
- полная **2**, 376
- порядковая **4**, 498
- ранговая **4**, 863
- Реньи **4**, 973
- Смирнова **4**, 377
- стьюдентизированная **5**, 261
- тестовая **5**, 346
- Ферми — Дирака **5**, 608
Статистическая гипотеза 5, 170, 185
- зависимость **5**, 238
Статистическая игра 5, 170
- независимость **3**, 914
Статистическая оценка 4, 173; **5**, 170
- процедура инвариантная **2**, 536
- -, минимаксность **3**, 682
- -, риск **4**, 1033
- -, эффективность **5**, 1027
Статистическая сумма 1, 957; **5**, 170
- - большая **5**, 179
- - малая **5**, 179
Статистическая эргодическая теорема 1, 495, **3**, 927; **4**, 24; **5**, 171
Статистические задачи теории случайных процессов **5**, 171
Статистический анализ многомерный **3**, 732
Статистический анализ случайных процессов 5, 178
Статистический ансамбль 5, 178
- - Гиббса **1**, 958
- вес **1**, 514, 956
- интеграл **5**, 171
Статистический контроль качества 5, 180
Статистический критерий 5, 182
- -, мощность **3**, 838; **5**, 186
- метод **3**, 576
Статистический приемочный контроль 5, 183
Статистических гипотез проверка 5, 185
Статистических испытаний метод 3, 815; **5**, 189
Статистических решений теория 5, 191
Статистическое моделирование 5, 193
Статистическое оценивание 5, 195
- решающее правило **4**, 979
Статистической механики математические задачи 5, 198
Статистической физики математические задачи 5, 204
Статическая задача **2**, 677
Стационарная гомотопическая группа сфер **1**, 1067
- двойственность **2**, 47
- когомологическая операция **2**, 921

- мера 5, 208
- оптимальная стратегия 5, 238
Стационарная подгруппа 2, 521; 5, 163, 207
- связь 1, 1033
- случайная среда 1, 57
- стратегия 5, 529
- точка 4, 784; 5, 208
Стационарного действия вариационный принцип 1, 600
- - - - Лагранжа 1, 602
- - - - Якоби 1, 602
- - принцип 3, 173; 5, 1049
Стационарное множество 5, 279
Стационарное распределение 5, 207
Стационарной фазы метод 5, 208
Стационарный адиабатический инвариант 1, 97
- источник сообщений 2, 682
- марковский процесс 3, 529
Стационарный случайный процесс 5, 209—214
- - - в узком смысле 5, 210
- - - в широком смысле 5, 210
- - - метрически транзитивный 5, 211
- - - обобщенный 5, 213
- - -, спектр 5, 124
- - -, спектральная функция 5, 119
- - -, спектральный анализ 5, 130
Стейнберга группа 1, 162
Стеклова проблемы в теории ортогональных многочленов 5, 214
Стеклова функция 5, 215
Степанова почти периодические функции 5, 216
- расстояние 3, 1119
- теорема об аппроксимативной дифференцируемости функции 1, 302
Степени аксиома 1, 106
- задача 2, 330
Степенная дилатация 5, 119
- сумма 4, 1145
Степенная функция 5, 216
Степенной вычет 1, 814; 5, 217
- -, Виноградова гипотеза о распределении 1, 700
- -, распределение 4, 883
Степенной ряд 5, 218—221
- -, Абеля теорема 1, 28, 29
- - алгебраический 3, 1035
- - асимптотический 1, 335
- -, интервал сходимости 2, 615
- -, Коши — Адамара теорема 3, 65
- - кратный 5, 220
- -, круг сходимости 1, 29, 3, 118
- - лакунарный 3, 185
- -, радиус сходимости 1, 29
- - формальный 5, 642
Степень 5, 221
- алгебраического сравнения 1, 190
- - уравнения 1, 191
- - числа 1, 195
- бинарной формы 1, 487
- Брауэра 5, 222
- вершины гиперграфа 1, 1006
- - графа 1, 1106
- вычетов 2, 203
- гиперповерхности 1, 1009
- дивизора 1, 144; 2, 132, 3, 648
- инверсии 2, 544
- коварианта 2, 896
- локальная 5, 222
- многочлена 3, 753; 5, 797
- невычислимости 3, 1003
- непрерывного отображения 5, 221
- неразрешимости 3, 1002
- несепарабельности 4, 1114
- однородного оператора 3, 1181
- одночлена 3, 1184
Степень отображения 5, 221
- подмногообразия 3, 159
- поляризации 4, 477
- Понтрягина 4, 484
- пучка 4, 772, 773
- расширения 4, 909
- - поля 1, 850
- ребра гиперграфа 1, 1006
- свободы в механике 1, 1033
- сепарабельная 4, 1114
- сети сфер 4, 1123
- табличная 5, 317
- тензорная 5, 331
Степень точки 5, 222
- трансцендентности 3, 650; 5, 426
- тьюрингова 1, 219, 3, 1003
- характера Дирихле 2, 192
tt-степень 5, 317
T-степень 1, 219, 3, 1003
Стерадиан 5, 222
Стереографическая проекция 5, 222
Стереоэдр 5, 223
Стермера метод 5, 902
Стесненно замкнутое дифференциальное поле 4, 901
Стесненное расширение 4, 901
Стефана задача 2, 1064; 5, 224
Стефана обратная задача 5, 224
Стефана условие 5, 225
Стефана — Больцмана закон 5, 225
Стеффенсена интерполяционная формула 5, 225
Стилтьеса интеграл 2, 565, 5, 226
- интегральная сумма 5, 226
Стилтьеса преобразование 5, 227
Стинрода алгебра 5, 228
Стинрода двойственность 5, 228
Стинрода задача 5, 228
Стинрода квадрат 5, 229
Стинрода операция 5, 230
Стинрода приведенная степень 5, 230
Стинрода — Эйленберга аксиомы 5, 231
Стирание особенностей 5, 232
- - гармонических функций 1, 877
Стирлинга интерполяционная формула 5, 232
- ряд 1, 867
- - интерполяционный 2, 634
Стирлинга формула 5, 232
- число 2, 976; 4, 830
Стоилова теорема о внутреннем отображении 1, 735
Стоимость кодирования 2, 935, 939
Сток векторного поля 2, 682
Стокса линия 1, 717, 5, 941
Стокса теорема 5, 232
Стокса формула 5, 233
Стокса явление 5, 233, 940
Столбцевой ранг 4, 858
Столкновений линеаризованный оператор 1, 518
Столлингса теорема о группах когомологий 2, 910
- - - свободных группах 1, 1055
- - об изотопии 2, 520
Стонга теорема о кобордизмах 2, 891
Стонга — Хаттори теорема о гомоморфизмах 4, 492
Сторона многоугольника 3, 749
- угла 5, 467
Стоуна алгебра 5, 234
Стоуна пространство 5, 233
Стоуна решетка 5, 234
- теорема о булевых алгебрах 1, 552
- - - локально конечном покрытии 3, 433
- - - паракомпактности 3, 673
- - - спектральном разложении 5, 121
Стоуна — Архангельского критерий метризуемости 3, 656, 673
Стоуна — Вейерштрасса алгебра 1, 884
- - теорема о C^*-алгебрах 1, 120
Стоуна — Чеха бикомпактное расширение 5, 234
- - пространство близости 1, 501
Стоуновский бикомпакт 1, 552
Стохастическая аппроксимация 5, 235
Стохастическая геометрия 5, 236—238
Стохастическая зависимость 5, 238
- задача 2, 677
Стохастическая игра 5, 238
Стохастическая матрица 3, 616; 4, 261; 5, 238
- независимость 3, 914
Стохастическая непрерывность 5, 239
Стохастическая неразличимость 5, 240
Стохастическая ограниченность 5, 240
Стохастическая последовательность 5, 240
- стабилизация оптимальная 4, 45
Стохастическая сходимость 5, 240
- фильтрация 4, 45
- функция Ляпунова 3, 468
Стохастическая эквивалентность 5, 240
Стохастически устойчивый характеристический показатель 5, 581
Стохастический базис 5, 240
Стохастический вычислительный алгоритм 5, 241
Стохастический дифференциал 5, 241
Стохастический интеграл 5, 242
Стохастический интервал 5, 243
Стохастический процесс 5, 22, 240, 243
Стохастическое дифференциальное уравнение 2, 362, 5, 243—245
- оптимальное управление 4, 40, 45
Стохастическое программирование 2, 678; 3, 602; 5, 245
- ядро 4, 273
Странный аттрактор 5, 246
Страт аналитического множества 1, 280
Стратегическая игра 2, 470
Стратегия 5, 529, 531
- абсолютно оптимальная 4, 34
Стратегия в теории игр 2, 329, 469; 5, 247
- естественная 5, 531
- марковская 5, 529, 531
- наказания 2, 478
- оптимальная 5, 529, 532
- - гарантирующая 4, 34
- - ε-оптимальная 5, 529, 532
- поведения 4, 387
- смешанная 2, 332; 3, 865
- стационарная 5, 529
- - оптимальная 5, 238
- чистая 4, 386
- элементарная 2, 143
Стратификация 1, 107, 5, 247
- аналитического множества 1, 280
Стрелка Пирса 4, 287
Стрельбы метод 4, 640; 5, 247
Стрикционная линия 3, 380
- точка 3, 380
Строгая импликация 5, 247
Строгая эргодичность 5, 247
Строгий деформационный ретракт 2, 102
- индуктивный предел 3, 428
- максимум 3, 494
- минимум 3, 494
- порядок 4, 505
- факторобъект 5, 596
H-строгий частично упорядоченный группоид 5, 527
Строго возрастающая последовательность 1, 749
- - функция 1, 749
- выпуклая норма 3, 868
- - функция 1, 793
- гензелево кольцо 1, 918
- гиперболическая система 3, 326
- изолированная подгруппа 5, 522
- контактное преобразование 2, 1063
- коэрцитивная форма 3, 71
- локальное гензелево кольцо 1, 918
- марковский процесс 3, 525
- марковское свойство 3, 525, 529
- монотонная функция 3, 813
- наследственный радикал 4, 806
- нормированное банахово пространство 1, 389
- плоский морфизм 4, 318
- позитивная последовательность 4, 385
- псевдовыпуклая область 1, 1031
- *p*-псевдовыпуклая функция 4, 728
- разрешимая игра 1, 433
- регулярное кольцо 4, 940
- симплектическое пространство 4, 1158
- транзитивная группа 5, 411
- убывающая последовательность 5, 466
- - функция 5, 466
- устойчивое распределение 5, 557
- функционально полная универсальная алгебра 5, 498
- ядерный оператор 5, 1038
Строгое предпочтение 4, 399
- представление множества 2, 689
- расширение 4, 908
- условие трансверсальности 1, 1135
Строгой импликации исчисление 5, 247
pl-строение 3, 153
Г-строение 3, 743
Стронга — Хаттори теорема о гомоморфизмах 5, 868
Строфоида 5, 248
Строчный ранг 4, 858
Струве функция 5, 248
Структура 4, 980; 5, 249
- аналитическая 2, 355
- банахова 1, 384
- близостная 1, 500
- Брауэра 1, 546
- векторная 1, 636
- гамильтонова 4, 1156
- гладкая 2, 355
- дедекиндова 2, 63
- дистрибутивная 2, 230
- дифференциальная 2, 355
- дифференциально-геометрическая 2, 267
-, единица 2, 400
- изометрическая 5, 482
- интегрируемая 3, 745
- инфинитезимальная 2, 267, 645
- кватернионная 2, 839
- кибернетической системы 2, 851
- коалиционная 5, 561
- комплексная 2, 355, 1005
- комплексно аналитическая 2, 355
- контактная 2, 1060
- конформная 2, 1089
- Крипке 3, 765
- локально выпуклая 3, 427
- метризуемая 4, 795
- модулярная 2, 63; 3, 786
- мозаичная 1, 50
- на многообразии 3, 745; 5, 249
- Неймана 3, 925
- однородная 1, 50
- полная 4, 421
- полумодулярная 4, 456
- почти гамильтонова 4, 1156
- - комплексная 4, 541
- - кэлерова 5, 1021
- - симплектическая 4, 548
- - эрмитова 5, 1021
- псевдогрупповая 4, 732
- Шфаффа 4, 774
- равномерная 4, 794
- регулярная 4, 937
- симплектическая 1, 860; 4, 548, 1156
- синтаксическая 4, 1182
- сопутствующая 5, 497
- спинорная 5, 139
- топологическая 5, 374, 388
- флаговая 5, 628
- Хефлигера 5, 782
- Ходжа 5, 788
- эрмитова 5, 1020
C^k-структура 2, 355
G-структура 2, 267, 645
***G*-структура** на многообразии 5, 250—253
(*B*, φ)-структура 5, 253
pl-структура 4, 412
Г-структура 4, 732
Структурная группа 4, 1034

Структурная константа алгебры 2, 1022; 5, 254
Структурная лингвистика 5, 254
- семантика 5, 255
- серия 2, 889; 5, 253
- форма геометрического объекта 1, 935
- - представления группы Ли 1, 935
- формула 2, 587
- функция 5, 252
Структурно упорядоченная группа 5, 255
- упорядоченное кольцо 5, 526
- устойчивая система 1, 1134
Структурное правило 1, 919, 921
Структурное пространство 4, 638; 5, 256
- расслоение 4, 733
- свойство функции 1, 261
Структурные уравнения аффинной связности 1, 356
- - Картана 2, 736
- - связности 4, 1095
Структурный автомат 1, 53
Структурный изоморфизм 5, 256
- пучок 5, 101
- - окольцованного пространства 4, 14
- - схемы 5, 299
- тензор 5, 327
Струхаля число 5, 256
Струя 4, 126; 5, 257
k-струя карты 2, 730
Ступенчатая семантическая система 5, 257
Ступенчатое построение исчисления 2, 685
Ступень разрешимости группы 4, 850
Стьюарта метод 2, 687
Стьюдента критерий 5, 258—260
- отношение 4, 179
Стьюдента распределение 5, 260
Стьюдентизированная статистика 5, 261
Стьюдентизированный размах 5, 261
Стэнтона число 5, 261
Стягивание 2, 675
- алгебры 2, 108
- - Ли 4, 1125
- аналитического множества 2, 673; 3, 770
- комплексного пространства 2, 674
- подмногообразия 2, 675
- ребра графа 1, 1107
- элементарное полиэдральное 4, 411
Стягивающий морфизм 2, 1002
Стянутая надстройка 3, 862
Стянутый конус отображения 2, 1033
Субабнормальная подгруппа 1, 32
Субгармоническая функция 2, 280; 5, 262—265
- - обобщенная 1, 671
Субгармонические колебания 1, 786
Субдифференциал 5, 265
Сублагранжева плоскость 5,519
Субмарковская переходная функция 4, 259
Субмартингал 3, 532; 4, 459
Субмерсия 5, 265
Субнормальная подгруппа 5, 266
- система подгрупп 4, 368
Субнормальный ряд группы 3, 1076, 5, 266
- - подгрупп 4, 367
Субпараболическая функция 5, 266
Субпроективное пространство 5, 266
Субрасслоение 2, 755
Субрегулярный унипотентный элемент 5, 506
Субституента 1, 223
Субтепловая функция 5, 266
Судзуки группа 5, 149, 268
Судзуки 2-группа 5, 268
Судзуки спорадическая группа 5, 269
Суждение 5, 269
-, реализация 2, 1047
Сужение оператора 4, 19
- отображения 4, 153
Сужение представления 5, 269
- функции 5, 715
Сукцедент 4, 1104, 1105
Сукцедентное правило 1, 921
Сумма 4, 1212
- бесконечная 4, 1063
- Бляшке 4, 1213
- Валле Пуссена 1, 575
- вдоль подпространства 4, 1213
- Вейля 1, 630; 5, 436
- векторная 4, 1212
- векторов 1, 632
- Гаусса 1, 901
- - для характеров 2, 193
- групп подстановок 4, 383
- Дарбу 2, 16
- дизъюнктная 2, 135
- идеалов 2, 482
- инверсная 4, 1213
- интегральная 2, 578; 4, 992
- кардинальная 5, 525
- кардинальных чисел 2, 723
- квадратурная 2, 793
- комплексных чисел 2, 1008
- линейных преобразований 3, 351
- матриц 3, 613
- Минковского 4, 1212
- операторов 4, 21
- ординальная 5, 525
- повторного ряда 4, 350
- подпрямая 4, 379
- прямая 4, 722
- Рамануджана 4, 856
- рациональных чисел 4, 922
- ряда 4, 1063; 5, 270
- - частичная 4, 1063, 1068
- связная 4, 1092
- статистическая 1, 957; 5, 170
- степенная 4, 1145
- степенного ряда 5, 218
- тригонометрическая 5, 435
- упорядоченная 5, 525
- Фейера 5, 601
- чисел 2, 73, 76, 77
p-сумма Файри 4, 1213
Суммарный индекс задачи линейного сопряжения 1, 1097
Сумматорная функция 5, 269
Суммирование 5, 270
- по частям 1, 27
Суммирование расходящихся рядов 5, 270
Суммирование рядов Фурье 5,271
Суммирования базис 1, 392
- метод Абеля 1, 27
- - Абеля — Пуассона 1, 31
- - абсолютно регулярный 1, 37
- - Бернштейна — Рогозинского 1, 431
- - Бореля 1, 537
- - Валле Пуссена 1, 573
- -, включение 1, 717
- - Вороного 1, 755
- - вполне регулярный 4, 944
- - Гельдера 1, 913
- - Гронуолла 1, 1132
- - конечнострочный 2, 1025
- - Ламберта 3, 186
- - Лебега 3, 213
- - Линделёфа 3, 286
- - линейный 3, 369
- - логарифмический 3, 410
- -, Мазура — Орлича — Брудно теорема 1, 718
- - матричный 3, 621
- - Миттаг-Леффлера 3, 705
- - Нерлунда 1, 755
- -, равносильность 1, 718
- - Кнопфа 2, 886
- -, Кнопфа — Лоренца теорема 1, 37
- - полунепрерывный 4, 460
- - Пуассона 4, 756
- -, регулярности признак 4, 943
- - Римана 4, 995; 5, 440
- - Рисса 4, 1035
- -, совместность 5, 70
- - средних арифметических 5, 162
- -, транслятивность 5, 417
- - треугольный 5, 429
- - Фейера 5, 600
- - Хаусдорфа 5, 778
- - Чезаро 5, 852
- - Эйлера 5, 927
- - Эйлера — Кнопфа 2, 886; 5, 927
- -, ядро 5, 1043
Суммирования методы 5, 272—275
- - консервативные 4, 944
- - перманентные 4, 944
- - равносильные 4, 800
- - регулярные 4, 944
- формула Пуассона 4, 763
- - - обобщенная 1, 883
Суммируемая полугруппа 4, 448
Суммируемая функция 2, 14; 3, 210; 5, 275
Суммируемости множители 5,275
Суммируемости поле 5, 275
Суммируемость абсолютная 1, 36
- безусловная 1, 401
Суммируемость сильная 5, 275
Суммируемый по Эйлеру ряд 5, 929
Суммирующий базис 1, 377
Суммы аксиома 1, 106
Суммы рангов критерий 5, 276
Супералгебра 5, 276
Супергармоническая функция 1, 890; 2, 280; 4, 533; 5, 277
- - обобщенная 1, 671
Супергруппа 5, 277
Суперинтуиционистское пропозициональное исчисление 4, 699
Суперконструктивное пропозициональное исчисление 4, 699
Супермартингал 3, 532; 4, 459
Супермногообразие 5, 278
Суперобласть 5, 278
Суперпараболическая функция 5, 278
Суперпозиции метод 3, 816
- оператор 3, 959; 4, 960
Суперпозиция 3, 714; 4, 153
- автоматов 1, 69
Суперпозиция функций 1, 820; 2, 1013; 4, 1214, 5, 278, 715
Суперпространство 5, 279
Суперсингулярная поверхность 4, 342
Суперсингулярная эллиптическая кривая 5, 981
Супертепловая функция 5, 278
Суперэффективная оценка 4, 1078
Суслина гипотеза 1, 108; 5, 279, 280
- континуум 5, 280
Суслина критерий 5, 280, 281
- - для борелевских множеств 1, 535
Суслина проблема 5, 280
- - о бикомпактах 3, 834
- - о порядковых типах 4, 503
- свойство 1, 475
Суслина теорема в дескриптивной теории множеств 5, 281
Суслина условие 5, 279, 281
- число 3, 834, 5, 281
Суслинское множество 2, 93; 3, 455
Сушкевича постулаты 2, 803
Существенная выборка 3, 817
Существенная самосопряженность оператора 4, 907
- совокупность переменных 1,558
- функция 3, 718
Существенно некорректная задача 3, 932
- нелинейная система 3, 957
- нелинейное уравнение 3, 951
Существенно неразрешимая теория 5, 281
Существенно особая точка 1, 253, 264; 4, 115, 117; 5, 282
- самосопряженный дифференциальный оператор 5, 108
Существенное нормирование поля 2, 129
Существенное отображение 4, 823; 5, 283
- расширение 4, 908
- состояние цепи Маркова 3, 518
Существенный подмодуль 4, 372
Существования квантор 2, 837; 5, 283
Сфер гомотопические группы 5, 283—287
Сфера 5, 287
- Александера 2, 137
- аффинная 1, 358
- Бендиксона 1, 412
- бесконечномерная 5, 289
- в геометрии Лобачевского 3, 399
- в пространстве Римана 4, 991
- гомологическая 4, 748
- дикая 2, 137
- заузленная 2, 445
- Кервера 2, 380
- Ляпунова 3, 467
- Милнора 2, 380, 3, 679
- подошвенная 4, 1058
- предельная 5, 288
- приклеивающая 4, 1058
- Пуанкаре 4, 749
-, пучок 4, 772
-, радиус 4, 808
- Римана 4, 995
- с ручками 2, 52
-, связка 4, 1090
- секущая 4, 1058
-, сеть 4, 1123
-, соприкасающаяся 5, 80
-, теорема 2, 90
- топологическая 5, 288
- шварцшильдовская 5, 890
- экзотическая 5, 288
Сферическая гармоника 5, 289
Сферическая геометрия 5, 290
Сферическая индикатриса 5, 291
- метрика 4, 910
- перестройка 4, 258, 1058
- производная 3, 1069; 4, 568
- пространственная форма 4, 709
- симметризация 4, 1137
- теорема Пифагора 5, 292
Сферическая тригонометрия 5, 292
- функция 4, 591, 598
- - Бесселя 5, 822
- - зональная 2, 468
K-сферическая функция 5, 511
Сферические координаты 5, 293
- многочлены 3, 228
Сферические функции 5, 293
Сферический двуугольник 2, 59; 5, 290
- избыток 2, 491; 5, 291
- образ 5, 296
- тензор деформаций 2, 102
- - напряжений 3, 891
- треугольник 5, 290
- элемент 4, 279
Сферических гармоник метод 4, 249; 5, 294—296
Сферическое изображение 5,296
- нормальное расслоение 4, 748
Сферическое отображение 5, 296—298
- расстояние 4, 996
Схема 5, 299
- абелева 1, 22
- аддитивная 4, 912
- аксиом 1, 102
- арбитражная 1, 312
- асимптотически устойчивая 4, 846
- аффинная 1, 358
- Бернулли 1, 424
-, бирациональная эквивалентность 1, 494
- Брауэра — Севери 1, 547
- вариационная разностная 4,831
- версальная 2, 105
- Витта 1, 710
- Гильберта 1, 971
- гладкая 1, 1020
-, гомотопическая группа 1, 1075
- Гореншейна 1, 1077
- грамматики 1, 1092
- грубая 3, 772
- групповая 1, 1146
- группы 1, 1146
- Даниеля 2, 14
- двухфакторная 2, 219
-, деформация 2, 105
- Джекобсона 2, 109
- из пороговых элементов 5, 302
Схема из функциональных элементов 5, 301
- квазиаффинная 2, 800

- квазипроективная 2, 819
-, когомологическая размерность 2, 925
- комплекса 2, 996; 3, 152
- конечная групповая 2, 1018
- контактная 2, 1061
- Коэна — Маколея 3, 69
- Крипке 2, 643
- локально одномерная 4, 911
- мажорантная 1, 996
- Мало 2, 724
- машины Тьюринга 5, 456
- нормальная 3, 1051
- нормального алгорифма 3, 1072
- операторная 4, 650
-, особая точка 1, 1020
- Пикара 4, 284
-, подъем 2, 105
- приведенная 4, 631
- программы 4, 650, 655
- - с памятью 4, 650
- проективная 4, 673
-, простая точка 1, 1020
- Пуассона 4, 759
- разностная 4, 836, 843; 5, 995
- Рауса 4, 913
- регулярная 4, 937, 5, 299
- рекурсивная 1, 230
- рекурсивной программы 4, 650
- релейно-контактная 4, 968
- связности 1, 505
- симплициальная 4, 1159
- тонкая 3, 772
- трансверсальная 5, 412
- универсальная 2, 105
- управляющей системы 5, 534
- урновая 5, 544
- Фано 5, 598
- формальная 2, 106
- Чжоу 5, 862
- Эйткена 5, 942
- Янова 1, 230; 4, 652

ВІВ-схема 1, 505
-, система Штейнера 1, 506
k-схема конечного типа 5, 299
РВІВ (*m*)-схема 1, 505
S-схема 5, 299
- аффинная 1, 363
t-схема 5, 318

Схемная вязкость 5, 303
Схемы серий 4, 1118; 5, 304
Сходимости абсцисса 2, 183
- аксиома гармонического пространства 1, 889
- интервал 5, 221
- круг 3, 118; 5, 218
- множество 5, 218

Сходимости множители 5, 304
- область 5, 220
- поликруг 5, 220
- полуплоскость 2, 183
- почти всюду система 4, 103
- признак Бертрана 1, 433
- прямая 2, 183
- радиус 5, 218
- свойство Брауэра 4, 532
- - Брело 4, 532
- - Дарбу 4, 532

Сходимости скорость, 5, 304
Сходимости ускорение 5, 305
Сходимость 5, 305—311
- Абеля признак 1, 28
- безусловная 1, 401; 5, 549
- в смысле среднего квадратичного 5, 309
- в среднем 5, 309

Сходимость в среднем порядка 5, 309, 311
-, Гаусса признак 1, 899
-, Гильберта — Шмидта теорема 1, 977
-, Д'Аламбера признак 2, 9
-, Дедекинда признак 2, 63
-, Дини признак 2, 156
-, Дини — Липшица признак 2, 156
-, Дирихле признак 2, 181

Сходимость дискретная 5, 311
-, Дюбуа-Реймона признак 2, 394
-, Егорова теорема 2, 400
-, Ермакова признак 2, 407
-, Жордана признак 2, 421
- квазиравномерная 2, 819
-, Лейбница теорема 2, 464

Сходимость мер 5, 312
- несобственного интеграла 3, 58
- - -, признак сравнения 3, 1017
- нормальная 3, 1051
- относительно равномерная 4, 1037

Сходимость по вариации 4, 886; 5, 312, 313

Сходимость по вероятности 5, 313

Сходимость по мере 5, 309, 313
Сходимость по норме 5, 313
Сходимость по распределению 5, 313
- порядковая 4, 470, 1037
- поточечная 4, 540

Сходимость почти всюду 5, 309, 313, 314

Сходимость почти наверное 5, 313
- равномерная 4, 787
- -, Вейерштрасса признак 1, 615

Сходимость распределений 4, 885; 5, 314
- ряда, Валле Пуссена признак 1, 574
- -, интегральный признак 4, 1065
- -, Коши критерий 3, 57
- -, Коши признак 3, 61
- -, Куммера признак 3, 147

Сходимость с вероятностью единица 5, 310, 313, 314
- с регулятором 4, 1037
- сильная 5, 309
- слабая 5, 309, 312, 313
- стохастическая 5, 240
- узкая 5, 313
- условная 5, 549
- функционалов слабая 3, 1104
- числового ряда, Раабе признак 4, 781
- числовой последовательности, Коши критерий 3, 56
- широкая 5, 313

v-сходимость 4, 1037
τ-сходимость 4, 1037
Сходные секвенции 1, 921
Сходящаяся нить 1, 33
- обобщенная последовательность 5, 307
- по мере последовательность функций 5, 309
- последовательность 4, 507; 5, 306
- - функций 5, 309
- почти всюду последовательность функций 5, 309
- цепная дробь 5, 813
- числовая последовательность 5, 307

Сходящееся бесконечное произведение 1, 444
Сходящийся двойной ряд 2, 29
- итерационный алгоритм 2, 690
- повторный ряд 4, 350
- ряд 4, 1063, 1068, 1069
- - числовой 5, 307
- цикл 1, 829

Счетная компактность 2, 994; 5, 392
Счетно компактное пространство 1, 473; 4, 393
- непрерывный оператор 3, 993

Счетноаддитивная функция 3, 636; 5, 314
Счетного типа базис 1, 376

Счетное множество 3, 837, 5, 314
Счетной суммы аксиома в теории размерности 4, 824

Счетнокомпактное пространство 5, 314

Счетномерное пространство 5, 314

Счетнонормированное пространство 5, 314
Счетности аксиома вторая 1, 769
- - первая 4, 234
- антицепей условие 5, 280

Счетный базис 1, 376

Счисление 5, 314
- двоичная система 2, 23
-, десятичная система 2, 98
-, непозиционная система 5, 315
-, позиционная система 5, 315

Сэндвич-матрица 4, 1034

Сюръективное отображение 5, 316, 714

Сюръекция 5, 316

T

Таблица — см. соответствующее название
Табличная промежуточная логика 4, 696

Табличная сводимость 4, 958; 5, 317
- степень 5, 317

Тавтология 3, 1147; 5, 317
Тайхмюллера отображение 5, 317

Тайхмюллера пространство 4, 1031; 5, 317, 680
Таксономии задача 4, 872

Тактическая конфигурация 5, 318
τ-тактная релейно-контактная схема 4, 969
Тактовый момент 1, 52

Тамагавы мера 5, 319

Тамагавы число 3, 378; 5, 319
Танаки — Артина проблема 2, 886; 3, 302
Танаки — Крейна теорема двойственности 4, 482

Тангенс 5, 320

Тангенс амплитуды 5, 320

Тангенс гиперболический 1, 991; 5, 320

Тангенсов формула 5, 320

Тангенсоида 5, 321
Тангенциальное уравнение 5, 321

Тангенциальные координаты 5, 321
Тарского рекурсивная формула 1, 235
- система 3, 413
- теорема о кардинальных числах 2, 724
- - о языке формальной арифметики 3, 414

Тарского — Лося теорема о Ω-системах 1, 159
Тауберова теорема Винера 1, 696
- типа теоремы 5, 321

Тауберово условие 5, 322

Тауберовы теоремы 5, 321
Таутохронная кривая 5, 817
Творческое множество 3, 94

Тейлора многочлен 5, 322

Тейлора ряд 1, 263; 5, 218, 323

Тейлора формула 5, 323
Тейта гипотеза об алгебраических циклах 1, 181

Тейта гипотезы об алгебраических многообразиях 5, 324
- когомологии 2, 918

Тейта модуль 1, 99; 5, 324, 325
- мотив 3, 833
- пучок 1, 99

Телеграфное уравнение 5, 325
Телеграфный сигнал 3, 24
Телесная гармоническая функция 5, 882
Телесный конус 2, 1075
- - касательный 2, 756

Телесный угол 5, 325

Тело 5, 326
- альтернативное 1, 237
- Архимеда 1, 328, 3, 711; 4, 463
- архимедово 3, 431
-, Веддеберна теорема 1, 341
- Вивиани 1, 693
- выпуклое 1, 796, 799
- граничного элемента 1, 1103
- звездное 2, 446
- кватернионов 5, 326
- комплекса 3, 152
- локально компактное 3, 430
- множеств борелевское 1, 536
- неархимедово 3, 431
-, норма 1, 41
-, нуль 3, 1082
- Платона 4, 552
- постоянного охвата 4, 519
- постоянной ширины 4, 519
- - яркости 4, 519
- процедуры 1, 224
- Пуансо 3, 711; 4, 553
- симплициальной схемы 4, 1160
- ультраметрическое 3, 431
- цикла 1, 224

Температурный пограничный слой 4, 356
Темпля теорема о двусторонних оценках 2, 59

Тензор 1, 937; 5, 326—329
- альтернированный 1, 240
- аффинный 1, 364
- Бернара 5, 250
- бесследный 4, 597
- Вейля 3, 100
- второй фундаментальный 4, 360, 361
- гауссова кручения 3, 130
- Дарбу 2, 18
- двухточечный 2, 61
- деформаций 2, 101
- дискриминантный 2, 217
-, ковариант 2, 895
- ковариантный 2, 900; 5, 326
-, контравариант 2, 896
- контравариантный 2, 1070, 5, 326
- конформной кривизны 2, 1089; 3, 100
- кососимметрический 1, 240; 3, 42
- кривизны 3, 102; 4, 1006
- - направлений 1, 630
- кручения 3, 130, 131; 4, 542
- - картановский 5, 622
- метрический 3, 668; 4, 235, 1003; 5, 328
- - основной 4, 1013
- - финслеров 5, 622
- напряжений 3, 891
- Нейенхёйса 4, 542
- основной 3, 668; 4, 235
- поверхности второй основной 1, 771
- проективной кривизны 3, 101
- Римана 4, 996
- Римана — Кристоффеля 4, 1000, 1006
- риманова кручения 3, 130
- Риччи 3, 99, 4, 1007, 1045
-, свертка 4, 1077
- симметрический 4, 1146
- симметричный 4, 1146
-, след 4, 1077
- смешанный 5, 326
- фундаментальный 3, 668
- Эйнштейна 4, 1007

Тензорная алгебра 5, 329
Тензорная плотность 5, 329
- степень 5, 331

Тензорное исчисление 5, 330
- поле 5, 249, 333
- - Киллинга 2, 857
- - кривизны 2, 736
- - кручения 2, 736
- представление 5, 329

Тензорное произведение 5, 330—332
- - алгебр 5, 331
- - векторных пространств 1, 646
- - гильбертовых пространств 1, 983
- - матриц 5, 332
- - норм 5, 1031
- - представлений 5, 332
- - расслоений 5, 332
- - унитарных модулей 5, 330

Тензорное расслоение 5, 332
- топологическое произведение 5, 393

Тензорный анализ 5, 333

Теорема 5, 334, см. также соответствующее название
- обратная 3, 1132
- противоположная 4, 720

Теоретико-множественный предел 4, 562
Теоретико-решеточное свойство 4, 959

Теоретико-числовая функция 1, 257, 322; 5, 335
Теоретическая арифметика 1, 314
- логика 3, 568

Теоретический синтаксис 4, 1185
Теоретическое программирование 4, 650

Теория формальная 5, 335
- элементарная 4, 427

***K*-теория** 5, 335—337
- алгебраическая 1, 160
-, Ботта теорема периодичности 1, 541
- приведенная 4, 924

Тёплица матрица 4, 943; 5, 337
Тёплицева форма индефинитная 5, 337
Тепловой объемный потенциал 3, 1152
- пограничный слой 4, 356
- потенциал 3, 609
- - двойного слоя 2, 26
- - простого слоя 4, 705
Теплопроводности теория, контактные задачи 2, 1063
Теплопроводности уравнение 2, 299, 5, 337
Терм 1, 157, 3, 417; 5, 338
- замкнутый 5, 637
Терминал 2, 702
Терминальный выигрыш 2, 143
- объект 4, 689, 5, 616
- символ 1, 1092
Термодинамики математические задачи 5, 338—340
- релятивистской математические задачи 4, 972
Термодинамический потенциал 5, 171, 201, 340
Термодинамический предельный переход 5, 201, 341
Тернарная форма 5, 634
Тернарное отношение 4, 151
Терциарный идеал 4, 635, 5, 341
- радикал 5, 341
Теснота топологического пространства 3, 836
Тест в кибернетике 3, 860; 5, 342—346
Тестовая статистика 5, 346
Тест-функция 3, 490
Тета-ряд 5, 346, 347
- Пуанкаре 2, 877; 5, 346
- Эйзенштейна 5, 346
Тета-функция 5, 347—349
- гиперэллиптическая 4, 999
- Римана 4, 998
Тетрациклические координаты 2, 1084, 4, 234; 5, 349
Тетраэдр 3, 709, 5, 350
- Демулена 2, 90
Тетраэдра пространство 5, 350
Тетраэдральные координаты 5, 350
Тетраэдрические числа 1, 324
Течение адиабатическое 1, 98
Тзена теорема о группе Брауэра 1, 545
Тип — см. соответствующее название
Типа римановой поверхности проблема 4, 1028
Типично вещественная функция 3, 725; 5, 350
Типов теория 5, 351—353
Типовая дифференциальная размерность 4, 825
Типовой изоморфизм 2, 867
Тиссо уравнение 4, 541
Титса расслоение 5, 353
Титса система 5, 354
Титчмарша проблема 5, 354
- теорема о кольцах 4, 26
Тихонова принцип 3, 976
- теорема о бикомпактах 4, 145
Тихонова теорема о бикомпактности произведения 5, 355
- - о квазикомпактных пространствах 2, 809
- - о методе малого параметра 3, 500
- - о топологических векторных пространствах 5, 379
- - о топологическом произведении 1, 473
Тихоновский куб 5, 355
Тихоновское произведение 5,356, 387
- -, диагональ 1, 672
Тихоновское пространство 1, 763, 4, 140, 5, 355, 356, 392
Тице преобразование в группах 4, 33
Тканей геометрия 5, 356
p-ткань плоская 5, 356
Тодда класс 5, 357
- род 5, 868
Тоеды теорема о квазигруппах 2, 803
Тождества аксиома для метрики 3, 658
Тождества проблема 1, 1148; 5, 357
- слов проблема 1, 216
Тождественная истинность 5, 357
Тождественно истинная формула 3, 1147
Тождественное преобразование 1, 125
Тождественный линейный оператор 3, 369
- морфизм 2, 761
- - функтора 5, 688
- функтор 5, 685
Тождество — см. соответствующее название
Ток Нетер 3, 1028
Толерантность 5, 358
Толерантный интервал 5, 358—360
- предел 5, 359
Толщина графа 1, 1115, 1120
Тома изоморфизм 5, 360
Тома катастрофы 5, 360—362
Тома класс 5, 362
Тома пространство 4, 72; 5,362
Тома спектр 5, 363
- теорема о замкнутых многообразиях 5, 904
- - трансверсальности 4, 127
Тома — Дольда изоморфизм 5, 360
Томаса — Ферми уравнение 5, 997
Томпсона группа 5, 149
Томпсона подгруппа 5, 363
Томсена условие замыкания 2, 439
Тонелли плоская вариация 5, 363, 364
Тонелли теорема о площади поверхности 5, 364
Тонкая окрестность 5, 365
- схема 3, 772
Тонкая топология в теории потенциала 5, 364
Тонкий комплексный модуль 3, 772
- предел 5, 365
Тонкий пучок 5, 365
Тонко предельная точка 5, 365
Тонкое множество 5, 365
Топологизированная категория 5, 365
- -, главный G-объект 1, 1017
- -, гомотопический тип 1, 1074
Топологическая алгебра 5, 366
- векторная группа 5, 379
Топологическая группа 5, 367—369
- Галуа 1, 854
- -, Гаусса разложение 1, 900
- -, группа характеров 5, 767
- - локальная 3, 425
- - локально евклидова 1, 245; 5, 369
- -, представление 4, 591
- - рефлективная 4, 481
- -, характер 5, 747
Топологическая динамика 5, 369—371
Топологическая динамическая система 5, 371
- - -, центр 5, 802
- инвариантность 1, 1036; 2, 96
Топологическая полугруппа 5, 372—374
- проективная плоскость 4, 670
Топологическая структура 5,374
- сфера 5, 288
- K-теория 5, 335
Топологическая транзитивность 5, 374
- характеризация 1, 1036
- цепь Маркова 4, 1136
Топологическая эквивалентность 1, 84; 3, 371, 5, 375
Топологическая энтропия 5,375
Топологически неприводимое представление 3, 996
- свободное множество 4, 1086
- сопряженные локально выпуклые пространства 5, 382
- эквивалентные представления 5, 943
- - пространства 1, 1035; 5, 390
Топологический автоморфизм Бернулли 4, 1136
- базис 1, 375
- гомоморфизм 5, 384
- изоморфизм 3, 370
Топологический инвариант 5, 375, 376
- индекс 5, 868
- каскад 5, 371
- кобордизм 2, 892
Топологический модуль 5, 377
- G-модуль 5, 377
- полиэдр 3, 151; 4, 412
- поток 3, 994, 5, 371
- предел 4, 562
- симплекс 4, 1152; 5, 434
- узел 4, 122
- упорядоченный симплекс 4, 1152
Топологическое векторное подпространство 5, 379
Топологическое векторное пространство 1, 646; 5, 377—385
- - -, двойственность 2, 43
- - факторпространство 5, 379
- вложение 5, 400, 401
Топологическое кольцо 5, 385
- многообразие 2, 355
- отображение 1, 1035; 5, 390
Топологическое поле 5, 386
Топологическое произведение 5, 387
- -, Тихонова теорема 1, 473
Топологическое пространство 5, 374, 388—393
- -, абсолютная группа 1, 1045
- - ациклическое 2, 198
- -, база 1, 371
- -, вес 1, 673
- -, гомологии теория 1, 1044
- -, группа гомологий 1, 1040
- -, деформационный ретракт 2, 102
- -, доминанта 2, 372
- -, калибр 2, 699
- -, категория 2, 763
- -, когомологии 2, 905
- -, когомологическая размерность 2, 925
-, конус 2, 1074
-, мощностная характеристика 3, 834
- - неприводимое 3, 997
-, покрытие 4, 392
- -, пополнение 4, 496
- -, псевдобаза 4, 726
- -, размерность 4, 826
- -, расширение 4, 909
- -, ретракт 4, 975
- -, сеть 4, 1124
- - симметризуемое 4, 1139
- -, триангуляция 5, 434
- -, ядро 1, 737
- свойство 1, 1036; 3, 669
- слоение 4, 1210
Топологическое тензорное произведение 5, 393
Топология 5, 387, 394—400
- адическая 1, 98
- алгебраическая 1, 169
- антидискретная 1, 292
-, база 1, 371
-, базис 1, 371, 373
- бикомпактно открытая 1, 472
Топология вложений 5, 400—402
- выпуклой закругленной компактной сходимости 4, 23
- Гротендика 5, 365
- дискретная 2, 202
- дифференциальная 2, 260
- замкнутая 5, 374
- Зариского 2, 444
- индуктивная 3, 428; 5, 381, 383
- индуцированная 4, 145
- каноническая 5, 366
- комбинаторная 2, 970
- компактно открытая 4, 716, 1100
- компактной сходимости 2, 993
- Крулля 1, 854
- кусочно линейная 3, 151
- линейная 3, 318
- локально выпуклая 3, 427
- локального кольца 1, 98
- Макки 2, 44; 3, 478
- Мартина 3, 532
Топология многообразий 5, 402—404
- нормы 4, 716
- общая 3, 1141
- ограниченной сходимости 4, 23
- операторная 3, 374; 4, 22
- - сильная 4, 23
- - слабая 4, 23
- - ультрасильная 4, 23
- - ультраслабая 4, 23
- открытая 5, 374
- относительная 4, 145
-, порожденная метрикой 3, 670
- порядковая 4, 501
- поточечной сходимости 4, 23, 540, 716; 5, 382
-, предбаза 1, 671
- предкомпактной сходимости 4, 23
- проективная 3, 427; 5, 381, 383, 1035
- произведения 5, 387
- простой сходимости 4, 23
- равномерная 4, 789
- равномерной сходимости 4, 716, 799; 5, 382
- Сазонова 3, 646
- сильная 2, 44; 5, 382
- слабая 2, 44; 4, 716, 1206; 5, 382
- спектральная 2, 444; 5, 101
- тонкая в теории потенциала 5, 364
- Уитни 4, 127
- экспоненциальная 5, 953
- этальная 5, 1023
S-топология 5, 766
σ-топология 2, 993; 4, 23; 5, 382
Топоногова теорема сравнения углов 4, 1011
Топос 5, 366, 404
Тор 5, 405
- алгебраический 1, 179
- комплексный 1, 22, 250; 2, 1011
- максимальный 3, 486
- полурегулярный 4, 945
- промежуточный Гриффитса 4, 697
- регулярный 4, 945
- сингулярный 4, 945
Торелли проблема в теории модулей 3, 774
- теорема о келеровых многообразиях 4, 697
Торелли теорема о структурах Ходжа 5, 405
- - об отображении периодов 4, 155
Торический узел 5, 407
Торическое зацепление 5, 407, 485
Тороидальная гармоника 5, 407
Тороидальное многообразие 2, 584
Тороидальные координаты 5, 408
Торс 4, 811; 5, 408, 612
Тосье полугруппа 4, 703
Тотально правильная программа 4, 652
- трансцендентная теория 5, 165
Тотальное множество 4, 424; 5, 408
- - линейных функционалов 1, 392
- - предельное 4, 565
- - функционалов 2, 377
- подмножество 1, 644
Тотально-симметрическая квазигруппа 2, 802
Тотальный граф 1, 1106
Точечная аналлагматическая геометрия 3, 122
- конечность покрытия 4, 393
Точечная оценка 4, 174; 5, 408
Точечная решетка 1, 945; 5, 408
m-точечная база 1, 371
n-m-точечная база 1, 371
Точечно конечная база 1, 371
- счетная база 1, 371
σ-точечно конечная база 1, 371

Точечного источника метод 3,609
- - функция 3, 1109
Точечно-множественное отображение 3, 720
Точечные координаты 3, 9
Точечный случайный процесс 5, 31
- спектр 3, 373; 5, 98
Точка аксиальная 3, 1072
- асимптотическая 1, 334; 5, 424
- бесконечно удаленная 1, 443; 2, 484
- ветвления линии 3, 386
- - многообразия 2, 55
- внутренняя 4, 700
- возврата 2, 25; 4, 124
- гетероклиническая 1, 955
- гиперболическая 2, 252; 4, 746, 747
- двойная 2, 24, 3, 88; 4, 124
- диагональная 4, 664, 5, 598
- дисперсии 2, 217
- Жергонна 2, 410
- Жюлиа 2, 428
- замкнутая 5, 134
- заострения 2, 439
- идеальная 2, 484; 4, 746
- излома 2, 494; 5, 424
- изолированная 2, 24, 504, 4, 124, 125
- инвариантная 2, 533
-, квазикомпонента 4, 1096
- квазирегулярная 5, 1013
-, компонента 4, 1096
- конденсации 2, 1015
- коническая 4, 125
- концевая 3, 386, 4, 700
- краевая 3, 87
- кратная 3, 88; 4, 124
- кратности 4, 310
- критическая 3, 112
- круговая 3, 124, 914; 4, 15
- Лебега 3, 217
- либрации 5, 432
- Мейера 4, 567
- мероморфности 4, 117; 5, 282
- мировая 3, 703; 4, 149
- накопления 3, 887; 4, 1099
- начальная 2, 284, 3, 895
- неблуждающая 3, 904
- неопределенности 4, 117
- неподвижная 3, 975; 4, 784; 5, 385
- несобственная 2, 484; 4, 664
- общая 3, 1143; 5, 134
- общего положения 3, 1144
- обыкновенная 2, 248, 251
- округления 2, 252; 4, 15
- омбилическая 3, 97; 4, 15, 17
- опорная 4, 29
- особая 2, 248, 251; 4, 784
- - алгебраического многообразия 4, 118
- - аналитической функции 4,113
- - векторного поля 4, 120
- - дифференциального уравнения 4, 120
- - дифференцируемого отображения 4, 123
- - кривой 4, 119, 124
- - поверхности 4, 120, 124
- отмеченная 4, 1165
- отрицательно асимптотическая 4, 570
- параболическая 2, 252, 4, 194
- перевала 4, 239
- перегиба 4, 239, 310
- периодическая 4, 267
- пика 2, 966
- планарная 3, 1072
- Шлеснера 4, 567
- плотности 4, 320; 5, 1013
- покоя 2, 533; 4, 784
- положительно асимптотическая 4, 570
Точка поля 5, 409
- пористости 4, 497
- предельная 4, 563
- представляющая 2, 144
- прекращения 4, 599, 5, 424
- прикосновения 2, 1002; 4, 634; 5, 389
- проективной плоскости 4, 668
- разветвления 4, 811
- разрыва 4, 852
- распрямления 5, 149
- рациональная 5, 299
- рекуррентная 4, 954
- самопересечения 2, 25; 4, 124, 125, 1072
- самоприкосновения 2, 25; 4, 124, 1072
- сгущения 4, 1099
- седловая 4, 1103
- спациальная 3, 1072
- спрямления 5, 149
- срыва 2, 342; 4, 967
- стационарная 4, 784
- стрикционная 3, 380
- существенно особая 5, 282
- тонко предельная 5, 365
- транзитивная 5, 1013
- тройная 3, 88
- угловая 2, 272, 494; 5, 424, 466
- узловая 2, 25; 4, 124
- уплощения 2, 252; 3, 97; 5, 522
- условно устойчивая 5, 550,551
- устойчивая по Пуассону 4, 570
- фазовая 2, 144; 5, 587
- Фату 4, 566; 5, 599
- Фекете 5, 422
- фокальная 3, 824; 5, 613
- целая 5, 797
- циклическая 3, 124
- чебышевская 5, 847
- шаровая 3, 97, 4, 15
- Штейнера 5, 901
- эллиптическая 2, 252; 5, 986
A-точка 2, 401
Точная верхняя грань 1, 673; 5, 834
- - - семейства топологий 1, 671
- нижняя грань 1, 673, 5, 834
- гомотопическая последовательность 1, 1063
- пара 5, 106
Точная последовательность 5, 409
- - Майера — Вьеториса 1, 162
- форма 2, 263
Точное представление 3, 778; 4, 595; 5, 409
Точности аксиома 1, 1045; 5,231
- мера 4, 183
Точный дифференциал 2, 238
- множитель Вейля 4, 103
- модуль 3, 778
- радиус звездообразности 2, 450
Точный функтор 5, 409
Точный эндоморфизм 5, 410
Траектории устойчивое многообразие 1, 999
Траектория 2, 147, 767; 4, 68, 538, 5, 410
- асимптотически орбитально устойчивая 4, 68
- дифференциала 2, 786
- замкнутая 4, 267
- изогональная 2, 502
- оптимальная 4, 35
- ортогональная 2, 502; 4, 87
- отрицательно устойчивая по Лагранжу 5, 567
- периодическая 2, 533, 4, 267
- положительно устойчивая по Лагранжу 5, 567
-, предельное множество 4, 570
- рекуррентная 4, 954
- случайной функции 5, 11
- точки 2, 68
- фазовая 1, 83; 2, 144; 5, 586
Траекторно эквивалентные динамические системы 5, 1011
Трактриса 5, 410
Транзитивная группа 5, 411
- - движений 2, 22
- - подстановок 4, 382
- псевдогруппа преобразований 4, 730
- точка 5, 1013
Транзитивное бинарное отношение 1, 488
- импримитивное представление 2, 524
- множество 1, 783
- отношение 5, 412
Транзитивности область 5, 411
Транзитивность 5, 412, 942
- метрическая 3, 666
- областей 5, 374
- топологическая 5, 374
Транзитивный турнир 5, 453
Трансвекция 3, 302; 5, 412
- симплектическая 4, 1154
Трансверсаль 1, 966, 2, 975, 3, 207, 623, 4, 505, 813, 5, 412
Трансверсальная поверхность 5, 613
Трансверсальная система 5, 412
- схема 5, 412
Трансверсально регулярное отображение 5, 413
Трансверсально эллиптический оператор 5, 412
Трансверсальное отображение 5, 413
Трансверсальности теорема Тома 4, 127
Трансверсальности условие 1, 62; 5, 413—415
- - строгое 1, 1135
Трансверсальность 5, 415
Трансверсальный матроид 3, 623; 4, 813
Трансгрессивный элемент 5, 416
Трансгрессия 5, 416
- гомотопическая 1, 1064
Трансдуктор 1, 224
Транслятивность метода суммирования 5, 417
Транслятор 1, 225, 5, 418, 419
- отладочный 1, 225
Трансляционного типа семантика 1, 224
Трансляция 5, 417
- главная 1, 1013
- относительно элемента 2, 802
Трансляция программ 5, 417—419
Трансмиссии условие 5, 419
Транснормальное пространство 4, 519
Транспозиция 4, 380, 1141
Транспонированная матрица 3, 615; 5, 419
Транспонированное ядро Фредгольма 5, 660
Транспонированные уравнения 5, 419
Транспортная задача 4, 540; 5, 419—421
- сеть 4, 1122
Трансфинит 1, 764
Трансфинитная индукция 5, 421
Трансфинитная последовательность 4, 502; 5, 421
Трансфинитная рекурсия 5, 421
Трансфинитное пространство Гильберта 3, 899
Трансфинитное число 2, 723, 4, 501; 5, 421
Трансфинитный диаметр 5, 422—424
- класс, Колмогорова теорема 2, 94
Трансформационная грамматика 1, 1095
Трансформация Лапласа 3, 196
Трансформирование 5, 91
Трансцендентная кривая 5, 424
Трансцендентная точка ветвления 1, 680; 5, 424
Трансцендентная функция 5,425
- - Пенлеве 4, 233
Трансцендентное расширение 4, 909, 5, 425
- уравнение 5, 540
Трансцендентное число 1, 260; 5, 426
Трансцендентности базис 5, 425
Трансцендентности мера 2, 165, 5, 427
- степень 3, 650, 5, 426
Трансцендентный элемент 4, 908; 5, 425
Трапеций формула 5, 427
Трапеция 5, 428
-, средняя линия 5, 163, 428
Тренд 5, 181
Треска — Сен-Венана условия 4, 299
Третичная когомологическая операция 2, 923
Третья квадратичная форма 2, 785; 5, 296
Третья краевая задача 3, 83, 349; 5, 428
- подстановка Эйлера 5, 928
- смешанная задача 5, 37, 41
Треугольная алгебра Ли 3, 250
- - - разрешимая 3, 280
- блок-схема 1, 506
Треугольная группа 5, 428, 680
- - Ли 3, 251
- - - связная 3, 281
- диаграмма 2, 125
Треугольная матрица 5, 428
- частичная сумма 2, 31
Треугольник 5, 428
- автополярный 4, 990
- арифметический 1, 325
- геодезический 1, 929
- Герона 1, 954
-, избыток 2, 491
-, медиана 3, 632
-, Менелая теорема 3, 635
- на плоскости Римана 4, 990
-, ортоцентр 4, 105
- ортоцентрический 5, 598
- Паскаля 4, 226
- поверхностный 4, 1025
- Рёло 4, 519
- сизигетический 3, 140
-, средняя линия 5, 163
- сферический 5, 290
- эйлеров 5, 290
Треугольника аксиома для метрики 3, 658
- неравенство 3, 701
Треугольное разложение в группе 1, 900
- распределение 4, 798
- решение задачи трех тел 5,431
- усечение группы 1, 900
Треугольное число 1, 324; 5, 429
Треугольный метод суммирования 5, 429
Треугольный элемент 5, 429
Треффца метод 5, 430
Трех констант теорема 3, 937
- полюсов теорема 1, 1024
«Трех сигм правило» 3, 1066; 5, 430
Трех тел задача 2, 870; 5, 430—432
Трехвершинник 2, 1077
Трехгранник Дарбу 2, 18
- естественный 2, 250; 3, 892; 5, 662
- Френе 2, 250; 3, 892; 5, 662
Трехзначная логика Лукасевича 3, 719
Трехмерное многообразие 5,432
Трехосновная алгебра 1, 67
Трехсвязная область 3, 748, 1098
Трехсторонник 2, 1077
Триада 1, 1048; 5, 433
Триангулируемая группа 5, 428
Триангулируемое пространство 4, 1160
Триангуляция 3, 152; 4, 1160, 1168; 5, 434
- криволинейная 4, 412
- плоская 1, 1110
- полиэдра 2, 997
- прямолинейная 4, 410
Тривектор 5, 434
Тривиальная деформация 2, 108
- линейная комбинация 1, 643
- метрика 3, 670
- тактическая конфигурация 5, 318
- формация 5, 519
Тривиальное абсолютное значение 1, 41
- бесконечно малое изгибание 1, 436
- векторное расслоение 1, 637
- изометрическое преобразование 1, 790
- инвариантное подпространство 2, 534
- многообразие конечно базируемое 1, 186
- нормирование поля 3, 1079
- представление 2, 401
- расслоение 4, 894
- решение, область притяжения 1, 64
- частично упорядоченное множество 5, 834
Тривиальный нуль дзета-функции 2, 113
- - *L*-функции Дирихле 2, 189

- G-объект категории 1, 1018
- скрещенный гомоморфизм 2, 917
- тест 5, 343
- узел 3, 738
- ультрафильтр 5, 495
Тригонометрическая выпуклость 4, 1054
- проблема моментов 3, 796
Тригонометрическая система 5, 435
Тригонометрическая сумма 5, 435
- -, Виноградова гипотеза об оценках 1, 701
- -, - оценка 1, 704
- форма комплексного числа 2, 1009
Тригонометрические функции 5, 436—438
Тригонометрический вес 4, 95
Тригонометрический полином 5, 438
Тригонометрический ряд 5, 438—441
- -, Данжуа — Лузина теорема 2, 13
- -, Дюбуа-Реймона теорема 2, 394
- -, Кантора теорема 2, 715
- - лакунарный 3, 186
- -, Лебега теорема 2, 715
- - сопряженный 5, 89
- -, Юнга теорема 2, 715
Тригонометрических сумм метод 1, 259; 5, 441—444
Тригонометрическое интерполирование 5, 444
- уравнение 5, 540
Тригонометрия 5, 444
- гиперболическая 1, 990
- сферическая 5, 292
Трикоми задача 5, 45, 444—446
Трикоми уравнение 2, 299; 5, 446
Трилистник 5, 484
Триметрия 1, 113
Триортогональная система, Дюпена теорема 2, 396
- - Егорова 2, 399
Триортогональная система поверхностей 5, 446
Трипрямоугольник 3, 187
Трисекция угла 5, 447
Триэдр Дарбу 2, 18
Тройка 5, 167, 447
- векторов 1, 634
- над категорией 2, 911
Тройная система Ли 3, 283
- точка 3, 88
Тройной интеграл 3, 92
Трохоида 5, 448, 817
Трохоидальная роза 5, 448
Труба 5, 449
Трубка векторная 1, 636
- вихревая 1, 715
Трубчатая область 5, 449
Трубчатая окрестность 5, 449
Трубчатое зацепление 5, 485
- поле 5, 74
Тупиковая дизъюнктивная нормальная форма 5, 449
- зависимость переменных 1, 558
Тупиковый тест 3, 861; 5, 344
Турбулентности математические задачи 5, 450—453
Турнир 5, 453
Туэ метод 5, 454
Туэ полусистема 5, 455
- проблема для ассоциативных систем 5, 455
Туэ система 5, 455
- теорема о диофантовых приближениях 5, 454
Туэ — Зигеля — Рота теорема о диофантовых приближениях 5, 455
Тьюринга машина 1, 819; 5, 456—458
- тезис 1, 215; 2, 819; 5, 457, 855
Тьюринга — Поста машина 1, 819
Тьюрингова сводимость 4, 957
- степень 1, 219; 3, 1003
Тьюринговский алгоритм в алфавите 5, 457
Тяготение 1, 1078
Тяготения теория 4, 145; 5, 458—462
Тяжелого шарика метод 3, 992; 5, 462

У

Уайлдера теорема о двумерных многообразиях 2, 54
- - о континуумах 5, 288
Уайтхеда гомоморфизм 5, 463
Уайтхеда группа 1, 161; 5, 463
- - приведенная 3, 302; 5, 135
- -, стабильности теорема 5, 164
Уайтхеда кручение 2, 894; 5, 464
- лемма 2, 914
Уайтхеда произведение 5, 465
- теорема о клетках 1, 1064
- - о клеточных разбиениях 1, 1069
Уайтхеда умножение 5, 465
Убегания задача 2, 334
Убивающее пространство 4, 517; 5, 466
Убывающая геометрическая прогрессия 1, 932
Убывающая последовательность 5, 466
- фильтрация 5, 616
Убывающая функция 3, 814; 5, 466
Угловая точка 2, 272, 494; 5, 424, 466
- - геодезической области 1, 927
- - границы 2, 446
Угловое граничное значение 2, 402; 4, 566; 5, 466
Угловой коэффициент 3, 72
Угловые условия Вейерштрасса — Эрдмана 1, 624
Угол 5, 467
- в римановом пространстве 4, 1004
- вписанный 1, 758; 4, 16
- двугранный 2, 50
- линейный 2, 50; 3, 377
- между кратчайшими 1, 789
- - скрещивающимися прямыми 4, 1205
- многогранный 3, 712
- многоугольника 3, 750
- модулярный 3, 783
- на плоскости Римана 4, 990
- параллельности 3, 398, 404
- полярный 4, 480
- сектора кратчайших 1, 789
- телесный 5, 325
- центральный 4, 16
- эйлеров 5, 937
Угроза коалиции 5, 562
Удаление вершины графа 1, 1107
- ребра графа 1, 1107
Удаления дизъюнкции правило 1, 781
- правило 1, 919
Ударных волн математическая теория 5, 468—474
Удвоение куба 5, 474
Удвоения формула Лежандра 1, 867
Удельная кривизна выпуклой поверхности 1, 791
Удерживающие связи 1, 1034
Удлиненная гипоциклоида 1, 1012
- трохоида 5, 448
- циклоида 5, 817
- эпициклоида 5, 1009
Узел 4, 122; 5, 995
- алгебраический 3, 739
- альтернирующий 1, 241
- в геометрии 5, 476
Узел в теории дифференциальных уравнений 5, 474—476
- в топологии 5, 476, 484
- Вандермонда 5, 422
- двумерный 2, 57
- дикий 2, 137
- интерполяции 2, 618, 631, 633
- квадратурной формулы 2, 793
- коллокации 2, 952
- ленточный 2, 57
- Листинга 3, 391
- многомерный 3, 738
- незаузленный 3, 738
- Нейвирта 3, 920
- потока 4, 538
- сплайна 5, 143
- таблицы 2, 291
- топологический 4, 122
- торический 5, 407
- тривиальный 3, 738
- Хефлигера 2, 520
Узкая сходимость 5, 313
Узкое исчисление предикатов 3, 418; 4, 579; 5, 476
Узлов и зацеплений группы 5, 476—478
Узлов и зацеплений диаграммы 5, 478—480
Узлов и зацеплений квадратичные формы 5, 480—482
Узлов кобордизм 5, 482—484
Узлов таблица 5, 484
Узлов теория 5, 484—492
Узловая точка 2, 25; 4, 124; 5, 492
- - геодезической области 1, 927
Узловое произведение 5, 147
- число 5, 314
Уитнера теорема о решениях дифференциальных уравнений 4, 657
Уитни класс 5, 492
- сумма 1, 647
- теорема о диезной коцепи 2, 134
- - о дифференцируемых отображениях 4, 126
- топология 4, 127
Уиттекера константа 1, 30
Уиттекера преобразование 5, 492
Уиттекера уравнение 5, 492
Уиттекера функции 5, 493
Уишарта распределение 2, 901; 3, 734, 5, 493
Укладка 4, 395
- графа 1, 1115
Уклонение 5, 494
- информационное 2, 657
- квадратичное 2, 782
Укороченная гипоциклоида 1, 1012
- нормальная форма системы дифференциальных уравнений 3, 1059
- трохоида 5, 448
- циклоида 5, 817
- эпициклоида 5, 1010
Улама теорема о кардинальных числах 2, 724
Улитка Паскаля 4, 226
Ультраборнологическое пространство 5, 494
Ультрабочечное пространство 5, 494
Ультрагиперболическое уравнение 2, 299, 323; 3, 329
Ультраметрическое абсолютное значение 1, 41
- тело 3, 431
Ультрапараболическое уравнение 1, 810
Ультрапроизведение Ω-систем 1, 160
Ультрасильная операторная топология 4, 23
Ультраслабая операторная топология 4, 23
Ультрасферические многочлены 2, 869, 5, 494
Ультрафильтр 5, 495, 615
Ультраэллиптический интеграл 1, 1011
Уменьшаемое 1, 828
Умножение 5, 495
- Бэра 1, 569
- в спектрах пространств 5, 103
- внутреннее 2, 263
- гомологическое 1, 1057
- йорданово 2, 693
- композиционное 5, 284
- рядов 4, 1066
- симметрическое 4, 1140
- степенных рядов 5, 219
- Уайтхеда 5, 465
- формальных языков 5, 644
Умножения формула Гаусса 1, 867
Умолчания правило 1, 223; 4, 291
Унар 5, 496
Унарная алгебра 5, 496
- операция 1, 149; 3, 893; 4, 18
Унарный объект 3, 758
Унивалентный функтор 5, 686
Универсальная алгебра 1, 155; 5, 497
- -, определяющие соотношения 4, 33
- -, решетка подалгебр 4, 982
- группа 5, 891
- - автоморфизмов 1, 199
- деформация 2, 103
- интерполяционная последовательность 3, 906; 5, 789
- комплексификация группы Ли 2, 1004
- кривая 3, 635
Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли 5, 498
- особенность 4, 127
- равномерность 4, 796
- схема 2, 105
- формула 1, 159
Универсальная функция 4, 637; 5, 499
Универсально цепное кольцо 4, 555
- эквивалентные алгебраические системы 5, 973
Универсальное множество 5, 500
Универсальное накрытие 5, 500, 681
- отношение 1, 488; 4, 151
- отображение 1, 1133
Универсальное пространство 5, 500
- расслоение 2, 864
- свойство морфизма 5, 300
Универсальные оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Универсальный алгоритм 5, 500
- интегральный инвариант 2, 602
- квадрат 4, 896
Универсальный нормальный алгорифм 5, 500
- подкласс класса Ω-систем 1, 159
- предикат 1, 320
Универсальный ряд 5, 501
Универсальных алгебр многообразие 5, 501
Универсум 1, 555; 4, 580; 5, 500
Уникурсальная кривая 4, 311; 5, 502
Унилинейчатое многообразие 5, 787
Унимодальное распределение 3, 763; 5, 503
Унимодальности критерий 5, 503
Унимодулярная группа 1, 359; 2, 866; 3, 782; 5, 412, 504, 741
- - аффинная 1, 359
- - проективная 4, 666
Унимодулярная матрица 5, 504
- нормировка 2, 385
Унимодулярное преобразование 5, 504
Унипотентная группа 5, 504, 505
- - линейная 3, 301
Унипотентная матрица 3, 616; 5, 505
Унипотентный автоморфизм 2, 422
- радикал 5, 504
- - группы 4, 804
Унипотентный элемент 2, 423; 5, 505
Унипримитивная группа подстановок 4, 635
Унирациональное многообразие 3, 466; 5, 506
Унитальный модуль 3, 777
- положительный оператор 4, 435
Унитарная группа 2, 866; 5, 506, 1021
- дилатация 4, 1127
Унитарная матрица 3, 616; 5, 507
- полугруппа 4, 1127
- эквивалентность 3, 371
J-унитарная матрица 1, 861
Унитарно эквивалентные операторы 4, 378; 5, 508
Унитарно эквивалентные представления 5, 508
Унитарное полуподобие 5, 507
Унитарное представление 4, 546; 5, 508—513

- - индуцированное 2, 560
- - проективное 4, 678
Унитарное преобразование 5,513
- - линейное 3, 352
Унитарное пространство 5, 514, 1019
Унитарный бордизм 1, 533
- кобордизм 2, 890
Унитарный модуль 3, 777; 5,514
- -, тензорное произведение 5, 330
Унитарный оператор 2, 505; 3, 375; 5, 514
- сдвиг 5, 506—507
- характер группы 1, 882
- элемент алгебры 4, 1148
J-унитарный оператор 1, 987; 5, 127
Униформизации принцип 2, 644
- теорема 4, 1020, 5, 679
Униформизация аналитической функции 5, 514
-, Клейна — Пуанкаре теорема 2, 876
- локальная 3, 426
Униформизация множества 5, 514—517
- по Кёбе 2, 877
- римановой поверхности 5, 515
Униформизирующая локальная 3, 445
Униформизующий элемент 5,517
Уничтожения операторы 2, 990, 5, 517, 632
Уноид 5, 496
Уолла группа 5, 519
Уолла инвариант 5, 520
Уолмена бикомпактное расширение 5, 520
Уолменовского типа бикомпактное расширение 1, 479
Уолша система 5, 521
Уолша — Пэли система 4, 86
Упаковка 4, 395; 5, 521
Уплотнение 1, 1035; 4, 156,5,522
- идеального ряда 2, 485
- ряда подгрупп 4, 368
- системы подгрупп 4, 368
Уплотняющий оператор 3, 977; 5, 522
Уплощения точка 2, 252; 3, 97; 5, 522
Упорядоченная группа 5, 522
- пара 5, 713
Упорядоченная полугруппа 5, 523—525
- проективная прямая 4, 671
- симплициальная схема 4, 1159
Упорядоченная сумма 5, 525
Упорядоченное векторное пространство 4, 470
Упорядоченное кольцо 5, 526
Упорядоченное множество 5,527
Упорядоченное поле 5, 527
- расширение 5, 527
Упорядоченный бикомпакт 1, 475
Упорядоченный группоид 5,527
Упорядочиваемая группа 5, 528
Упорядочивания алгоритм 1, 207
Управление 4, 37; 5, 536
- допустимое 1, 60, 4, 48, 488; 5, 536
- конфликтное 4, 46
- оптимальное 4, 39, 41, 48, 488
- особое 4, 50
-, программа 1, 62
- с поводырем 2, 333
-, цель 1, 61
Управления объект 2, 853
- оптимального математическая теория 4, 37
Управляемое уравнение 5, 563
Управляемости матрица 1, 61
- системы свойства 4, 48
Управляемость полная 4, 48
Управляемый диффузионный процесс 5, 531
- полностью объект 1, 61
- процесс диффузионного типа 5, 531
Управляемый случайный процесс 5, 528—533
Управляющая система 2, 853; 5, 533—536
- -, проблемы надежности 3, 858
- -, эквивалентные преобразования 5, 943
Управляющая функция 5, 536
Управляющий параметр 4, 487
Упругости математическая теория 5, 537—539
- - -, динамические задачи 2, 149
- - -, контактные задачи 2, 1064
- - -, плоская задача 4, 313
Уравнение 5, 539; см также соответствующее название
Уравнение в вариациях 2, 775; 5, 540—543
Уравнение в контингенциях 5, 543
- в паратингенциях 5, 543
ББГКИ-уравнения 1, 512
Уравновешенная неполная блок-схема 1, 505
Уравновешенное множество 1, 544; 5, 378, 544
Урна 4, 830
Урновая схема 5, 544
- - Пойа 4, 387
Уровень доверительный 2, 366, 367
- значимости 2, 222, 366, 466; 5, 187
- критический 3, 115
- подгруппы 3, 785
Уровня линия 5, 544
Уровня множество 5, 545
Урысона лемма о нормальных пространствах 5, 545
- - о функциональной отделимости 5, 391
- - об отделимости 4, 140
Урысона метризационная теорема 5, 546
- оператор 3, 959; 5, 546
- основное тождество 4, 822
- поперечник 4, 494
Урысона пространство 5, 546
- равенства для размерностей 4, 829
- теорема о гильбертовом кирпиче 1, 978
- - о канторовых многообразиях 2, 716
- - о компактах 2, 990
- - об индексе ветвления линии 3, 387
- тождество 3, 216
Урысона уравнение 5, 546
Урысона — Брауэра лемма о продолжении непрерывных функций 5, 547
Урысона — Брауэра — Гитце лемма о продолжении непрерывных функций 5, 547
Урысона — Тихонова теорема о регулярных пространствах 3, 834
Усечение графика 4, 27
Усеченная группа зависимости точки 4, 1184
- итерация формальных языков 5, 644
- пирамида 4, 287
- схема Витта 1, 711
Усеченное распределение 5, 547
Усеченный вектор Витта 1, 710
- геометрический объект 1, 937
- конус 2, 1074
Усиленная проблема Пуанкаре о мероморфных функциях 3, 650
Усиленно непрерывный оператор 4, 19
Усиленное условие Лежандра 3, 232
Усиленный закон больших чисел 1, 527
- - - -, Колмогорова теорема 1, 528
- - - - Бореля 1, 539
Ускорсние сходимости 5, 305
Ускорения теорема 1, 212
Условие — см. соответствующее название
Условная вероятность 1, 658; 3, 914; 5, 548
- корректность 3, 932
Условная плотность 5, 548
Условная сходимость ряда 5, 549
Условная устойчивость 5, 549—553
- функция распределения 5, 555
- энтропия 5, 1005
- - алгоритмическая 1, 222
Условно периодическая функция 5, 553
Условно периодическое движение 5, 553
Условно полная решетка 5,553
- сходящийся ряд 4, 1065; 5,549
- устойчивая точка 5, 550, 551
- устойчивое решение 5, 550, 551
Условного градиента метод 3, 603
Условное гауссовское распределение 2, 701
Условное математическое ожидание 5, 553
- оптимальное управление 2, 155
Условное распределение 5, 554
- тождество 1, 183, 2, 825
- уравнение 3, 879
Условный базис 1, 392
- эксперимент 3, 860, 5, 343
Условный экстремум 5, 555
Усреднение 4, 134, 5, 556
Усреднения метод 1, 745
- - Крылова — Боголюбова 3, 134
Установившийся режим 1, 786
Установления метод 5, 556
Устойчивая задача минимизации 3, 700
- по Пуассону точка 4, 570
- сепаратриса 4, 1101
- система линейных дифференциальных уравнений 3, 341
- сложность слова 1, 222
Устойчиво сходящаяся последовательность 5, 312
Устойчивое в смысле Пуассона движение 4, 750
- высказывание 3, 767
- многообразие траектории 1, 999
- - седла 4, 1101
Устойчивое распределение 5, 557
- -, область притяжения 4, 640
- решение 2, 768
Устойчивости критерии 5, 558
Устойчивости область 5, 559
Устойчивости теоремы 5, 559
Устойчивости теория 5, 559
- - Ляпунова 3, 470
Устойчивость 5, 560
Устойчивость абсолютная 5, 562—566
- асимптотически орбитальная 2, 775
Устойчивость в теории игр 5, 561
Устойчивость вычислительного алгоритма 5, 566
Устойчивость вычислительного процесса 4, 566
- деформируемых систем 5, 578
- минимальная 5, 563
- орбитальная 4, 68
Устойчивость по Лагранжу 5, 567
Устойчивость по Ляпунову 2, 287; 5, 567—572
Устойчивость по Пуассону 5, 572
Устойчивость по части переменных 5, 573
Устойчивость при постоянно действующих возмущениях 5, 574
- равномерная 2, 771; 4, 789
Устойчивость разностных схем 4, 844; 5, 575—578
- - -, Куранта условие 1, 995
Устойчивость упругих систем 5, 578—580
- условная 5, 549
Устойчивость характеристических показателей 5, 580
- экспоненциальная 2, 771; 5, 564
A-устойчивость метода 2, 413
y-устойчивость 5, 573
Устойчивый корень 2, 340
- многочлен 4, 914
- почти наверное характеристический показатель 5, 581
- предельный цикл 4, 575
- случайный процесс 5, 557
Устранение особенностей, Осгуда — Брауна теорема 1, 894
Устранения сечения теорема 4, 1105
Устранимая особая точка 1, 264; 5, 581
Устранимости сечения теорема 1, 921
Устранимое множество 5, 582
Утверждение 5, 269
Утончение 1, 919
Уходящая траектория 4, 570
Участок особого режима 4, 938

Ф

Фабера многочлены 5, 583
- ряд 5, 583
Фабера — Шаудера система 5, 584
Фабри теорема о лакунах 5, 584
- - об отношении 5, 584
Фавара задача 5, 585
Фавара мера 5, 585
Фавара неравенство 5, 585
Фавара теорема об ортогональных системах 5, 585
Фаддеева уравнение 5, 586
Фаза видовая 1, 520
- комплексного числа 2, 1009
- мгновенная 4, 1085
- начальная 4, 1085
- рассеяния 5, 912
- родовая 1, 520
- свободного гармонического колебания 4, 1084
Фазовая плоскость 5, 586
- скорость 1, 1146
- точка 2, 144; 5, 587
Фазовая траектория 1, 83; 2, 144; 5, 586
- - оптимальная 4, 35
Фазового равновесия диаграмма 5, 587
Фазовое переменное 5, 536
Фазовое пространство 2, 144, 766, 5, 587
Фазовой скорости вектор 5, 588
Фазовые координаты 5, 536
Фазовый переход 5, 201, 589
- поток 1, 83
Фазовых интегралов метод 1, 717; 5, 589
Файри *p*-сумма 4, 1213
Фактор 5, 266, 589, 597
- главный полугруппы 1, 1019
- идеального ряда 2, 485
- идеальный 1, 1019; 2, 482
- композиционный 5, 266
- постниковский 4, 516
- ряда подгрупп 3, 1076
- системы подгрупп 4, 368
- субнормального ряда подгрупп 4, 367
Факторалгебра 2, 1014
Факторгруппа 5, 589
- алгебраическая 1, 142
Факториал 5, 589
Факториальное кольцо 5, 590
Факторизации критерий 5, 590
Факторизационная теорема 5, 590
Факторизационные тождества 5, 591
Факторизация 5, 591
- Рисса 5, 770
- функции 1, 696
Факторизованный оператор 4, 912
- - разностный 4, 843
Факторкатегория 5, 592
Факторкольцо 5, 592
Фактормножество 4, 66
Фактормодуль 3, 779
Факторное отображение 4, 155; 5, 390, 592—594
Факторнорма 3, 1048
Факторный анализ 5, 594
Факторобъект 5, 595

Факторподгруппа 5, 516
Факторполигон 4, 405
Факторпредставление 4, 595; 5, 596
Факторпространство 1, 643; 5, 596
Факторпучок 4, 767
Факторразмерность подпространства 3, 14
Факторрасслоение 1, 646
Факторсистема 2, 1014
- алгебраической системы 1, 157
Фактортопология 5, 592
Фано многообразие 5, 596
Фано поверхность 5, 597
Фано постулат 5, 598
Фано схема 5, 598
Фаньяно задача 5, 598
Фаня теорема о неподвижной точке 5, 385
Фарея ряд 5, 598
Фату дуга 5, 598
- теорема для аналитических функций 5, 599
Фату теорема для гармонических функций 5, 599
- - для степенных рядов 5, 599
Фату теорема о переходе к пределу 5, 599
- - о пределе 1, 31
- - о предельных множествах 4, 566
- - об угловых граничных значениях 5, 599
- точка 4, 566; 5, 599
Фаулера уравнение 5, 997
Федоровская группа 5, 600
Федорчука близость 1, 501
Фейера метод суммирования 5, 600
Фейера полином 5, 600
Фейера сингулярный интеграл 5, 601
Фейера сумма 5, 601
- ядро 5, 600, 1043
Фейнмана интеграл 5, 601
Фейнмана мера 5, 602
Фейнмана — Каца формула 2, 569; 5, 602
Фекете точка 5, 422
Феллеровская полугруппа 4, 535
- цепь 5, 603
Феллеровский процесс 5, 603
- - марковский 3, 525
Фенхеля — Моро теорема в выпуклом анализе 2, 46
- - - о сопряженных функциях 5, 82
Ферма малая теорема 5, 152, 604
Ферма принцип 5, 605
Ферма спираль 5, 605
Ферма теорема 5, 605—607, 608
- уравнение 2, 162; 5, 605
Ферми координаты 5, 608
Ферми — Дирака статистика 5, 608
Фермион 5, 632
Фермионное пространство Фока 5, 631
Феррари метод 5, 609
Фибоначчи метод 5, 610
Фибоначчи числа 5, 611
Фигур многообразие 5, 612
Фигура 5, 613
- автополярная 4, 476
- квадрируемая 4, 327
-, конгруэнтность 2, 1013
- многоугольная 3, 749
-, подобие 4, 373
Фигурное число 1, 324; 5, 614
Фигуры взаимно полярные 4, 476
- равновеликие 4, 781
- равносоставленные 4, 781
Фидуциальное распределение 5, 614
Физика математическая 3, 581
Фиксатор множества 4, 383
Фиксированная запятая 2, 443
Филиппова пример в теории размерности 4, 822
- теорема о пористых пространствах 4, 271
Фильтр 2, 483; 4, 561; 5, 615
-, базис 1, 373
-, барьер 4, 533
- генерический 1, 785
- натуральный 4, 561
-, предел 4, 561
- решеточный 4, 726
Фильтрация возрастающая 5, 616
- исчерпывающая 5, 616
- минимаксная 4, 46
- отделимая 5, 616
- регулярная 5, 106
- случайных процессов 5, 35
- стохастическая 4, 45
- убывающая 5, 616
- Ходжа 5, 788
Фильтрованная алгебра 5, 616
Фильтрованное произведение 1, 159
Фильтрованный модуль 5, 616
Финальная компактность 5, 392
Финально компактное пространство 2, 994; 3, 288; 4, 393
Финальный объект 5, 616
Финитарный поток 1, 613
Финитизм 5, 617
- Гильберта 3, 570
Финитная группа 4, 1142
Финитная задача 5, 617, 618
- математика 2, 368
- мера 3, 1081
Финитная общезначимость 5, 617—619
Финитная функция 5, 619
- - обобщенная 3, 1105, 1118
Финитно аппроксимируемая алгебраическая система 1, 184
Финитно аппроксимируемая группа 5, 620
Финитно аппроксимируемая полугруппа 5, 620
- - промежуточная логика 4, 696
- - система 3, 765
- общезначимая формула 5, 619
Финитное доказательство 1, 112
K-финитное представление 1, 448
K-финитный вектор 1, 448
Финслеров метрический тензор 5, 622
Финслерова геометрия 4, 1008; 5, 621—624
Финслерова метрика 5, 624
- метрическая функция 5, 621
Финслерово многообразие 5, 624
Финслерово пространство 5, 621, 624
Финслерово пространство обобщенное 5, 624
Фиттинга подгруппа 5, 626
- разложение 1, 674
Фиттингова нуль-компонента 2, 736
Фишера группы 5, 149
Фишера информационное количество 4, 867, 5, 626
- преобразование 5, 34
Фишера F-распределение 5, 626
Фишера z-распределение 5, 627
Фишера — Грайса группа 5, 149
Фишера — Рисса интегральное уравнение 2, 310
Фишера — Снедекора распределение 5, 626
Флаг 5, 628, 629
Флаговая структура 5, 628
Флаговое многообразие 5, 628
Флаговое пространство 5, 629
Флойда метод в программировании 4, 652
Флоке представление 2, 773; 5, 630
- теорема для дифференциальных уравнений 3, 313
Флоке теория 5, 630
Флоке — Ляпунова теорема 5, 630, 631
- - - о матрицантах 3, 312
Флюктуационно - диссипационная теорема 1, 579
Фока пространство 5, 631—633
- формула 4, 200
Фока — Артина дуга 2, 138
Фокальная кривая 2, 325; 3, 799
- ось гиперболы 1, 988
- - эллипса 5, 977
- плоскость 2, 1015
- поверхность 2, 1015; 5, 613
- полоса 2, 325
Фокальная сеть 2, 1015; 5, 633
- точка 3, 824; 5, 613
Фокальное многообразие 5, 612
Фокальный параметр гиперболы 1, 988
- - эллипса 5, 978
Фоккера — Планка уравнение 2, 362; 5, 633
Фоковское пространство 5, 631
Фокус 4, 122; 5, 633
- гиперболы 1, 987
- лемнискаты 3, 234
- луча 2, 1015
- овала Кассини 2, 759
- параболы 4, 191
- эллипса 5, 977
Фокусное расстояние 1, 987; 5, 977
Фонема 5, 254
Форма 3, 753, 5, 634
- автоморфная 1, 79
Форма алгебраической группы 5, 634
- антиэрмитова 5, 1021
- ассоциированная 5, 863
- бемольная 1, 410
- билинейная 1, 482
- - интегральная 1, 482
- бинарная 1, 487
- Бланчфилда 5, 489
-, внешнее произведение 1, 731
- внешняя 1, 735, 2, 732
- высказывательная 4, 698; 5, 637
- гамильтонова 5, 519
- гармоническая 1, 873
-, гессиан 2, 896
- гиперболическая 1, 713
- голоморфная 1, 1028
- диезная 2, 134
- дизъюнктивная нормальная 2, 135
- дифференциальная 2, 262
- замкнутая 2, 263
- именная 2, 525; 5, 637
-, инвариант 2, 540
- интегро-степенная 2, 614
- квадратичная 2, 776
- - бинарная 1, 486
- - интегральная 1, 482
- - первая 4, 234
- кватернарная 2, 838
- - квадратичная 2, 837
- Киллинга 2, 858
- контактная 2, 1060
- конъюнктивная нормальная 2, 1102
- косоэрмитова 5, 1021
- коэрцитивная 3, 71
- кривизны 3, 102, 311
- кручения 3, 130, 132
- кубическая 3, 142
- кусочно линейная 2, 264
- кэлерова 3, 155
- Кэли 3, 158, 5, 863
- Леви 1, 272
- линейная 2, 732; 3, 318, 319, 320, 377
- n-линейная 4, 406
- Лиувилля 4, 1156
- Маркова 1, 948
- метрическая 3, 668; 4, 234
- Милнора 5, 489
- модулярная 3, 786
- нейтральная 1, 713
- неотрицательная 4, 462
- неположительная 4, 462
- нормальная 3, 1052
- - предваренная 4, 555
- первая основная 3, 668
- полилинейная 4, 406
- положительно определенная 4, 430
- - - эрмитова 4, 430
- полуопределенная 4, 462
- полуторалинейная 4, 469
- полярная 2, 796, 1032
- предваренная 4, 656
- пренексная 4, 555
- пропозициональная 4, 698
- пространственная 4, 518, 709
- Пфаффа 4, 733; 4, 777
- рефлексивная 2, 866
- связности 4, 1095
- смещения 5, 251
- тёплицева индефинитная 5, 337
- точная 2, 263
- Фубини 5, 675
- характеристическая 2, 298, 814
- Ходжа 3, 156
- Чжоу 3, 159
- эрмитова 5, 1021
1-форма 2, 733
p-форма 2, 262, 733
PL-форма 2, 264
s-форма 2, 735
Форма-вычет 1, 817
Формализации метод 2, 368; 5, 635
Формализм 5, 636
- канонический 1, 860
Формализованная арифметика, неполнота 1, 112
Формализованный язык 5, 636—638
Формальная аксиоматическая теория 3, 653
- арифметика 1, 319
- ветвь 3, 1035
- грамматика 1, 1087
Формальная группа 5, 638
- деформация 2, 105, 107
Формальная производная 3, 805; 5, 639
- размерность представления 2, 202
Формальная система 3, 653; 5, 639
- - Гейтинга 1, 911
- - Генцена 1, 919
- схема 2, 106
- теория, модель 2, 371
- - разрешимая 2, 371
Формально действительное поле 5, 527
- жесткая алгебра 2, 108
- непротиворечивая система 3, 998
- неразрешимая система 1, 909
- неразрешимое предложение 3, 1004
- самосопряженный дифференциальный оператор 5, 108
Формальное аксиоматическое исчисление 3, 653
- многообразие 3, 154
Формальное произведение 5, 640
Формальный главный G-объект категории 1, 1018
- групповой закон 5, 638
Формальный математический анализ 5, 641
- росток 3, 1035
Формальный степенной ряд 5, 642
Формальный язык 5, 643
Формальный язык, представимый машиной 5, 644
- - программирования 1, 222
Формальных систем эквивалентность 5, 645
Формация 5, 519
Формула 1, 124, 157; 3, 417; 5, 645; см. также соответствующее название
Формульная модель 3, 714
Формульный автоморфизм 1, 199
- образ 4, 1105
Форсинг-метод 1, 783
Фортран 5, 645
Фосса поверхность 5, 646
Фосса сеть 5, 646
Фрагмена — Линделёфа теорема 5, 646—648
Франклина система 4, 87; 5, 648
Франкля задача 5, 47
Франца кручение 4, 953
Фраттини подгруппа 5, 649
Фредгольма альтернатива 2, 420; 5, 84, 649, 651
- интегральное уравнение 3, 1027
- каноническое уравнение 3, 1027
- минор 5, 653
Фредгольма оператор 5, 650, 1038
- - интегральный 2, 605; 5, 660
- определитель 5, 653
- ряд 5, 653
Фредгольма теоремы для интегральных уравнений 5, 650
Фредгольма уравнение 2, 591; 5, 651—656
Фредгольма уравнение; численные методы решения 5, 656—660

Фредгольма ядро 2, 604; 5, 660, 1039
Фредгольмов оператор 3, 373, 1027, 5, 661
Фредгольмова краевая задача 3, 76
Фредгольмово уравнение 3, 1027
Фредгольмовость задачи 2, 305
Фрезера диаграмма 5, 661
Фрейденталя бикомпактное расширение 5, 662
- единица 4, 471
- теорема о надстройке 1, 1067
- формула 3, 90
Фрелихера — Нейенхёйса теорема жесткости 2, 103
Френе репер 3, 892
Френе трехгранник 2, 250; 3, 892; 5, 662
Френе формулы 2, 250; 5, 663
Френеля интегралы 5, 663
Фреше вариация 5, 664
Фреше дифференциал 1, 274; 5, 664
- - оператора 3, 960
- кривая 5, 665
- неравенство в математической статистике 4, 867
Фреше поверхность 5, 665
Фреше производная 5, 666
- - оператора 3, 960
Фреше пространство 5, 380, 666
- -, Джеймса теорема 2, 44
- пучок 2, 904
- фильтр 5, 615
Фреше — Урысона пространство 4, 1104
Фридмана — Келлера обобщенные уравнения 5, 451
Фридмановская модель 3, 40
Фридрихса неравенство 5, 666
- расширение 4, 905
- теорема о полуограниченных операторах 4, 462
Фробениуса автоморфизм 1, 849; 5, 667
- гипотеза 5, 284
- теорема двойственности 2, 559
- - о конечных группах 3, 1064
- - о структурах Пфаффа 4, 775
- - об алгебрах 2, 1022
Фробениуса теорема об ассоциативных алгебрах 5, 668
- - о инволютивных распределениях 2, 547
Фробениуса теорема об уравнениях Пфаффа 5, 668
- условие 1, 759
Фробениуса формула 5, 669
Фробениуса эндоморфизм 5, 669
Фробениусова алгебра 5, 669
- нормальная форма матрицы 3, 1054
Фроммера метод 5, 670—672
- нормальная область 4, 1107
- сектор 4, 1107
Фронт волновой 5, 672—674
Фронтальная плоскость проекций 3, 895
Фруда число 5, 674
Фубини интерпретация 5, 674
- нормаль 4, 668
Фубини теорема об интегралах 5, 674
Фубини форма 5, 675
Фубини — Пика кубическая форма 1, 354
Фубини — Штуди метрика 5, 675
Фукса класс дифференциальных уравнений 1, 252; 5, 676
- тождество 5, 676
Фукса уравнение 5, 676—678
- условие для регулярных особых точек 4, 934
Фуксова группа 2, 876; 5, 678—680
Фундаментальная группа 5, 680
- конструктивная последовательность рациональных чисел 2, 1055
- лемма математической статистики 3, 928
- матрица 2, 766; 3, 340
Фундаментальная область 5, 681
- - дискретной группы 2, 196
- - приведения 2, 788
- окружность 4, 1090
Фундаментальная последовательность 2, 76; 3, 670; 5, 682
- прямая 4, 1089
- регулярная полугруппа 4, 935
Фундаментальная система решений 5, 682
- - - системы линейных уравнений 3, 358
- теорема Гартогса 1, 893
- функция оператора 4, 453
- - ядра 2, 591
Фундаментальное значение (число) ядра 2, 591
Фундаментальное решение 2, 298; 3, 609; 5, 683
- - дифференциального оператора 3, 1109
- - линейного эллиптического уравнения 3, 363
Фундаментальный группоид 5, 684
Фундаментальный класс 4, 73; 5, 684
Фундаментальный коцикл 5, 685
- симплекс 5, 168
- тензор 3, 668
Фундаментальный цикл 5, 685
- - особенности 4, 120
Фундирования аксиома 1, 106
Фундированное дерево 5, 421
Функтор 5, 685
- аддитивный 1, 89
- гипергомологий 1, 1005
- гиперкогомологий 1, 1006
- гомологический 1, 1057
- гомотопически инвариантный 1, 1062
- Гротендика 1, 1134
-, индуктивный предел 2, 557
- интерполяционный 2, 629
- ковариантный 2, 762
- когомологий 5, 1024
- когомологический 1, 1058; 2, 926
- контравариантный 2, 762
-, левая производная 1, 1050
- многоместный 3, 740
- мотивных когомологий 3, 833
- непрерывный 3, 994
- нормализованный 1, 20
- относительный производный 4, 143
- представимый 4, 582
- представляющий 4, 582
- производный 4, 691
- семейств 3, 772
- сечений 4, 1119
- сингулярный 4, 1162
- сопряженный 5, 89
- точек 5, 278
- точный 5, 409
***K*-функтор** 5, 686
Функторалгебра 5, 167
Функторный морфизм 5, 687
Функции асимптотически равные 4, 498
- Вебера 4, 200
- Вебера — Эрмита 4, 200
- лемнискатные 3, 234
- одного порядка 4, 498
- ортогональные 4, 90
- параболического цилиндра 4, 200
- эквивалентные 4, 498
Функций алгебра 1, 131; 2, 986
Функций действительного переменного теория 5, 688—690
- комплексного переменного приближение 4, 624
Функций комплексного переменного теория 5, 690—692
- метрическая теория 3, 660
Функций теория 5, 692
Функционал 5, 692
-, абсолютная величина 4, 479
- аналитический 1, 277
- Банаха — Мазура 1, 379
- билинейный 1, 485
-, вариация 1, 608
- Владимирова 4, 249
- вогнутый 1, 803
-, выпуклость 1, 800
- выпуклый 1, 803
-, вычислимость по Банаху — Мазуру 1, 379
- σ-гладкий 3, 643
- τ-гладкий 3, 643
-, градиент 3, 960
- Дирихле — Дугласа 4, 218
- квазирегулярный 1, 621
- корреляционный 5, 214
- линейный 1, 644; 3, 320, 370, 377
- мультипликативный 5, 746
- наилучшего приближения 3, 870
- нелинейный 3, 962
- непрерывный 3, 994
- опорный 4, 29
Функционал от марковского процесса 5, 692
- плотный 3, 643
- положительный 4, 435
-, полярное разложение 4, 479
- регулярный 1, 621
- Рэлея 2, 689
- свободный энергии, Боголюбова неравенство 1, 509
- сглаживающий 3, 934
-, слабая сходимость 3, 1104
- стабилизирующий 3, 933
- характеристический 5, 765
- эллиптический 1, 621
- эффективный 2, 1052
Функционалов направляющих метод 3, 890
Функциональная группа 2, 876
- - гомологии (когомологии) 2, 954
- когомологическая операция 2, 923
- константа 2, 1036
Функциональная отделимость 4, 140; 5, 694
Функциональная производная 5, 694
Функциональная система 5, 694—696
- эквивалентность рекурсивных функций 1, 230
Функционально замкнутое пространство 5, 796
- отделимые множества 5, 391
- полная система 1, 128
- - универсальная алгебра 5, 498
- полный список формул 4, 695
- хаусдорфово пространство 5, 694
Функциональное бинарное отношение 1, 488
Функциональное исчисление 4, 579; 5, 696
- - минимальное 3, 692
- - от нормального оператора 5, 121
Функциональное отношение 5, 697
- поле 1, 178
- пространство, вложение 1, 723
- расширение 5, 796
- соответствие 5, 78
Функциональное уравнение 5, 698—700
- - для *L*-функции Дирихле 2, 189
Функциональное уравнение; методы решения 5, 700—705
- - Римана 2, 113
- - Эйлера 1, 867
- - ζ-функции 2, 1006
Функциональной полноты свойство 3, 715
- эквивалентности отношение 5, 945
Функциональные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными 2, 318
Функциональный анализ 5, 705—712
- - нелинейный 3, 962
- интеграл 2, 568
- класс Гельдера 4, 1173
Функциональный определитель 5, 712
- ряд 4, 1068
- элемент 1, 50, 55; 5, 301
- - автомата 1, 75
Функционирование конечного автомата 1, 53
Функция 5, 712—720
- абелева 1, 22
- абсолютно интегрируемая 1, 38
- - непрерывная 1, 34
- абстрактная 3, 1119
- автоморфная 1, 79
- аддитивная 1, 94, 3, 636
- алгебраическая 1, 174
- алгебры логики 1, 124, 553; 4, 699
- амплитудно-фазовая 4, 241
- аналитическая 1, 261, 262, 265, 266, 268; 5, 690
- - абстрактная 1, 274
- - полная 4, 413
-, аналитическое продолжение 1, 283
- Ангера 1, 289
- антианалитическая 1, 292
- антиголоморфная 1, 292
- арифметическая 1, 322
- - аддитивная 1, 89
- асимптотически моногенная 3, 804
- Бейтмена 1, 406
- бесконечно большая 1, 435, 456
- бесконечно малая 1, 435, 456; 4, 498, 559
- бесселева 1, 460; 5, 820
- Бесселя 1, 462
- Бибербаха — Эйленберга 1, 467
- бигармоническая 1, 470
- билинейная 1, 484
- Бляшке 1, 508
- большого размаха 3, 1058
- борелевская 1, 535
- булева 1, 553
- - случайная 1, 1111
- Бурже 1, 565
- Бэра 1, 567
- бэровская 1, 535, 567
-, вариация 1, 606, 608
- Вебера 1, 612
- Вебера — Эрмита 1, 612
- векторная 1, 636, 651
-, верхний предел 1, 670
- весовая 1, 674; 2, 793
- включения 3, 1107
- вогнутая 1, 738, 793
- возрастающая 1, 749; 3, 814
- возрастная 1, 749
- восстановления 1, 757
- вполне аддитивная 1, 758
- - регулярного роста 5, 799
- выбора 1, 772
- выборочная 1, 776; 5, 11
- выигрыша 1, 781; 2, 471; 5, 529, 532
- выпуклая 1, 793, 795; 3, 854
- - сильно 1, 1100
- - строго 1, 793
- *p*-выпуклая 4, 728
- вычислимая 1, 227, 818
- Гамильтона 1, 855
- Ганкеля 1, 870
- гармоническая 1, 875; 2, 239; 3, 205
- - телесная 5, 882
- Гартогса 4, 336
-, гессиан 1, 955
- гиперболическая 1, 991
- - показательная 4, 27
- гипергеометрическая 1, 1001
- - вырожденная 1, 804
- - обобщенная 1, 1003
- гладкая 1, 1021
- голоморфная 1, 262, 268, 269, 1029; 4, 20, 48, 1014
- Гранди 2, 475
- Грина 1, 1126; 2, 178
- - в статистической механике 1, 1131
- - комплексная 1, 1131; 5, 889
- - обобщенная 1, 1128, 4, 531
-, двойной предел 2, 28
- двоякопериодическая 2, 50
- действительная 2, 70, 5, 716
- действительнозначная 5, 715
- действия 4, 43
- делимости на число 2, 84
- детерминированная 3, 1161
- диезная 2, 135
- Дирихле 2, 188
- дискриминантная 2, 213
- диссипативная 2, 227
- дифференциальная 4, 901
- дифференцируемая 2, 235, 270 273, 275, 354; 4, 689

- - в смысле комплексного анализа 1, 262, 268
- дробно-линейная 2, 384
- дробно-рациональная 2, 387; 4, 917
- Жуковского 2, 426
- замкнутая 3, 854
- замкнутая система 2, 434
- звездообразная 2, 449
- y-знакоопределенная 5, 574
- m-значной логики 3, 714
- измеримая 2, 297
- - сильно 1, 541
- инвариантная 4, 535
-, индекс 4, 1173
- интегральная показательная 2, 577
- A-интегральная 2, 566
- интегрируемая 2, 612
- - в смысле Римана 4, 992
- - - - Хинчина 5, 786
- - по функции 5, 226
- интегрирующая 5, 226
- интенсивности отказа 3, 854
- интервальная 2, 617
- квазибелева 2, 798
- квазипериодическая 2, 818
- квазисобственная 2, 805
- Кёбе 1, 466; 2, 669, 842
- Кельвина 2, 845
-, композиция 4, 1214
- конечно аддитивная 3, 636
- конструктивная 2, 1049, 1056
- концентрации 2, 1101
- корреляционная 3, 23
- кратногармоническая 3, 89
- кратности 1, 379
- кривизны 5, 50
- критическая 3, 114
- круговая 3, 1135
- кручения 5, 252
- Куммера 1, 804
- Ламе 5, 446
- Лебега 3, 217
- Леви 4, 213
- лексическая 3, 567
- линейная 3, 319
- n-линейная 4, 406
- логарифмическая 3, 407
- логарифмически плюрисубгармоническая 4, 336
- логарифмически - субгармоническая 3, 409
- логическая 3, 416
- локально интегрируемая 3, 430
- лучевая 1, 945, 3, 463
- мажорантная 3, 476
- Макдональда 1, 458
- мероморфная 1, 265, 3, 647
- метагармоническая 4, 403
- минимальная 4, 1125
- минорантная 3, 476
- мировая 3, 704
- многозначная 3, 720
- многолистная 3, 723

Функция множеств 5, 720
- множества, абсолютная непрерывность 1, 35
- - регулярная 4, 937
-, множество значений 3, 1099
- модулярная 3, 788
- моногенная 3, 67, 802
- монодромная 3, 809
- монотонная 3, 813
- мощности 5, 182, 186
- мультипликативная арифметическая 3, 840
- надежности канала 4, 186
- наилучшего приближения 4,605
- невозрастающая 5, 466
- недифференцируемая 3, 909
- неисправности 3, 858
- непрерывная 3, 983
- неубывающая 1, 749
- нечетная 3, 1031
- неявная 3, 1032, 1035
-, нижний предел 1, 670
- нормальная 3, 1069; 4, 568
-, носитель 3, 1082
-, нуль 3, 1082
- нумерически представимая 3, 1088
-, область значений 3, 1099
-, область определения 3, 1099
- обобщенная 3, 1104
- обратная 3, 1132
- - гиперболическая 3, 1134
- - тригонометрическая 3, 1135
- общерекурсивная 1, 820; 3, 1147; 4, 960
- объема 3, 659
- овражная 3, 1153
- ограниченного вида 3, 1159
- ограниченно - детерминированная 3, 1160
- ограниченной вариации 3, 1162
- - -, Жордана разложение 2, 421
- однолистная 1, 266; 3, 1163
- однопериодическая 3, 1172
- однородная 3, 1173
- операторная 4, 27
- опорная 1, 797; 4, 29
-, ортогональная система 4, 85
-, ортонормированная система 4, 105
- остаточная 3, 1161
- от оператора 5, 709
-, отрицательная вариация 4,161
- параболическая показательная 4, 27
- параболического цилиндра 1, 612
-, параметрическое представление 4, 219
- Пенлеве 4, 233
- первообразная 2, 563, 579; 4, 237
- передаточная 4, 240
- перехода 4, 895
- переходная 4, 259
-, период 4, 265, 268
- периодическая 4, 267
- плюригармоническая 4, 334
- плюрисубгармоническая 4, 335
- плюрисупергармоническая 4, 337
- поверхностная 4, 338, 5, 50
- пограничного слоя 3, 503
- подчиненная 4, 384
- подчиняющая 4, 384
- показательная 4, 390
- полезности 3, 587; 4, 399
- полианалитическая 4, 402
- полигармоническая 4, 403
- полилинейная 4, 406
- полиномиальная 4, 408
- полиэдральная 5, 889
-, полное изменение 4, 423
- положительно определенная 4, 431; 5, 739
- полунепрерывная 4, 460
- пороговая 5, 302
- последования 4, 505, 576
- потенциальная 4, 519, 536
- потерь 4, 537
- Похгаммера 1, 804
- почти инвариантная 4, 598
- - периодическая 1, 375; 4, 543
- - комплексная 1, 382
- правдоподобия 2, 644; 3, 483; 4, 176; 5, 173
- правильная 4, 937
-, предел 4, 558
- представляющая 4, 598
-, приближение 4, 603
- примитивная 4, 237
- примитивно рекурсивная 4, 636, 963
- приписывающая 1, 1091
- производящая 3, 791; 4, 691; 5, 758
- пропозициональная 4, 698
- простая 2, 565
- p-псевдовыпуклая 4, 728
- псевдопериодическая 4, 742
-, пучок 4, 531
- разбиения 3, 90
- размерности 4, 823
- разрешающая 4, 849, 1202
- разрешимая 4, 274, 532
- разрывная 4, 854
- Рамануджана 4, 857
- распределения 3, 1099; 4, 97, 891
- - Колмогорова 2, 955
- - Реньи 4, 974
- - совместная 5, 70
- - условная 5, 555
- - эмпирическая 5, 998
- рассеяния 2, 227
- Рауса 4, 752
- рациональная 3, 754; 4, 917
- регрессии 4, 929
- регулярная 1, 265; 4, 937
- рекуррентная 4, 954
- рекурсивная 4, 960; 5, 833
- решающая 4, 979
- Римана 2, 312; 4, 993
- - для задачи Гурса 1, 1151
- Римана — Шварца 5, 888
- риска 4, 1033; 5, 192
-, росток 4, 1054
-, свертка 4, 1075
- сигнализирующая 1, 1092
- сильно плюрисубгармоническая 4, 336
- - p-псевдовыпуклая 4, 728
- - субгармоническая 5, 264
- симметрическая 4, 1144
- сингулярная 4, 1171
- скачков 4, 1198
- Сколема 4, 1202
- Скулема 4, 1202
- слабо голоморфная 3, 1064
-, след 1, 724
- сложная 4, 1214
- случайная 5, 10
- смешанная поверхностная 5,50
- собственная 5, 58, 59
- сопряженная 5, 82
- спектральная 3, 1110; 4, 814; 5, 118, 119, 212, 910
- специальная 5, 136
- спроса 3. 587
- сравнения 5, 160
- Стеклова 5, 215
- степенная 5, 216
- строго возрастающая 1, 749
- - монотонная 3, 813
- - убывающая 5, 466
- Струве 5, 248
- структурная 5, 252
- субгармоническая 2, 280; 5, 262
- - обобщенная 1, 671
- субпараболическая 5, 266
- субтепловая 5, 266
- сумматорная 5, 269
- суммируемая 2, 14; 3, 201; 5, 275
- супергармоническая 1, 890; 2, 280; 4, 403, 533; 5, 277
- - обобщенная 1, 671
- суперпараболическая 5, 278
-, суперпозиция 4, 1214; 5, 278, 715
- супертепловая 5, 278
- существенная 3, 718
- сферическая 4, 591, 598; 5, 293
- K-сферическая 5, 511
- счетно аддитивная 3, 636
- теоретико-числовая 1, 257, 322; 5, 335
- типично вещественная 3, 725; 5, 350
- точечного источника 3, 1109
- трансцендентная 5, 425
- тригонометрическая 5, 436
- убывающая 3, 814; 5, 466
- Уиттекера 5, 493
- универсальная 4, 637; 5, 499
- управляющая 5, 536
- управляющей системы 5, 534
- условно периодическая 5, 553
- финитная 5, 619
- финслерова метрическая 5, 621
- Фютера 1, 1007
- Хаара 5, 742
- Ханкеля 1, 870
- характеристическая 4, 887; 5, 739, 756
- Хаусдорфа 1, 1008
- целая 1, 265; 5, 797
- - рациональная 3, 754; 4, 917; 5, 797
- целевая 2, 677; 3, 601; 5, 799
- цели 5, 799
- цилиндрическая 5, 820
- - модифицированная 1, 461
- частичная 3, 875; 4, 960
- частично рекурсивная 1, 819, 820; 4, 960; 5, 833
- частотная 4, 241
- Чебышева 5, 847
- Четаева 5, 859
- четная 5, 859
- численнозначная 5, 715
- числовая 5, 716
- шаровая 1, 886; 5, 293, 882
- Шафаревича 1, 169
- Шварца 5, 888
- Эйлера 5, 934
- Эйри 5, 939
- Эйри — Фока 5, 940
- экспоненциальная 4, 390; 5, 953
- экспоненциального типа 5, 953
-, экстремальные свойства 5, 968
- эксцессивная 4, 535, 5, 970
- элементарная 5, 977
- эллипсоидальная гармоническая 3, 189
- эллиптическая 5, 986
- Эрмита 5, 1018
- E-функция 2, 454
- L-функция 5, 720
- Дирихле 2, 188
- N-функция 4, 74
- P-функция 4, 180
- Римана 4, 992
- $\wp$-функция Вейерштрасса 1, 621, 622
- B-функция 1, 464, 535
- Γ-функция 1, 866
- δ-функция 2, 89; 4, 20
- Дирака 3, 1105
- $\mathcal{E}$-функция Вейерштрасса 1, 620
- ζ-функция 2, 112
- Вейерштрасса 1, 621, 623
- θ-функция 5, 347
- σ-функция Вейерштрасса 1, 621, 623
- ψ-функция Гаусса 1, 869; 4, 744

Функция-оригинал 3, 197

Фунтик 4, 1165
- стандартный 5, 168

Фурье алгебра 1, 382; 5, 509
- быстрого дискретного преобразования метод 3, 697

Фурье интеграл 5, 720—722
- - на группе 1, 882
- интегральная формула 5, 720
- интегральное уравнение 3, 1030

Фурье интегральный оператор 5, 722—726
- копреобразование на группе 1, 882
- коэффициентов набор 1, 981

Фурье коэффициенты 4, 99, 544; 5, 439, 726

Фурье коэффициенты почти периодической функции 5, 726

Фурье метод 5, 726
- обобщенное преобразование 3, 1115

Фурье показатели 4, 544; 5, 727

Фурье преобразование 2, 590; 4, 294; 5, 727—729

Фурье преобразование дискретное 5, 730
- - на группе 1, 882

Фурье преобразование обобщенной функции 5, 729
- ряд 4, 99, 100; 5, 439
- -, Дирихле теорема 2, 188
- -, Карлесона теорема 2, 727
- -, Колмогорова — Селиверстова теорема 2, 959
- - обобщенный 3, 1115

Фурье ряд по ортогональным многочленам 5, 731

Фурье ряд почти периодической функции 5, 732
- -, суммирование 5, 271

Фурье ряд функции 5, 732—738
- синус-преобразование 4, 1194
- формула 5, 439
- - обобщенная 1, 883

Фурье число 5, 738

Фурье — Бесселя интеграл 5,738

Фурье — Бесселя ряд 5, 738

Фурье-гиперфункция 3, 1127

Фурье — Стилтьеса алгебра 5, 509

Фурье — Стилтьеса преобразование 5, 738, 756

Фурье — Стилтьеса ряд 5, 740

Фютера условие 1, 1007

- функция гиперкомплексного переменного 1, 1007

X

Хаара левый интеграл 2, 532
Хаара мера 5, 741
- - левая 3, 644
- - правая 3, 644
Хаара система 4, 86; 5, 742—744
Хаара условие 5, 744
- функция 5, 742
Хаара — Неймана — Вейля теорема об инвариантных интегралах 2, 532
Хадвигера гипотеза 5, 744
Хайнца неравенство 2, 283
Хамеля базис 1, 375
Хана разложение 5, 745
Хана — Банаха теорема о линейных функционалах 3, 378; 5, 745
- - - о полунормах 4, 462
- - - о функционалах 5, 86
Хана — Жордана разложение 2, 444
Хана — Мазуркевича теорема о континуумах 2, 1067
Ханкеля функции 1, 870
Ханта теорема в абстрактной теории потенциала 4, 534
Ханта — Стейна теорема в математической статистике 2, 538; 5, 745
Ханфа число 3, 929
Харады группа 5, 149
Характер алгебраической группы 5, 747
Характер C^*-алгебры 5, 746
Характер ассоциативной алгебры 5, 746
- Брауэра 2, 1021
- главный 2, 192
- - в теории чисел 1, 1019
Характер группы 4, 547; 5, 512, 747
- - унитарный 1, 882
- Дирихле 2, 181
- изотропии 1, 936
- инфинитезимальный 2, 819
-, кондуктор 2, 1015
Характер конечномерного представления полупростой алгебры Ли 5, 748
- непримитивный 2, 193
- неразветвленный 3, 1001
- первообразный 2, 192
Характер полугруппы 5, 748
- Понтрягина 4, 491
Характер представления ассоциативной алгебры 5, 749
Характер представления группы 5, 749
- примитивный 2, 192
- производный 2, 193
- системы Пфаффа 2, 734
- топологического пространства 3, 836
- топологической группы 5, 747
- - полугруппы 5, 373
- унитарного представления 5, 511
- Чжэня 5, 762, 866
- Чжэня — Дольда 5, 866
Характеризационные теоремы 5, 750
Характеризация топологическая 1, 1036
Характеристик метод 5, 751—753
Характеристика 2, 325; 3, 326; 5, 753—755
- выборочная 1, 776
- линейного дифференциального оператора 3, 366
- логарифма 3, 405
- неванлинновская 4, 887
- особенности 4, 120
Характеристика поля 4, 398; 5, 755
- сингулярного интеграла 4, 1176
- тета-функции 5, 348
- фигуры 5, 614
- частотная 5, 564
- эйлерова 5, 936
Характеристики нуль поле 4, 398
- p простое поле 1, 848
Характеристическая задача Коши 3, 63
- квадратичная форма линии 2-го порядка 3, 388
- кривая 2, 325
- линия 3, 799; 5, 753
- матрица 3, 326, 616, 765, 1053
- - логическая 3, 415
Характеристическая поверхность 2, 815; 3, 326; 5, 753, 756
Характеристическая подгруппа 5, 756
Характеристическая полоса 2, 326; 5, 756
- система 2, 326
- форма 2, 298, 814
- функция 4, 887; 5, 739
- - безгранично делимая 1, 397
Характеристическая функция в теории вероятностей 5, 756—758
- - игры 2, 1103
Характеристическая функция множества 5, 756
- - Неванлинны 2, 100
- часть сингулярного оператора 4, 1172
Характеристический детерминант 2, 300
Характеристический класс 5, 758—764
- конус 3, 327
- корень матрицы 5, 764
Характеристический многочлен матрицы 3, 616, 1053. 5, 764
- определитель оператора 5, 116
Характеристический показатель 2, 765; 3, 313, 315; 5, 764
- - Ляпунова 3, 471
- - стохастически устойчивый 5, 581
- -, устойчивость 5, 580
- - устойчивый почти наверное 5, 581
- сингулярный оператор 4, 1172
Характеристический функционал 5, 765
Характеристическое значение матрицы 5, 764
- - (число) ядра 2, 591
Характеристическое многообразие 5, 753, 766
- - линейного дифференциального оператора 3, 367
- направление 2, 325; 3, 326, 799
Характеристическое отображение 5, 766
Характеристическое уравнение 5, 764, 766
- - линии 2-го порядка 3, 388
Характеристическое число 5, 766
- - матрицы 5, 764
Характеров группа 5, 766
- - алгебраического тора 1, 179
- сумма, Виноградова оценка 1, 704
Характеров формула 5, 767
Харди вариация 5, 768
Харди классы 1, 1099; 5, 769—772
- - аналитических функций 4, 1030
Харди неравенство 5, 772
Харди преобразование 5, 773
Харди признак сходимости 5, 773
- пространство 1, 1099, 5, 789
Харди теорема об аналитических функциях 5, 773
Харди — Литлвуда признак сходимости 5, 774
Харди — Литлвуда проблема в теории чисел 5, 774
- - теорема о рядах Фурье 5, 735
Харди — Литлвуда теорема о суммируемых функциях 5, 775
- - уравнение 2, 225
Харди — Литлвуда — Рамануджана круговой метод 1, 259
Хартмана — Винтнера теорема о законе повторного логарифма 4, 347
Харшаньи решение 1, 312
Хассе инвариант 5, 775—777
Хассе принцип 2, 158; 4, 82; 5, 777
- символ 5, 776
Хассе — Минковского инвариант 5, 776
Хаттори теорема о кобордизмах 2, 891
Хаусдорфа аксиома 4, 140; 5, 390, 777
- аналитическая функция гиперкомплексного переменного 1, 1008
- классификация 2, 94
- матрица 5, 778
Хаусдорфа мера 5, 777
Хаусдорфа метод суммирования 5, 778
- метрика 3, 674
Хаусдорфа операция 5, 779
Хаусдорфа размерность 5, 779
- рекурсивная формула 1, 235
- теорема, конструктивный вариант 2, 1052
- - о компактах 2, 990
- - о непрерывных отображениях 3, 987
- - о продолжении метрики 3, 673
Хаусдорфа — Юнга неравенства 5, 728, 779
Хаусдорфова близость 1, 501
Хаусдорфова метрика 5, 779
Хаусдорфово общее преобразование 5, 778
Хаусдорфово пространство 4, 140; 5, 391, 777, 780
- расширение 4, 909
Хевисайда функция 3, 1107; 4, 127
Хегора диаграмма 5, 780
Хегора разбиение 5, 780
Хелли теорема 5, 781
- - о вариации функции 5, 781
- - о выпуклых множествах 5, 781
Хеллингера интеграл 5, 781
Хеллингера расстояние 5, 782
- тип 5, 134
Хельда — Хигмана — Маккея группа 5, 149
Хельсона множество 1, 884
Хемминга двоичный код 2, 932
- метод 2, 292
- расстояние 2, 931
Хенкина теорема о полноте 3, 929
Хёрмандера класс 4, 735
Хессенберга теорема в проективной геометрии 4, 189
- форма матрицы 2, 687
Хестенса метод 5, 92
Хефлигера структура 5, 782
- узел 2, 520
Хефлигеровский атлас 5, 782
- коцикл 5, 782
«Хи» распределение 5, 803
Хигинса проблема 1, 123
Хигмана — Симса группа 5, 149
Хигмана — Янко — Маккея группа 5, 149
Хигмена теорема о нильалгебрах 3, 1039
«Хи-квадрат» критерий 5, 784
- плотность 1, 866
«Хи-квадрат» распределение 5, 785
Хилла задача 2, 870
Хилла уравнение 1, 861; 5, 785
Хилле — Иосиды условие 2, 772; 4, 1126
- - - для резольвенты 4, 448
Хинчина интеграл 5, 786
Хинчина неравенство для независимых функций 5, 786
- принцип переноса 2, 164
Хинчина теорема 5, 787
- - о диофантовых приближениях 2, 171; 5, 787
- - о факторизации распределений 5, 787
- условие 1, 528
- формула в теории массового обслуживания 3, 546
Хинчина — Колмогорова теорема об ортонормированных системах 4, 801
Хиронака теорема о раздутии 4, 850
Хирургия 3, 825
Хирцебруха класс 4, 486
- теорема о замкнутых многообразиях 4, 492
- - о сигнатуре 5, 763
- - об индексе 2, 552
Хирша формула 3, 1178
Хиццидакиса формула 1, 332
Хичкока проблема 5, 420
Хоара логика 4, 653
Ход прогонки 4, 642
Ходжа гипотеза 5, 787
- - об алгебраических циклах 1, 180
- метрика 3, 155
Ходжа многообразие 3, 156; 5, 788
- разложение 5, 788
- - ортогональное 3, 196
Ходжа структура 5, 788
Ходжа теорема 5, 789
- - о разложении 5, 789
- - об индексе 5, 789
- фильтрация 5, 788
- форма 3, 156
Ходжа — де Рама теорема об индексе 2, 551
Холла теорема в комбинаторике 2, 975; 4, 813
Холла — Янко группа 5, 149
Холлова подгруппа 5, 789
Холловская π-подгруппа 4, 851
Хомского грамматика 1, 1092
Хопфа алгебра 5, 790
Хопфа инвариант 2, 923; 5, 791—793
- конструкция 5, 463, 793
- отображение 5, 793
- поверхность 1, 250
- постоянная 3, 679
- проблема 3, 1030
Хопфа расслоение 5, 793
- теорема о возвращении 5, 572
- - об узлах и зацеплениях 5, 476
- формула 3, 238
- - следа 3, 240
Хопфа — Адамса инвариант 5, 792
Хопфа — Адамса — Стинрода инвариант 5, 792
Хопфа — Новикова инвариант 5, 793
Хопфа — Ринова теорема о компактности 4, 426
Хопфа — Ринова теорема о римановых пространствах 5, 794
Хопфа — Стинрода инвариант 5, 792
Хопфа — Уайтхеда инвариант 5, 792
Хопфа — Хилтона инвариант 5, 792
Хопфова группа 3, 1030; 5, 794
Хорд метод 5, 794
Хорда 5, 794
Хордальная метрика 4, 910
Хордальное расстояние 4, 996
Хорновская формула 3, 767
Хорошо доступная точка границы 2, 446
Хосокавы полином 1, 233
Хотеллинга критерий 5, 794
Хотеллинга T^2-распределение 5, 795
Хохшильда группа когомологий 2, 909
Хохшильда — Серра спектральная последовательность 2, 913
Хроматический класс графа 1, 1114
- многочлен графа 1, 1114
Хроматическое число графа 1, 1113, 1120
- - двумерной поверхности 1, 1113
Хронометрический инвариант 4, 970
Хьюитта расширение 5, 796

Ц

Цассенхауза группа 5, 797
- многообразие 4, 584
Цейтена — Сегре инвариант алгебраической поверхности 1, 150
Цейтина теорема об алгоритмических операторах 2, 1052
Целая рациональная функция 3, 754; 4, 917; 5, 797
Целая точка 5, 797
Целая функция 1, 265; 5, 797—799

- -, Адамара теорема 1, 86
- -, Вейерштрасса теорема 1, 265
- -, индикатор 4, 1054
- -, R-порядок 2, 185
- - рациональная 3, 754; 4, 917; 5, 797
- -, род 4, 1049
- часть группы 5, 833
- - числа 1, 297

Целевая функция 2, 677; 3, 601; 5, 799

Целесообразное поведение автомата 1, 58

Цели функция 3, 602; 5, 799

Целое алгебраическое число 1, 196, 5, 799
- замыкание кольца 2, 64; 5, 799

Целое расширение кольца 5, 799

Целое число 2, 73; 5, 800
- - алгебраическое 1, 196
- - p-адическое 1, 100

Целозамкнутая область целостности 5, 800
- полугруппа 5, 525

Целой зависимости уравнение 5, 799

Целостная аффинная схема 1, 358

Целостное кольцо 3, 1099; 5, 800

Целостности область 2, 961; 3, 1099

Целочисленная бинарная квадратичная форма 1, 486

Целочисленное программирование 2, 678, 5, 800
- - линейное 5, 800

Целочисленности теорема 4, 540

Целочисленный автоморфизм 2, 779

Целый дивизор 2, 128, 484

Целый идеал 2, 482; 5, 801
- элемент 5, 799

Целых точек распределение 5, 801

Цель управления 1, 61

Цена 5, 529, 532
- дифференциальной игры 2, 330
- остановки 4, 508

Центиль 4, 278

Центр 4, 122, 5, 801
- альтернативного кольца 1, 238
- вращения 1, 764
- гиперболы 1, 987
- гомологии 1, 1060
- гомотетии 1, 1061
- графа 1, 1106

Центр группы 5, 802
- двоякокруговой области 2, 49
- инверсии 2, 544
- инфлекционный 2, 1002

Центр кольца 5, 802
- кривизны 2, 250, 3, 118; 5, 79
- линии 2-го порядка 2, 1034; 3, 388
- луча 2, 1003, 1015
- окружности 4, 15
- поверхности 2-го порядка 4, 344
- проектирования 4, 688
- пучка 4, 772
- радикальный 4, 808, 1123
- рассеивания 4, 892
- связки окружностей 4, 1089
- сети сфер 4, 1123
- симметрии 4, 1150
- симметрического пространства 4, 1148
- симметричного предиката 3, 718
- степенного ряда 5, 218

Центр топологической динамической системы 5, 802

Центр частично упорядоченного множества 5, 803
- чебышевский 5, 850
- шара 5, 881
- элемента аналитической функции 5, 971
- эллипса 5, 977
- эллипсоида 5, 978

Центра и фокуса проблема 5, 803

Централизатор 5, 803
-, Бергмана теорема 1, 342
G-централизатор 2, 521

Центральная аксонометрия 1, 113

Центральная алгебра 5, 804
- - с делением 1, 131
- линия 2-го порядка 2, 1034; 3, 388
- поверхность 2-го порядка 4, 344
- порядковая статистика 4, 500

Центральная предельная теорема 4, 573; 5, 804—809
- - - для цепей Маркова 3, 519
- проекция 4, 688

Центральная простая алгебра 5, 809
- разность 2, 1027
- система подгрупп 4, 368

Центральное поле экстремалей 5, 955

Центральное произведение групп 5, 809
- семейство экстремалей 5, 957

Центральные показатели 5, 809—811

Центральный индекс максимального члена ряда 3, 488
- момент 3, 791

Центральный ряд группы 3, 1042; 5, 811
- - подгрупп 4, 367
- угол 4, 16
- элемент группы 5, 802

Центрированное семейство множеств 5, 811

Центроаффинная геометрия 5, 811
- подгруппа 1, 363

Центроаффинное преобразование 5, 811

Центроаффинное пространство 5, 811

Центро-фокус 4, 122; 5, 811

Цепная дробь 5, 812—814
- - диагональная 2, 123

Цепная линия 5, 815
- пара Пуанкаре 4, 748

Цепная рекуррентность 5, 815

Цепное кольцо 4, 555; 5, 815
- преобразование 2, 589

Цепной комплекс 1, 1042; 2, 998, 1001; 4, 1163

Цепной модуль 5, 815

Цепочка Маркова 1, 948
- уравнений Боголюбова 1, 512

Цепь 1, 556, 1102; 2, 260, 953, 5, 815
- бемольная 1, 409; 2, 133
- в графе 1, 1106
- в контактной схеме 2, 1061
- в релейно-контактной схеме 4, 968
- в схеме из функциональных элементов 5, 302
- диезная 2, 133
- инцидентных полупространств 4, 83
- комплекса 2, 998
- - r-мерная 1, 1043
- лебегова 1, 411
- Маркова 1, 660; 3, 517
- -, поглощающее состояние 4, 351
- полиэдральная 4, 412
- сизигии 1, 973
- сингулярная 4, 1179
- A-системы 4, 1194
- феллеровская 5, 603
- эйлерова 2, 972

ε-цепь 1, 829

Цермело аксиома 5, 816
- аксиоматическая система 1, 105

Цермело теорема о вполне упорядоченных множествах 1, 764; 5, 816

Цермело — Неймана теорема в теории игр 4, 387

Цермело — Френкеля аксиоматическая система 1, 105

Цикл 1, 557; 2, 260, 953; 4, 381; 5, 816
- алгебраический 1, 179
- без контакта 2, 392
- в графе 1, 1106
- гамильтонов 2, 972
- гомологичный нулю 1, 1043
- истинный 1, 829; 2, 681
- исчезающий 3, 807
- комплекса 1, 1043; 2, 998
- нульмерный нормальный 3, 1074
- ограничивающий 1, 1043
- ориентирующий 4, 71
- полиэдральный 4, 413
- предельный 4, 575
- примитивный 3, 237
- сильно гомологичный нулю 4, 1205
- слабо гомологичный нулю 4, 1205
- сходящийся 1, 829
- фундаментальный 5, 685

Цикла оператор 1, 224

Циклида Дюпена 2, 396

Циклическая аппроксимация периодическими преобразованиями 1, 311
- блок-схема 1, 506

Циклическая группа 2, 1019, 5, 816
- подгруппа 4, 369

Циклическая полугруппа 3, 802; 5, 816
- прогонка 4, 643
- точка 3, 124
- частота 4, 1085

Циклические координаты 1, 859; 5, 816

Циклический автомат 1, 67
- вектор 4, 590
- индекс группы 2, 978
- итерационный процесс 3, 294
- код 2, 933
- матроид 3, 623
- метод вращений 1, 766

Циклический модуль 5, 816
- оператор 3, 1056
- период абелева дифференциала 1, 14
- - - интеграла 1, 16
- разрез 2, 712

Циклическое перемещение 4, 752
- разностное множество 4, 837
- расширение, Гильберта теорема 1, 973

Цикловая запись подстановки 4, 1141

Цикловой тип подстановки 4, 1141

Циклоида 5, 817
- высшего порядка 5, 818

Циклоидальная кривая 5, 817

Цикломатическое число графа 1, 1120

Цилиндр 4, 811; 5, 818, 819
- гиперболический 1, 992; 5, 819
- отображения 5, 818
- параболический 4, 195; 5, 819
- эллиптический 5, 819, 993

Цилиндрическая алгебра 5, 825
- винтовая линия 1, 705

Цилиндрическая конструкция 5, 818

Цилиндрическая мера 4, 580; 5, 778, 818

Цилиндрическая поверхность 5, 819
- проекция 2, 754; 4, 688
- функция модифицированная 1, 461; 3, 476

Цилиндрические координаты 5, 819

Цилиндрические функции 5, 820—825

Цилиндрическое множество 4, 580; 5, 818, 825

Цилиндроид 5, 826

Циркулярный интеграл 5, 991

Циркуляция 5, 826
- векторного поля 1, 649

Циссоида 5, 826

Циссоидальная кривая 5, 826

Цифры 5, 826—828
- арабские 1, 312
- значащие 2, 465
- римские 4, 1033
- славянские 4, 1208

Цоколь 3, 693

Цоколь модуля 5, 828

Цорна лемма в теории множеств 1, 772; 5, 828

Ч

Чаплыгина метод 5, 829
- неравенство 2, 279
- преобразование 1, 1028

Чаплыгина теорема о дифференциальных неравенствах 5, 829, 830
- уравнение 5, 45, 446

Частиц метод 5, 831

Частичная геометрия 5, 831
- многозначная когомологическая операция 2, 922
- мультиоперация 3, 839

Частичная проблема собственных значений 5, 831—833
- сумма ряда 4, 1063, 1068
- - - двойного 2, 29
- трансверсаль 3, 207; 4, 813
- функция 3, 875; 4, 960

Частично голономная сеть 4, 1122
- полуточная теория гомологии 1, 1046
- правильная программа 4, 652
- редуктивное пространство 4, 948

Частично рекурсивная функция 1, 819, 820; 4, 960; 5, 833

Частично рекурсивный оператор 5, 833

Частично упорядоченная группа 5, 833
- - лупа 3, 462
- упорядоченное кольцо 5, 526

Частично упорядоченное множество 5, 833—836
- - -, длина 2, 364
- - -, Мартина аксиома 5, 280
- - -, принцип двойственности 2, 34
- - -, простой интервал 4, 708
- - -, центр 5, 803
- уравновешенная блок-схема 1, 505

Частичного приведения к абсурду закон 4, 386

Частичного притяжения область 5, 836

Частичное вычисление 5, 418
- логическое исчисление 3, 418
- преобразование 4, 600

Частичный автомат 1, 49
- вектор 2, 831
- вычислитель 5, 418
- группоид 1, 1150
- латинский квадрат 3, 208

Частичный порядок 5, 836

Частичный предел 4, 558; 5, 836

Частичная проблема изоморфизма 2, 512

Частная производная 2, 274, 275; 5, 836
- - обобщенная 3, 1103
- - смешанная 2, 275
- теория относительности 4, 145

Частное 2, 81

Частное многомерное распределение 3, 732
- предельное множество 4, 565
- приращение 2, 274; 4, 424
- распределение 3, 513
- решение 3, 1146

Частное чисел 2, 73, 78

Частный дифференциал 2, 236, 274; 5, 837
- интеграл 2, 567, 568

Частный коэффициент корреляции 5, 837
- масштаб 2, 746

Частных кольцо 1, 341; 5, 838
- - полное 3, 422

Частота базисная 2, 338
- гармонического колебания 1, 888
- критическая 1, 864
- круговая 4, 1085
- ларморовская 2, 381
- свободного гармонического колебания 4, 1084
- собственная 1, 888
- события 1, 656
- циклическая 4, 1085

Частотная теорема 5, 839
- функция 4, 241
- характеристика 5, 564

Частотный критерий 5, 564, 565

Частоты захватывание 1, 578

Чеботарева теорема об автоморфизмах 5, 668
- - плотности 4, 401

Чебышева гиперболическая постоянная 5, 422

Чебышева квадратурная формула 5, 839
- критерий в картографии 2, 744

Чебышева метод 5, 840
Чебышева многочлены 2, 869; 5, 840, 843, 844
Чебышева неравенство в теории вероятностей 5, 842
Чебышева неравенство для монотонных последовательностей и функций 5, 842
Чебышева постоянная 5, 843
- - эллиптическая 5, 423
Чебышева система 5, 844
Чебышева теорема в теории приближений 5, 845
Чебышева теорема о дифференциальном биноме 5, 845
- - о многочлене наилучшего приближения 3, 868
Чебышева теоремы о простых числах 5, 845
- тождество 5, 846
- - для простых чисел 4, 877
Чебышева уравнение 5, 846
Чебышева функции 5, 847
Чебышева — Граве теорема в картографии 2, 745
Чебышева — Лагерра многочлены 3, 167
Чебышева — Эрмита многочлены 5, 1016
Чебышевская проекция 2, 745
Чебышевская сеть 4, 168, 247; 5, 847
- система 1, 236
Чебышевская точка 5, 847
Чебышевский альтернанс 1, 236; 5, 848
Чебышевский итерационный метод 5, 848—850
- параметр 2, 690
Чебышевский радиус 5, 850
Чебышевский центр 5, 850
Чебышевское множество 5, 850—852
- подпространство 5, 850
Чебышевское приближение 4, 604; 5, 852
Чевиана 5, 852
Чевы прямая 5, 852
Чевы теорема для треугольников 5, 852
Чезаро кривая 5, 852
Чезаро методы суммирования 5, 852
- средние 4, 23
Чена — Гретцера теорема о решетках Стоуна 5, 234
Чепмена — Энскога метод 5,853
Черная дыра 5, 461
Чёрча λ-абстракция 5, 854
Чёрча тезис 1, 215, 820; 4, 960; 5, 855
Четаева принцип 5, 855
- - вариационный 1, 600
Четаева теоремы в теории устойчивости 5, 855—857, 859
Четаева уравнения 5, 857—859
Четаева функция 5, 859
Четверная группа Клейна 4, 1141
Четверть 2, 80
Четная группа Клиффорда 5, 138
- подстановка 4, 381
Четная функция 5, 859
Четное число 5, 859
Четный овал 2, 70
- характер Дирихле 2, 192
Четырех красок задача 5, 859
Четырехвершинник 4, 664; 5, 598, 859
Четырехмерное многообразие 5, 860
Четырехспиральная полугруппа 4, 702
Четырехсторонник 4, 664; 5, 860
- полный 2; 1077
Четырехугольник Демулена 2,90
- Ламберта 3, 187
- обобщенный 5, 831
- Саккери 4, 1071
Чеха гомологии 5, 126
Чеха когомологии 2, 906, 908; 5, 861
- комплекс 2, 906; 3, 896
- ось 4, 668
- теорема о метрических пространствах 3, 674
Чеха — Поспишила теорема о бикомпактах 3, 836
Чжоу кольцо 1, 181; 5, 862
- координаты 5, 863
- лемма о сдвиге 4, 254
- - о собственных морфизмах 5, 65
- - об алгебраических многообразиях 4, 423
Чжоу многообразие 5, 862
- -, координаты 3, 159
- схема 5, 862
Чжоу теорема об аналитических подмножествах 5, 863
- форма 3, 159
Чжэня класс 3, 146; 5, 760, 864—866
- - первый 5, 759
- полином 5, 864, 865
Чжэня характер 5, 762, 866
Чжэня число 5, 867
Чжэня — Дольда характер 5, 866
Чирнгаузена квадратриса 2, 793
Чисел теория 5, 868—870
- - аддитивная 1, 91
- - алгебраическая 1, 164
- - аналитическая 1, 254
Чисел теория вероятностная 5, 870—873
- - геометрическая 1, 944
- - метрическая 3, 662
- - элементарная 5, 974
Числа ассоциированные 1, 166
- Бернулли 1, 425
- взаимно простые 1, 690
- дружественные 2, 390
- Клиффорда 1, 240
- Клиффорда — Липшица 1, 1008
- Кристоффеля 3, 110
- многоугольные 1, 324
- пифагоровы 2, 169; 4, 291
- псевдослучайные 4, 743
- тетраэдрические 1, 324
- треугольные 1, 324
- Фибоначчи 5, 611
- фигурные 1, 324
Численное дифференцирование 2, 353, 625
- интегрирование 2, 612, 624
- преобразование Лапласа 3, 198
Численнозначная функция 5, 715
Численные методы вариационного исчисления 1, 586
- - газовой динамики 1, 835
- - решения уравнений гиперболического типа 1, 993
Численный метод итерационный 3, 293
- - прямой 3, 293
Числитель 2, 389; 5, 873
Число 5, 873—878
- абсолютно нормальное 3, 1071
- p-адическое 1, 99
- алгебраическое 1, 195, 260
- алгоритмическое 5, 314
- Бетти 1, 99, 464, 627
- вещественное 1, 690; 2, 73
- вращения 2, 767
- гауссово 1, 197, 905
- - простое 1, 905
- гиперкомплексное 1, 1008
- двойное 2, 31
- действительное 2, 73
- дефектное 4, 904
-, дробная доля 2, 382
- дуальное 2, 31
- e 2, 397
- идеальное 1, 166; 2, 484
-, индекс 5, 152
- иррациональное 2, 75, 666
- -, Александрова — Урысона теорема 2, 96
-, каноническое представление 4, 876
- кардинальное 2, 723; 3, 837
- Картана 2, 734
- квазипростое 2, 819; 4, 883
- Кокстера 4, 159
- комплексное 2, 1007
- Кэли 3, 160
- Лебега 3, 217
- Лефшеца 2, 554; 3, 240
-, мантисса 2, 443
- Милнора 4, 119, 129
- мнимое 2, 1007; 3, 708
- многоугольное 3, 752
- натуральное 2, 73; 3, 892
- неперово 2, 397; 3, 975
- нечетное 3, 1031
- нормализованное 2, 443
- нормальное 3, 1070
- обратное 2, 73
- обусловленности 4, 419, 420, 833
- ординальное 1, 783; 4, 69, 501
- отрицательное 2, 73, 76, 77
- паракомплексное 2, 32
- Пикара 4, 283
- положительное 2, 73, 76, 77
- Понтрягина 4, 491
- порядковое 4, 501
-, порядок 2, 443
- почти простое 4, 548
- производное 3, 805, 4, 690
- простое 4, 706
- противоположное 2, 73, 77
- псевдослучайное 5, 20
- рациональное 1, 260; 2, 74; 4, 922
- Рейнольдса 4, 954
- связности 4, 1096
- - многообразия 2, 54
- слабо нормальное 3, 1071
- случайное 5, 20
- собственное 5, 764
- совершенное 5, 70
- составное 4, 706
- сплетения 5, 148
- Стирлинга 2, 976; 4, 830
- Струхаля 5, 256
- Стэнтона 5, 261
- Тамагавы 5, 319
- трансфинитное 2, 723; 4, 501; 5, 421
- трансцендентное 1, 260; 5, 426
- треугольное 5, 429
- узловое 5, 314
- Фибоначчи 5, 611
- фигурное 5, 614
- Фруда 5, 674
- Фурье 5, 738
- характеристическое 5, 764, 766
- целое 2, 73; 5, 800
- - алгебраическое 5, 799
- четное 5, 859
- Чжэня 5, 867
- чисто мнимое 2, 1008
- Штифеля 5, 904
- Штифеля — Уитни 5, 904
- эйлерово 5, 937
Числовая последовательность сходящаяся 5, 307
- прямая 2, 78
- - расширенная 1, 443
- решетка, Блихфельдта теорема 1, 946
- функция 5, 716
Числовое поле 5, 878
- пространство 1, 325
Числовой инвариант 5, 376
- оператор 4, 26
- ряд 4, 1063
- - сходящийся 5, 307
Числовые характеристики графов 1, 1120
Числовых функций асимптотика 5, 878
Чистая коса 3, 32
- линейная полугруппа 4, 553
- подгруппа 4, 1116; 5, 880
- стратегия 4, 386
- структура Ходжа 5, 788
Чисто мнимое число 2, 1008; 3, 708
- несепарабельное расширение 4, 1114
- несепарабельный элемент 4, 1114
- трансцендентное расширение 5, 426
Чистого размножения процесс 4, 261, 1051
Чистое исчисление предикатов 3, 418
- расширение 4, 908
Чистый многосторонний канал 2, 702
Чистый подмодуль 5, 879
Чудакова теорема о четных числах 1, 92
Чэна гипотеза о двух кардиналах 4, 1202

Ш, Щ

Шаг бар-индукции 1, 393
- винтовой линии 1, 706
- индукции 3, 564
- индукционный 2, 558
- решетчатого распределения 4, 984
- таблицы 2, 291
Шагов метод 2, 295
Шаговый множитель 3, 490
- процессор 1, 225
Шаля соотношение 1, 362
Шаля теорема в геометрии 5,881
- - о полярных треугольниках 4, 990
Шапиро — Лопатинского условие 5, 992
- - - нётеровости краевой задачи 3, 361
- - - эллиптичности граничной задачи 4, 1135
Шапка 5, 881
Шар 5, 881
- Данделена 2, 12
- по полунорме 5, 379
Шара проблема 3, 119
Шарва приведение квадратичных форм 2, 789
Шарлье многочлены 5, 882
Шарлье распределение 5, 882
Шаровая точка 3, 97; 4, 15
Шаровая функция 1, 886; 5, 293, 882
Шаровой сегмент 4, 1101
- сектор 4, 1106
- тензор напряжений 3, 891
Шаудера базис 1, 377, 492
Шаудера метод 5, 882—884
- принцип 3, 976
- система 5, 584
Шаудера теорема о неподвижной точке 5, 884
Шаудера — Тихонова теорема о локально выпуклых пространствах 3, 429
- - - о неподвижной точке 5, 385
Шаудеровского типа оценка 5, 884
Шафаревича функция 1, 169
Шафаревича — Тейта группа 1, 847
Шварца альтернирующий метод 5, 884
Шварца дифференциал 5, 885
Шварца дифференциальный параметр 5, 885
- задача 5, 885
Шварца интеграл 5, 885
- интегральная формула 5, 886
- лемма в теории конформных отображений 1, 1000
- -, инвариантная форма 4, 282
Шварца лемма о регулярных функциях 5, 886
- оператор 5, 886
Шварца поверхность 5, 887
- постоянные 2, 59
- принцип симметрии 4, 1138
- производная 4, 995; 5, 885,888
- пространство 5, 666
- симметризация 4, 1137
Шварца симметрическая производная 5, 887
- теорема о минимальных множествах 3, 691
- - о римановых поверхностях 4, 1019
- - о ядре 5, 1030
Шварца теорема симметрии 5, 888
Шварца уравнение 1, 252; 5, 888
Шварца формула 5, 888
Шварца функция 5, 888
Шварца ядро 5, 886, 889
Шварца — Иенсена формула для мероморфных функций 2, 488
Шварциан 3, 1165; 5, 885
Шварцшильда метрика 5, 889
Шварцшильда поле 5, 890

Шварцшильдовская сфера 5, 890
Шевалле базис 3, 274
Шевалле группа 5, 890
- теорема о морфизмах 2, 1054
- - о полуинвариантах 4, 457
- - о сравнениях 1, 191, 5, 154
- - о топологии локального кольца 3, 438
Шеннона метод 2, 939
Шеннона теорема в теории информации 2, 941, 5, 891
- - о кодировании 2, 649, 650, 651
- функция 3, 859
- энтропия 2, 940
Шёнфлиса гипотеза 5, 892
- теорема о простой дуге 2, 423
Шепли вектор 5, 892
- игра 5, 238
Шеппарда поправки 5, 892
Шерка поверхность 5, 893
Шестисторонник Брианшона 1, 548
- Шлефли 2, 1080
Шестиугольная ткань 5, 356, 357
Шестиугольности условие 2, 439
Шефердсона — Стургиса машина 3, 627
Шеффера штрих 5, 894
Шефферова функция 3, 717
Шефферса аналитическая функция гиперкомплексного переменного 1, 1007
Шилова граница 2, 965, 987
- теорема о максимальных идеалах 2, 985
Шилова — Бишопа теорема о равномерных алгебрах 4, 786
Ширина тела 4, 519
Широкая сходимость 5, 313
Широта интердециальная 2, 108, 617
- интерквартильная 2, 617
- интерсекстильная 2, 617
Ширшова проблема о нильалгебрах 3, 901
- теорема о йордановых алгебрах 3, 901
- - о нилькольцах 3, 1040
- - о свободных алгебрах Ли 3, 282, 902
Шкала 3, 765, 1044; 4, 696
Шлемильха — Роша форма остаточного члена 5, 323
Шлефли двойной шестисторонник 2, 1080
Шлефли интеграл 5, 894
- символ 3, 712
Шмида теорема о нильпотентной орбите 4, 155
Шмидта группа 5, 894
- процесс ортогонализации 4, 80
- теорема в теории групп 3, 124
- формула 2, 597
Шмульяна теорема о локально выпуклых пространствах 5, 384
Шнирельмана метод 5, 894
- неравенство 4, 325
- постоянная 5, 895
- теорема о плотности последовательности 5, 895
Шоке граница 2, 966
Шоке симплекс 5, 895
- теорема об измеримых множествах 2, 406
Шоттки группа 2, 877; 5, 516
- проблема 5, 1047
Шоттки теорема об аналитических функциях 5, 895
Шпеккеров ряд 5, 896
Шпеккерова последовательность 5, 896
Шпернера лемма о симплексах 5, 896
Шпехта проблема 1, 121
- - для неассоциативных колец 3, 902
- - о T-идеалах 2, 484
Шпехтово многообразие алгебр Ли 3, 241
- - колец 2, 951
Шрёдингера представление 5, 897
Шрёдингера уравнение 2, 807; 5, 897
Шрейера система 5, 898
- теорема для групп 2, 424
Шрейера — Улама — Бэра теорема о симметрических группах 4, 1142
Штейна многообразие 5, 899
Штейна пространство 5, 899
Штейнера квазигруппа 2, 802
Штейнера кривая 5, 900
- разложение 5, 49
- симметризация 4, 1137
Штейнера система 1, 506; 3, 623; 5, 901
- - троек 2, 972; 5, 901
Штейнера точка 5, 901
Штейница теорема о многогранниках 1, 802; 5, 901
Штейнова алгебра 5, 900
Штёрмера метод 5, 902
- формула 2, 293
Штифеля метод 5, 92
Штифеля многообразие 5, 903
- - комплексное 5, 759
Штифеля число 5, 904
Штифеля — Уитни класс 5, 760, 905
- - - второй 5, 759
- - - первый 5, 758
- - число 5, 904
Штраф 5, 905
Штрафа метод 4, 835
Штрафных функций метод 5, 905
Штрих Шеффера 5, 894
Штурма кривые 5, 906
- ряд 5, 907
- теорема в теории дифференциальных уравнений 5, 158, 917
Штурма теорема о корнях 5, 907
- - о разделении нулей 3, 338
Штурма — Лиувилля задача 5, 907—911
Штурма — Лиувилля обратная задача 5, 911—915
Штурма — Лиувилля оператор 5, 915
Штурма — Лиувилля уравнение 5, 916—918
Шуберта многообразие 1, 1104; 5, 918
- условия 5, 918
Шубникова — Лавеса сети 4, 293
Шум аддитивный 5, 918
- белый 1, 407
Шура базис 2, 689
- лемма о неприводимых модулях 3, 998
Шура лемма о сплетающих операторах 5, 919
- матричная функция 4, 272
Шура мультипликатор 2, 910; 5, 919
- теорема о кривизнах 4, 743, 1007
- - о пространствах постоянной кривизны 3, 100
- - об алгебре матриц 3, 612
Шура теоремы для ограниченных функций 5, 920
- форма матрицы 2, 689

Щель 3, 323
Щепина теорема в теории размерности 4, 824

Э

Эберлейна компакт 4, 717
- теорема о локально выпуклых пространствах 5, 384
- - о полных сепарабельных пространствах 2, 44
Эберлейна — Шмульяна теорема о банаховых пространствах 1, 388
Эвбулида антиномия 1, 296
Эвбулида парадокс 5, 921
Эверетта интерполяционная формула 5, 921
Эвольвента 2, 250; 5, 921, 923
Эвольвентная поверхность 5, 923
Эволюта 2, 250; 5, 922
Эволютная поверхность 5, 922
Эволюционная матрица 3, 312
Эволюционное уравнение 5, 923
Эволюционный оператор 5, 924
Эвристический алгоритм распознавания 4, 872
Эджворта ряд 5, 924
Эдмонса — Фалкерсона теорема в комбинаторике 4, 813
Эйзенштейна критерий о неприводимых уравнениях 1, 192
- ряд 5, 346
Эйконал 1, 857
Эйконала метод 2, 809
Эйконала уравнение 3, 464; 5, 924
Эйленберга — Зильбера симплекс 4, 1163
Эйленберга — Маклейна пространство 5, 925
- - симплициальное множество 4, 1163
Эйленберга — Мура конструкция 5, 447
- - спектральная последовательность 5, 107
Эйлера бета-функция 1, 464
- интеграл 2, 586
- класс 5, 760
Эйлера критерий в теории чисел 5, 925
- - для квадратичных вычетов 2, 786
- - разрешимости сравнения 3, 143; 5, 217
Эйлера метод 3, 50; 4, 1056; 5, 926
Эйлера метод суммирования 5, 927
Эйлера многочлены 5, 927
- обыкновенное дифференциальное уравнение 5, 931
- окружность 2, 63
Эйлера подстановка 5, 928
Эйлера постоянная 5, 928
Эйлера преобразование 3, 449; 5, 929
Эйлера произведение 5, 930
Эйлера прямая 2, 63; 5, 930
- рекуррентное соотношение для денумеранта 2, 91
- решение задачи трех тел 5, 431
Эйлера ряд 5, 931
- соотношение для выпуклых многогранников 1, 802
- спираль 3, 21
- теорема о графах 1, 1112
Эйлера теорема о многогранниках 3, 710; 5, 931
Эйлера тождество в теории чисел 5, 152, 768, 931
Эйлера уравнение 5, 677, 931—934
- - в вариационном исчислении 5, 932
- - функциональное 1, 867
Эйлера формула 3, 37, 97; 4, 1191; 5, 934
- - для карты 1, 1109
- - - кривизны поверхности 1, 1013; 2, 253
- - - однородных функций 3, 1173
- - дополнения 1, 867
- - связи показательной функции с тригонометрическими 4, 390
Эйлера формулы 5, 934
Эйлера функция 5, 934
- ядро 2, 586
Эйлера — Дарбу — Пуассона уравнение 5, 40
Эйлера — Кноппа метод суммирования 2, 886; 5, 927
Эйлера — Коши метод 5, 926
Эйлера — Лагранжа теорема о цепных дробях 5, 814
Эйлера — Лагранжа уравнение 3, 684, 5, 932, 934
Эйлера — Маклорена формула 2, 1028; 5, 935
Эйлера — Остроградского уравнение 3, 728
Эйлера — Пуанкаре формула 5, 936
Эйлера — Пуассона — Дарбу уравнение 2, 328
Эйлера — Родрига параметры 3, 162
Эйлера — Фурье формулы 5, 936
Эйлеров граф 1, 1113
- интеграл 1-го рода 1, 464
- квадрат 4, 90
Эйлеров класс 5, 936
- треугольник 5, 290
- цикл в графе 1, 1112
Эйлерова характеристика 5, 936
- цепь в графе 1, 1112; 2, 972
Эйлеровы интегралы 5, 937
Эйлеровы углы 5, 937
Эйлеровы числа 5, 937
Эйнштейна правило 5, 938
- - суммирования 5, 327
- пространство 4, 1044
- тензор 4, 1007
- теория гравитации 1, 1079
- - относительности 4, 146
Эйнштейна уравнения 5, 459, 938
Эйнштейна — Смолуховского уравнение 5, 938
Эйнштейново однородное риманово пространство 4, 1027
Эйри критерий 2, 744
Эйри уравнение 5, 939
Эйри функции 5, 939—941
Эйри — Каврайского критерий 2, 744
Эйри — Фока функция 5, 940
Эйткена обобщенный метод 4, 252
Эйткена схема 5, 942
Экватор 5, 291
Экваториальная плоскость тора 5, 405
Эквациональный класс 1, 185
Эквиаффинная геометрия 5, 942
- группа 1, 359
- дуга 1, 353
- кривизна 1, 353
Эквиаффинная плоскость 5, 942
- подгруппа 1, 363
Эквиаффинная связность 5, 942
Эквиаффинное кручение 1, 353
Эквивалентная проекция 2, 742, 753
Эквивалентности архимедово отношение 1, 328
- класс 5, 942
Эквивалентность 1, 124; 4, 800, 5, 942
- алгоритмов 1, 229
- базисов 1, 377
- гомотопическая 5, 397
- Какутани 5, 1011
Эквивалентность категорий 5, 943
- количественная 3, 760
- рекурсивная 4, 959
- состояний автомата 1, 78
- стохастическая 5, 240
- топологическая 3, 371; 5, 375
- унитарная 3, 371
- формальных систем 5, 645
Эквивалентные бикомпактные расширения 1, 477
- квадратичные формы 2, 777
Эквивалентные представления 4, 595; 5, 943
Эквивалентные преобразования управляющих систем 5, 943—947
- функции 4, 498
Эквивалентных возмущений метод 3, 886
Эквивариантная оценка 5, 947
Эквивариантное отображение 2, 980
Эквивариантные когомологии 5, 947
- многомерные задачи Плато 4, 307
Эквидистанта 3, 398; 5, 948
Эквидистантная проекция 2, 742
Эквилонгальное отображение 4, 1025
Эквинепрерывная полугруппа 4, 452
Экзотическая сфера 5, 288
Эконометрия 5, 948—951
Экономика математическая 3, 584
Экономики ядро 3, 589
Экономичная разностная схема 4, 846
Эксперимент безусловный 5, 342
- машинный 2, 850
- условный 5, 343
Эксперименты с автоматами 5, 951
Экспонента 4, 390; 5, 953

Экспонента группы 5, 953
- пространства 5, 953
Экспоненциальная алгебра Ли 3, 284
- группа Ли 3, 284
- - - разрешимая 3, 281
- дихотомия 2, 363, 771, 773, 3, 342
- кривая 4, 390
Экспоненциальная топология 5, 953
- устойчивость 2, 771; 5, 564
Экспоненциальная функция 4, 390; 5, 953
Экспоненциально отделенное подпространство 5, 542
- условно устойчивое решение 5, 550, 551
- устойчивое решение 5, 569
Экспоненциального типа функция 5, 953
- - - целая 5, 798
Экспоненциальное неравенство 5, 842
Экспоненциальное отображение 4, 1006, 5, 954
Экспоненциальное распределение 5, 954
Экспоненциальный рост 2, 174
Экспонирование 4, 384
Экстраординарные теории когомологий 3, 1120
Экстраполирование 5, 954
Экстраполяционный метод 2, 292
Экстраполяция 5, 954
- по Ричардсону 2, 292
- Ричардсона 4, 1042
- случайных процессов 5, 34
Экстремалей поле 5, 955
Экстремалей семейство 5, 956
Экстремаль 1, 582; 5, 932, 957—959
- ломаная 4, 853
- неособая 3, 232
- неособенная 4, 398
- особая 4, 938
- Понтрягина 4, 488
- присоединенная 5, 1054
- регулярная 4, 938
Экстремальная длина 5, 959—961
- емкостная мера 5, 1003
Экстремальная задача 5, 961
- к мосту стратегия 2, 335
- квадратурная формула 4, 35
- метрика 5, 959, 960
- порядковая статистика 4, 499
- функция области 1, 412
Экстремально несвязное пространство 4, 1096, 5, 961
- несвязный бикомпакт 4, 143
Экстремального прицеливания правило 2, 333
Экстремальной метрики метод 5, 961—963
Экстремальные задачи в теории приближений 4, 618
Экстремальные задачи; численные методы 5, 963—967
Экстремальные свойства полиномов 5, 967
Экстремальные свойства функций 5, 968
Экстремальный граф 1, 1111
- элемент 5, 590
- - кольца 1, 351
Экстремум 5, 969
-, Вейерштрасса необходимое условие 4, 52
-, необходимое и достаточное условие 1, 583
- сильный 1, 583; 4, 1133
- слабый 1, 583; 4, 1208
- условный 5, 555
- функционала, Вейерштрасса условия 1, 619
Экстремума принцип Бицадзе 5, 46
- - для гармонических функций 1, 877
Эксцентриситет 5, 633, 969
- гиперболы 1, 988
Эксцесс 2, 491; 5, 969
Эксцесса коэффициент 5, 969
- - выборочный 5, 969
Эксцессивная функция в теории потенциала 4, 535
Эксцессивная функция для марковского процесса 5, 970
Электростатическая задача 4, 1046
Элемент — см. соответствующее название
Элемент аналитической функции 1, 267; 4, 413; 5, 971
Элементарная абелева группа 5, 972
Элементарная арифметика 5, 972
- группа 2, 876
- диаграмма модели 3, 770
- дизъюнкция 1, 563
- катастрофа 1, 498
- категория 1, 1090
- конъюнкция 1, 560, 563
- мера 2, 571; 3, 637
- номограмма 3, 1045
- подсистема 3, 766; 5, 973
Элементарная система аксиом 5, 972
- ситуация 2, 143
- стратегия 2, 143
Элементарная теория 1, 215; 4, 427; 5, 972
- - вероятностей 1, 656
- - моделей 2, 1059
- - неразрешимая 1, 215
- - разрешимая 1, 215
Элементарная теория чисел 5, 974—976
- - -, основная теорема 4, 706
- трансляция 5, 417
- формация 5, 519
- формула 3, 416; 4, 578
- фуксова группа 5, 678
Элементарно эквивалентные модели 1, 103
Элементарное полиэдральное стягивание 4, 411
- расширение алгебраической системы 3, 766
- - модели 1, 103
- решение 2, 298
Элементарное событие 1, 657, 661, 666; 5, 976
Элементарные делители 5, 976
Элементарные функции 5, 977
Элементарный делитель матрицы 3, 1053
- - модуля 1, 1020
- симметрический многочлен 4, 1145
- синтаксис 4, 1185
- топос 5, 404
Элементарных событий пространство 1, 776
Эллипс 2, 1034; 3, 383, 387; 5, 977
- горловой 1, 1000, 1078
- искажений 2, 753
- нормальной кривизны 3, 1071
Эллипсоид 5, 978
- рассеивания 4, 892
Эллипсоидальная гармоника 5, 978
- гармоническая функция 3, 189
Эллипсоидальные координаты 5, 979
Эллиптико-параболического типа уравнение 5, 45
Эллиптикопараболическое уравнение 1, 810
Эллиптическая геометрия 4, 668, 987; 5, 979
- емкость 5, 423
- инверсия 2, 545
- инволюция 2, 549
- краевая задача 3, 69
Эллиптическая кривая 5, 979—983
- лемниската Бута 1, 566
- линейная алгебра Ли 4, 731
- модулярная форма 3, 786
- - функция 3, 788
- плоскость 4, 989
Эллиптическая поверхность 5, 515, 984—986
- постоянная Чебышева 5, 423
- прямая 2, 801; 4, 989
- связка окружностей 4, 1090
- - прямых 4, 1089
- - сфер 4, 1090
- сеть 4, 1123
Эллиптическая точка 2, 252; 5, 986
Эллиптическая функция 5, 986—988
- - Вейерштрасса 1, 621
- -, модуль 5, 1056
- - Якоби 5, 1054
Эллиптические координаты 5, 95, 988
- - в пространстве 5, 979
- прямые 3, 12
Эллиптический диаметр 5, 423
- дифференциальный оператор 2, 346
- - - линейный 3, 366
Эллиптический интеграл 5, 988—991
- -, модуль 3, 783
- -, обращение 3, 1139
- комплекс 2, 553
- косинус 3, 38
- луч 2, 1014
- образ 1, 622
Эллиптический оператор 3, 360; 5, 991—993
- - псевдодифференциальный 4, 738
Эллиптический параболоид 5, 993
- пучок 4, 772, 773
- сектор 4, 1106
- символ 4, 1135
- синус 4, 1191
- тип римановой поверхности 4, 1019, 1028
- трансфинитный диаметр 5, 423
- функционал 1, 621
Эллиптический цилиндр 5, 819, 993
Эллиптического интеграла амплитуда 1, 243
Эллиптического типа уравнение 5, 994
Эллиптического типа уравнение; численные методы решения 5, 994—997
Эллиптическое дробно-линейное отображение 2, 386
- поле 1, 1011
- пространство 4, 990
- псевдорасстояние 5, 423
- уравнение 2, 299, 300, 323
- - вырожденное 1, 811
- -, главное фундаментальное решение 1, 1016
- -, Грина функция 1, 1129
- -, краевая задача 3, 78
- - линейное 3, 360
- эрмитово пространство 5, 676
Эллиптичности область 5, 45
Эллиптичность по Петровскому 5, 991
- по Дуглису — Ниренбергу 5, 991
Эмдена уравнение 5, 997
Эмдена — Фаулера уравнение 5, 997
Эмпирическая дисперсия 2, 661
- линия регрессии 4, 927
- функция распределения 5, 998
Эмпирическое распределение 5, 998
Энгелев элемент 5, 999
Энгелева алгебра 3, 901; 5, 999
Энгелева группа 5, 999
Энгелевости индекс 5, 999
Энгеля теорема в теории нильпотентных алгебр Ли 3, 270
Энгеля теорема об алгебрах Ли 5, 999
- тождество 1, 123
Эндоморфизм 3, 370; 5, 1000
- метрический 3, 668
- нильпотентный 2, 421
- полупростой 2, 421; 4, 466
- присоединенный 3, 242
-, реплика 4, 975
- точный 5, 410
- Фробениуса 5, 669
Эндоморфизмов алгебра 5, 1001
Эндоморфизмов кольцо 5, 1000
Эндоморфизмов полугруппа 5, 1001
Эндоморфизмы сопряженные 1, 483
Энергетическая норма 4, 833; 5, 1003
Энергетический метод 5, 595, 1002
- спектр 5, 212
Энергетическое неравенство 5, 1002
Энергии интеграл 2, 145, 531; 5, 1002
- принцип 5, 1003
Энергия мер 5, 1002
- покоя 4, 146
Эннепера поверхность 5, 1003
Энона аттрактор 5, 246
Энриквеса поверхность 5, 985
Энтропийная теория динамических систем 5, 1003—1005
Энтропия 5, 1005
- алгоритмическая 1, 222
- вполне положительная 4, 1195
- дифференциальная 2, 267
Энтропия измеримого разбиения 5, 1006
- индивидуального объекта 1, 220
Энтропия метрическая 5, 1006
- относительная 2, 657
- топологическая 5, 375
- Шеннона 2, 940
ε-энтропия 4, 396; 5, 1006, 1008
- абсолютная 4, 494
- источника сообщений 2, 683
Эпиграф 3, 853
Эпидемии процесс 5, 1008
Эпименида парадокс 1, 296; 5, 1009
Эпиморфизм 3, 370; 5, 1009
- векторных расслоений 1, 646
- допустимый 1, 471
- канонический 5, 589
- нормальный 3, 1076
Эпитрохоида 5, 448, 1010
Эпициклоида 5, 1009
Эпиэллипс 4, 1055
Эпсилон-ординал 4, 502
Эратосфена решето 5, 1010
Эргодическая теорема 5, 1010
- - Биркгофа 1, 495
- - Биркгофа — Хинчина 5, 210
- - Бреймана 5, 1007
- - индивидуальная 1, 495; 2, 556; 3, 927; 4, 24; 5, 1007
- - локальная 4, 23
- - максимальная 3, 483
- - Маркова 1, 525
- - Неймана 3, 926
- - операторная 4, 23
- - Орнстейна — Чекона 4, 76
- - равномерная 4, 24
- - статистическая 1, 495; 3, 927; 4, 24; 5, 171
Эргодическая теория 5, 1010—1012
- -, косое произведение 3, 41
Эргодическая теория некоммутативная 5, 1012
- цепь Маркова 3, 521
Эргодический источник сообщений 2, 682
- метод Линника 3, 389
Эргодическое множество 5, 1013
Эргодичность динамической системы 5, 1013
- строгая 5, 247
Эрдейи асимптотическое разложение 1, 338
Эрдеша задача 5, 1014
Эрланга распределение 3, 520; 5, 1014
- формула в теории массового обслуживания 3, 555
Эрлангенская программа 2, 527, 5, 1015
Эрмита интерполяционная формула 5, 1015
- квадратурная формула 3, 634
- критерий устойчивости 5, 558
Эрмита многочлены 2, 869; 5, 1016
- постоянная 5, 1017
- - для лучевой функции 1, 945
Эрмита преобразование 5, 1016
Эрмита проблема 5, 1017
Эрмита тождество 5, 1017
Эрмита уравнение 5, 1017
- формула для интерполяционного многочлена 2, 634
- - для функции Вейерштрасса 1, 623

Эрмита функции 5, 1018
Эрмита — Линдемана метод 3, 289
Эрмита — Минковского гоноэдр 2, 788
Эрмитов линейный функционал 4, 1149
Эрмитов оператор 3, 375; 4, 1074, 5, 1018
- сплайн 4, 606
- элемент алгебры 4, 1148
- - банаховой алгебры с инволюцией 1, 384
Эрмитова матрица 3, 616; 5, 1019
Эрмитова метрика 5, 1019
- G-метрика 4, 717
- неотрицательная мажорантная форма 4, 717
- положительно определенная форма 4, 430
Эрмитова связность 5, 1020
- симметричность 5, 1023
Эрмитова структура 5, 1020
Эрмитова форма 5, 1021
Эрмитово многообразие 5, 1020
- преобразование 4, 1074
- пространство 5, 1021
- - векторное 5, 1019
- -, детерминант 5, 1022
- - линейное 3, 352
- - симплектическое 4, 714
Эрмитово симметрическое пространство 5, 1022
- симметричное ядро 5, 660
- скалярное произведение 5, 1019, 1021
- сопряженная матрица 3, 615; 5, 81, 1019
Эрмитово ядро 2, 591, 597; 5, 1023
Эрмитово-симметрическая матрица 5, 1019
Эталонов метод 4, 181
Этальная p-делимая группа 2, 82
- когомологическая последовательность 2, 926
Этальная топология 5, 1023
Этальные когомологии 5, 1024
Этальный морфизм 5, 1025
Эффект Доплера 2, 373
- дробовой 2, 389
- насыщения 4, 611
- последействия 4, 388
Эффективная оценка 3, 1013; 4, 867, 5, 1025
Эффективно непополнимая теория 4, 427
Эффективное ω-правило 2, 1040
Эффективности критерий 3, 863
Эффективность асимптотическая критерия 5, 1025
- в математической статистике 3, 1031
- статистической оценки 4, 174
Эффективность статистической процедуры 5, 1027
- языка 5, 640
Эффективный дивизор 1, 144; 2, 131
Эффективный критерий 5, 1028
- функционал 2, 1052

Ю

Юла процесс 4, 1051
Юнга диаграмма 5, 1027
- неравенство 2, 513, 4, 76, 5, 82
Юнга признак 5, 1027
Юнга симметризатор 5, 1027
Юнга таблица 5, 1027
Юнга теорема в геометрии 5, 1028
- - о тригонометрических рядах 2, 715

Я

Явная формула Штермера 2, 293
Явный метод 2, 292
Ядерная C^*-алгебра 5, 1029
Ядерная билинейная форма 5, 1029
Ядерная конгруэнция 5, 1030
Ядерная норма 5, 1031
Ядерная пара 5, 1032
Ядерное отображение 5, 1037
- представление 5, 1031
- - оператора 5, 1037
Ядерное пространство 5, 1033—1037
Ядерный идеал 2, 483
Ядерный оператор 3, 373; 5, 116, 1037—1041
- пучок 3, 165
- след оператора 5, 1040
Ядра взаимные 1, 692
Ядро Абеля 1, 26
- анизотропное 1, 290; 2, 778
- бесселево 1, 458
-, билинейный ряд 2, 596
Ядро в теории игр 5, 1041
- Валле Пуссена 1, 573, 575
- векторного расслоения 1, 646
- взаимное 5, 653
- Вольтерра 1, 754; 2, 591
- вырожденное 1, 811
- Гильберта 1, 969, 975
- гомоморфизма 2, 962; 3, 1073; 4, 372
- действия группы 4, 382
- дефинитное 2, 101
- Джексона 2, 110
- Дирихле 2, 193; 5, 1043
- игры 2, 472
Ядро интегрального оператора 2, 604; 5, 1042
- - уравнения 2, 590
- - - Абеля 1, 26
- итерированное 2, 691
- Карлемана 2, 727
Ядро комплексной последовательности 5, 1042
- Коши 1, 263, 2, 586; 3, 51, 65
- Лапласа — Фурье 2, 586
- левое 3, 460
Ядро линейного оператора 3, 370; 5, 1043
- логарифмическое 3, 410
Ядро лупы 3, 460; 5, 1043
- Мартина 3, 530
- Меллина 2, 586
Ядро метода суммирования 5, 1043
Ядро множества 1, 567; 5, 1044
Ядро морфизма 5, 1044
- неотрицательно определенное 2, 101
- неположительно определенное 2, 101
- непрерывное 2, 605
- определенное 2, 101
- осцилляционное 4, 139
- открытое 4, 143
- повторное 2, 691
- положительно определенное 4, 431
Ядро полугруппы 3, 692; 5, 1044
- полярное 2, 605
- последовательности областей 2, 720, 721
- правое 3, 460
- преобразования свертки 4, 1077
- Пуассона 4, 755, 756; 5, 1043
- размерное 3, 150
- разрешающее 4, 950; 5, 653
- симметричное 2, 591, 595
- A-системы 4, 1194
- скрещенного гомоморфизма 4, 1205
- со слабой особенностью 2, 605
- соответствия 5, 78
- сопряженное 5, 1044
- среднее 3, 460
- схоластическое 4, 273
- типа потенциала 2, 605
- топологического пространства 1, 737
- уравнения Вольтерра 1, 752
- Фейера 5, 600, 1043
- Фредгольма 2, 604; 5, 660, 1039
- Шварца 5, 886, 889
- Эйлера 2, 586
- экономики 3, 589
- эрмитово 2, 591, 597; 5, 1023
L_2-ядро 2, 605, 5, 660
Ядровая конъюнкция 1, 560
Язык автоматный 1, 1087
- алгоритмический 1, 222
- бесконтекстный 1, 1087
- в алфавите 5, 643
- линейный 1, 1091
- логико-математический 4, 578
- машинно-ориентированный 1, 223
- машинно-ориентируемый 3, 629
- машинный 1, 223
-, многообразие 5, 644
- многосортный 5, 637
-, модель 3, 769
-, - анализирующая 1, 247
-, - аналитическая 1, 247
- над данными символами и константами 1, 125
- объектный 4, 1185
- односортный 5, 637
- определяемый грамматикой 1, 1091
- порождаемый грамматикой 1, 1092
- предметный 4, 581, 1185
- проблемно-ориентированный 1, 223; 4, 641
- программирования 4, 654
- - неалгоритмический 1, 223
- - формальный 1, 222
- разветвленный 1, 784
- семантический 3, 567
- сети Петри 4, 281
- синтаксический 4, 1185
- 1-й ступени 1, 157
- формализованный 5, 636
- формальный 5, 643
Якоби вариационный принцип стационарного действия 1, 602
- интеграл 5, 432
Якоби матрица 5, 1044
Якоби метод 1, 766; 5, 1045
Якоби многообразие 5, 1046
Якоби многочлены 2, 869; 5, 1048
- нормальная форма эллиптического интеграла 5, 989
- определитель 5, 1058
Якоби поле 5, 1049
Якоби преобразование 5, 1049
Якоби принцип 5, 1049
Якоби проблема обращения 5, 1050
Якоби символ 5, 1051
Якоби скобки 5, 1052
- теорема в вариационном исчислении 1, 858
- - о дивизорах 5, 1047
- - о периодах 4, 268
- - об обращении 5, 1047
- тождество 3, 263; 5, 768, 1052
Якоби уравнение 5, 1052
- форма уравнения Ламе 3, 189
- формула 3, 396; 5, 1045
Якоби эллиптические функции 5, 1054—1058
Якоби — Ангера формулы для цилиндрических функций 5, 821
Якобиан 5, 1046, 1058
- обобщенный 5, 1047
- промежуточный 4, 697
Якобиев идеал 4, 119
- пучок 5, 984
Якобиевый критерий для схем 1, 1021
Янга — Миллса поле 5, 1058—1060
Янко группа 5, 149
Янова схема 1, 230; 4, 652
Японское кольцо 1, 939
Ячейка 4, 830; 5, 1060
«Ящиков» принцип Дирихле 2, 182

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОШИБКИ И ОПЕЧАТКИ

Том 1

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
27	5 сн.	^bN	B_N
31	21 сн	$\dots\ \rho^k,$	$\dots\ \rho^k=$
31	20 сн.	$\rho^k= \dots$	$= \dots$
31	10 сн.	не по касательному	по некасательному
34	32 св.	(см ниже — п 3) множества относительно меры μ,	множества относительно меры μ (см. ниже — п. 4),
98	3 св.	числа),	числа,
98	4—5 св.	системы.	системы).
191	26 сн.	для однородных	для неоднородных
277	5 сн.	$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\sum_{n=0}^{\infty}$
304	37 св.	$L^p\ (0 < p < \infty)$	$L^p\ (1 < p < \infty)$
304	24 сн.	замкнутое множество	замкнутое выпуклое множество
305	5 сн.	F_h	F
307	19 св.	D_p	D_F
308	35 сн.	оператор на	оператор
308	33 сн.	произвольных	на произвольных
308	16 сн.	D_{hu}	D_{hU}
309	15 сн.	$h < h_0$	$0 < h$
310	12 сн.	разбиения μ	разбиения ξ_n
445	21 сн.	на h	на K

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
445	19 сн.	$\prod_{k=N}^{n}$	$\prod_{k=1}^{n}$
514	12 сн.	$n_1,\ n_2$	$N_1,\ N_2$
515	4 св.	g_i	G_i
518	5 сн.	объекту	объему
519	8 св.	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{Z}$
519	10 св.	u	U
519	12 сн.	$n(z)=n_0e^{-\frac{mgz}{kT}}$	$n(h)=n_0e^{-\frac{mgh}{kT}}$
519	9 сн.	$z=0$	$h=0$
520	19 св.	h	h^3
541	25 св.	$\Omega^{\delta}\ \ldots=\pi_{i+\delta}$	$\Omega^{8}\ldots=\pi_{i+8}$
592	16—17 сн.	непериодической задачей	периодической задачей
635	28 св.	$[a,\ b]$	$\lvert[a,\ b]\rvert$
694	31 св.	$\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}+f(H)=0$	$\frac{\partial H}{\partial t}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}+f(H)$
740	21 сн.	1-го и 2-го рода.	2-го и 1-го рода.
766	25 сн.	Λ	A_k
766	2 сн.	меньше	не меньше
797	13 сн.	sup	inf
902	1 сн.	$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$	$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$
907	12—13 сн.	упомянутому	введенному в [4], [5]
912	20 сн.	$(((p\vee q)\&r)\vee\ldots$	$(((p\vee q)\ \&\ \neg r)\vee\ldots$
1115	33 св.	$Q(K_p)=\ \ldots$	$\theta(K_p)=\ \ldots$
1133	2 сн.	$(V,\ \sigma)$	$(V,\ \sigma]$

Том 2

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
13	12 сн.	сходится	абсолютно сходится
58	8—10 св.	... копредставление Виртингера, т. е. копредставление ... имеет вид $x_i=\omega_{i,j}x_j\omega_{i,j}^{-1}$, в ...	... копредставление Виртингера (т. е. копредставление ... имеет вид $x_i=\omega_{i,j}x_j\omega_{i,j}^{-1}$), в ...
58	13 св.	Известно, что этот класс шире класса групп k-мерных узлов в S^{k+2}, $k\geqslant 3$.	Известно, что этот класс шире класса групп одномерных узлов в S^3, но уже класса групп k-мерных узлов в S^{k+2}, $k\geqslant 3$.
113	19 сн.	$\sigma>0$	$\sigma<0$
113	18 сн.	$s=2\nu$	$s=-2\nu$
113	16 сн.	$0<s<1$	$\sigma>1$
154	4 св.	*И. А. Молотков.*	*Л. А. Молотков.*
421	8 св.	и E	и $\overline{E}$
432	4 сн.	, в частности,	Позднее
451	3 св.	$i\neq j$	$j\neq i$
462	4 св.	Знаки индивидуальных операций	Знаки индивидуальных объектов
		$\frac{\ldots(x-x_{n-1})\times}{\ldots(x_k-x_{n-1})\times}$	$\frac{\ldots(x-x_{k-1})\times}{\ldots(x_k-x_{k-1})\times}$
618	27 св.	$\frac{\times(x-x_{n+1})\ldots}{\times(x_k-x_{n+1})\ldots}$	$\frac{\times(x-x_{k+1})\ldots}{\times(x_k-x_{k+1})\ldots}$
637	15 сн.	1904	1907
719	32 св.	μ_j	λ_j
741	4 св.	$d\sigma^2\lambda_2^2(x,\ y)$	$d\sigma^2=\lambda_2^2(x,\ y)$
741	18 сн.	f_v	f
794	11 св.	выше	не выше
795	23—24 св.	Другой подход основан на минимизации нормы функционала погрешности $R(f)$ построению К. ф.	Другой подход к построению К. ф. основан на минимизации нормы функционала погрешности $R(f)$.
950	25 сн.	Для системы (2)	Для системы $x'=f(t,\ x)$
1008	1 сн.	$+i\frac{yx'-xy'}{x^2+y^2}$	$+i\frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}$
1030	29 св.	15	13

Том 3

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
59	18 св.	$\limsup\limits_{k\to\infty}$	$\lim\limits_{k\to\infty}$
75	6 сн.	$dt\leqslant 2\ [\ldots]$	$dt<2\ [\ldots]$
167	10 сн.	$\ldots(x^{\alpha+ne-x})$	$\ldots(x^{\alpha+n_e-x})$
395	6 сн.	$\alpha_1=\sum_{n=1}^{\infty}2^n$	$\alpha_1=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n!}$
479	6 св.	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{z_1}^{(k_1)}(0)\ldots}{k_1!\ldots}$	$\sum_{\lvert k\rvert=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0,\ldots,0)}{k_1!\ldots k_m!}$
479	8 св.	$k=(k_1,k_2,\ldots,k_m),-k_i-$	$k=(k_1,\ldots k_m)$, $\lvert k\rvert=k_1+\ldots+k_m$, k_i-
726	24 св.	$=z^2+\ldots$	$=z^q+\ldots$
838	22 св.	сложной	простой
867	1 сн.	$(X_n,\ P_{nm}\subset A$	$(X_n,\ P_{nm})\in A$
868	5 сн.	t_iV_i:	t_i:
873	36 св.	...для...	$\ldots=0$ для
1044	11 сн.	$f(\alpha_1)$ и $g(\alpha_1)$	$f_1(\alpha_1)$ и $g_1(\alpha_1)$
1046	25 св.	$g_{12}+g_{24}=f_{56}$	$g_{12}+g_{24}=g_{56}$
1113	13 св.	$L_{k_1,\ldots,k_{nh}}\varphi(h)$	$L_{k_1\ldots k_n};\ h:\varphi(h)$
1132	22 сн.	однозначной	также строго монотонной

Том 4

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
10	15 св.	$a_{k+1,\ k}$	$a_{k-1,\ k}$
11	16 сн.	$\lvert a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k\rvert$	$(a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k)$
211	32 св.	$[\lambda,$	$[\lambda_0,$
212	21 св.	нелинейных	нелинейных функциональных
296	7 сн.	(B), (7)	(B), (7_1)
297	12 сн.	$\left(\frac{2}{3}\partial_{ij}\partial_{ij}\right)$	$\left(\frac{r}{3}\partial_{ij}\partial_{ij}\right)^{1/2}$
299	формула (14)	$\frac{2\sigma_s}{3V_u}$	$\frac{2\sigma_s}{3v_u}$
300	31 сн.	$=\rho U_{i,\ tt}$	$=\rho u_{i,\ tt}$
354	16 св.	$v=v_0$	$\overline{v}=v_0$
496	1 сн.	$a_{k,\ k-1},\ a_{k,\ k-1}$	$a_{k,\ k-1},\ a_{k,\ k}-1$
612	12 св.	$\leqslant 1$	<1
619	14 сн.	$\lVert f\rVert$	$\lVert f^r\rVert$
685	9 св.	F	Y
685	12 св.	F	Y
1113	8 сн.	счетной базой	счетным всюду плотным множеством.
1210	26 св.	n-мерных	p-мерных
1210	10—11 сн.	расслоению	распределению
1211	1 св.	мерсий, для к-рых заданное поле касается,	мерсий φ_α, для к-рых заданное поле касается $\varphi_\alpha^{-1}(c)$,
1211	14—15 св.	Особое положение, где	, где
1211	32 сн.	и	или
1212	27 св.	$B\Gamma_p^r$	$B\Gamma_q^r$
1212	27—28 св.	для $n=3$ (	(для $n=3$